

ریشه های یک مساله المپیاد جهانی، سید عبادالله محمودیان و محمد مهدیان - رشد آموزش ریاضی سال دوازدهم شماره ۵۱ بهار ۱۳۷۷ ریاضی سال ۱۹۹۷

ریشه های یک مسأله ی المپیاد جهانی ریاضی سال ۱۹۹۷

سید عبادالله محمودیان و محمد مهدیان *

۶ شهریور ۱۳۸۶

چکیده

در آخرین المپیاد جهانی ریاضی یک مسأله پیشنهادی از ایران (مسأله ی ۴ در IMO97) داده شده بود که از نوع ترکیبیاتی است. در این مقاله، ما ریشه های این مسأله و ارتباط آن را با سایر مسائل پژوهشی در «مجموعه های تعیین کننده» در رنگ آمیزی گراف ها و «مجموعه های بحرانی» در مربع های لاتین بررسی می کنیم. همچنین چند مسأله ی حل نشده مطرح خواهیم کرد.

۱ مسأله

مسأله ی چهارم المپیاد جهانی ریاضی امسال (IMO97) به صورت زیر است [یک]:

مسأله . یک ماتریس $n \times n$ که درایه های آن از مجموعه ی $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ انتخاب شده اند، ماتریس نقره ای نامند اگر برای $i = 1, \dots, n$ ، سطر i ام و ستون i ام روی هم اعضای S را شامل شوند. نشان دهید:

(الف) هیچ ماتریس نقره ای برای $n = 1997$ وجود ندارد.

* با تشکر از باشگاه دانش پژوهان جوان به خاطر حمایت مالی از قسمتی از این پژوهش.

(ب) ماتریس‌های نقره‌ای به ازای تعداد نامتناهی از n وجود دارد.

این مسأله جزو مسائل پیشنهادی ایران بود که در المپیاد جهانی ریاضی برای مسابقه برگزیده شد. در این جا درباره‌ی ریشه‌های این مسأله و ارتباط آن با بعضی از مفاهیم ترکیبیات و نظریه‌ی گراف بحث خواهیم کرد و در انتها به تشریح چند مسأله‌ی حل نشده خواهیم پرداخت. ولی ابتدا راه حل طراحان این مسأله را می‌بینیم:

حل. (الف) فرض کنید یک ماتریس نقره‌ای A از مرتبه‌ی n ($n > 1$) وجود دارد. عنصر x را یک عنصر ثابت بگیرید که روی قطر A نیامده است. (چنین عنصری حتماً وجود دارد، چون تنها n درایه روی قطر A موجود است، ولی تعداد کل عناصر مجموعاً $2n - 1$ است.) برای هر i ، این x دقیقاً یک بار در $R_i \cup C_i$ ، اجتماع سطر i ام و ستون i ام، آمده است. در حقیقت اگر x در درایه (i, j) از A آمده باشد، در این صورت x دیگری در سطر i ام و یا در ستون j ام A وجود نخواهد داشت. بنابراین برای هر بار ظاهر شدن عنصر x در ماتریس A ، دو درایه قطری (i, i) و (j, j) متناظر با آن وجود دارند. علاوه بر این، هر درایه قطری (i, i) با یک ظاهر شدن x متناظر است. بنابراین درایه‌های روی قطر A به مجموعه‌های ۲ عضوی (که هر مجموعه متناظر با یک بار ظاهر شدن x در A است) افراز می‌شوند. پس n یک عدد زوج است. ولی ۱۹۹۷ یک عدد فرد است.

(ب) برای $n = 2$ ماتریس نقره‌ای $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ وجود دارد.

