ساختمان جبرهای نیم ساده: قسمت دوم

۱ مقدمه

تا کنون سعی کردیم که خواص کلی جبرهای نیم ساده را با ذکر مهمترین مثال های آنها بررسی کنیم. با مفاهیمی مثل فضای ریشه‌ها، ریشه‌های مثبت و ساده و دیاگرام دینکین آشنا شدیم. از آنجا که قصد ما در درس گذشته تنها آشنایی با این خواص بود، تنها به ذکر این خواص اکتفا کردیم. در این درس می خواهیم تا آنجا که ممکن است خواص گفته شده را از تعاریف اولیه ثابت کنیم.

۲ ساختمان فضای ریشه ها دریک جبر نیم ساده

ازقضیه زیردرآینده استفاده می کنیم. اثبات آن را خواننده می تواند درکتاب های جبرلی پیداکند مثل کتاب ِ$Humphereys$.

قضیه بدون اثبات: (کارتان) ویژه مقدارهای α هیچ کدام واگنی ندارند. ویژه مقادیر نیز α نیز همه حقیقی هستند.

پس از این پذیرفتن این قضیه می توانیم دیگر قضایا را یک به یک ثابت کنیم.

قضیه: فرض کنید که α و β دوریشه متعلق به $\sum$ باشند دراین صورت اگر $\alpha+\beta\in\sum$ آنگاه

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta} \tag{1}$$

که درآن $N_{\alpha\beta}$ عددی است که بعداً باید تعیین شود . اما اگر $\alpha+\beta\ \notin\ \sum$ آنگاه

$$[E_\alpha, E_\beta] = 0. \tag{2}$$

اثبات: اتحاد جاکوبی را به صورت

$$[a,[b,c]] = [[a,b],c] + [b,[a,c]] \tag{3}$$

درنظرگرفته و تعویضگر زیرراحساب می کنیم:

$$[H_i,[E_\alpha,E_\beta]] \quad = \quad [[H_i,E_\alpha],E_\beta] + [E_\alpha,[H_i,E_\beta]] = [\alpha_i E_\alpha, E_\beta] + [E_\alpha, \beta_i E_\beta]$$

$$= \quad (\alpha_i + \beta_i)[E_\alpha, E_\beta]. \tag{4}$$

هرگاه $\alpha + \beta \in \sum$، آنگاه باتوجه به اینکه ریشه ها واگنی ندارند رابطه (1) را نتیجه می گیریم. اگرهم $\alpha + \beta \notin \sum$ آنگاه معنای این رابطه این است که ویژه بردار مربوطه برابرباصفراست یعنی $[E_\alpha, E_\beta] = 0$.

قضیه: فرض کنید که α و $-\alpha$ دو ریشه در $\sum$ باشند. دراین صورت خواهیم داشت :

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = C^i_{\alpha.-\alpha} H_i, \tag{5}$$

که درآن $C^i_{\alpha,-\alpha}$ ها ثابت هستند.

اثبات: باهمان محاسبه قبلی بدست می آوریم که $[H_i, [E_\alpha, E_{-\alpha}]] = 0$. باتوجه به ماکزیمال بودن زیرجبرکارتان نتیجه می گیریم که $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ ترکیبی خطی ازعناصرکارتان است. بعداً ضرایب ساختاری $C^i_{\alpha,-\alpha}$ را برحسب ریشه ها تعیین می کنیم.

۱.۲ متریک کیلینگ درپایه کارتان

پایه ای را که معرفی کرده ایم پایه کارتان می نامند. دراینجا می خواهیم شکل متریک کیلینگ را دراین پایه بدست بیاوریم. خواهیم دید که متریک کیلینگ دراین پایه شکل خیلی ساده ای دارد.
قضیه: دریک جبرلی نیم ساده

الف: به ازای هر H_i و هر E_α رابطه زیربرقراراست:

$$K(H_i, E_\alpha) = 0 \tag{6}$$

که درآن K فرم کیلینگ است.

ب: به ازای هردوریشه α و β،

$$K(E_\alpha, E_\beta) = 0 \quad \text{اگر} \quad \alpha + \beta \neq 0. \tag{7}$$

پ: به ازای هر ریشهٔ α یک ریشه $-\alpha$ و جود دارد.

اثبات الف: می دانیم که فرم کیلینگ دررابطه زیرصدق می کند:

$$K(x, [y, z]) = K(y, [z, x]) = K(z, [x, y]). \tag{8}$$

حال به ازای هر H_j خواهیم داشت:

$$K(H_i,[H_j,E_\alpha])=K(E_\alpha,[H_i,H_j])=K(E_\alpha,0)=0 \tag{9}$$

وازآنجا

$$K(H_i,\alpha_j E_\alpha)=\alpha_j\ K(H_i,E_\alpha)=0 \quad \forall j. \tag{10}$$

ازآنجا که لااقل یکی از α_j ها مخالف صفراست خواهیم داشت $K(H_i,E_\alpha)=0$.

اثبات ب: دو ریشه E_α و E_β رادرنظرمی گیریم. به ازای هر H_i داریم:

$$K(E_\alpha,[E_\beta,H_i])=K(E_\beta,[H_i,E_\alpha]) \tag{11}$$

وبااستفاده از روابط جابجایی

$$K(E_\alpha,-\beta_i E_\beta)=K(E_\beta,\alpha_i E_\alpha) \tag{12}$$

باتوجه به خطی بودن فرم K وتقارن آن نتیجه خواهیم گرفت که

$$(\alpha_i+\beta_i)K(E_\alpha,E_\beta)=0 \quad \forall i. \tag{13}$$

بنابراین اگر $\alpha+\beta\neq 0$ نتیجه می گیریم که لااقل یکی از عناصر $(\alpha+\beta)_i$ مخالف باصفراست و ازآنجا حکم قضیه را نتیجه می گیریم.

