ساختمان جبرهای نیم ساده: قسمت اول

۱ مقدمه

ساده ترین جبرلی که باآن آشناشده ایم جبر لی مربوط به گروه لی $su(2)$ است. این جبر، جبر ماتریس های دوبعدی پادهرمیتی و بدون رد است. یک پایه برای این جبر عبارت است از:

$$T_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{1}$$

روابط جابجایی این جبر عبارت است از:

$$[T_1, T_2] = -T_3, \qquad [T_2, T_3] = -T_1, \qquad [T_3, T_1] = -T_2. \tag{2}$$

دقت کنید که این جبریک جبرحقیقی است. عنصر T_3 را درنظرمی گیریم. می پرسیم که آیامی توان عنصری مثل X درجبر درنظرگرفت به نحوی که داشته باشیم

$$[T_3, X] = \lambda\ X, \tag{3}$$

که درآن λ یک عدد است. به تجربه دریافته ایم که هرگاه بتوانیم روابط جبر را به این شکل بازنویسی کنیم می توانیم ساختمان جبر را و هم چنین نمایش های آن را به راحتی بدست بیاوریم. رابطه بالا درواقع یک رابطه ویژه مقداری برای عملگرخطی ad_{T_3} درجبراست زیرا می توان آن را به شکل زیرنوشت:

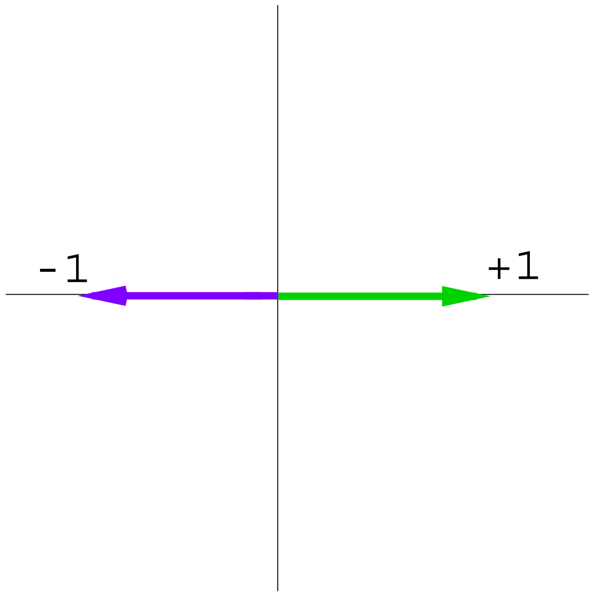
$$ad_{T_3} X = \lambda\ X. \tag{4}$$

ازآنجاکه عملگر خطی ad_{T_3} یک عملگر درفضای سه بعدی است یک محاسبه ساده نشان می دهد که سه ویژه مقدار و سه ویژه بردار متناظر به شکل زیرهستند:

$$\begin{array}{rcll} [T_3, T_3] & = & 0 & \\ [T_3, T_+] & = & iT_+ & \qquad T_+ = T_1 + iT_2 \\ [T_3, T_-] & = & -iT_- & \qquad T_- = T_1 - iT_2. \end{array} \tag{5}$$

به این ترتیب رابطه ویژه مقداری 3 حل می شود، اما نکته مهمی که باید به آن توجه کنیم آن است که $T_\pm$ عناصری هستند درخارج از جبرحقیقی اولیه. به عبارت دیگر مجبورشده ایم که جبرحقیقی خود را به یک جبر مختلط گسترش دهیم. این جبر مختلط شده یا $Complexified$ چیزی نیست جز همان جبراولیه که که درآن ترکیب های خطی مختلط از بردارهای پایه نیز مجازشمرده شده است. این فرآیند را مختلط کردن یک جبرحقیقی یا $Complexification$ آن جبرمی گویند. درواقع به این دلیل است که درمکانیک کوانتومی عناصر پایه جبر $su(2)$ را با ضرب کردن $-i$ در $T_1, T_2,\ T_3$ به صورت ماتریس های هرمیتی

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$



شکل ۱: دیاگرام ریشه های جبر $su(2)$.