ساختار زیر نشان می‌دهد که اگر یک ماتریس نقره‌ای $n \times n$ مانند A وجود داشته باشد، می‌توانیم یک ماتریس $2n \times 2n$ به صورت زیر بسازیم:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & A \end{array} \right],$$

که در این جا B یک ماتریس $n \times n$ است که با اضافه کردن عدد $2n$ به هریک از درایه‌های A به دست آمده است و C نیز ماتریسی است که با جایگزین کردن عدد $2n$ به جای همه‌ی درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس B دست آمده است. $\square$

همان‌طور که در اثبات فوق دیدیم، هیچ ماتریس نقره‌ای از مرتبه‌ی فرد بزرگتر از ۱ وجود ندارد. در بخش بعد خواهیم دید که برای هر عدد زوج n ، یک ماتریس نقره‌ای از مرتبه‌ی n وجود دارد.

۲ مجموعه‌های تعیین کننده در رنگ آمیزی گراف‌ها

برای تعریف‌های مربوط به گراف که در این مقاله نیامده است، می‌توانید به مرجع [۱] مراجعه کنید. یک k -رنگ آمیزی از یک گراف G عبارت است از نسبت دادن k رنگ متفاوت به رئوس آن به طوری که هیچ دو رأس مجاور رنگ‌های یکسانی نگرفته باشند. عدد رنگ آمیزی (رأسی) گراف G که با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود، کوچک‌ترین عدد k است که برای آن G یک k -رنگ آمیزی داشته باشد. در یک گراف داده شده G ، یک مجموعه‌ی S از رئوس با رنگ‌های متناظر با آنها، یک مجموعه‌ی تعیین کننده‌ی k -رنگ آمیزی خوانده می‌شود، اگر تنها به یک صورت بتوان رنگ‌های رئوس S را به یک k -رنگ آمیزی همه‌ی رئوس G گسترش داد. یک مجموعه‌ی تعیین کننده با کم‌ترین تعداد عناصر، یک مجموعه‌ی تعیین کننده‌ی کمینه، و تعداد عناصر آن عدد تعیین کننده‌ی G نامیده می‌شود و با $d(G, k)$ نشان داده می‌شود.

برای مثال در مورد یک گراف دوبخشی همبند G ، داریم $d(G, \chi(G)) = 1$ و برای گراف پیترسون P ، داریم $d(P, 3) = 4$. نتایج متعددی در مورد عدد تعیین کننده‌ی گراف‌ها در مراجع [۵]، [۶]، [۷]، [۸]، و [۹] وجود دارد.

مفهوم مجموعه‌های تعیین کننده قبلاً در مورد طرح‌های بلوکی مورد مطالعه قرار گرفته است (مرجع [۱۱] را ببینید). و همچنین تحت عنوان «مجموعه‌ی بحرانی» برای مربع‌های لاتین مورد بررسی قرار گرفته است. یک مربع لاتین یک ماتریس $n \times n$ از عددهای $1, 2, \dots, n$ است به طوری که هر یک از این عددها دقیقاً یک بار در هر یک از سطرها و در هر یک از ستون‌های ماتریس آمده باشد. یک مجموعه‌ی بحرانی در یک آرایه‌ی $n \times n$ ، یک مجموعه‌ی S از درایه‌ها است که با داشتن آنها فقط به یک صورت بتوان بقیه‌ی درایه‌های ماتریس را پر کرد به گونه‌ای که ماتریس حاصل یک مربع لاتین شود. مقاله‌هایی در مورد مجموعه‌های بحرانی در مربع‌های لاتین وجود دارد. برای مثال می‌توانید [۳] و [۱۰] را ببینید. یکی از نویسندگان این مقاله، برای اولین بار مفهوم مجموعه‌های تعیین کننده را برای یک $\chi(G)$ -رنگ آمیزی از گراف G مطرح کرد. پریتکین و مورل (مرجع [۸]) این مفهوم را برای k -رنگ آمیزی گراف‌ها برای $k \geq \chi(G)$ تعمیم دادند. کار ایشان همان طوری که در زیر خواهیم دید باعث ایجاد مسائل بسیار جالبی شده و راه را برای پژوهش بیشتر درباره‌ی این موضوع گشود. مفهوم مجموعه‌های بحرانی در مربع‌های لاتین، و در نتیجه مجموعه‌های تعیین کننده در رنگ آمیزی گراف‌ها دارای کاربرد

در مبحث رمزنگاری است. به مرجع رجوع [۴] شود.

