درس چهاردهم : نمایش جبرهای لی

۱ مقدمه

دراین درس نظریه نمایش های جبرهای لی را به طور کلی معرفی می کنیم. آنچه را که دراین درس یادمی گیریم تعمیم مستقیمی است ازمطالبی که در درس مکانیک کوانتومی درمورد گروه دوران آموخته ایم. نخست به مفهوم نمایش یک جبرلی و رابطه آن با نمایش گروه مربوط به آن جبرلی خواهیم پرداخت. سپس نمایش یک جبرروی فضای توابع را بررسی می کنیم که به نمایش مولدهای یک جبربه صورت عملگرهای دیفرانسیلی منجرخواهد شد. دربخش سوم که بخش اصلی این درس است نحوه ساختنِ سیستماتیک جبرهای لی را بیان می کنیم.

۲ نمایش جبرلی

منظورازنمایش یک جبر لی آن است که عملگرهایا ماتریس هایی پیداکنیم که دارای همان روابط جابجایی باشند که درجبرلی وجود دارد. برای این کارنخست می بایست یک فضای برداری مثل V انتخاب کنیم. حال دقت می کنیم که $End(V)$ یعنی فضای برداری عملگرهای خطی روی V خود یک جبرلی است که درآن تعویضگر دو عملگرخطی به شکل $[T,T'] = TT' - T'T$ تعریف می شود. دراین صورت نگاشت خطی $D : A \longrightarrow End(V)$ را یک نمایش گوییم هرگاه D یک همسانی از جبرلی A به جبرلی $End(V)$ باشد. به عبارت واضح تر می بایست داشته باشیم

$$[D(x), D(x')] = D([x, x']). \tag{1}$$

هرگاه برای فضای V یک پایه انتخاب کنیم می توانیم عملگر $D(x)$ به صورت یک ماتریس درخواهد آمد. بعد فضای V را بعد نمایش می خوانیم.

مثال : جبرلی $su(2)$ با روابط جابجایی زیررادرنظربگیرید:

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c, \tag{2}$$

خواننده براحتی می تواند ثابت کند که ماتریس های زیریک نمایش دوبعدی ازاین جبرمی سازند:

$$D(T_1) := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(T_2) := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(T_3) := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

هم چنین خواننده می تواند ثابت کند که ماتریس های زیریک نمایش سه بعدی ازاین جبرتشکیل می دهند:

$$D'(T_1) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D'(T_2) := \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D'(T_3) := i\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

یک نمایش ممکن است که یک به یک نباشد مثل نمایشی که به همه عناصر جبر تبدیل خطیِ 0 رانسبت می دهد. هرگاه نمایش یک به یک باشد آن را نمایش وفادار یا $Faithfull$ می خوانیم. این تعریف درمورد گروه نیز صادق است.
فرض کنید که G یک گروه و A_g جبرلی آن باشد. دراین صورت هرنمایش از جبر لی A_g یک نمایش از گروه لی بدست می دهد. می دانیم که هرعضو $g \in G$ را به شکل $g = e^{\theta^a T_a}$ می توان نوشت. دراین صورت اگر D یک نمایش از جبر A_g باشد آنگاه عناصر گروه را می توان به شکل زیرنمایش داد:

$$D(g) = e^{\theta^a D(T_a)}. \quad (5)$$

نمایش گروه وقتی یکانی است که $D(g)$ یک تبدیل یکانی باشد یعنی $(D(g))^\dagger = D(g^{-1})$.باتوجه به حقیقی بودن پارامترهای θ^a این رابطه به معنای این است که نمایش جبروقتی یکانی است که $D(T_a)$ یک عملگرپادهرمیتی باشد. هرگاه درجبرمختلط شده مولدهای جبر را با $\tau_a \equiv iT_a$ نشان دهیم، نمایش جبروقتی یکانی خواهد بود که $D(\tau_a)$ ها تبدیل های هرمیتی باشند.

۱.۲ جمع مستقیم دونمایش

هرگاه D_1 و D_2 دونمایش باشند می توان یک نمایش بزرگ تر به صورت

$$D(x) := \begin{pmatrix} D_1(x) & 0 \\ 0 & D_2(x) \end{pmatrix} \quad (6)$$

ساخت. هرگاه نمایش D_1 روی V_1 و نمایش D_2 روی V_2 تعریف شده باشد، نمایش D روی فضای $V_1 \oplus V_2$ تعریف شده است. عناصر متعلق به $V_1 \oplus V_2$ به فرم $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ نوشته می شوند که درآن $x \in V_1$ و $y \in V_2$.
بنابراین دریک چنین نمایشی V_1 و V_2 دو زیرفضای ناوردا هستند به این معناکه برای همه x ها $D(x)V_1 \in V_1$ و $D(x)V_2 \in V_2$.