با روابط جابجایی

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \qquad [J_2, J_3] = iJ_1, \qquad [J_3, J_1] = iJ_2, \tag{7}$$

می نویسیم. این کار تنها به دلیلی مختط کردن جبر اولیه امکان پذیراست وگرنه فضای ماتریس های هرمیتی تشکیل یک جبرلی نمی دهد.

فرآیند مختلط کردن را به طور دقیق تردربخش بعدی تعریف می کنیم. دراین پایه جدید روابط ویژه مقداری به شکل زیردرمی آیند:

$$[J_3, J_3] = 0 \quad [J_3, J_+] = J_+, \quad [J_3, J_-] = -J_-, \tag{8}$$

که درآن

$$J_3 = J_3, \quad J_+ := J_1 + iJ_2, \quad J_- := J_1 - iJ_2. \tag{9}$$

در این جبر، زیرجبری را که توسط بردار J_3 تولید می شود زیرجبرکارتان می گویند. به ویژه مقدارهای $1+$ و $1-$ (و بعضاً به ویژه بردارهای متناظربا آنهایعنی J_+ و J_-) ریشه های جبرمی گویند. این ویژه مقدار هارا می توان روی یک محور رسم کرد. شکلی که به این طریق بوجود می آید دیاگرام ریشه های $su(2)$ نامیده می شود، شکل (۱).

خواننده ای که درس مکانیک کوانتومی را گذرانده باشد می داند که ساختمان ریشه های جبر یا عملگرهای J_+ و J_- که اصطلاحاً به آنها عملگرهای بالابر وپایین برمی گوییم دربدست آوردن تمام نمایش های جبر $su(2)$ اهمیت اساسی دارد. دراین درس خواهیم دید که این ساختار درهمه جبرهای نیم ساده وجود دارد بااین تفاوت که زیرجبرکارتان الزاماً یک بعدی نیست. چند بعدی بودن زیرجبرکارتان باعث می شود که ساختاراین جبرها نسبت به جبر$su(2)$ بسیارغنی ترباشد.

۲ تغییر میدان یک جبر لی

فرض کنید که A یک جبر لی حقیقی با پایه های $\{e_1, \cdots e_n\}$ باشد. دراین پایه براکت لی به شکل زیراست:

$$[e_a,\ e_b] = f_{ab}^c\ e_c, \tag{10}$$

که درآن f_{ab}^c ها ثابت های حقیقی هستند. هرعنصر این جبریک ترکیب خطی حقیقی ازبردارهای پایه به صورت $x = x^a e_a$ است.
جبرمختلط شده A که آن را با A^c نمایش می دهیم به سادگی تعریف می شود به این معنا که اجازه می دهیم تمام ترکیب های خطی با ضرایب مختلط از $\{e_a\}$ ها عضو جبرباشند. واضح است که این کار ثابت های ساختاری را دست نمی زند.
دراین جایک سوال مهم پیش می آید وآن اینکه آیا بردارهای پایه $\{e_a\}$ که در میدان اعداد حقیقی مستقل خطی بودند آیا همچنان درحوزه اعداد مختلط نیز مستقل خطی اند یا خیر؟ دربعضی از موارد مثل جبر $su(2)$ بابردارهای پایه T_1, T_2, T_3 که درمقدمه معرفی شدند بردارهای پایه حتی روی میدان اعداد مختلط نیز مستقل خطی اند. دراین موارد مختلط کردن جبر به همین سادگی که گفتیم انجام می شود. جبرمختلط شده دارای همان بعد جبراولیه است. امادرموارد دیگری ممکن است که پایه جبر روی میدان اعداد مختلط مستقل خطی نباشد. برای مثال جبر $sl(2,C)$ رادرنظربگیرید. این جبر از ماتریس های مختلط باردّ صفر تشکیل شده است. یک عنصر نمونه این جبر ماتریسی به شکل زیراست: $x = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ e+if & -a-ib \end{pmatrix}$. این جبر را می توان به عنوان یک جبرحقیقی باپایه زیر درنظرگرفت:

$$\begin{array}{lll} S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\sigma_1 & S_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\sigma_2 & S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\sigma_3 \\ T_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}i\sigma_1 & T_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}i\sigma_2 & T_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}i\sigma_3. \end{array} \tag{11}$$