اثبات پ: اگر به ازای یک ریشه α، ریشه $-\alpha$ در $\sum$ وجود نداشته باشد، یعنی برای همه β ها داشته باشیم $\alpha+\beta\neq 0$، نتیجه می گیریم که

$$K(E_\alpha,E_\beta)=0 \quad \forall\beta. \tag{14}$$

اما باتوجه به اینکه قبلاً ثابت کردیم $K(E_\alpha,H_i)=0 \quad \forall\ i$، این رابطه به این معناست که $K(E_\alpha,X)=0$ که درآن X هرعنصری از جبراست، یعنی یک سطر کامل از ماتریس کیلینگ برابرباصفراست که برای جبرنیم ساده چنین چیزی ممکن نیست. بنابراین حتماً می بایست برای هر α قرینه آن یعنی $-\alpha$ نیز وجود داشته باشد. می دانیم که باضرب کردن E_α و $E_{-\alpha}$ ها در ضرایب مناسب، مقدارریشه ها تغییرنمی کند. اما بااین کارمی توانیم کاری کنیم که $K(E_\alpha,E_{-\alpha})$ برابربا 1 شود. هرگاه اندیس های $i,j,\cdots$ را برای زیرجبر کارتان و اندیس های $\alpha,\beta,\cdots$ را برای ریشه هابکارببریم آنگاه نتایجی که بدست آورده ایم به معنای آن است که ماتریس کیلینگ فرم زیررادارد:

$$K_{i\alpha}=K_{\alpha i}=0, \qquad K_{\alpha,\beta}=\delta_{\alpha,-\beta}. \tag{15}$$

به عبارت دیگر

$$K = K' \bigoplus \sigma \oplus \sigma \oplus \sigma \cdots \oplus \sigma \tag{16}$$

که درآن K_r' ماتریس متقارن و غیرواگن r بعدی است و σ ماتریس زیراست :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

هرکدام از ماتریس های σ مربوط به یک جفت ریشه α و $-\alpha$ است.

قضیه: به ازای هرریشه α رابطه جابجایی E_α و $E_{-\alpha}$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i. \tag{18}$$

اثبات: در درس قبل ثابت کردیم

$$f_{abc} = K([e_a, e_b], e_c). \tag{19}$$

هم چنین ثابت کردیم که این ضرایب دارای تقارن دوره ای هستند. بانماد گذاری های مربوط به این فصل بدست می آوریم

$$f_{\alpha,-\alpha,i} = f_{i,\alpha,-\alpha} = f_{i,\alpha,\beta} K^{\beta,-\alpha}. \tag{20}$$

اما می دانیم که $K^{\beta,-\alpha} = \delta\beta, \alpha$ بنابراین

$$f_{\alpha,-\alpha,i} = f^{\alpha}_{i,\alpha} = \alpha_i. \tag{21}$$

بابالابردن اندیس i درهردوطرف بدست می آوریم که $f^i_{\alpha,-\alpha} = \alpha^i$ و درنتیجه:

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i. \tag{22}$$

۲.۲ خلاصه

بهتراست دراینجاخلاصه روابط جابجایی جبررادرپایه های جدیدی که ساخته ایم گردآوری کنیم. این روابط به شکل زیرهستند:

$$
\begin{aligned}
&[H_i, H_j] = 0\\
&[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha\\
&[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} \quad if \quad \alpha+\beta \in \sum \quad 0 \;\; otherwise\\
&[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i.
\end{aligned} \tag{23}
$$

