

درس سیزدهم: طبقه بندی جبرهای ساده

۱ مقدمه

در شاخه ای از ریاضیات بعد از تعریف یک ساختار ریاضی مثل گروه یا جبر و آشنا شدن با مثال های آن و بررسی خواص آن ساختار، مهم ترین هدفی که دنبال می شود طبقه بندی تمام انواع اشیایی است که مصداقی از آن ساختار هستند. یک طبقه بندی کامل از گروه های متناهی هنوز انجام نشده است. در مورد گروه های لی دیدیم که می توان ساختمان گروه را از روی جبرلی آن بدست آورد. در درس دهم دیدیم که برای هر جبرلی رابطه زیر وجود دارد:

$$\begin{aligned} \text{Lie Algebra} &= \text{Solvable} \oplus_s \text{Semisimple} \\ \text{Semisimple} &= \text{Simple} \oplus \text{Simple} \oplus \text{Simple} \dots \end{aligned} \quad (1)$$

علیرغم مطالب زیادی که در مورد جبرهای حل پذیر دانسته شده است هنوز یک طبقه بندی کامل از آنها بدست نیامده است. خوشبختانه جبرهای ساده و در نتیجه جبرهای نیم ساده به طور کامل طبقه بندی شده اند. هدف ما در این درس آن است که نشان دهیم که این طبقه بندی چگونه انجام شده است و نتیجه طبقه بندی چیست. در این بخش می خواهیم تمام جبرهای ساده را طبقه بندی کنیم. دیدیم که تمامی اطلاعات هر جبر ساده را می توان در دیاگرام دینکین آن گنجانده. بنابراین روشی که ما در این درس بکار می بریم آن است که تمام دیاگرام های دینکین را طبقه بندی کنیم.

نخست می خواهیم ببینیم که ساده بودن یک جبرلی چگونه در دیاگرام دینکین آن منعکس می شود. این بررسی ما را به یک نتیجه ساده می رساند و آن اینکه یک جبرلی ساده است اگر و فقط اگر دیاگرام دینکین آن یک پارچه باشد یعنی از دو قسمت مجزا تشکیل نشده باشد.

تعریف: یک سیستم ریشه های ساده که آن را با Π نشان می دهیم تجزیه پذیر خوانده می شود هرگاه بتوان آن را به دو قسمت متعامد تجزیه کرد. به عبارت دیگر سیستم Π تجزیه پذیر است هرگاه بتوان نوشت:

$$\Pi = \Pi_1 \oplus \Pi_2 \quad | \quad \Pi_1 \perp \Pi_2. \quad (2)$$

طبیعی است که دیاگرام دینکین چنین سیستمی از دو قسمت مجزا تشکیل خواهد شد، زیرا بنا بر قواعد دینکین ریشه های ساده ای که برهم عمود باشند با هیچ خطی به هم وصل نمی شوند.

حال نشان می دهیم که در یک چنین سیستمی زیر جبر مربوط به هر کدام از قسمت های Π_1 یا Π_2 یک زیر جبر ناورد تشکیل می دهند و بنابراین سیستم $\Pi = \Pi_1 \oplus \Pi_2$ متناظر با یک جبر ساده نیست.

قضیه: اگر یک سیستم ریشه ها تجزیه پذیر باشد، آنگاه

الف: ریشه های مربوط به دو قسمت مجزا بایکدیگر جابجا می شوند و

ب: هرکدام از قسمت ها همراه بایک قسمت از زیرجرکارتان یک زیرجرناوردا تشکیل می دهد.

اثبات الف: فرض کنید که $\alpha \in \Pi_1$ و $\beta \in \Pi_2$. می دانیم که $\beta - \alpha$ یک ریشه نیست. بنابراین پایین ترین پله نردبان α که روی β بنامی شود عبارت است از خود β که نتیجه اش این می شود که $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = -p$ که در آن $\beta + p\alpha$ بالاترین پله این نردبان است. اما باتوجه به شرط عمود بودن Π_1 بر Π_2 می فهمیم که $(\alpha, \beta) = 0$ و در نتیجه $p = 0$. این امر به این معناست که $\beta + \alpha$ نیز یک رشته نیست و در نتیجه $[E_\alpha, E_\beta] = 0$. یعنی هرریشه متعلق به Π_1 با هرریشه متعلق به Π_2 جابجایی می شود.