درنظرگرفت. روابط جابجایی این جبر به صورت زیراست:

$$\begin{aligned} [S_a, S_b] &= \epsilon_{abc} T_c \\ [S_a, T_b] &= -\epsilon_{abc} S_c \\ [T_a, T_b] &= -\epsilon_{abc} T_c. \end{aligned} \tag{12}$$

دقت کنید که مهم نیست که درایه های عناصر پایه S_a یا T_a مختلط یاحقیقی هستند. آنچه که مهم است آن است که هرعنصردلخواهی از این جبر را می توان به صورت بسط حقیقی از بردارهای پایه فوق نوشت و ثابت های ساختاری آن نیز حقیقی هستند.
درحوزه اعداد حقیقی بردارهای پایه $S_a,\ T_a$ مستقل خطی هستند. بنابراین جبر $sl(2,C)$ یک جبر حقیقی ٦ بعدی است. اما هرگاه این جبررا مختلط کنیم دیگربردارهای پایه فوق مستقل خطی نیستند، زیرا $T_a = iS_a \quad \forall\ a$. برای جبرمختلط شده می توان هرکدام از دسته بردارهای پایه $\{S_a, S_b, S_c\}$ یا $\{T_a, T_b, T_c\}$ و یا ترکیبی از آنها را اختیارکرد. هر عنصراین جبر ترکیب خطی مختلط از این بردارهای پایه خواهد بود. هرگاه پایه $\{S_a, S_b, S_c\}$ را انتخاب کنیم روابط جابجایی به صورت زیرخواهند بود:

$$[S_a, S_b] = i\epsilon_{abc} S_c, \tag{13}$$

وهرگاه پایه $\{T_a, T_b, T_c\}$ راانتخاب کنیم روابط جابجایی به صورت زیرخواهند بود:

$$[T_a, T_b] = -\epsilon_{abc} T_c. \quad (14)$$

دیده می شود که ضرایب ساختاری درپایه اول مختلط و درپایه دوم حقیقی هستند. درادامه این درس مابا جبرهای مختلط را بررسی می کنیم. یک قضیه که آن را بدون اثبات ذکر می کنیم می گوید که:

قضیه مختلط کردن جبرهای حقیقی:

الف: جبر حقیقی A نیم ساده است اگر و فقط اگر مختلط شده آن یعنی A^c نیم ساده باشد.

ب: هر جبر مختلط، مختلط شده یک جبر حقیقی است.

۳ پایه کارتان

بنابر تعریف زیرجبرکارتان [1] عبارت است از بزرگترین زیرجبرآبلی یک جبرلی. معمولا زیرجبرکارتان را با مطالعه روابط جابجایی یک جبر به راحتی می توان تشخیص داد. بعد این زیرجبر را رتبه جبر نامیده و آن را با r نشان می دهیم. بردارهای پایه زیر جبرکارتان را نیز با $H_1,\ H_2,\ H_3, \cdots H_r$ نشان می دهیم. بنابراین داریم

$$[H_i, H_j] = 0, \quad \forall\ i,\ j. \quad (15)$$

ازآنجا که زیرجبرکارتان بنابرتعریف بزرگ ترین زیرجبرآبلی جبراست، نمی توان هیچ عنصردیگری را تصورکرد که باهمه H_i ها جابجاشود.

پس از مشخص کردن زیرجبرکارتان، کاری که می کنیم آن است که از بقیه عناصرجبر ترکیب های خطی جدیدی می سازیم که تحت عمل براکت ویژه بردار مشترک همه H_i هاباشند. درواقع ویژه بردار مشترک تمام عملگرهای Ad_{H_i} را که می دانیم بایکدیگر جابجا می شوند پیدامی کنیم.

تمرین: ثابت کنید که به ازای هر i, j عملگرهای Ad_{H_i} و Ad_{H_j} باهم جابجا می شوند. بنابراین این عملگرها ویژه بردار مشترک دارند.