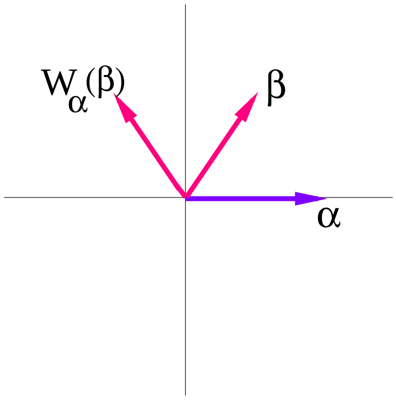
۳ ساختمان دیاگرام ریشه ها

درمثال های بخش قبل دیدیم که علی الاصول می توان درجبرمختلط شده معادله های ویژه مقداری $[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha$ را حل کرد و تمام ریشه ها و بردارهای متناظربا آنها را بدست آورد. بابدست آوردن این ریشه ها می توانیم روابط جبر را درپایه کارتان بنویسیم که ساختار جبر درآن روشن و ساده است. اما برای یک جبر n بعدی این کار به معنای قطری کردن ماتریس های n بعدی است و معلوم نیست که براحتی بتوان این ویژه مقدارها و ویژه بردارهای مربوطه را بدست آورد. قضیه‌حل معادلات چند جمله ای به ما می گوید که برای $n \geq 5$ حتی معلوم نیست که بتوان ویژه مقادیر را برحسب عبارات جبری بدست آورد.
خوشبختانه ساختمان جبر لی به ما اجازه می دهد که ویژه مقدارها یعنی ریشه هارا براحتی بدست بیاوریم . برای این کار حداکثر استفاده را از روابط جبر لی بخصوص اتحاد جاکوبی می کنیم. خواهیم دید که ریشه ها را می توان به عنوان بردارهای r بعدی دریک دیاگرام موسوم به دیاگرام ریشه ها یا $Root \;\; Diagram$ رسم کرد. این دیاگرام تقارن های بسیارجالبی دارد به نحوی که می توان بادانستن بخش کوچکی از آن تمام دیاگرام را بازسازی کرد.
دراین بخش می خواهیم ساختمان دیاگرام ریشه هاراتعیین کنیم. یکی از جالب ترین خصلت های جبرهای نیم ساده آن است که ساختمان هندسی این دیاگرام توسط خواص جبرلی به طور کامل مشخص می شود. خواهیم دید که این دیاگرام که دارای تقارن های هندسی جالبی است به طورکامل نوع جبر را مشخص می کند.
نخست درفضای ریشه ها که یک فضای حقیقی است ضرب داخلی زیرراتعریف می کنیم:

$$(\alpha, \beta) := \sum_{i=1}^{r} \alpha^i \beta_i. \tag{24}$$

قضیه: اگر α و β دو ریشه باشند، آنگاه

الف: $2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ یک عدد صحیح است،



شکل ۱: یک انعکاس وایل.

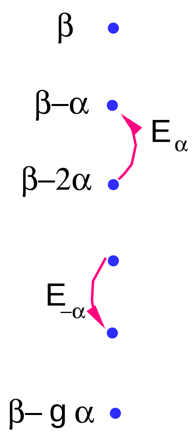
ب: $W_\alpha(\beta) := \beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ نیز یک ریشه است. به بیان دیگر انعکاس β نسبت به صفحه ای که بر α عمود است نیز یک ریشه است، شکل (۱) . ازآنجا که این خاصیت برای هردوریشه ای برقراراست، دیاگرام ریشه ها تقارن های بسیارجالبی پیدا می کند وماراقادرمی سازد که باداشتن تعدادی از ریشه ها بقیه رابااستفاده از این نوع انعکاس ها بدست آوریم. این انعکاس ها انعکاس وایل $Weyl\ \ Reflection$ نامیده می شوند.

اثبات ِالف: نخست فرض کنید که β چنان باشد که $\beta + \alpha$ دیگر یک ریشه نباشد. حال با استفاده از $E_{-\alpha}$ رشته ای از ریشه های

$$\beta, \quad \beta - \alpha, \quad \beta - 2\alpha, \quad \cdots \quad \beta - g\alpha \tag{25}$$

را ایجاد می کنیم به طوریکه $\beta - (g+1)\alpha \notin \sum$. این رشته را یک نردبان β درجهت α می خوانیم که بالاترین پله آن β و پایین ترین پله آن $\beta - g\alpha$ است. دراین نردبان E_α مثل یک عملگر بالابر و $E_{-\alpha}$ مثل یک عملگرپایین بر عمل می کند. ازاین به بعد چنین نردبانی را با علامت $L_\alpha(\beta - g\alpha, \beta)$ نشان می دهیم. شکل (۲) چنین نردبانی را نشان می دهد:
با عملگر $E_{-\alpha}$ می توانیم از پله های این نردبان پایین بیاییم :

$$\begin{aligned}
[E_{-\alpha}, E_\beta] &= N_{-\alpha\beta} E_{\beta-\alpha} =: E'_{\beta-\alpha}, \\
[E_{-\alpha}, E'_{\beta-\alpha}] &= E'_{\beta-2\alpha}, \\
\cdots &= \cdots \\
[E_{-\alpha}, E'_{\beta-k\alpha}] &= E'_{\beta-(k+1)\alpha}, \\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$



شکل ۲: یک نردبان از نوع $L_\alpha(\beta - g\alpha, \beta)$

$$[E_{-\alpha}, E'_{\beta-g\alpha}] \quad = \quad 0. \tag{26}$$

علامت $'$ در E_α به این معناست که هرنوع ضریب ساختاری را در E_α جذب کرده و آن را E'_α نام نهاده‌ایم.

حال ازهمین نردبان می توانیم بااثر E_α بالابرویم: خواهیم داشت:

$$[E_\alpha, E'_{\beta-(j+1)\alpha}] = \mu_{j+1} E'_{\beta-j\alpha}, \quad j = g-1, g-2, \cdots \ , 1, 0. \tag{27}$$

که درآن μ_{j+1} ضرایبی است که دانستن مقدار آنها دراین استدلال مهم نیست. توجه کنید که باتوجه به اینکه β بالاترین پله نردبان α است داریم

$$[E_\alpha, E'_\beta] = 0. \tag{28}$$

می توانیم یک رابطه تکرار برای μ_j ها بدست بیاوریم. داریم

$$\begin{aligned}
[E_\alpha, E'_{\beta-(j+1)\alpha}] &= [E_\alpha, [E_{-\alpha}, E'_{\beta-j\alpha}]] \\
&= [[E_\alpha, E_{-\alpha}], E'_{\beta-j\alpha}] + [E_{-\alpha}, [E_\alpha, E'_{\beta-j\alpha}]] \\
&= \alpha^i [H_i, E'_{\beta-j\alpha}] + [E_{-\alpha}, [E_\alpha, E'_{\beta-j\alpha}]] \\
&= \alpha^i [H_i, E'_{\beta-j\alpha}] + [E_{-\alpha}, \mu_j E'_{\beta-(j-1)\alpha}] \\
&= ((\alpha, \beta - j\alpha) + \mu_j) E'_{\beta-j\alpha}.
\end{aligned} \tag{29}$$