۲.۲ نمایش های کاهش ناپذیر

هرگاه بتوان فضای برداری V را به دوزیرفضای V_1 و V_2 تجزیه کرد، یعنی آن را به صورت $V = V_1 \oplus V_2$ نوشت به قسمی که شرط زیربرقرارباشد:

$$D(x)V_1 \subset V_1, \qquad D(x)V_2 \subset V_2, \quad (7)$$

آنگاه نمایشِ D، یک نمایش کاهش پذیرنامیده می شود. ماتریس های چنین نمایشی به شکل زیردرمی آیند

$$D(x) := \begin{pmatrix} D_1(x) & 0 \\ 0 & D_2(x) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

۳.۲ ضرب نمایش های یک جبر

فرض کنید که G یک گروه‌لی و A جبرلی وابسته به آن باشد. می دانیم که $g = e^x$ که درآن $g \in G$ و $x \in A$. دونمایش D_1 و D_2 ازگروه درنظرمی گیریم. می دانیم که ضرب تانسوری این دو نمایش به صورت زیرتعریف می شود:

$$D(g) = D_1(g) \otimes D_2(g), \qquad \forall g \in G. \tag{9}$$

ازرابطه بالا نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} D(g) &= e^{D_1(x)} \otimes e^{D_2(x)} = (e^{D_1(x)} \otimes I)(I \otimes e^{D_2(x)}) \\ &= e^{D_1(x) \otimes I} e^{I \otimes D_2(x)} = e^{D_1(x) \otimes I + I \otimes D_2(x)}. \end{aligned} \tag{10}$$

این رابطه مارابه تعریف ضرب تانسوری دو نمایش ازجبرراهنمایی می کند: به ازای دونمایش D_1 و D_2 ازیک جبرلی A ، ضرب تانسوری آنها به صورت زیرساخته می شود:

$$D(x) := D_1(x) \otimes I_2 + I_1 \otimes D_2(x), \tag{11}$$

که درآن I_1 و I_2 به ترتیب عملگرهای یکانی یا ماتریس های واحد درفضاهای V_1 و V_2 هستند. خواننده براحتی می تواند تحقیق کند که D یک نمایش است. هرگاه D_1 و D_2 به ترتیب m و n بعدی باشند آنگاه نمایش D mn بعدی خواهد بود.

۳ چند مثال

مثال ۱: هرگاه $D : A \longrightarrow End(V)$ یک نمایش دلخواه باشد آنگاه یک نمایش یک بعدی می توان به صورت زیرساخت:

$$\rho(x) := tr(D(x)), \tag{12}$$

که درآن $tr(D(x))$ ردّ عملگر $D(x)$ است. برخواننده است که تحقیق کند که ρ واقعاً یک نمایش است.

مثال ۲: به ازای هرجبر A می توان یک نمایش بابعد جبر ساخت که به آن نمایش الحاقی می گویند. نمایش الحاقی نقش همان نمایش منظم را برای گروه هابازی می کند. این نمایش به شکل زیرتعریف می شود:

$$Ad_x(y) := [x, y]. \tag{13}$$

مثال ۳: دردرس مکانیک کوانتومی یادگرفته ایم که نمایش های محدود بعدِ جبر$su(2)$ چه هستند. هرکدام از این نمایش هابایک عدد صحیح یانیمه صحیح j مشخص می شود و روی یک فضای $2j+1$ بعدیِ V_j تعریف می شود. نمایشی که روی V_j تعریف می شود نمایش اسپین j خوانده می شود. هرگاه بردارهای پایه فضای V_j را با $\{|j,m\rangle, \quad -j \le m \le j\}$ نشان دهیم آنگاه نمایش اسپین j به شکل زیرتعریف می شود:

$$\begin{aligned} D(J_z)|j,m\rangle &= m|j,m\rangle, \\ D(J_+)|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|j,m+1\rangle, \\ D(J_-)|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|j,m-1\rangle, \end{aligned} \tag{14}$$

که درآن $J_+ = \frac{1}{2}(J_x + iJ_y)$ و $J_- = \frac{1}{2}(J_x - iJ_y)$.

۴ نمایش روی فضای توابع

دردرس های مکانیک کوانتومی و هم چنین نظریه میدان کوانتومی دیده ایم که به تکانهٔ $\vec{P}$ یک عملگردیفرانسیل به صورت $-i\vec{\nabla}$ نسبت داده می شود و به تکانه زاویه $\vec{L}$ یک عملگردیفرانسیل $-i\vec{r}\times\vec{\nabla}$ نسبت داده می شود. هم چنین گفته می شود که $\vec{P} \equiv -i\vec{\nabla}$ مولد انتقال و $\vec{L} = -i\vec{r}\times\vec{\nabla}$ مولد دوران است. دراین درس می خواهیم این عبارات و معنای آنهارااز دید نظریه گروه بفهمیم .

دردرس های گذشته دیدیم که هرگاه گروه G روی یک فضای M عمل کند می توان آن گروه را روی فضای توابع روی M که یک فضای بی نهایت بعدی است نمایش داد. حال فرض کنید که G یک گروه لی و M یک خمینه است وعمل G روی M مشتق پذیراست. چنین عملی به عبارت دقیق تر به شکل زیرتعریف می شود:

تعریف: نگاشت $\phi : G \times M \longrightarrow M$ را عمل گروه G روی خمینه M می خوانیم هرگاه شرایط زیربرقرارباشند:

الف:

$$\phi(g_1, (g_2, x)) = \phi(g_1 g_2, x), \qquad \forall g_1, g_2 \in G, \ \ x \in M, \tag{15}$$

ب: نگاشت ϕ یک نگاشت مشتق پذیرباشد.