[1] Cartan Subalgebra

ویژه بردارهای مشترک را با E_α نشان می دهیم که دارای خاصیت زیرهستند:

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0 \\ [H_i, E_\alpha] &= \alpha_i E_\alpha \end{aligned} \tag{16}$$

دقت کنید که هر α یک بردار r بعدی با مولفه های $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r)$ است. α را یک ریشه یا $root$ می خوانیم. ریشه های مختلف دریک فضای برداری r بعدی قرار می گیرند. مجموعه تمام ریشه ها که آنها را با $\alpha,\ \beta, \gamma, \cdots$ نشان می دهیم فضای ریشه ها[2] خوانده می شود و با نماد $\sum$ نشان داده می شود:

$$\sum = \{\alpha, \beta, \gamma, \cdots\} \tag{17}$$

اگربعد جبر برابر با n ورتبه آن r باشد تعداد ریشه هابرابرخواهد بود با $n - r$. اگراین $n - r$ ریشه را به عنوان بردارهای r بعدی دراین فضای برداری رسم کنیم دیاگرامی بدست می آید که آن را دیاگرام ریشه ها[3] می خوانیم. یک نکته مهم درلم زیرآمده است که آن را بدون اثبات ذکر می کنیم.

لم: می توان عناصر $\{H_i\}$ را چنان انتخاب کرد که ریشه ها حقیقی باشند. هم چنین ریشه ها واگنی ندارند. به عبارت بهتر هرگاه دو عنصر مثل $E\alpha$ و F_α بتوانیم چنان پیدا کنیم که برای همه‌ی i ها، $[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha$ و $[H_i, F_\alpha] = \alpha_i F_\alpha$ آنگاه حتماً $F_\alpha = \lambda E_\alpha$ که درآن λ یک عدد مختلط است.

خلاصه آنچه گه گفتیم این است که برای یک جبرلی می توان پایه‌ای مثل $\{H_1, H_2, \cdots H_r,\ E_\alpha, E, \cdots\}$ چنان انتخاب کرد که روابط زیر برقرار باشند:

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \\ [H_i, E_\alpha] &= \alpha_i E_\alpha. \end{aligned} \tag{18}$$

پایه فوق را پایه کارتان [4] برای جبر می خوانیم.

۴ مثال هایی از پایه کارتان برای جبرهای لی

روابطِ 18 تمامی روابط جابجایی را دراین جبر نشان نمی دهند، زیرا هنوز نمی دانیم که $[E_\alpha, E_\beta]$ برابر با چیست؟ در ادامه این درس و هم چنین درس های آینده بقیه روابط جبر را بیان می کنیم. ولی فعلاً می خواهیم توجه خود را به یافتن ریشه های جبر معطوف کنیم. زیرا چنان که در آینده خواهیم دید دیاگرام ریشه های یک جبر دربردارنده همه اطلاعات اساسی در باره ساختمان یک جبر است. قبل از آنکه به اثبات قضایای کلی در مورد ساختمان جبر بپردازیم، سعی می کنیم که از طریق مطالعه مثالهای متعدد که بعضی از آنها نیز دسته های وسیعی از جبرها را در بر می گیرند، خود را با ساختمان فضای ریشه‌ها و دیاگرام ریشه‌ها و روابط آن ها آشنا کنیم.

---

[2] Root Space
[3] Root Diagram
[4] Cartan Basis

۱.۴ جبرلی $su(3)$

جبرلی $su(3)$ تشکیل شده است از فضای برداری تمام ماتریس های ۳ بعدی پادهرمیتی و بدون ردّ. هرگاه که این جبر را مختلط کنیم می توانیم پایه جبر را متشکل از ماتریس های ۳ بعدی هرمیتی و بدون ردّ بگیریم. بنابراین یک عنصرِ x در جبر مختلط شده‌ی $su(3)$ به شکل زیراست:

$$x = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & x_{12}+iy_{12} & x_{13}+iy_{13} \\ x_{12}-iy_{12} & -x_1+x_2 & x_{23}+iy_{23} \\ x_{13}-iy_{13} & x_{23}-iy_{23} & -2x_2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