بنابراین رابطه تکرارزیررا بدست می آوریم:

$$\mu_{j+1} = (\alpha,\beta) - j(\alpha,\alpha) + \mu_j, \qquad . \tag{30}$$

حال دقت می کنیم که

$$\mu_0 = 0 \qquad \mu_{g+1} = 0, \tag{31}$$

و روابط (30) را جمع می زنیم و ازشرط مرزی بالااستفاده می کنیم. خواهیم داشت

$$\sum_{j=0}^{g} \mu_{j+1} = (g+1)(\alpha,\beta) - (\sum_{j=0}^{g} j)(\alpha,\alpha) + \sum_{j=0}^{g} \mu_j, \tag{32}$$

یا

$$(g+1)(\alpha,\beta) = (\sum_{j=0}^{g} j)(\alpha,\alpha) = \frac{g(g+1)}{2}(\alpha,\alpha), \tag{33}$$

وازآنجا

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = g. \tag{34}$$

حال فرض کنید که β درپله آخر نردبان نیست. بابالارفتن از این نردبان سرانجام به ریشه ای مثل $\beta + p\alpha$ می رسیم که بالاترین پله نردبان باشد. هم چنین باپایین رفتن از این نردبان به پله ای مثل $\beta - q\alpha$ می رسیم که پایین ترین پله نردبان باشد. درنتیجه‌مطابق باقضیه قبل برای این ریشه خواهیم داشت

$$\frac{2(\alpha,\beta + p\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = p + q, \tag{35}$$

وازآنجا

$$\boxed{\tfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = q - p,} \tag{36}$$

که برای هرنردبان $L_\alpha(\beta - q\alpha, \beta + p\alpha)$ برقراراست.

اثبات ب: درقسمت قبل دیدیم که به ازای هردوریشه α و β به قسمی که $\alpha+\beta$ یک ریشه نباشد یک نردبان با $g+1$ پله وجود دارد که درآن $g=\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$. ریشه های مربوط به این نردبان عبارتنداز:

$$\beta,\ \ \beta-\alpha,\ \ \beta-2\alpha,\ \ \beta-3\alpha,\ \ \cdots\beta-g\alpha. \tag{37}$$

کمی دقت نشان می دهد که این نردبان نسبت به انعکاس وایل تغییرنمی کند زیرا به ازای هرپله ای مثل $\beta-j\alpha$ برای $0\le j\le g$ انعکاس وایل نسبت به α عمل زیرراانجام می دهد:

$$\beta-j\alpha\longrightarrow\beta-j\alpha-\frac{2(\beta-j\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=\beta+(j-g)\alpha, \tag{38}$$

یعنی اینکه یک انعکاس وایل هرپله ای را به یک پله دیگر تبدیل می کند. چون هرریشه ای درون یکی از این نردبان هاست، این استدلال نشان می دهد که کل دیاگرام ریشه ها نسبت به انعکاس های وایل ناورداست.

دیدیم که به ازای هر ریشه $\alpha\in\sum$، ریشه $-\alpha$ نیز متعلق به $\sum$ است. یک سوال طبیعی این است که چه مضارب دیگری از α در $\sum$ وجود دارند؟ آیا ریشه هایی مثل 2α، 3α یا -2α نیز در$\sum$ وجود دارند؟ پاسخ این سوال درقضیه زیرداده شده است.

قضیه: اگر $\alpha\in\sum$، آنگاه تنها مضاربی از α که در $\sum$ وجود دارند عبارتند از $-\alpha,0,\alpha$.

اثبات: فرض کنید که $\beta=k\alpha$ یک ریشه باشد. دراین صورت می بایست

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}=\frac{2(\alpha,k\alpha)}{(k\alpha,k\alpha)}=\frac{2}{k} \tag{39}$$

یک عدد صحیح باشد. این قید تمام مضارب $k\alpha$ با $k>2$ را ممنوع می کند. حال نشان می دهیم که مضرب 2 نیز مجازنیست.

فرض کنید که ریشه های α و 2α در$\sum$ وجود داشته باشند. می دانیم که $-\alpha$ نیز در $\sum$ وجود دارد. چون قبلاً ثابت کرده ایم که ریشه 3α در $\sum$ وجود ندارد نتیجه می گیریم که $[E_\alpha,E_{2\alpha}]=0$. حال براکت دو طرف را با $E_{-\alpha}$ حساب می کنیم و ازاتحاد جاکوبی استفاده می کنیم:

$$0=[E_\alpha,E_{2\alpha}]\longrightarrow 0=[E_{-\alpha},[E_\alpha,E_{2\alpha}]\longrightarrow 0=[[E_{-\alpha},E_\alpha],E_{2\alpha}]+[E_\alpha,[E_{-\alpha},E_{2\alpha}] \tag{40}$$

حال از روابط جبر استفاده می کنیم که برمبنای آن $\forall\ \gamma\quad [H_i,E_\gamma]=\gamma_iE_\gamma$ ، $[E_\alpha,E_{-\alpha}]=\alpha^iH_i$ و $[E_{-\alpha},E_{2\alpha}]=NE_\alpha$ که درآن N یک ثابت است.
خواهیم داشت:

$$0=\alpha^i[H_i,E_{2\alpha}]+[E_\alpha,NE_\alpha]\longrightarrow 0=\alpha^i(2\alpha_iE_{2\alpha})\longrightarrow 2(\alpha,\alpha)E_{2\alpha} \tag{41}$$

اما چون (α,α) نمی تواند مساوی صفر شود بنابراین نتیجه می گیریم که $E_{2\alpha}=0$ که به معنای آن است که ریشه 2α در $\sum$ وجود ندارد.

