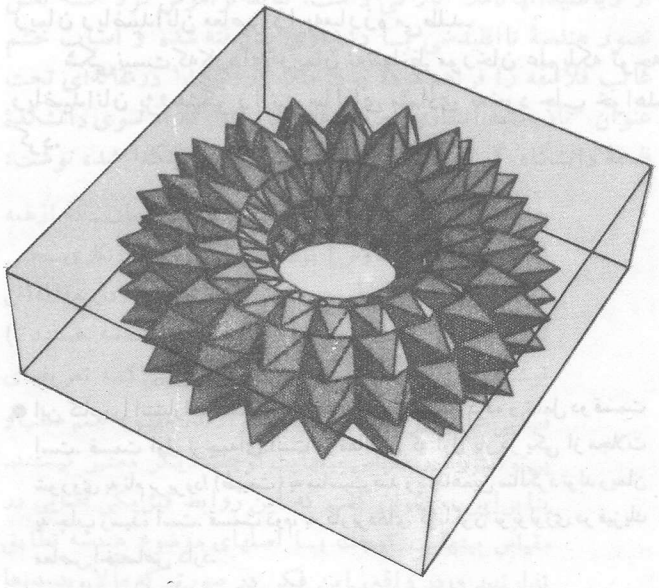
آزمایشگاه ریاضیات

یحیی تابش، سیدعبادالله محمودیان



در سالهای اخیر در برخی از تحقیقات ریاضی محض استفاده از کامپیوتر بیش از پیش به‌چشم می‌خورد. بعضی از ریاضیدانان در ابتدا با شگفتی و احتیاط با این پدیده مواجه می‌شوند وحتی آنرا پدیده‌ای انحرافی می‌پندارند، ولی هرقدر هم که محتاطانه با این پدیده برخورد کنیم واقعیت این است که به‌عصر ریاضیات تجربی قدم گذارده‌ایم. شاید یکی از برجسته‌ترین کاربردهای ریاضیات این قرن پیشرفت حسابگرهای الکترونیکی باشد، ولی اینك کامپیوتر خود به‌یاری ریاضیات برخاسته‌است.

ریاضیدانان کامپیوتر را به عنوان "وسیلهٔ آزمایش" به کار می‌گیرند تا ایده‌ها و حدسهای اولیهٔ خود را برای دست‌یافتن به‌حدسهای دقیقتر بیازمایند. درمواردی کامپیوتر درپروراندن اثبات به‌عنوان همکار ریاضیدان عمل می‌کند و در مواردی نیز مثالهای ناقضی به کمك کامپیوتر ساخته می‌شوند که ساختن آنها بدون استفاده ازکامپیوتر قابل تصور نیست. علاوه بر اینها به‌وسیلهٔ روشهای ساختاری باکمك کامپیوتر وجوه برخی "اشیای" ریاضی به‌ثبوت می‌رسد. زمینه‌های متنوعی از ریاضیات از جمله نظریهٔ اعداد، هندسهٔ جبری، دستگاههای دینامیکی، ریاضیات گسسته و ترکیبیات، توپولوژی، و آنالیز مختلط پهنهٔ فعالیتهای تجربی و آزمایشگاهی به کمك کامپیوتر شده‌اند.

کامپیوتر می‌تواند با انجام عملیات جبری، ترکیبیاتی، وتحلیلی نقشی در یك "آزمایش ریاضیاتی" به‌عهده گیرد. به‌عبارت دیگر سه‌گونه توانمندی کامپیوتر این امکان‌رافراهم کرده‌است: محاسبات عددی، محاسبات نمادین، وگرافیك کامپیوتری. روشهای عددی برای تقریب زدن مسائل پیوسته به‌کار می‌رود. عملیات نمادین برای کارهایی از قبیل مشتقگیری، انتگرالگیری، و محاسبات برداری و تانسوری مورد استفاده واقع می‌شود. ولی گرافیك کامپیوتری از اساسیترین تواناییهای کامپیوتر است که یاری‌دهندهٔ پژوهشگران ریاضی است. گرافیك کامپیوتری تجسم‌بخش ساختارهای پیچیده و مجردی‌است که امکان دست یافتن به"نمود" آنها به‌سهولت میسر نیست. هندسهٔ برخالی، مجموعه‌های ژولیا، ومقولاتی‌درنظریهٔ کیفی معادلات دیفرانسیل از جمله زمینه‌هایی است که به‌مدد گرافیك کامپیوتری رونق تازه‌ای یافته‌است.