ضرایب این پارامترها بردارهای پایه جبر هستند، یا به عبارت بهتر متناسب با بردار های پایه جبر هستند. البته می دانیم که با انتخاب پارامترهای دیگر، پایه دیگری از همان جبر بدست می آید. ما پارامتربندی را طوری انجام داده‌ایم که برای رسیدن به پایه کارتان قدم های خیلی کمی باقی بماند.

$$H_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}(E_{11}-E_{22}) \qquad H_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{12}}(E_{11}+E_{22}-2E_{33}) \tag{20}$$

ضرایب کنار H_1 و H_2 ضرایب بهنجارش هستند و باانتخاب آنهاخواهیم داشت:

$$tr(H_iH_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}. \tag{21}$$

بردارهای پایه دیگر برابرند با:

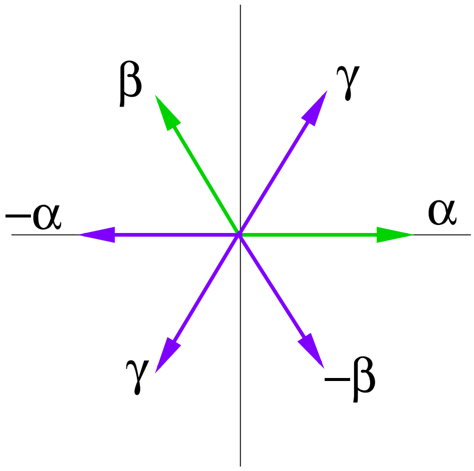
$$\begin{aligned} &E_\alpha = E_{12} \qquad E_\beta = E_{23} \qquad E_\gamma = E_{13} \\ &E_{-\alpha} = E_{21} \qquad E_{-\beta} = E_{32} \qquad E_{-\gamma} = E_{31}. \end{aligned} \tag{22}$$

خواننده می تواند براحتی نشان دهد که عناصر فوق ریشه های جبر هستند و بردارهای ریشه یه صورت زیرهستند:

$$\begin{aligned} &\alpha = (1,0) \qquad \beta = (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \qquad \gamma = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ &-\alpha = (-1,0) \qquad -\beta = (\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}) \qquad -\gamma = (\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}). \end{aligned} \tag{23}$$

دیاگرام ریشه های $su(3)$ درشکل (۲) نشان داده شده است.

تمام خواص مربوط به ساختمان جبرهای لی را می توانیم با بررسی این مثال ساده نشان دهیم. خواصی که در نظر داریم مربوط به فضای ریشه ها و دیاگرام ریشه هاست. تاکید می کنیم که این خواص در تمامی جبرهای دیگر نیزمشاهده می شود. ما



شکل ۲: دیاگرام ریشه های $su(3)$. دراین شکل و تمام شکل های بعدی ریشه های ساده بارنگ سبز معین شده اند.

دراین مثال تنها می خواهیم به این خواص اشاره کنیم تا خواننده بتواند نمونه های آن را در مثال های دیگری که در این درس طرح می کنیم مشاهده کند و با آنها آشنا شود. تنها در درسهای بعدی است که این خواص را برای یک جبرلی کلی اثبات می کنیم.

۱: به ازای هرریشه α یک ریشه $-\alpha$ وجود دارد.

۲: خاصیت الف به ما اجازه می دهد که فضای ریشه ها را به دوقسمت مثبت و منفی تقسیم کنیم. ریشه های مثبت را با Σ^+ و ریشه های منفی را با Σ^- نشان می دهیم. این تقسیم بندی به صورت قراردادی صورت می گیرد. می توان یک صفحه از فضای ریشه ها گذراند به نحوی که هیچ ریشه ای روی آن قرار نگیرد و سپس ریشه های یک طرف این صفحه را ریشه های مثبت و ریشه های طرف دیگر را منفی گرفت. یک راه برای تعریف ریشه های مثبت به این صورت است که می گوییم $\alpha \in \Sigma^+$ اگر اولین مولفه‌ی غیرصفرِ α مثبت باشد. هم چنین این تقسیم بندی ریشه ها به مثبت و منفی این امکان را فراهم می آورد که بتوانیم ریشه ها را باهم مقایسه کنیم. می گوییم $\alpha > \beta$ اگر $\alpha - \beta \in \Sigma^+$. واضح است که این کار یک ترتیب روی فضای ریشه ها ایجاد خواهد کرد. به این معنا که اگر $\alpha > \beta$ و $\beta > \gamma$ آنگاه $\alpha > \gamma$.