حاصل ضرب دکارتی دو گراف G و H که با علامت $G \times H$ نشان داده می شود، به صورت زیر تعریف می شود: مجموعه ی رئوس آن مجموعه ی $V(G) \times V(H)$ است و دو رأس (u_1, v_1) و (u_2, v_2) به هم متصلند اگر و فقط اگر یا $u_1 = u_2$ و v_1 و v_2 در H به هم متصل باشند و یا $v_1 = v_2$ و u_1 و u_2 در G به هم متصل باشند. به عبارت دیگر $G \times H$ گرافی است که شامل $|V(H)|$ کپی «افقی» از G و $|V(G)|$ کپی «عمودی» از H است. کپی «افقی» نام و کپی «عمودی» نام دقیقاً در یک رأس با هم مشترکند که این رأس را (i, j) می نامیم.

حاصل ضرب دکارتی $K_n \times K_n$ برای ما جالب توجه است. یک رنگ آمیزی این گراف با n رنگ، چیزی نیست مگر یک مربع لاتین. بنابراین مسأله ی پیدا کردن کوچک ترین مجموعه ی بحرانی در یک مربع لاتین $n \times n$ همان مسأله ی تعیین $d(K_n \times K_n, n)$ است. به سادگی دیده می شود که برای هر k $2n - 1 < k$ داریم: $d(K_n \times K_n, k) = n^2$. ولی چنانچه در قضیه ی زیر دیده می شود، تعیین $d(K_n \times K_n, 2n - 1)$ مسأله ی ساده ی نیست.

گزاره ۱. داریم $d(K_n \times K_n, 2n - 1) \geq n^2 - n$.

اثبات. فرض کنید که S یک مجموعه ی تعیین کننده در $K_n \times K_n$ باشد. نشان می دهیم که $V(K_n \times K_n) \setminus S$ یک مجموعه ی مستقل از رئوس است. فرض کنید که این طور نباشد و u و v دو رأس در $V(K_n \times K_n) \setminus S$ باشند که به هم متصل اند. ادعا می کنیم که حتماً اگر رنگ همه ی رئوس به جز u و v معلوم باشد، نمی توانیم رنگ u و v را به طور یکتا مشخص کنیم. برای این موضوع، کافی است به این نکته توجه کنیم که در این صورت، برای هر کدام از دو رأس u و v لااقل دو رنگ باقی مانده است که در همسایگی آن ظاهر نشده است و بنابراین هر کدام از این رئوس می تواند با هر یک از این دو رنگ، رنگ آمیزی شود. حال اگر u را با هر کدام از این دو رنگ، رنگ کنیم، برای v هم لااقل یک امکان باقی می ماند. پس حداقل دو روش مختلف برای رنگ آمیزی u و v داریم. این تناقض نشان می دهد که $V(K_n \times K_n) \setminus S$ یک مجموعه ی مستقل از رئوس است. ولی می دانیم که اندازه ی هر مجموعه ی مستقل در $K_n \times K_n$ حداکثر برابر با n است. بنابراین $|S| \geq n^2 - n$. $\square$

در این جا طبیعی است که بپرسیم: برای چه مقادیری از n ، $d(K_n \times K_n, 2n-1) = n^2 - n$ ؟ در زیر نشان می‌دهیم که تنها در صورتی که n یک عدد زوج باشد این تساوی برقرار می‌شود.

قضیه ۱. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. در این صورت یک ماتریس نقره‌ای از مرتبه n وجود دارد اگر و فقط اگر $d(K_n \times K_n, 2n-1) = n^2 - n$.

اثبات. اول فرض کنید که یک ماتریس نقره‌ای $L = [L_{ij}]$ از مرتبه n وجود دارد. در این صورت رأس (i, j) در $K_n \times K_n$ را با رنگ L_{ij} رنگ کنید. حال S را مجموعه‌ی همه‌ی رؤس $K_n \times K_n$ به استثنای رؤس روی قطر می‌گیریم. با توجه به تعریف ماتریس نقره‌ای، رؤس مجموعه‌ی S به همراه رنگی که به آن‌ها نسبت داده شده است، تشکیل یک مجموعه‌ی تعیین‌کننده از اندازه‌ی $n^2 - n$ برای $K_n \times K_n$ می‌دهد و بنا به گزاره‌ی ۱ یک مجموعه تعیین‌کننده می‌نیم است.