به ازای هر g ثابت نگاشت $\phi_g : M \longrightarrow M$ که به صورت $\phi_g(x) := \phi(g,x)$ تعریف می شود یک نگاشت مشتق پذیرخواهد بود.
فرض کنید که مختصات نقطه $x \in M$ را با $(x^1, x^2, \cdots x^n)$ نمایش دهیم. هرگاه عنصر نزدیک به واحد $g \sim I + \theta^a T_a$ روی این نقطه اثر کند، این نقطه به نقطه ای بامختصات $(x^1 + \delta x^1, x^2 + \delta x^2, \cdots x^n + \delta x^n)$ تبدیل می شود که درآن δx^μ ها ی نهایت کوچک هستند. این تغییرمختصات بستگی به θ^a ها یعنی پارامترهای تبدیل بی نهایت کوچک $g \sim I + \theta^a T_a$ دارند. هرگاه تارتبه اول δx^μ رابرحسب θ^a ها بسط دهیم خواهیم داشت

$$\delta x^\mu \sim \theta^a X^\mu_a, \tag{16}$$

که درآن X^μ_a ها ازروی تبدیل مورد نظریافته می شوند.

حال نمایش گروه روی فضای توابع روی M را به یادمی آوریم که برمبنای آن داشتیم:

$$D(g)f(x) := f(g^{-1}x). \tag{17}$$

دراین قسمت خود را به فضای توابع مشتق پذیرروی M محدود می کنیم که آن را با $C^1(M)$ نمایش می دهیم. ازآنجا که رابطه مولد ها و گروه به شکل زیراست

$$T_a := \frac{\partial}{\partial \theta^a} g \mid_{\theta=0}$$

همین رابطه درمورد نمایش ها نیز صدق می کند. بخصوص درمورد نمایش روی فضای توابع داریم

$$D(T_a)f := (\frac{\partial}{\partial \theta^a} D(g))f, \tag{18}$$

وباتوجه به رابطه (17)،

$$\left(D(T_a)f\right)(x) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta^a} D(g) f\right)(x) = \frac{\partial}{\partial \theta^a} f(g^{-1}x) \tag{19}$$

ویا

$$\left(D(T_a)f\right)(x) = \frac{\partial}{\partial \theta^a} f(x^\mu - \theta^a X^\mu_a) = -X^\mu_a \frac{\partial}{\partial x^\mu} f, \tag{20}$$

و سرانجام بابرداشتن f ازدوطرف

$$D(T_a) = -X^\mu_a \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{21}$$

می توان مطالب بالارا به شکل زیرخلاصه کرد. هرگاه یک تبدیل بی نهایت کوچک مثل تبدیل زیر را درنظربگیریم:

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \theta^a X_a^\mu, \tag{22}$$

آنگاه نمایش مولد جبرلی متناظربا θ^a یعنی T_a نمایش دیفرانسیلی زیرراروی توابع دارد که درآن ازنماد خلاصه T_a بجای $D(T_a)$ استفاده می کنیم :

$$T_a = -X_a^\mu \partial_\mu, \tag{23}$$

که درآن ∂_μ نماد خلاصه ای است برای $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

۱.۴ مثالها

مثال ۱: گروه $So(3)$ روی فضای سه بعدی عمل می کند. یک دوران بی نهایت کوچک به صورت زیر عمل می کند:

$$x_i \longrightarrow x_i + \epsilon_{ijk}\theta_j x_k, \tag{24}$$

و بنابراین

$$J_i = -\epsilon_{ijk} x_k \partial_i \longrightarrow \vec{J} = -\vec{r} \times \vec{\nabla} \tag{25}$$

ویا

$$J_x = -(y\partial_z - z\partial_y), \qquad J_y = -(z\partial_x - x\partial_z), \qquad J_z = -(x\partial_y - y\partial_x). \tag{26}$$

مثال ۲: گروه $So(n)$ روی فضای n بعدی عمل می کند. یک عضو نزدیک به واحد دراین گروه به صورت زیراست

$$g \approx I + L, \tag{27}$$

که درآن L یک ماتریس پادمتقارن است . می توان L را برحسب ماتریس های $T_{mn} := E_{mn} - E_{nm}$ بسط داد. درنتیجه

$$g \approx I + \sum_{m \neq n} \omega^{mn} T_{mn} \tag{28}$$

که درآن $\omega_{mn} = -\omega_{nm}$. چنین عنصری از گروه تبدیل بی نهایت کوچک زیرراانجام می دهد:

$$x^i \longrightarrow x^i + \sum_{m,n} \omega^{mn} (T_{mn} x)^i, \tag{29}$$

که درآن $(T_{mn}x)^i$ مولفه i ام ماتریس $n \times 1$ $T_{mn}x$ است. درنتیجه خواهیم داشت:

$$D(T_{mn}) = -(T_{mn}x)^i \partial_i \tag{30}$$

برای آنکه این عملگررا به طور صریح تر بنویسیم می بایست $(T_{mn}x)^i$ را بازکنیم. داریم

$$(T_{mn}x)^i = (T_{mn})^i_j x^j = (E_{mn}{}^i_j - E_{nm}{}^i_j)x^j = (\delta^i_m \delta_{nj} - \delta^i_n \delta_{mj})x^j = \delta^i_m x_n - \delta^i_n x_m. \tag{31}$$

باترکیب (31،30) بدست می آوریم:

$$D(T_{mn}) = -(\delta^i_m x_n - \delta^i_n x_m)\partial_i = x_m\partial_n - x_n\partial_m. \tag{32}$$

حال خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که عملگرهای دیفرانسیل $x_m\partial_n - x_n\partial_m$ دارای همان روابط جابجایی هستند که مولدهای جبر $so(n)$.