۳: اگر ریشه های مثبت را α ، β و γ بگیریم، می بینیم که $\gamma = \alpha + \beta$. بنابراین همه ریشه های مثبت برحسب تعدا دی از ریشه های مثبت که آنها را ریشه های ساده [5] می خوانیم قابل نوشتن هستند. (مهم است که این بسط، بسطی خطی با ضرایب صحیح و مثبت است.) تعداد ریشه های ساده نیز با رتبه جبربرابراست. این ریشه ها نیز مستقل خطی هستند.

۴: می بینیم که به ازای هر ریشه مثل α ، $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ ترکیبی خطی از عناصر زیرجبر کارتان است. در جبر $su(3)$ می بینیم که

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = 2H_1,$$
$$[E_\beta, E_{-\beta}] = -H_1 + \sqrt{3}H_2,$$

[5] Simple Roots

$$[E_\gamma, E_{-\gamma}] = H_1 + \sqrt{3}H_2. \tag{24}$$

بنابراین دیده می شود که $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ برای تمام ریشه ها همواره ترکیبی خطی از بردارهای پایه کارتان است. در یک جبر لی نیم ساده این رابطه به شکل کلی زیر برقراراست:

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i, \tag{25}$$

که درآن $\alpha^i = K^{ij}\alpha_j$ و K^{ij} درایه های وارون متریک کیلینگ است. دقت کنید که برای یک جبر لی نیم ساده بنابر ملاک کارتان متریک کلیینگ همواره وارون پذیراست.

۵: حال از خود می پرسیم که رابطه جابجایی بقیه ریشه ها مثلاً $[E_\alpha, E_\beta]$ چیست؟ با دردست داشتن شکل صریح خواننده براحتی می تواند نشان دهد که خاصیت عمومی زیر برای جبر $su(3)$ برقراراست:

$$[E_\alpha, E_\gamma] = [E_\alpha, E_{-\beta}] = [E_\beta, E_\gamma] = \cdots 0 \tag{26}$$

به عبارت دیگر به ازای هر دو ریشه ای از Σ که مجموع آنها در Σ وجود نداشته باشد، جابچاگر بردارهای متناظر با آن دو ریشه صفراست. هم چنین خواننده می تواند نشان دهد که روابط زیر برقرارند:

$$[E_\alpha, E_\beta] = E_\gamma, \quad [E_-\alpha, E_\gamma] = E_\beta, \quad [E_\alpha, E_{-\gamma}] = -E_{-\beta}, \cdots \tag{27}$$

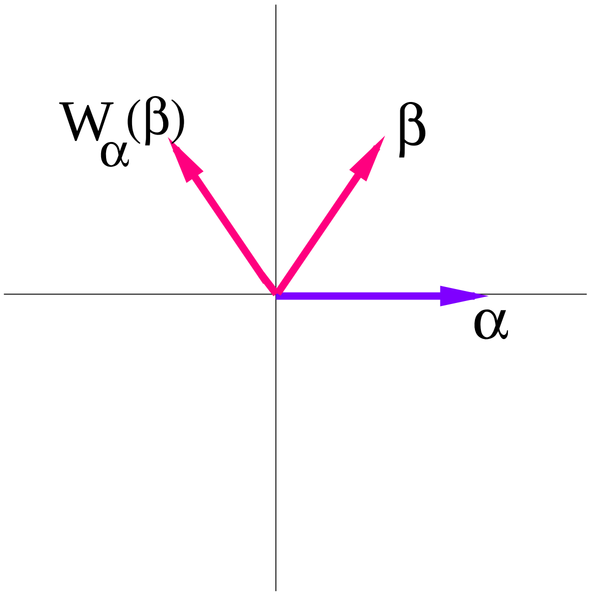
این دو خاصیت را می توان به شکل کلی زیر نوشت که در همه جبرهای دیگر نیز برقرار است:

$$\begin{aligned} &\forall\ \alpha,\ \beta \in \Sigma, \quad if \quad \alpha+\beta \notin \Sigma \quad [E_\alpha, E_\beta] = 0, \\ &\forall\ \alpha,\ \beta \in \Sigma, \quad if \quad \alpha+\beta \in \Sigma \quad [E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{28}$$