اثبات ب: فرض کنید که n_1 Π_1 بعدی و n_2 Π_2 بعدی باشد. از آنجا که ریشه های Π_1 بر ریشه های Π_2 عمود هستند می توانیم برای فضای ریشه ها پایه ای انتخاب کنیم که ریشه های متعلق به Π_1 تنها n_1 مولفه غیرصفر داشته باشند و ریشه های متعلق به Π_2 نیز n_2 مولفه غیرصفر متفاوت داشته باشند. در این صورت زیرجرکارتان C به طور طبیعی به دو زیرجبر C_1 و C_2 تقسیم می شود. در این صورت به طور سمبلیک روابط جابجایی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} [C_1, C_2] &= 0 & [C_1, \pi_2] &= 0 \\ [\pi_1, C_2] &= 0 & [\pi_1, \pi_2] &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

به عنوان یک تمرین ساده خواننده می تواند نشان دهد که اگر یک عنصر با ریشه های ساده جابجا شود در این صورت باتمام ریشه های جبر جابجا می شود. به عبارت بهتر می توان روابط بالا را به شکل زیرنوشت:

$$\begin{aligned} [C_1, C_2] &= 0 & [C_1, \sum_2] &= 0 \\ [\sum_1, C_2] &= 0 & [\sum_1, \sum_2] &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

این رابطه آخر بیان می کند که کل جبر A رامی توان به شکل زیرنوشت که در آن $A_1 = C_1 \oplus \sum_1$ و $A_2 = C_2 \oplus \sum_2$

$$A = A_1 \oplus A_2. \quad (5)$$

در نتیجه جبرلی A یک جبر نیم ساده است.

از این به بعد یک سیستم π یا π -system را به شکل زیرتعریف می کنیم.:

تعریف: یک سیستم π مجموعه ای از بردارهای حقیقی است به قسمی که



شکل ۱: تنها دیاگرام های دینکین سه نقطه ای .

الف: این سیستم به مفهومی که در بالا توضیح داده شد تجزیه ناپذیر است،

ب: بردارهای آن مستقل خطی هستند،

ج: به ازای هر دو بردار $\alpha, \beta \in \pi$ یک عدد صحیح است $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$.

هر π -سیستمی را می توان به شکل یکتا با دیاگرام دینکین آن توصیف کرد.

در واقع یک π -system با تعریفی که در بالا ارائه کردیم مجموعه ریشه های ساده یک جبر لی ساده است. بنابراین طبقه بندی جبرهای ساده معادل است با طبقه بندی π -system ها و یا طبقه بندی دیاگرام های دینکین یکپارچه.

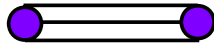
در یک π -سیستم می توان بعضی از بردارها را حذف کرد. این کار به هیچ کدام از خواص الف تا ج لطمه نمی زند. بنابراین هر زیرسیستم از یک π -سیستم خود یک π -سیستم است. این نکته در بحث های بعدی ما اهمیت بسیار زیاد دارد. حال قدم به قدم طبقه بندی سیستم های π یا دیاگرام های دینکین را انجام می دهیم. در ادامه فرقی بین یک دیاگرام دینکین و یک π -سیستم قائل نخواهیم شد. با توجه به این که یک زیرسیستم π خود می تواند یک π -سیستم باشد، این امر به این معناست که در یک دیاگرام دینکین اگر بعضی از نقاط و تمام اتصالات آنها را حذف کنیم، باز هم یک دیاگرام دینکین مجاز بدست می آید. در استدلال های آینده مکرراً از این نکته استفاده می کنیم.

قضیه اول: تنها π -سیستم متشکل از ۳ بردار به یکی از دو فرم نشان داده شده در شکل (۱) است.

اثبات: می دانیم که مجموع زوایای بین سه بردار می بایست از 360° درجه کمتر باشد. از طرفی تنها زوایای ممکن در یک π -سیستم عبارتند از $90^\circ, 120^\circ, 135^\circ$ و 150° درجه. سه زاویه 120° درجه نمی توانیم داشته باشیم زیرا با استقلال خطی بردارها منافات داریم. بنابراین حتماً یکی از زوایا می بایست 90° درجه باشد. ضمناً دوزاویه 90° درجه نمی توانیم داشته باشیم زیرا منجر به تجزیه π -سیستم به دو قسمت می شود. بنابراین تنها امکانات مجاز برای زوایا عبارتند از:

الف: $90^\circ, 120^\circ$ و 120° درجه که مطابق با شکل a در (۱) است و

ب: $90^\circ, 120^\circ$ و 135° درجه که مطابق با شکل b در (۱) است.