اکنون فرض کنید S یک مجموعه‌ی تعیین‌کننده از اندازه‌ی $n^2 - n$ برای $K_n \times K_n$ باشد. با توجه به اثبات گزاره‌ی ۱ مجموعه‌ی رؤوسی که در S نیستند، یک مجموعه‌ی مستقل از اندازه‌ی n در $K_n \times K_n$ هستند. با جابه‌جا کردن کپی‌های افقی K_n در $K_n \times K_n$ ، می‌توانیم مجموعه‌ی تعیین‌کننده‌ی دیگری از اندازه‌ی $n^2 - n$ برای $K_n \times K_n$ بسازیم که شامل همه‌ی رؤس $K_n \times K_n$ به جز رؤس قطری باشد. به سادگی می‌توان دید ماتریسی که با رنگ آمیزی مربوط به این مجموعه‌ی تعیین‌کننده متناظر است، یک ماتریس نقره‌ای است. $\square$

قضیه‌ی مشهوری است که برای هر عدد زوج n می‌توان یال‌های گراف K_n را با $n-1$ رنگ رنگ آمیزی کرد. چنین رنگ آمیزی را می‌توان از روی یک جدول زمان‌بندی برای یک تورنمنت با n تیم به دست آورد. راه حل این مسأله در اغلب کتاب‌های ترکیبیات به عنوان مثال در مرجع [۲] وجود دارد. در لم زیر، یک روش ساخت برای چنین رنگ آمیزی‌یی ارائه می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که اگر $n \neq 4$ باشد، در این صورت یک ترانسورسال^۱ در رنگ آمیزی ساخته شده وجود دارد. منظور از یک ترانسورسال، یک تطابق کامل (مجموعه‌ای فراگیر از یال‌های مستقل) است که یال‌های آن با رنگ‌های متفاوت رنگ آمیزی شده باشند. این لم در اثبات قضیه‌ی ۳ و قضیه‌ی ۲ کاربرد دارد.

^۱Transversal

لم ۱. فرض کنید n یک عدد زوج است. در این صورت $\chi'(K_n) = n - 1$. علاوه بر این اگر $n \neq 4$ ، آنگاه یک $(n - 1)$ -رنگ آمیزی یالی از K_n وجود دارد که دارای یک ترانسورسال است.

اثبات. رأس‌های K_n را با عناصر مجموعه‌ی $\{\infty, 0, 1, \dots, n - 2\}$ شماره‌گذاری می‌کنیم. یک رنگ آمیزی یالی از K_n با مجموعه‌ی رنگ‌های $\{0, 1, 2, \dots, n - 2\}$ به این صورت معرفی می‌کنیم: یال‌های با رنگ i ، $i = 0, 1, 2, \dots, n - 2$ ؛ عبارت‌اند از: $(\text{سنج } n - 1) \{ \{\infty, i\}, \{i - 1, i + 1\}, \{i - 2, i + 2\}, \dots, \{i - \frac{n}{2} + 1, i + \frac{n}{2} - 1\} \}$. حال نشان می‌دهیم که این رنگ آمیزی یک ترانسورسال دارد. اگر (سنج ۴) $n \equiv 2$ ، آنگاه مجموعه‌ی یال‌های $\{ \{\infty, 0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{n - 3, n - 2\} \}$ تشکیل یک ترانسورسال می‌دهند، اگر $n = 8$ ، آنگاه مجموعه‌ی $\{ \{\infty, 0\}, \{1, 3\}, \{2, 6\}, \{4, 5\} \}$ یک ترانسورسال است، و در نهایت اگر (سنج ۴) $n \equiv 0$ و $n > 8$ ، آنگاه مجموعه‌ی یال‌های