در فعالیتهای پژوهشی، کامپیوتر به‌صورت ابزاری در دست پژوهشگر کارهای وقتگیر و توانفرسا را انجام می‌دهد و در نتیجه برای پژوهشگر فرصت کافی فراهم می‌شود تا به‌کارخلاقه بپردازد. با مثالی ساده وبسیارابتدایی، چگونگی این امررا نشان می‌دهیم. فرض کنید می‌خواهیم فرمولی برای تعداد اعداد فرد درهرسطراز مثلث خیام-پاسکال پیدا کنیم. با نوشتن چند سطر از این مثلث و

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱
۱ ۸ ۲۸ ۵۶ ۷۰ ۵۶ ۲۸ ۸ ۱
. . . . . .

شمردن اعداد فرد در هرسطر خواهیم داشت:

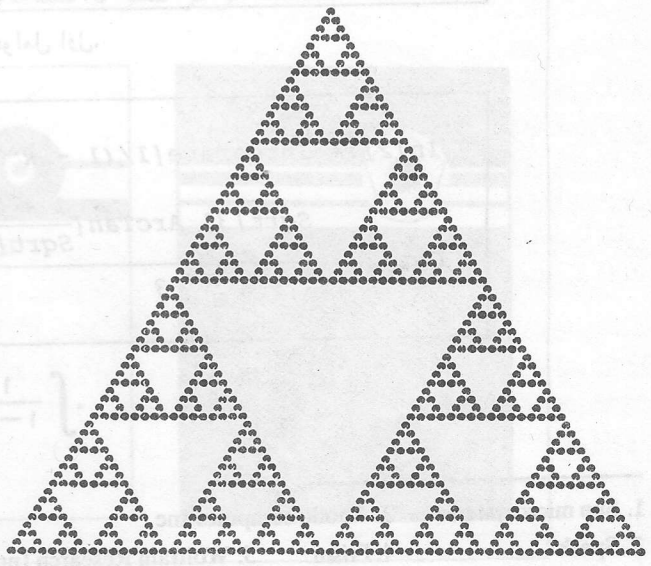
n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...
تعداد اعداد فرد درسطر nام	۱	۲	۲	۴	۲	۴	۴	۸	۲	...

با توجه به‌این‌اعداد، یك حدس مثلاً می‌تواند این باشدکه تعداد اعداد فرد درهرسطر همیشه توانی از عدد ۲ است. حتی با تأمل بیشتر می‌توان حدس زد که این عدد درسطر nام به‌صورت $2^{\gamma(n)}$ است که در آن $\gamma(n)$ تعداد رقمهای ۱ در بسط دودویی عدد n است:

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...
بسط دودویی	۰	۱	۱۰	۱۱	۱۰۰	۱۰۱	۱۱۰	۱۱۱	۱۰۰۰	...

حال اگر بخواهیم حدس‌فوق را اثبات کنیم، می‌توان بایك برنامهٔ کامپیوتری خروجی زیر را استخراج کردکه درآن ● علامت عدد فرد، و جای خالی نشانگرعدد زوج درهرسطرمثلث‌است. شکل‌زیر ۶۴ سطر اول را نشان می‌دهد.

توجه کنیدکه مثلاً "طرح" ۳۲ سطراول عیناً درطرفین ۳۲ سطر بعدی ظاهر می‌شود به‌طوری که بین آنها هیچ عددی بجز اعداد



زوج قرارندارد. حال با این مشاهدات و برداشتها می‌توان نشان دادکه: (الف) تکراری بودن این طرح در حالت‌کلی نیز برقرار است. (ب)حدس‌فوق‌که تعدادداعداد فرد درهرسطر $2^{\gamma(n)}$ می‌باشد درست‌است.