شکل ۲: تنها دیاگرام دینکین با اتصال سه خطی.

از آنجا که هر زیرسیستم از یک π -سیستم خود یک π -سیستم است نتیجه ای که از این قضیه بدست می آید این است که هر سه ریشه متصل و در نتیجه تجزیه ناپذیر از یک π -سیستم می بایست در یکی از دو حالت نشان داده شده در شکل (۱) است. این نتیجه نشان می دهد که سه بردار ریشه نمی توانند در رئوس یک مثلث قرار بگیرند. بنابراین هیچ دیاگرام دینکینی نمی تواند دارای یک مثلث باشد، یعنی سه تا از ریشه های آن به هم وصل شده باشند.

قضیه دوم: تنها دیاگرام دینکین با سه خط عبارت است از دیاگرام نشان داده شده در (۲).

اثبات: هرگاه یک نقطه دیگر بخوایم به این دیاگرام وصل کنیم حداقل مجموع زوایا عبارت خواهد بود از $90 + 120 + 150 = 360$ که با استقلال خطی بردارها منافات دارد.

قضیه سوم: اگر در یک دیاگرام دینکین دو نقطه بایک خط به هم متصل باشند آنگاه دیاگرامی که در آن خط وسط از بین رفته و دو نقطه یکی شده اند نیز یک دیاگرام دینکین است. شکل (۳).

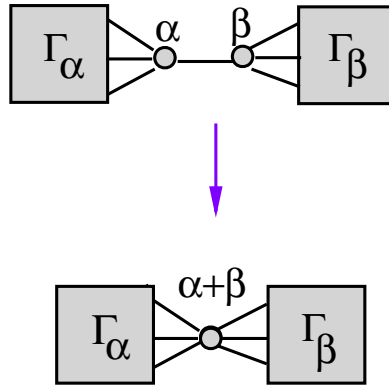
اثبات: دو ریشه مورد نظر را α و β می نامیم. بدلیل قضیه ای که در بالا ثابت کردیم هیچ نقطه ای وجود ندارد که هم به α و هم به β متصل باشد. بنابراین ساختمان ریشه ها مطابق شکل ۳ است، یعنی هیچ ریشه ای وجود ندارد که هم به α باشد و هم به β . البته در این شکل کمی عدم دقت وجود دارد به این معنا که بخش های Γ_α و Γ_β لزوماً دو بخش کاملاً مجزا را تشکیل نمی دهند. ولی این امر در استدلال این قضیه خللی وارد نمی کند.

چون زاویه بین دو ریشه α و β 120° درجه است بنابراین نتیجه می گیریم که $|\alpha + \beta| = |\alpha| = |\beta|$. حال اگر $\gamma \in \Gamma_\beta$ باشد داریم $\gamma \cdot (\alpha + \beta) = \gamma \cdot \alpha$ و اگر $\gamma \in \Gamma_\alpha$ آنگاه $\gamma \cdot (\alpha + \beta) = \gamma \cdot \alpha$. بنابراین در شکل (۳) دیاگرام بالایی را می توان تبدیل به دیاگرام پایینی کرد و هنوز یک دیاگرام دینکین مجاز بدست آورد. قضیه فوق دو نتیجه اساسی دارد.

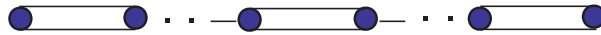
نتیجه اول: هیچ دیاگرام دینکینی بیش از یک اتصال دوخطی ندارد.

نتیجه دوم: هیچ دیاگرام دینکینی شامل حلقه نیست.

اثبات نتیجه اول: اولاً هیچ دیاگرام دینکینی نمی تواند تماماً از اتصال های دوگانه درست شده باشد زیرا قبلاً دیدیم که هر سه ریشه متصل می بایست در یکی از دو حالت نشان داده شده در شکل (۱) قرار بگیرند. بنابراین می بایست در کنار اتصال های دوخطی، اتصال های یک خطی نیز وجود داشته باشند. فرض کنید که چنین دیاگرام دینکینی مجاز باشد. در این صورت



شکل ۳: یک حرکت مجاز در دیاگرام های دینکین . منظور از Γ_α تمام نقاطی است که به α متصل اند. همینطور برای Γ_β .