$$\{ \{\infty, 0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{n - 3, n - 2\} \} \setminus \{ \{ \frac{n}{4} - 1, \frac{n}{4} \}, \{ \frac{n}{4} + 1, \frac{n}{4} + 2 \}, \{ \frac{n}{4} + 3, \frac{n}{4} + 4 \} \} \cup \{ \{ \frac{n}{4} - 1, \frac{n}{4} + 1 \}, \{ \frac{n}{4}, \frac{n}{4} + 4 \}, \{ \frac{n}{4} + 2, \frac{n}{4} + 3 \} \}$$

□ یک ترانسورسال است.

قضیه ۲. اگر n یک عدد زوج باشد، در این صورت $d(K_n \times K_n, 2n - 1) = n^2 - n$.

اثبات. فرض کنید c یک $(n - 1)$ -رنگ آمیزی یالی از K_n باشد و رنگ یال $\{i, j\}$ در این رنگ آمیزی را با $c(i, j)$ نشان دهید. با استفاده از این رنگ آمیزی می‌توان یک ماتریس نقره‌ای $L = [L_{ij}]$ به صورت زیر ساخت:

$$L_{ij} = \begin{cases} c(i, j) & i < j \\ c(i, j) + n - 1 & i > j \\ 2n - 1 & i = j. \end{cases}$$

به سادگی می توان تحقیق کرد که L یک ماتریس نقره ای است. $\square$

قضیه ۳. اگر n یک عدد فرد بزرگتر از یک باشد، $d(K_n \times K_n, 2n-1) = n^2 - n + 1$.

اثبات. برای $n = 5$ یک رنگ آمیزی خاص $K_5 \times K_5$ را می توان از ماتریس زیر به دست آورد:

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 9 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 7 & 9 & 8 \\ 7 & 1 & 8 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

و این رنگ آمیزی نشان می دهد که $d(K_5 \times K_5, 9) = 21$. (رنگ رأس های $(1, 1)$ ، $(2, 2)$ ، $(3, 3)$ و $(4, 4)$ را می توان، در صورتی که رنگ بقیه ی رأس ها داده شده باشد، به صورت یکتا تعیین کرد.) حالا فرض کنید که $n \neq 5$ یک عدد فرد باشد. با استفاده از لم ۱ یک $(n-2)$ -رنگ آمیزی یالی c برای K_{n-1} وجود دارد که یک ترانسورسال هم داشته باشد. رأس های K_{n-1} را با عددهای $\{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ طوری شماره گذاری می کنیم که یال های $\{1, 2\}$ ، $\{3, 4\}$ ، $\dots$ و $\{n-2, n-1\}$ تشکیل یک ترانسورسال بدهند و برای هر k که $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ ، داشته باشیم $c(2k-1, 2k) = k$. حال یک ماتریس $n \times n$ به نام L را به صورت زیر می سازیم: برای هر k که $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ ، قرار می دهیم $L_{n-2k+1} = k+n-2$ ، $L_{2k-1, n} = k$ ، $L_{2k, 2k-1} = 2n-2$ ، $L_{2k-1, 2k} = 2n-3$ و $L_{2k, n} = k+n-2$. برای بقیه ی درایه ها قرار می دهیم $L_{ij} = c(i, j)$ و همچنین برای $i < j$ و $i > j$ در صورتی که $L_{ij} = c(i, j) + n-2$. به سادگی می توان تحقیق کرد که برای هر $1 \leq i \leq n$ قرار می دهیم $L_{ii} = 2n-1$. شامل همه ی عناصر مجموعه ی $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$ می شود. بنابراین اگر رأس های $K_n \times K_n$ را طبق ماتریس L رنگ کنیم، در این صورت یک رنگ آمیزی رأسی خاص از $K_n \times K_n$ خواهیم داشت که مجموعه ی همه ی رأس های $K_n \times K_n$ به جز رأس های مجموعه ی $\{(i, i) | 1 \leq i < n\}$ یک مجموعه ی تعیین کننده از اندازه ی $n^2 - n + 1$ برای $K_n \times K_n$ خواهد بود. $\square$

۳ مسایلی دیگر

در این بخش چند مسأله باز که با مفهوم مجموعه‌های تعیین کننده ارتباط دارد می‌آوریم. در بخش قبلی مقدار $d(K_n \times K_n, 2n-1)$ را به طور دقیق پیدا کردیم. مسأله زیر یک سؤال طبیعی است:

مسأله ۱. مقدار $d(K_n \times K_n, k)$ را برای $1 < k < 2n-1$ پیدا کنید.