گذشته از اینکه‌کامپیوتریك‌ابزارآزمایش درپژوهشهای‌ریاضی است، درآموزش ریاضی نیز نقش "آزمایشگاهی" ویژه‌ای دارد. در آموزش، نرم‌افزارها و درس‌افزارهای کامپیوتری با توانایی خود در انجام محاسبات نمادین و گرافیك کامپیوتری ابزارهایی کمکی هستندکه به‌کمك آنها آموزش سریعتر و بهترانجام‌می‌شود. علاوه بـر آن در برخی موارد کامپیوتر نقش معلم و خودآمـوز زنده‌ای را عهده‌دار می‌شود.

هم‌اکنون کتابهای زیـادی در دروس مختلف ریاضی نوشته می‌شودکه درآنها آموزش‌ریاضی به‌کمك‌کامپیوترصورت می‌پذیرد. این کتابها بعضی‌اوقات نرم‌افزارهای ویژه‌ای را نیز به‌همراه دارند. تولید "درس‌افزارهـای ریاضی" شتاب روزافزونی دارد و این درس‌افزارها به‌طورفزاینده‌ای‌درزمینه‌هایی ازقبیل‌حساب‌دیفرانسیل وانتگرال، آنالیزعددی، معادلات دیفرانسیل، ریاضیات گسسته، جبر خطی، وحتی جبرمجرد و نظریهٔ اعداد به‌بازارعرضه می‌شوند.

کمك گرفتن ازکامپیوتر درآموزش بعضی ازدروس‌فوق‌الذکر به‌سادگی قابل‌تصوراست ولی نحوهٔ استفاده ازکامپیوتر در برخی دروس مجرد در بدو امرچندان روشن‌نیست. به‌مثالی در زمینهٔ‌جبر توجه می‌کنیم. کتاب جبر مجرد معاصر نـوشتهٔ گالیان [۱] دارای ۴۶ مسألهٔ‌کامپیوتری‌است. به‌وسیلهٔ این مسائل دانشجویان هم‌امکان آن‌را پیدا می‌کنندکه قضایای‌کتاب را خوب درك‌کنند وهم روش حل مسأله و حدس و اثبات را یاد می‌گیرند. مثلاً بعد از تعریف گروه، گروه $U(n)$ معرفی می‌شودکـه عبارت است از تمام اعداد صحیح ومثبت‌کوچکتر از nکه نسبت به n اول هستند با عمل‌ضرب به‌پیمانهٔ n. دانشجو به‌سادگی می‌تواند خواص گروه را در مورد این‌مثال مورد بررسی قراردهد ولی‌پی‌بردن به‌ساختمان‌این‌گروهها (بـه‌ازای nهای مختلف) کار ساده‌ای نیست. از طرف دیگر این گروهها می‌توانند به‌عنوان مثال ومثال ناقض در بسیاری از موارد به‌کار گرفته شوند. اثبات دو قضیهٔ زیر نیزکه ساختمان این‌گروهها را مشخص می‌کنند معمولاً از محدودهٔ اولین درس درجبر خارج است.

قضیهٔ ۱. اگر r و s نسبت به‌هم اول باشند، آنگاه

$$U(rs) \approx U(r) \oplus U(s)$$

که دراینجا علامت $\approx$ به‌معنای یکریختی و $\oplus$ به‌معنای حاصلجمع مستقیم دوگروه‌است.

قضیهٔ ۲. (گاوس ۱۸۰۱).

$$U(2) \approx \{1\} \qquad U(4) \approx Z_2$$

(i) $$U(2^n) \approx Z_2 \oplus Z_{2^{n-2}} \qquad (\text{برای } n \geqslant 3)$$

(ii) $$U(p^n) \approx Z_{p^n - p^{n-1}} \qquad (\text{برای عدد فرد و اول } p)$$

درکتاب گالیان، این‌قضیه‌ها دراواخر بحث مربوط به‌گروهها آمده

است ولی قبل از رسیدن به‌این دو قضیه، مسائل کامپیوتری (البته همراه با مسأله‌های معمولی) در اواخر هرفصل ذکر شده‌است. در طی این‌مسائل از دانشجوخواسته می‌شود تا به‌کمك کامپیوتر،مرتبهٔ $U(n)$ ومولدزیرگروههای دوری آن به‌ازای مثلاً $1 < n < 100$ را محاسبه‌کند و سپس مثلاً بررسی کند که مرتبهٔ زیرگروه، مرتبهٔ خودگروه را می‌شمارد وهمچنین سعی کند $U(n)$ را با برنامه‌های کامپیوتری به‌حاصلضرب مستقیم گروهها تجزیه نماید و تعیین کند که چه موقع $U(n)$ دوری است. با این قبیل مسأله‌ها درك قضایا آسانترشده و نهایتاً دانشجو به‌فهم و درك قضایای فوق می‌رسد.