شکل ۴: دو اتصال دو خطی در یک دیاگرام دینکین که بین آنها اتصال های یک خطی وجود دارد.

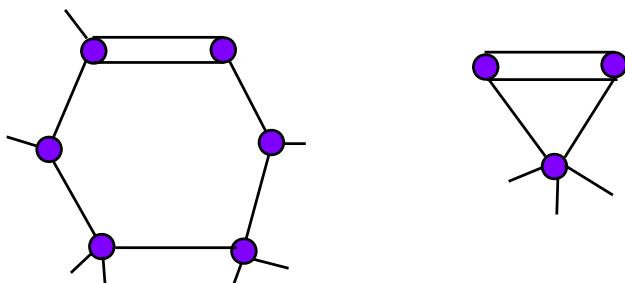
وضعیتی مثل شکل (۴) خواهیم داشت.

اما بنابراین قضیه قبلی می توانیم اتصال های وسطی را یک به یک حذف کنیم و به یک دیاگرام دینکین برسیم که اتصال های دوخطی آن کناریکدیگر قرار گرفته اند که می دانیم مجاز نیست. بنابراین دیاگرام دینکین اولیه نمی تواند یک دیاگرام دینکین مجاز باشد.

اثبات نتیجه ب: فرض کنید که یک دیاگرام مثل دیاگرام سمت چپ در شکل (۵) برقرار باشد. در این صورت می توانیم با حذف کردن اتصالات میانی آن به دیاگرام سمت راست در همان شکل برسیم که می دانیم مجاز نیست. قضیه چهارم: در شکل (۳) اگر دیاگرام (a) یک دیاگرام دینکین باشد، آنگاه دیاگرام (b) نیز یک دیاگرام دینکین است.

اثبات: از دیاگرام (a) داریم:

$$\alpha \cdot \beta = -1, \quad \alpha \cdot \gamma = -1, \quad \beta \cdot \gamma = 0. \quad (6)$$



شکل ۵: با حذف کردن اتصالات یک خطی در دیاگرام سمت چپ به دیاگرام سمت راست می‌رسیم که یک دیاگرام غیرمجاز است.



شکل ۶: یک حرکت مجاز در دیاگرام‌های دینکین: هرگاه دیاگرام سمت راست مجاز باشد دیاگرام سمت چپ نیز مجاز است.

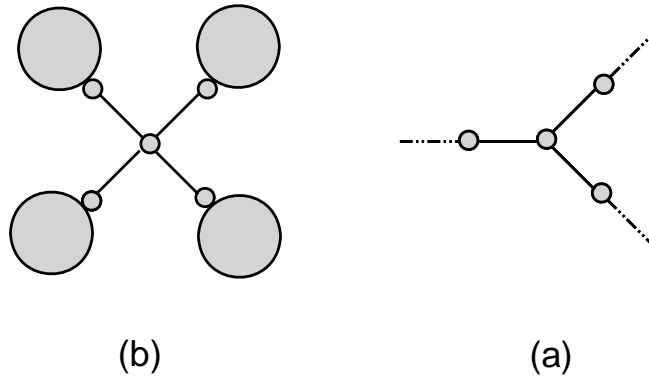
طول ریشه‌ها را نیز برابر یک گرفته ایم. حال بدست می‌آوریم:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = -2, \quad |\beta + \gamma|^2 = 4, \quad (7)$$

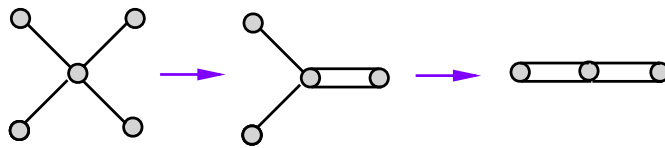
که از آن نتیجه می‌گیریم زاویه بین α و $\beta + \gamma$ برابر است با 135° درجه. بنابراین دیاگرام b نیز یک دیاگرام دینکین مجاز می‌شود.

یک نتیجه از این قضیه آن است که تنها شاخه ممکن در یک دیاگرام دینکین عبارت است از یک شاخه سه تایی، مثل دیاگرام a در (۷). برای اثبات آن فرض کنید که یک دیاگرام دینکین مثل دیاگرام b در (۷) داشته باشیم. می‌توانیم تنها شاخه وسطی را به عنوان یک دیاگرام دینکین در نظر بگیریم، زیرا هر زیرسیستم یک $-\pi$ سیستم تجزیه ناپذیر خود یک $-\pi$ سیستم است. حال شاخه وسطی را در نظر می‌گیریم و با کابردن مکرر قضیه چهارم به دیاگرامی می‌رسیم که قبلاً ناممکن بودن آن را ثابت کرده ایم، شکل (۸).