۵ نظریه نمایش های جبرلی

دراین بخش می خواهیم به طورسیستماتیک به ارایه نکات کلی نظریه نمایش های جبرهای لی بپردازیم. خود را به نمایش های یکانی با بعد متناهی محدود می کنیم. آنچه که یادمی گیریم تعمیمی است از آنچه که دردرس های مکانیک کوانتومی درباره نمایش های جبر دوران یا $su(2)$ آموخته ایم. مناسب است که نخست روش بدست آوردن نمایش های جبردوران را مرورکنیم.

۱.۵ نمایش های جبر $su(2)$

دراین بخش می خواهیم نمایش های یکانی ومحدود بعد جبر $su(2)$ را بدست بیاوریم . این کارمارابرای مطالعه نمایش های یکانی جبرهای دلخواه آماده می کند.

درپایه کارتان روابط جبربه صورت زیراست.

$$\begin{aligned} [J_z, J_+] &= J_+, \\ [J_z, J_-] &= -J_-, \\ [J_+, J_-] &= 2J_z. \end{aligned} \tag{33}$$

یک نمایش کاهش ناپذیر این جبر را با D_j نمایش می دهیم که روی یک فضای برداری V_j تعریف شده است. بنابرقضیه پیتر–وایل یک چنین نمایشی حتماً یکانی است. برای سادگی ازنوشتن نماد D_j خودداری می کنیم. بنابراین درادامه منظورما از J_+ نمایش این عنصرازجبریا $D_j(J_+)$ است. پس می توانیم ازاین به بعدازعملگر $J_\pm$ و J_z نام ببریم. روابط جبرلی و یکانی بودن نمایش حکم می کنند که رابطه زیربرقراراست:

$$J_-^\dagger = J_+. \tag{34}$$

نخستین کاری که می کنیم آن است که عملگرهرمیتی J_z راقطری می کنیم. ویژه مقادیر این عملگررا با m وویژه بردارهای آن را با $|m\rangle$ نمایش می دهیم:

$$J_z|m\rangle = m|m\rangle. \tag{35}$$

هنوزراجع به مقادیرممکن m وهم چنین بعد فضای V_j چیزی نمی دانیم. تنهاچیزی که می دانیم آن است که این ویژه مقدارهاحقیقی هستند و ویژه بردارهای $\{|m\rangle\}$ یک پایه‌بهنجارویکه برای فضای V_j تشکیل می دهند. حال ازروابط جبرمی توانیم نتیجه بگیریم که

$$\begin{aligned} J_+|m\rangle &= C_+(m)|m+1\rangle \\ J_-|m\rangle &= C_-(m)|m-1\rangle. \end{aligned} \tag{36}$$

که درآن $C_\pm(m)$ ضرایبی هستند که می بایست تعیین شوند. برای آنکه خود رابرای نامگذاری آینده آماده کنیم به هر ویژه مقدار m یک وزنه می گوییم و به رشته $\cdots m-2,\ m-1,\ m,\ m+1,\ m+2,\cdots$ یک نردبان از وزنه ها می گوییم. ازآنجا که نمایش محدود بعد است این نردبان می بایست حتماً یک بالاترین پله مثل j و یک پایین ترین پله مثل $j-g$ داشته باشد که درآن تعداد پله هایعنی $g+1$ می بایست یک عدد صحیح باشد.
حال دقت می کنیم که ضرایب $C_-(m)$ را می توان حقیقی گرفت زیراهرفازی را که چنین ضریبی داشته باشند می توان بابازتعریف حالت $|m-1\rangle$ ازبین برد.
قدم بعدی آن است که ازرابطه (37) روابط زیر را نتیجه بگیریم :

$$\begin{aligned} \langle m|J_- &= C_+^*(m)\langle m+1| \\ \langle m|J_+ &= C_-(m)|m-1\rangle. \end{aligned} \tag{37}$$

حال عنصر ماتریسی $\langle m+1|J_+|m\rangle$ را ازدوطریق حساب می کنیم و به رابطه می رسیم:

$$C_+(m) = C_-(m+1), \tag{38}$$

که درضمن نشان می دهد ضرایب $C_+(m)$ نیز حقیقی هستند.
حال به عنصرماتریسی زیرتوجه می کنیم

$$\langle m|J_+J_-|m\rangle = \langle m|J_-J_+ + 2J_z|m\rangle, \tag{39}$$

که ازآن نتیجه می گیریم

$$(C_-(m))^2 = (C_+(m))^2 + 2m, \tag{40}$$

ویا

$$(C_+(m-1))^2 = (C_+(m))^2 + 2m, \tag{41}$$

باتوجه به اینکه بالاترین پله نردبان j وپایین ترین پله آن $j-g$ است می دانیم که

$$C_+(j) = 0, \qquad C_-(j-g) = 0, \tag{42}$$

ویاباتوجه به رابطه (38)،

$$C_+(j) = 0, \qquad C_+(j-g-1) = 0. \tag{43}$$

اگر برای سادگی $(C_+(m))^2$ را با λ_m نشان دهیم روابط تکرارفوق به شکل زیرهستند:

$$\begin{aligned} &\lambda_{j-1} = 2j, \\ &\lambda_{j-2} = \lambda_{j-1} + 2(j-1), \\ &\cdots, \\ &\lambda_{m-1} = \lambda_m + 2m \\ &\cdots \end{aligned} \tag{44}$$