در"آزمایشگاه ریاضیات" مسألهٔ اساسی عبارت است از تقریب‌زدن یك مسألهٔ پیوسته با مدلی گسسته، یا مدلسازی برای انجام محاسباتی نمادین. گرافیك کامپیوتری با استفاده از الگوریتمهای عددی، تقریبی ازشکل واقعی را ارائه می‌دهد ولی برای به‌دست آوردن تقریبی مطلوب، هم‌کامپیوتری پرقدرت لازم است وهم الگوریتمی مناسب.مثلاً برای فراهم‌کردن تصویرروی جلد این شماره‌که پوششی‌ازصفحهٔ هذلولوی با مثلثهایی‌با زوایای $\pi/2$، $\pi/3$، و $\pi/7$ است با الگوریتمی‌که درابتدا تهیه‌شده بود به‌چهارده ساعت وقت‌کامپیوتر نیاز بود، حال آنکه با الگوریتم جدیدی فقط در ظرف پنج دقیقه این شکل فراهم آمد. گذشته از الگوریتم‌که بایدکارامد باشد نوع‌کامپیوترمورد استفاده نیز حائز اهمیت‌است. کامپیوتر مورد استفاده باید پردازنده‌ای قوی وسریع داشته باشد، و علاوه برآن حافظهٔ زیادی نیزلازم‌است. ولی مهمتر از اینها، گرافیك کامپیوتری "نفیسی" نیز موردنیاز است. گرافیك کامپیوتری به‌کمك نقطه‌های‌روشن‌شونده‌روی‌صفحهٔ نمایش‌کامپیوتر، اشکال متنوعی را ترسیم می‌کند. نفاست گرافیك به‌این‌معنی‌است‌که تعداد نقاط روشن‌شونده در واحد سطح، درحد مطلوبی باشد.

در تقسیم‌بندی کامپیوترها، آن نوعی که برای تجهیز آزمایشگاههای ریاضیات مناسب‌است به‌**ایستگاه‌کار**[1] موسوم‌است. ایستگاه‌کار، ریزکامپیوتری است با پردازندهٔ قوی،گرافیك نفیس، وحافظهٔ زیاد. برای ساخت "ایستگاههای‌کار" تکنولوژی سطح بالایی موردنیازاست‌که معدودی از سازندگان‌کامپیوتر آن را در اختیار دارند. از بین معروفترین شرکتهای سازندهٔ ایستگاه‌کار از دو شرکت سان[1]، وآپولو[2] می‌توان نام برد. شرکت سان ریزپردازندهٔ اسپارك[3]، و شرکت آپولو ریز پردازندهٔ پریزم[4] را برای استفاده‌های علمی ومهندسی به‌بازار ارائه‌کرده‌اند.

نرم‌افزارهای قابل‌استفاده درآزمایشگاه ریاضیات نیز طیف گسترده‌ای دارند و مرتباً نرم‌افزارهای جدیدی به‌بازار عرضه می‌شوند. دربین این نرم‌افزارها برخی برای امور آموزشی، برخی برای آموزش وپژوهش، و بالاخره بعضی‌ازآنها فقط برای پژوهش‌درزمینه‌ای خاص‌قابل‌استفاده هستند. برخی‌ازنرم‌افزارهای آموزشی وپژوهشی عبارت‌اند از: *Math Lab*، *MuMath*، *MACSYMA*، *Mathematica*، و *CAYLEY*. هریك ازاین نرم‌افزارها مشخصات و تواناییهای ویژه‌ای دارد. از بین آنها **ماتماتیکا** از همه جدیدتر است و هم برای آموزش و هم برای پژوهش قابل استفاده است. مشخصات ویژهٔ ماتماتیکا به قرار زیر است:

۱. کاربرد: محاسبات عددی ونمادین، برنامه‌سازی نمادین، عملیات گرافیکی.

۲. حافظهٔ موردنیاز: حداقل یك مگابایت.