قضیه: هرنردبان ازریشه ها حداکثر شامل چهارریشه است. به عبارت دیگر به ازای هردوریشه α و β، عدد صحیح $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ تنها می تواند یکی از اعداد زیرباشد:

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=0,\ \ \pm1,\ \ \pm2,\ \ \pm3. \tag{42}$$

این رابطه درواقع بیان می کند که نردبان ۵ پله ای یابالاتراز آن وجود ندارد.

اثبات: فرض کنید که یک نردبان با ۵ پله یابیشتر وجود داشته باشد. یک زیررشته ۵ تایی از این نردبان به صورت زیردرنظرمی گیریم:

$$\beta-2\alpha,\quad \beta-\alpha,\quad \beta,\quad \beta+\alpha,\quad \beta+2\alpha. \tag{43}$$

حال دقت می کنیم که باتوجه به قضیه قبلی $\beta+2\alpha+\beta=2(\beta+\alpha)\notin\sum$. هم چنین $\beta+2\alpha-\beta=2\alpha\notin\sum$. بنابراین ریشه $\beta+2\alpha$ به تنهایی یک نردبان تک پله ای رادرجهت β تشکیل می دهد. باتوجه به رابطه (36) خواهیم داشت:

$$(\beta+2\alpha,\beta)=0. \tag{44}$$

استدلال بالا را می توانیم برای $\beta-2\alpha$ نیزتکرارکنیم که نتیجه اش آن خواهد بود که $\beta-2\alpha$ نیز یک نردبان تک پله ای درجهت β است. درنتیجه بازهم باتوجه به رابطه (36) خواهیم داشت:

$$(\beta-2\alpha,\beta)=0. \tag{45}$$

ازترکیب دو رابطه (44،45) بدست می آوریم $(\beta,\beta)=0$ ویا $\beta=0$ که غیرممکن است. بنابراین بافرض وجود یک نردبان بیش از ۴ پله ای به تناقض رسیدیم. این اثبات قضیه را کامل می کند.

۱.۳ ریشه های مثبت و ریشه های ساده

دیدیم که به ازای هرریشه α یک ریشه $-\alpha$ وجود دارد. این امر به ما امکان می دهد که تنها خواص نیمی از ریشه ها را مطالعه کنیم. می توانیم فضای ریشه ها را به ریشه های مثبت و منفی تقسیم کنیم. ریشه های مثبت را به صورت زیرتعریف می کنیم:

تعریف: یک ریشه را ریشه مثبت یا $positive\ \ root$ می گوییم هرگاه اولین مولفه غیرصفرآن مثبت باشد. مجموعه ریشه های مثبت را با $\sum^+$ نشان می دهیم. این تعریف به مااجازه می دهد که برروی تمام ریشه ها یک ترتیب اعمال کنیم به این

ترتیب که برای هردوریشه $\alpha,\beta \in \sum$ می گوییم $\alpha > \beta$ اگر $\alpha - \beta \in \sum^+$ باشد. واضح است که این رابطه یک رابطه ترتیب است به این معنی که از $\alpha > \beta$ و $\beta > \gamma$ می توان نتیجه گرفت که $\alpha > \gamma$.

تعریف: یک ریشه ساده یا $simple \;\; root$ ریشه مثبتی است که نتوان آن را به صورت مجموع دو ریشه دیگر نوشت. مجموعه ریشه های ساده را با $\prod$ نشان می دهیم.

قضیه: برای هردوریشه متعلق به $\sum$ داریم:

$$-3 \leq \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \leq 3. \tag{46}$$

اثبات: فرض کنید که $\beta_{\max}$ بالاترین پله یک نردبان β که روی ریشه مثبت α ساخته می شود باشد. اعضای این رشته را با $\beta_{\max}, \;\; \beta_{max}-\alpha, \;\; \beta_{max}-2\alpha, \;\; \beta_{\max}-g\alpha$ نشان می دهیم. قبلاً نشان دادیم که $g=\frac{2(\beta_{\max},\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$. ازقضایای قبلی می دانیم که $g \leq 3$. بنابراین براحتی معلوم می شود که برای هرعضوی از این رشته مثل β رابطه زیربرقراراست:

$$0 \leq \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \leq 3. \tag{47}$$

این رابطه برای وقتی است که α ریشه مثبت باشد. هرگاه ریشه های منفی را نیز درنظربگیریم به رابطه (46) می رسیم.

قضیه: زاویه بین هردوریشه تنهایکی از مقادیرزیراست:

$$\phi = 0^\circ, \quad 30^\circ, \quad 45^\circ, \quad 60^\circ, \quad 90^\circ, \quad 120^\circ, \quad 150^\circ. \tag{48}$$

اثبات: زاویه بین دوریشه دلخواه $\alpha,\beta \in \sum$ را با ϕ نشان می دهیم. داریم :

$$\cos^2\phi = \frac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)} \tag{49}$$

باتوجه به رابطه (47) بدست می آوریم:

$$\cos^2\phi = 0, \;\; \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad 1. \tag{50}$$

این رابطه قضیه را ثابت می کند.