حال می توان طرفین رابطه تکرار (41) را برای تمام پله ها جمع زد و به رابطه زیررسید

$$\sum_{m=j-g}^{j} \lambda_{m-1} = \sum_{m=j-g}^{j} \lambda_m + 2\sum_{m=j-g}^{j} m, \tag{45}$$

ویا باتوجه به شرط مرزی (43)،

$$0 = 2\sum_{m=j-g}^{j} m \longrightarrow (2j-g)(g+1) = 0. \tag{46}$$

ازآنجا که g نمی تواند برابربا -1 باشد این رابطه به این معناست که

$$2j = g. \tag{47}$$

این رابطه به این معناست که برچسب نمایش یعنی j که تاکنون نامعلوم بود یک عدد نیمه صحیح است. بنابراین بالاترین پله نردبان j و پایین ترین پله آن $-j$ است.
هم چنین از روابط (44) نشان می توان مقدار λ_m ها ونتیجتاً ضرایب $C_{\pm}(m)$ را بدست آورد. یک محاسبه ساده نشان می دهد که

$$C_+(m) = \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \qquad C_-(m) = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}. \tag{48}$$

به این ترتیب نمایش های یکانی جبر $su(2)$ ساخته می شوند. هرنمایش با یک عدد نیمه صحیح j مشخص می شود وبعد آن برابراست با $2j+1$. بردارهای پایه نمایش عبارتند از $\{|-j\rangle,\ |-j+1\rangle,\cdots|j-1\rangle,|j\rangle\}$.
ماتریس های نمایش نیز توسط روابط زیرتعیین می شوند:

$$\begin{aligned} J_z|m\rangle &= m|m\rangle \\ J_+|m\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}|m+1\rangle \\ J_-|m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|m-1\rangle. \end{aligned} \tag{49}$$

بنابراین ماتریس های نمایش j برابرندبا:

$$\begin{aligned} &\langle m'|J_z|m\rangle = m\delta_{m,m'} \\ &\langle m'|J_+|m\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\delta_{m',m+1} \\ &\langle m'|J_-|m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\delta_{m',m-1}. \end{aligned} \tag{50}$$

حال
همین سوالهارامی توان درموردیک جبرلی دلخواه پرسید. یعنی اینکه یک جبرلی A مثلاً جبرلی $su(3)$،

الف: چه تعداد نمایش کاهش ناپذیردارد وهرنمایش باچه پارامترهایی مشخص می شود؟

ب : بعد هرنمایش کاهش ناپذیرچنداست؟ و

ج : ماتریس های یک نمایشِ مشخص چه هستند؟

دراین بخش هدف ماآن است که به این سوال ها پاسخ دهیم . خواننده باکمی دقت خواهد دید که قدم هایی که برای این پاسخگویی طی خواهیم کرد یادآور راهی است که‌وی دردرس مکانیک کوانتومی برای یافتن نمایش های جبر$su(2)$ دیده است بااین تفاوت که درجبر $su(2)$ زیرجبرکارتان یک بعدی و دریک جبردلخواه چند بعدی است.
برای شروع یک جبرلی را درپایه کارتان می نویسیم. رتبه جبر را r می گیریم. برای سادگی ازنوشتن نماد D که نشان دهنده نگاشت نمایش است صرف نظرمی کنیم. بنابراین به عنوان مثال $D(H_i)$ را به سادگی به صورت همان H_i می نویسیم. فضای نمایش راV می گیریم که هنوز بعد آن را نمی دانیم. روابط جابجایی اصلی ای که ازآنهااستفاده خواهیم کرد عبارتنداز:

$$\begin{aligned}
&[H_i, H_j] = 0 \\
&[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \\
&[E_\alpha, E_{-\alpha}] = 2\alpha^i H_i.
\end{aligned} \tag{51}$$

این روابط قراراست بین عملگرهایا ماتریس های نمایش دهنده جبرنیزبرقرارباشند. برای نمایش یکانی H_i ها را عملگرهای یکانی می گیریم که درنتیجه آن روابط جابجایی حکم خواهند کرد که رابطه زیربین عملگرهای E_α و $E_{-\alpha}$ برقرارباشند:

$$E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}. \tag{52}$$

اینک نخستین قدم رابرمی داریم.

چون عملگرهای هرمیتی H_i همه باهم جابجامی شوند پس می توان همه آنهاراباهم قطری کرد (ویژه بردارهای مشترک آنهارایافت) . این ویژه بردارها تمام فضای V راجاروب می کنند. یک ویژه بردارمشترک H_i ها را با $|\vec{\mu}\rangle$ نشان می دهیم به این معنی که

$$H_i|\mu\rangle = \mu_i|\mu\rangle, \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots\ r. \tag{53}$$

بردار μ یک بردار r بعدی است که اصطلاحاً وزنه یا $weight$ خوانده می شود. مجموعه همه وزنه ها را با Δ نشان می دهیم و آن را فضای وزنه ها یا $Weight\ \ Space$ می خوانیم. مجموعه تمام وزنه ها که آن را با Δ نشان می دهیم عبارت است ازبردارهای

$$\Delta = \{\mu, \nu, \cdots\}, \tag{54}$$

که می توانیم آنهارا درهمان فضای ریشه ها رسم کنیم. این بردارها به دلایلی که دراین درس خواهیم دید روابط هندسی ساده و متقارنی بین خود وریشه های جبر دارند. وقتی که این وزنه هارا رسم کنیم چیزی بدست می آید که آن را دیاگرام وزنه ها یا $Weight\ \ Diagram$ می خوانیم.