یک نتیجه دیگر این قضیه آن است که هیچ دیاگرام دینکینی نمی‌تواند هم یک شاخه داشته باشد و هم یک خط دوپل. هیچ دیاگرام دینکینی نیز نمی‌تواند دارای دو شاخه باشد.



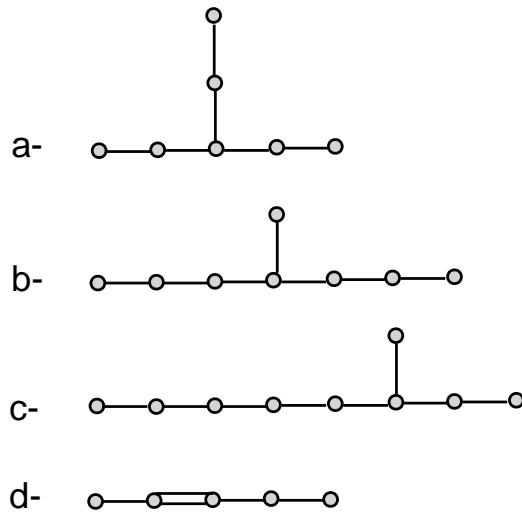
شکل ۷: تنها شاخه های مجاز در یک دیاگرام دینکین شاخه های سه تایی هستند.



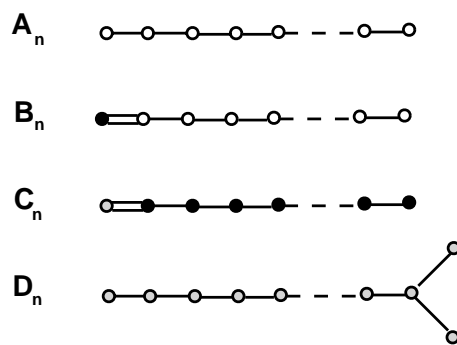
شکل ۸: هرگاه وجود یک شاخه ۴ تایی یا بیشتر را فرض کنیم با انجام عملیات مجاز به یک دیاگرام غیرممکن می رسیم.

قضیه پنجم: هیچ دیاگرام دینکینی نمی تواند یکی از دیاگرام های نشان داده شده در (۹) را شامل باشد.

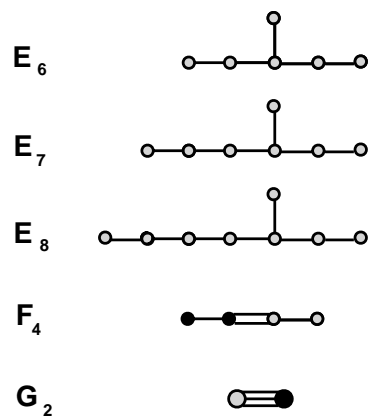
اثبات: می توان نشان داد که بردارهای مربوط به این دیاگرام ها مستقل خطی نیستند. کافی است که مجموعی از بردارهای مربوط به این دیاگرام ها به صورت $y = \sum_i p_i \alpha_i$ در نظر گرفت که در آن p_i ها اعداد صحیح مثبت هستند و نشان داد که $y \cdot y = 0$. یافتن این ضرایب را به عنوان تمرین به عهده خواننده می گذاریم. بادر نظر گرفتن تمام محدودیت های اعمال شده تنها دیاگرام های دینکین مجاز مطابق شکل های (۱) و (۱۱) خواهند بود. شکل (۱) نشان دهنده سری جبرهای ماتریسی کلاسیک است که در درس یازدهم به توصیف آنها پرداخته ایم. شکل (۱۱) نشان دهنده جبرهای لی موسوم به جبرهای استثنایی است یا *Exceptional Lie Algebras* است. در این درس فرصت پرداختن تفصیلی به ساختمان این جبرها را نداریم.



شکل ۹: دیاگرام هایی که با استقلال خطی بردارها منافات دارند و بنابراین دیاگرام دینکین نیستند.



شکل ۱۰: دیاگرام های دینکین مربوط به جبرهای ماتریسی کلاسیک .



شکل ۱۱: دیاگرام های دینکین مربوط به جبرهای لی استثنایی .