۳. نوع‌کامپیوترقابل‌استفاده: اپل، سازگاربا آی‌بی‌ام (با پردازندهٔ ۳۸۶)، آپولو، و سان.

۴. تهیه‌کننده: شرکت تحقیقاتی ولفرم[5] (درارتباط با ام.آی.تی)، ۱۹۸۹.

ماتماتیکا برای عملیات عددی، گرافیکی، و نمادین مورد استفاده قرار می‌گیرد. مثلاً دو نمونه از محاسبات نمادین به‌قرار زیراست:

```
In[1]:= Factor[x^6 - y^6]
Out[1]= (x - y) (x + y) (x^2 - x y + y^2) (x^2 + x y + y^2)
```

تجزیهٔ $x^6 - y^6$ به‌عوامل اول.

```
In[2]:= Integrate[1/(1 - x^3), x]

                Sqrt[3] ArcTan[(1 + 2 x)/Sqrt[3]]     Log[1 - x]     Log[1 + x + x^2]
Out[2]= ---------------------------------------- - ---------- + ----------------
                              3                         3               6
```

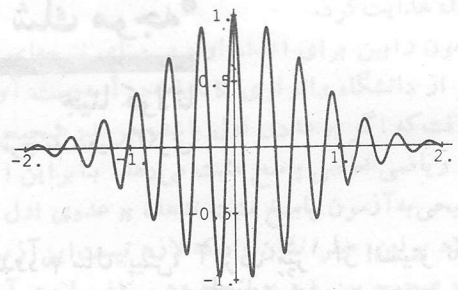
محاسبهٔ $\int \frac{1}{1-x^3}\,dx$.

1. Sun microsystems 2. Apollo computer Inc
3. Spark 4. Prism 5. Wolfram Research Inc

1. Work Station

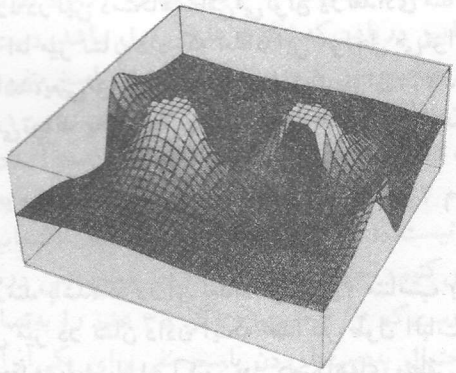
همچنین دو نمونه از عملیات گرافیکی را در مثالهای زیر می‌بینیم:

```
In[1]:= Plot[Exp[-x^2] Cos[20x],
         {x, -2, 2}]
```



ترسیم تابع $e^{-x^2}\cos 20x$ برای x بین ۲− تا ۲.

```
In[1]:= Plot3D[Im[Sec[x + I y]],
         {x, -4, 4}, {y, -4, 4}]
```



ترسیم $Im(Sec(x+iy))$ برای x بین ۴− تا ۴ و y بین ۴− تا ۴.

و دیگر اینکه، هرچند به نظر نمی‌رسد کامپیوتر در طراحی ساختمان اثبات جایگزین تفکر ریاضیدان شود، ولی در موارد زیادی به‌طور اساسی به‌یاری ریاضیدان می‌شتابد، ودرواقع مکمل توانایی ریاضیدان است.

تذکار این نکته ضروری است که در کشور ما هم بایستی با روند استفاده از کامپیوتر در آموزش و پژوهش ریاضی به‌نحو مطلوبی مواجه شد و به‌استقبال تجهیز آزمایشگاههای ریاضیات رفت. هم پژوهشگران باید به‌نحو سنجیده‌ای از روشهای جدید استفاده به‌عمل آورند، و هم در آموزش باید اهمیت کافی به‌استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری داده شود. آشنایی با استفاده از نرم‌افزارهایی نظیر ماتماتیکا باید جزء معارف عمومی یك دانشجوی ریاضی باشد و از بسیاری از درسهای سنتی ارزش کمتری ندارد. برنامه‌های آموزشی باید به طور انعطاف‌پذیر این امکان را در برنامه‌های رسمی خود فراهم کنند.

مراجع

1. J. A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*, D. C. Heath & Company (1986).
2. D. A. Smith & others, *Computer & Mathematics*, MAA (1988).

مرکز نشر دانشگاهی منتشر کرده است