دلیل اینکه یک بردارنمایش با وزنه μ را به سادگی با $|\mu\rangle$ نمایش نمی دهیم آن است که ممکن است دروزنه ها واگنی وجود داشته باشد به این معناکه دوبردارمتفاوت ازنمایش یک وزنه داشته باشند.

حال یک وزنه مثبت را تعریف می کنیم. وزنه ای مثبت است که اولین مولفه غیرصفرآن مثبت باشد. هرگاه μ_1 و μ_2 دووزنه باشند گوییم $\mu_1 > \mu_2$ هرگاه $\mu_1 - \mu_2$ یک وزنه مثبت باشد. بنابراین می توان وزنه های نمایش را مرتب کرد. هرگاه نمایش N بعدی باشد وزنه ها راطوری مرتب می کنیم که داشته باشیم

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \mu_N. \tag{55}$$

این پایه را پایه کانونیک می خوانیم.

قدم بعدی آن است که اثر بقیه عناصرجبررا روی این بردارهای پایه پیداکنیم. یک ریشه مثل E_α را درنظربگیرید. می دانیم که $[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha$. بنابراین بدست می آوریم:

$$H_i(E_\alpha|\mu\rangle) = (E_\alpha H_i + \alpha_i E_\alpha)|\mu\rangle = (\mu_i + \alpha_i)E_\alpha|\mu\rangle. \tag{56}$$

این رابطه نشان می دهد که ریشه های مثبت رامی توان به عنوان عملگرهای بالابرنده و ریشه های منفی را به عنوان عملگرهای پایین برنده درفضای وزنه هاتلقی کرد. به عبارت دیگرداریم: بردار های

$$\begin{aligned} &E_\alpha|\mu\rangle, \\ &E_{-\alpha}|\mu\rangle, \end{aligned} \tag{57}$$

به ترتیب وزنه های $\mu + \alpha$ و $\mu - \alpha$ دارند.

حال یک بردار بهنجارِ $|v_\mu\rangle$ رادرنظرمی گیریم به قسمی که داشته باشیم: $E_\alpha|v_\mu\rangle = 0$. هرگاه بردار $|v_\mu\rangle$ که آن را برای سادگی با $|0\rangle$ نمایش می دهیم بهنجارباشد بردار $E_{-\alpha}|v_\mu\rangle$ لزوماً بهنجارنیست. می توانیم آن را پس ازبهنجارکردن با $|1\rangle$ نشان دهیم و رشته بردارهای بهنجارزیر را تشکیل دهیم

$$|0\rangle := |v_\mu\rangle, \quad |1\rangle := N_1 E_{-\alpha}|v_\mu\rangle, \quad |2\rangle := N_2 E_{-\alpha}E_{-\alpha}|v_\mu\rangle, \quad \cdots \quad |g\rangle := N_g E^g_{-\alpha}|v_\mu\rangle \tag{58}$$

که درآن ضرایب N_k طوری انتخاب شده اند که بردارهای $|k\rangle$ بهنجارباشند. درنتیجه رشته ای ازوزنه ها مثل

$$\mu, \quad \mu - \alpha, \quad \mu - 2\alpha, \quad \mu - g\alpha \tag{59}$$

بدست می آید به قسمی که $\mu+\alpha \notin \Delta$ و $\mu-(g+1)\alpha \notin \Delta$. این رشته رایک نردبان از وزنه های ساخته شده‌توسط α بابالاترین پله μ و پایین ترین پله $\mu-g\alpha$ می خوانیم. بدیهی است که داریم :

$$\begin{aligned} E_{-\alpha}|k\rangle &= C_k|k+1\rangle, \\ E_{\alpha}|k\rangle &= D_k|k-1\rangle. \end{aligned} \tag{60}$$

که درآن ضرایب C_k و D_k حقیقی هستند. (به همان دلیلی که درمورد $su(2)$ دیدیم.)
بنابریکانی بودن نمایش خواهیم داشت:

$$\langle k|E_{\alpha} = C_k\langle k+1|, \langle k|E_{-\alpha} = D_k\langle k-1|. \tag{61}$$

شرایط مرزی زیرنیزبرقرارهستند:

$$D_0 = 0 \quad C_g = 0. \tag{62}$$

بامحاسبه عنصرماتریسی $\langle k|E_{-\alpha}|k-1\rangle$ ازدوطریق می توانیم نشان دهیم که

$$C_k = D_{k+1}. \tag{63}$$

بنابراین شرط مرزی به صورت زیردرمی آید:

$$D_{g+1} = 0, \quad D_0 = 0. \tag{64}$$

حال به رابطه زیرتوجه می کنیم:

$$\langle k|E_{\alpha}E_{-\alpha}|k\rangle = \langle k|E_{-\alpha}E_{\alpha} + \alpha^i H_i|k\rangle = D_k^2 + (\alpha, \mu - k\alpha). \tag{65}$$