تاکنون زاویه بین ریشه های مختلف را به مقادیرمعینی محدودکردیم. حال نشان می دهیم که نسبت طول ریشه ها نیزفقط مقادیرمعینی است. این کاررادرمراحل جداگانه انجام می دهیم.
ازآنجا که برای هر ریشه α یک ریشه $-\alpha$ وجود دارد می توانیم فقط زوایای کمتریامساوی با 90° را درنظربگیریم. دوریشه α و β درنظرمی گیریم وزاویه بین آنهارا با ϕ نشان می دهیم.

الف: اگر زاویه بین α, β برابر با صفرباشد می دانیم که حتماً $\beta = \pm\alpha$ و بنابراین $|\beta| = |\alpha|$.

ب: اگر زاویه بین دوریشه برابربا 30° باشد آنگاه $\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ازآنجا که $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ بدست می آوریم که

$$\frac{|\beta|}{|\alpha|}\cos\phi = 0,\ \frac{1}{2},\ 1, \frac{3}{2}, \tag{51}$$

یا

$$\frac{|\beta|}{|\alpha|} = 0,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{2}{\sqrt{3}},\ \ \sqrt{3}. \tag{52}$$

هم چنین باتوجه به اینکه $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)} = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ بدست می آوریم که

$$\frac{|\alpha|}{|\beta|}\cos\phi = 0,\ \frac{1}{2},\ 1, \frac{3}{2}. \tag{53}$$

ویا

$$\frac{|a|}{|b|} = 0,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{2}{\sqrt{3}},\ \ \sqrt{3}. \tag{54}$$

ازترکیب روابط (52 ،54) بدست می آوریم که تنها امکان موجود برای نسبت بین طول این دوریشه عدد $\sqrt{3}$ است.

ج: اگرزوایه بین دوریشه برابربا 45° باشد مطابق باروش قبل بدست می آوریم:

$$\frac{|\beta|}{|\alpha|} = 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2},\ \ \frac{3}{\sqrt{2}}, \tag{55}$$

و

90°	-
120°	1
135°	$\sqrt{2}$
150°	$\sqrt{3}$

جدول ۱:زاویه های ممکن بین ریشه های ساده و نسبت بین طول آنها. 1:

$$\frac{|\alpha|}{|\beta|} = 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2},\ \ \frac{3}{\sqrt{2}}, \tag{56}$$

که نشان می دهد تنهانسبت ممکن بین طول این دوریشه برابراست با $\sqrt{2}$.

د: اگر زاویه بین دو ریشه برابربا 90° باشد نسبت بین طول ریشه ها نامعین باقی می ماند. اثبات این امر را به تمرین ها واگذارمی کنیم.
جدول زیرزاویه های بین ریشه های ساده و نسبت بین طول آن ها رانشان می دهد:

۲.۳ خواص ریشه های ساده

قضیه: اگر α و β دوریشه ساده باشند، آنگاه $\alpha - \beta$ ریشه نیست.

اثبات: بدون نقض کلیت فرض می کنیم که $\alpha > \beta$ باشد. دراین صورت $\alpha - \beta$ نمی تواند یک ریشه باشد زیرا می توان نوشت $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$ که به این معناست که β مجموعی از دوریشه مثبت است که با ساده بودن β منافات دارد. اما $\beta - \alpha$ نیز نمی تواند یک ریشه باشد زیرا وجود آن به معنای وجود قرینه آن یعنی $\alpha - \beta$ نیزهست که دیدیم نمی تواند یک ریشه باشد.

قضیه: زوایه بین هردوریشه ساده حتماً منفرجه است.

اثبات: دیدیم که اگر α و β دوریشه باشند آنگاه $\alpha - \beta$ دیگر یک ریشه نیست. بنابراین درعبارت (36)، q برابرباصفراست. ودرنتیجه $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \leq 0$ که به این معناست که زاویه بین دوریشه ساده بیشتریامساوی با 90° است.

قضیه: ریشه های ساده مستقل خطی هستند وتعداد آنها برابربا رتبه جبراست.

اثبات: فرض کنید که چنین نباشد. دراین صورت می توان ضرایب غیرصفری مثل $\{k_\alpha\}$ یافت به قسمی که

$$\sum_{\alpha \in \prod} k_\alpha \alpha = 0. \tag{57}$$

ازآنجاکه همه ریشه های ساده مثبت هستند رابطه بالاتنهاوقتی می تواندبرقرارباشد بعضی از k_α ها مثبت و بقیه منفی باشند. مجموعه ریشه هایی را که باضریب مثبت یا صفر درجمع بالا وارد شده اند با $\prod^+$ و مجموعه ریشه هایی را که باضریب منفی وارد شده اند با $\prod^-$ نشان می دهیم. قرارمی دهیم

$$y := \sum_{\alpha\in\prod^+} k_\alpha \alpha, \qquad z := -\sum_{\alpha\in\prod^-} k_\alpha \alpha =: \sum_{\alpha\in\prod^-} k'_\alpha \alpha. \tag{58}$$

ازرابطه (57) واضح است که $y = z$ وبنابراین

$$(y, y) = (y, z). \tag{59}$$

اماازآنجاy و z هردو ترکیبی خطی از ریشه های ساده با ضرایب مثبت هستند $(k'_\alpha \geq 0)$ وزاویه بین هردوریشه ساده مساوی یابیشتراز $90°$ درجه است خواهیم داشت $(y, z) \leq 0$ و یا $(y, y) \leq 0$ که غیرممکن است. بنابراین ریشه های ساده مستقل خطی اند.