در حالت $k = n$ به نظر می‌رسد که مسأله‌ی دشواری است. حدس زیر به طور مستقل بیان شده است:

$$\text{حدس. } d(K_n \times K_n, n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad ([1] \text{ و } [5])$$

ع. محمودیان مبلغ ۱,۰۰۰,۰۰۰ ریال برای پاسخ دهنده این حدس جایزه تعیین کرده است.

مانند اثبات گزاره‌ی ۱ می‌توان نشان داد که: هرگاه S یک مجموعه تعیین کننده $(r+1)$ -رنگ آمیزی برای یک گراف r -منتظم G باشد آنگاه $V(G) \setminus S$ مجموعه‌ای از رؤوس مستقل خواهد بود. بنابراین برای این نوع گراف‌ها داریم: $d(G, r+1) \geq |V(G)| - \alpha(G)$ که در آن جا $\alpha(G)$ عدد استقلال گراف G است. حال سؤال زیر را می‌کنیم:

مسأله ۲. دسته گراف‌های r -منتظم G را تعیین کنید که برای آنها عدد تعیین کننده می‌نیم $(r+1)$ -رنگ آمیزی برابر $|V(G)| - \alpha(G)$ است.

مراجع

[یک] چهار مسأله، نشر ریاضی: مجله ریاضی مرکز نشر دانشگاهی، ۸ شماره پیاپی: ۱۶ مهر ۱۳۷۶ صفحه ۵۴

- [1] J. A. BONDY AND U. S. R. MURTY, *Graph Theory with Applications*, American Elsevier Publishing Co., INC., New York, 1976.
- [2] P. J. CAMERON, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

- [3] J. COOPER, D. DONOVAN, AND J. SEBERRY, *Latin squares and critical sets of minimal size*, Australa. J. Combin., **4** (1991), 113–120.
- [4] J. COOPER, D. DONOVAN, AND J. SEBERRY, *Secret sharing schemes arising from latin squares*, Bull. Inst. Comb. Appl. **12** (1994), 33–43.
- [5] E. S. MAHMOODIAN, *Some problems in graph colorings*, in Proc. 26th Annual Iranian Math. Conference, S. Javadpour and M. Radjabalipour, eds., Kerman, Iran, Mar. 1995, Iranian Math. Soc., University of Kerman, 215–218.
- [6] E. S. MAHMOODIAN AND E. MENDELSON, *On defining numbers of vertex coloring of regular graphs*, (submitted).
- [7] E. S. MAHMOODIAN, R. NASERASR, AND M. ZAKER, *Defining sets of vertex coloring of graphs and latin rectangles*, Discrete Mathematics, **167/168** (1997) 451–460.
- [8] T. MORRILL AND D. PRITIKIN, *Defining sets and list-defining sets in Graphs*, (preprint).
- [9] R. NASERASR, E. S. MAHMOODIAN, M. MAHDIAN, AND F. HARARY, *Defining sets of vertex coloring of the cartesian product of a cycle with a complete graph*, Proceedings of Eighth International Conference on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications, Western Michigan University, Kalamazoo 1996 (to appear).
- [10] G. H. J. VAN REES AND J. A. BATE, *The size of the smallest strong critical set in a latin square*, Ars Combin., (submitted).
- [11] A. P. STREET, *Defining sets for block designs: An update*, in Combinatorics Advances, C. J. Colbourn and E. S. Mahmoodian, eds., Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1995, 307–320.