اماطرف چپ برابراست با $C_k^2 = D_{k+1}^2$. بنابراین به یک رابطه تکرارمی رسیم

$$D_{k+1}^2 = D_k^2 + (\alpha, \mu - k\alpha). \tag{66}$$

برخواننده است که نشان دهد این دسته از روابط تکرار الزام می کند که رابطه زیربرقرارباشد:

$$\frac{2(\alpha,\mu)}{(\alpha,\alpha)} = g. \tag{67}$$

این رابطه درست همان رابطه ای است که بین ریشه های جبربرقراربود بااین تفاوت که این بار μ یک ریشه نیست بلکه یک وزنه است. رابطه بالا رابرای وقتی بدست آوردیم که μ بالاترین وزنه نردبان باشد. هرگاه μ یک وزنه دلخواه ازنردبانی باشد که بالاترین پله آن $\mu + p\alpha$ و پایین ترین پله آن $\mu - q\alpha$ باشد رابطه بالا به شکل زیردرمی آید:

$$\frac{2(\alpha,\mu)}{(\alpha,\alpha)} = q - p. \tag{68}$$

قضیه: (انعکاس وایل). به ازای هرریشه $\alpha \in \sum$ و هروزنه $\mu \in \Delta$، $W_\alpha(\mu)$ یعنی انعکاس وایل ِμ نسبت به α نیز یک وزنه است.
اثبات این قضیه کاملاً مشابه قضیه ای است که درمورد ریشه هابرای انعکاس وایل ثابت کردیم.

٦ ساختن حالت ها و بدست آوردن وزنه ها

تعریف: ازآنجاکه نمایش محدود بعد است حتماً یک حالت مثل $|\Lambda\rangle$ وجود دارد به قسمی که

$$E_\alpha|\Lambda\rangle = 0 \quad \forall\ \alpha \in \sum^{+}. \tag{69}$$

وزنهٔ Λ را بالاترین وزنهٔ نمایش یا $Highest\ \ Weight$ می نامیم. دوقضیه زیر که آنها را بدون اثبات بیان می کنیم درنظربه نمایش اهمیت اساسی دارند:

قضیه اول (دینکین) : هرگاه یک نمایش کاهش ناپذیرباشد بالاترین وزنه آن حتماً غیرواگن است.
به همین دلیل است که دررابطه بالا ازبردار $|\Lambda\rangle$ نام برده ایم و نه بردار $|v_\Lambda\rangle$.

قضیه دوم (دینکین): دو نمایش کاهش ناپذیرازیک جبر معادل اند اگروفقط اگر بالاترین وزنه آنهایکی باشد.

این دوقضیه نشان می دهد که یک بارکه بالاترین وزنه را مشخص کنیم نمایش به طور کامل معین خواهد شد. بعداز مشخص کردن بالاترین وزنه بقیه حالت های نمایش را بااثردادن عملگرهای پایین برنده متناظرباریشه های ساده می سازیم . هرگاه برای یک جبر لی داشته باشیم

$$\prod = \{\alpha, \beta, \gamma, \cdots\}, \tag{70}$$

آنگاه حالت های نمایش عبارت خواهند بوداز:

$$
\begin{aligned}
&|\Lambda\rangle \\
&E_{-\alpha}|\Lambda\rangle,\ \ E_{-\beta}|\Lambda\rangle,\ E_{-\gamma}|\Lambda\rangle,\ \ \cdots \\
&E_{-\alpha}E_{-\beta}|\Lambda\rangle,\ \ E_{-\alpha}E_{-\gamma}|\Lambda\rangle,\ \ E_{-\beta}E_{-\gamma}|\Lambda\rangle,\ \ \cdots \\
&E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\gamma}|\Lambda\rangle,\ \ \ \cdots \\
&\cdots,
\end{aligned} \tag{71}
$$

که به ترتیب با وزنه های زیرمتناظرند:

$$
\begin{aligned}
&\Lambda, \\
&\Lambda-\alpha,\quad \Lambda-\beta,\quad \Lambda-\gamma,\quad \cdots \\
&\Lambda-\alpha-\beta,\quad \Lambda-\alpha-\gamma,\quad \Lambda-\beta-\gamma,\quad \cdots, \\
&\Lambda-\alpha-\beta-\gamma,\quad \cdots, \\
&\cdots.
\end{aligned} \tag{72}
$$

نمونه ای ازواگنی وزنه هابرای بردارهای

$$E_{-\alpha}E_{-\beta}|\Lambda\rangle,\quad E_{-\beta}E_{-\alpha}|\Lambda\rangle, \tag{73}$$

بوجود می آید که هردو متناظرباوزنهٔ $\Lambda-\alpha-\beta$ هستند.
اما آبشارِ حالت ها یاوزنه هایی که به طریق فوق ساخته می شوند همه مجازنیستند زیرا بسیاری وزنه های موجود دراین آبشار شرط (68) را نقض می کنند. بالاترین وزنه خود بااین شرط مشخص می شود که

$$\frac{2(\Lambda,\alpha)}{2(\alpha,\alpha)}=q_\alpha \qquad \forall\alpha\in\prod, \tag{74}$$