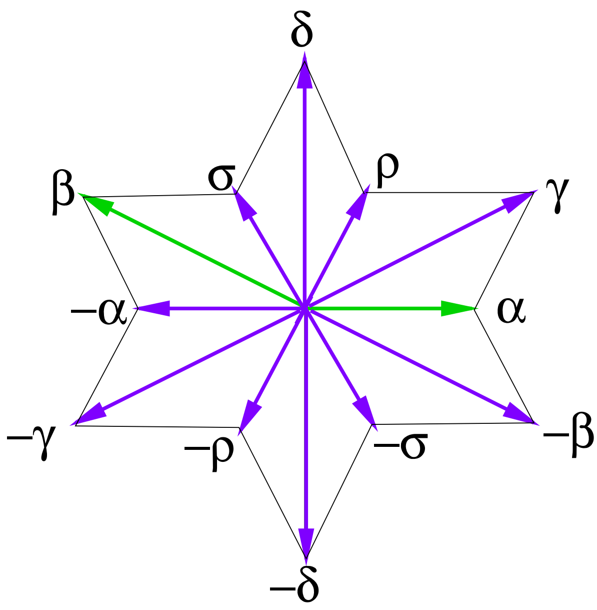
حال ثابت می کنیم که تعداد ریشه های ساده بارتبه جبریعنی r برابراست. مسلم است که تعداد آنها نمی تواند از r بیشترباشد زیر این بردارها r بعدی و مستقل خطی اند. حال ثابت می کنیم که تعداد آنها از r کمترنیز نمی تواند باشد چراکه دراین صورت برای جبر پایه ای چنان یافت که که یکی از مولفه ها مثلاً اولین مولفه ریشه ها ی ساده‌و درنیتجه اولین مولفه همه ریشه هابرابرباصفرباشد. تحت این شرایط ووابط جابجایی برای H_1 و بقیه عناصرجبر به فرم زیردرخواهد آمد:

$$\begin{aligned} [H_1, H_j] &= 0 \qquad && \forall\, i, \\ [H_1, E_\alpha] &= 0 \qquad && \forall \alpha \in \sum, \end{aligned} \tag{60}$$

اما این امر به این معناست که H_1 یک زیرجبرآبلی ناوردا ست که با نیم ساده بودن جبرمنافات دارد. اثبات قضیه دراینجا کامل می شود.

۴ تمام جبرهای لی با رتبه ۲

آنچه که دربخش پیشین آموخته ایم به ماامکان می دهد که تمام جبرهای لی نیم ساده را طبقه بندی کنیم. این طبقه بندی را به بخش های بعدی این درس موکول می کنیم. دراین بخش به عنوان مثال تمام جبرهای لی با رتبه ۲ را طبقه بندی می کنیم. می دانیم که هرچنین جبری دو ریشه ساده دارد. زوایه بین این دوریشه تنها می تواند یکی از مقادیر $90°$ ، $120°$ ، $135°$ یا $150°$ رااختیارکند. این امکانات را به ترتیب بررسی می کنیم.



شکل ۳: دیاگرام ریشه های جبر بارتبه ۲ وقتی که زاویه بین دوریشه ساده ۱۵۰ درجه است.

۱.۴ زاویه ۱۵۰ درجه

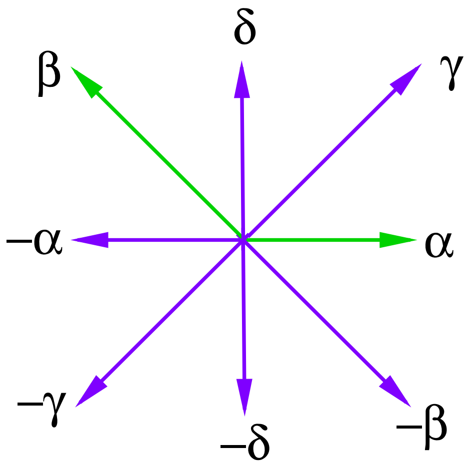
دراین حالت نسبت بین طول های دوریشه برابراست با $\sqrt{3}$. هرگاه یک ریشه را $\alpha = (1,0)$ بگیریم ریشه دوم برابرخواهد بود با $\beta = (-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$، شکل (۳). باانعکاس وایل β نسبت به α ریشه γ بدست می آید.
انعکاس وایل α نسبت به γ ریشه σ را بدست می دهد. هم چنین انعکاس وایل σ نسبت به α ریشه ρ را بدست می دهد.
بااضافه کردن ریشه های منفی دیاگرام کامل ریشه ها که بدست می آید که درکتب جبرلی اصطلاحاً به ستاره داود مشهوراست.
این دیاگرام مربوط به یک جبرلی با رتبه ۲ و بعد ۱۲ و مشهور به جبر G_2 است. مطالعه این دیاگرام نشان می دهد که ریشه های مثبت به ترتیب زیر برحسب ریشه های ساده نوشته می شوند:

$$\begin{aligned} \sigma &= \beta + \alpha \\ \rho &= \beta + 2\alpha \\ \gamma &= \beta + 3\alpha \\ \delta &= 2\beta + 3\alpha. \end{aligned} \tag{61}$$

۲.۴ زاویه ۱۳۵ درجه

دراین حالت نسبت طول ریشه ها برابربا $\sqrt{2}$ است. یک ریشه را $\alpha = (1,0)$ و دیگری را $\beta = (-\frac{1}{\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}})$ می گیریم، شکل . (۴) باانعکاس های وایل می توان بقیه ریشه هاراساخت. دقت دراین شکل نشان می دهد که بقیه ریشه های مثبت عبارتند از:

$$\begin{aligned} \delta &= \beta + \alpha \\ \gamma &= \beta + 2\alpha. \end{aligned} \tag{62}$$



شکل ۴: دیاگرام ریشه های یک جبربا رتبه ۲ وقتی که زاویه بین دوریشه ساده ۱۳۵ درجه است.