که درآن q_α ها اعداد صحیح مثبت هستند. بنابراین هرنمایش بااعداد صحیح مثبت $\{q_\alpha\}$ مشخص می شود. درهرقدم ازرابطه (72) می بایست صحت رابطه 68 را تحقیق کنیم. ضمناً درتمام مراحل می توانیم از انعکاس وایل استفاده کنیم و ازوزنه هایی که قبلاً بدست آورده ایم وزنه های جدید بدست آوریم.
باتوجه به اینکه هرنمایش با بالاترین وزنه خود مشخص می شود که به نوبه خود بااعداد صحیح $\{q_\alpha\}$ تعیین می شود می توان هرنمایشِ کاهش ناپذیر ازیک جبر را با دیاگرام دینکین آن جبر مشخص کرد که روی نقاط آن اعداد صحیح مثبت $\{q_\alpha\}$ نوشته شده ا ند.

شکل ۱: هرنمایش از$su(3)$ با دوعدد صحیح q_1 و q_2 تعیین می شود.

۷ مثال ها

دراین بخش چند نمایش ازجبر $su(3)$ را مطالعه می کنیم. هرنمایش از این جبر با یک جفت عدد صحیح مشخص می شود. شکل (۱).

الف: نمایش $(1,0)$. دراین نمایش بالاترین وزنه باروابط زیرتعیین می شود:

$$\frac{2(\Lambda,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=1,\qquad \frac{2(\Lambda,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=0, \tag{75}$$

که درآن $\alpha_1=(1,0)$ و $\alpha_2=(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ ریشه های ساده جبرهستند. رابطه بالا به طوریکتا بالاترین وزنه را مشخص می کند:

$$\Lambda=\frac{1}{3}(2\alpha_1+\alpha_2)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}}). \tag{76}$$

بقیه وزنه های مجازعبارتنداز $\Lambda-\alpha_1$ و $\Lambda-\alpha_1-\alpha_2$. خواننده براحتی می تواند نشان دهد که تمام این وزنه ه اازانعکاس وایل ِبالاترین وزنه نسبت به ریشه های مختلف بدست می آیند. دیاگرام وزنه ها درشکل (۲) نشان داده شده است. این نمایش ۳ بعدی اصطلاحاً نمایش کوارک از $su(3)$ خوانده می شود.

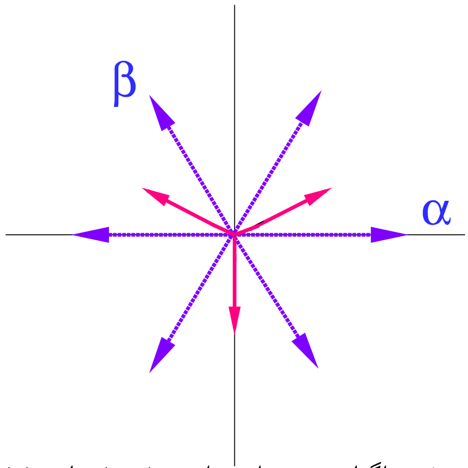
ب: نمایش $(0,1)$. دراین نمایش بالاترین وزنه باروابط زیرتعیین می شود:

$$\frac{2(\Lambda,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=0,\qquad \frac{2(\Lambda,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=1, \tag{77}$$

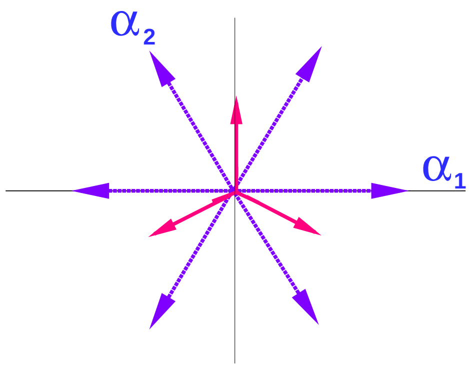
که درآن $\alpha_1=(1,0)$ و $\alpha_2=(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ ریشه های ساده جبرهستند. رابطه بالا به طوریکتا بالاترین وزنه را مشخص می کند:

$$\Lambda=\frac{1}{3}(\alpha_1+2\alpha_2)=(0,\frac{1}{\sqrt{3}}). \tag{78}$$

بقیه وزنه های مجازعبارتنداز $\Lambda-\alpha_2$ و $\Lambda-\alpha_1-\alpha_2$. خواننده براحتی می تواند نشان دهد که تمام این وزنه ه اازانعکاس وایل ِبالاترین وزنه نسبت به ریشه های مختلف بدست می آیند. دیاگرام وزنه ها درشکل (۳) نشان داده شده است. این نمایش ۳ بعدی اصطلاحاً نمایش پاد—کوارک از $su(3)$ خوانده می شود.



شکل ۲: دیاگرام وزنه هادرنمایش $(1,0)$ برای $su(3)$.



شکل ۳: دیاگرام وزنه هادرنمایش $(0,1)$ برای $su(3)$.

درتمرین های این درس از خواننده خواسته شده است که دیاگرام وزنه های چند نمایش ساده از $su(3)$ مثل نمایش های $(1,1)$، $(2,0)$ و $(0,2)$ را بدست آورد.

پایان درس نظریه گروه (79)