این دیاگرام مربوط به جبر لی $so(5)$ است.

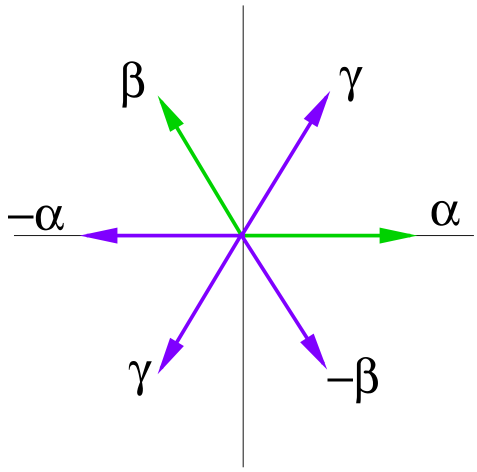
ممکن است که خواننده سوال کند که چرانمی توان ریشه ای مثل $\alpha+2\beta$ داشت . یک نگاه به شکل نشان می دهد که چنین ریشه ای زاویه ای باریشه δ می سازد که جزء زوایای مجازبین ریشه هانیست. به همین دلیل ریشه ای مثل $\beta+3\alpha$ نمی تواند وجود داشته باشد. این استدلال را بطریق جبری نیز می توان انجام داد به این معنا که وجود چنین ریشه هایی شرط عدد صحیح بودن $\frac{2(\delta,\gamma)}{(\alpha,\alpha)}$ رانقض می کند. تحقیق این موضوع را به عهده خواننده می گذاریم.
درواقع یک بارکه ریشه های ساده را داشته باشیم می توانیم بقیه دیاگرام ریشه هارا به این صورت بسازیم که تمام نردبان های باطول کمتراز ۵ را برای هرجفت ریشه هابسازیم و آنهایی که شرط فوق را برقرارنمی کنند حذف کنیم.

۳.۴ زاویه ۱۲۰ درجه

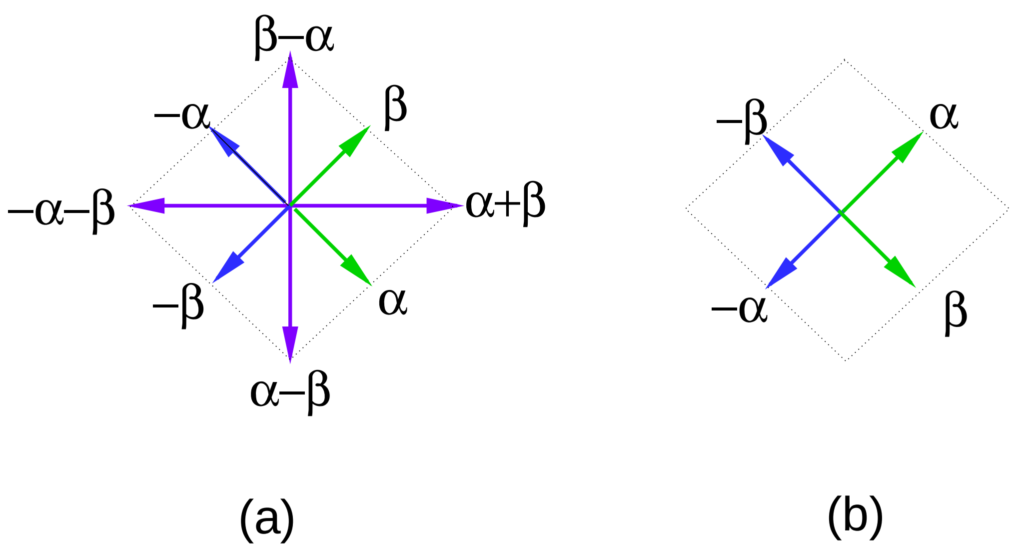
دراین حالت طول دو ریشه مساوی است. یکی از ریشه هارا $\alpha=(1,0)$ ودیگری را $\beta=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ می گیریم. بقیه ریشه ها ازانعکاس های وایل بدست می آیند. دیاگرام ریشه همان چیزی است که قبلاً درشکل ۵ نشان داده شده است. برای کامل بودن یکبار دیگراین شکل رادراینجا می آوریم.

۴.۴ زاویه ۹۰ درجه

دراین حالت دو جبررتبه دو وجود دارد که دیاگرام ریشه های آنهامطابق شکل (٦) زیراست. تحقیق این مورد را به خواننده می سپاریم. دیاگرام سمت چپ مربوط به جبر $sp(4)$ و دیاگرام سمت راست مربوط به جبر $so(4)$ است.



شکل ۵: دیاگرام ریشه های یک جبربا رتبه ۲ وقتی که زاویه بین دوریشه ساده ۱۲۰ درجه است.



شکل ٦: دیاگرام ریشه های جبرهای بارتبه ۲ وقتی که زاویه بین دوریشه ساده ۹۰ درجه است.