٦: به ازای هر ریشه‌ی α، سه بردارِ E_α و $E_{-\alpha}$ و a^iH_i تشکیل یک زیر جبر $su(2)$ می دهند. به طور دقیق تر می بایست E_α و $E_{-\alpha}$ را در ضرایب مناسبی ضرب کنیم تا زیر جبر فوق درست مساوی با زیر جبر $su(2)$ شود. خواننده براحتی می تواند نشان دهد که این تطابق چنین است:

$$J_z := \alpha^i H_i, \qquad J_+ := \sqrt{\frac{2}{\alpha\cdot\alpha}}E_\alpha, \qquad J_- := \sqrt{\frac{2}{\alpha\cdot\alpha}}E_{-\alpha}. \tag{29}$$

۷: زاویه بین ریشه ها و هم چنین نسبت بین طول های آن ها نسبت های کاملاً مشخص وساده ای است. دراینجا زاویه بین ریشه ها مضربی از 60 درجه است، زاویه بین ریشه های ساده 120 درجه و طول آنها نیز مساوی است. به همین دلیل دیاگرام ریشه ها یک دیاگرام متقارن است.



شکل ۳: انعکاس وایل ریشه‌ی β نسبت به ریشه‌ی α.

برای بیان خاصیت دیگر می بایست چیزی را تعریف کنیم که انعکاس وایل[6] نام دارد.

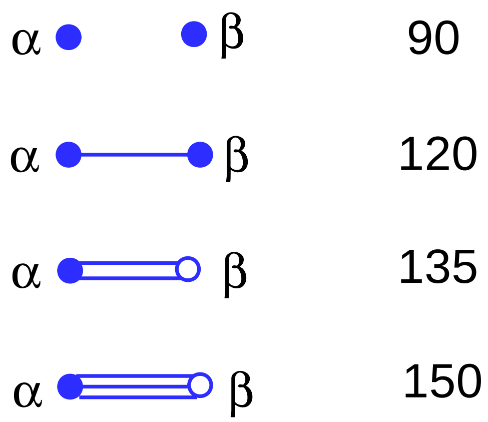
تعریف: انعکاس وایل ریشه‌ی β نسبت به ریشه‌ی α که آن را با $W_\alpha(\beta)$ نشان می دهیم، به شکل زیر تعریف می شود:

$$W_\alpha(\beta) := \beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

به بیان دیگر این انعکاس به این معناست که یک صفحه از مبداء مختصات و عمود بر ریشه‌ی α گذرانده و سپس تصویر آینه‌ای ریشه ریشه‌ی β را نسبت به این صفحه بدست می آوریم. این تصویر آینه‌ای همان $W_\alpha(\beta)$ استـظ، شکلِ ۳.

۸: به ازای هر دو ریشه‌ی α و β که در فضای ریشه ها در نظر بگیریم، انعکاس وایل هرکدام از این ریشه ها نسبت به دیگری نیز در فضای ریشه ها وجود دارد. انعکاس وایل به صورت زیر تعریف می شود: انعکاس β نسبت به صفحه ای که بر α عمود است نیز یک ریشه است، شکل (۳) . ازآنجا که این خاصیت برای هردوریشه ای برقراراست، دیاگرام ریشه ها تقارن های بسیارجالبی پیدا می کند ومارافادرمی سازد که باداشتن تعدادی از ریشه ها بقیه رابااستفاده از انعکاس وایل بدست آوریم.
۹: زاویه بین ریشه های ساده در این جبر برابر با ۱۲۰ درجه است. هم چنین نسبت طول آنها برابر است با یک. در آینده نشان خواهیم داد که نسبت بین طول ریشه های ساده در یک جبر یا برابراست با 1 یا برابر است با $\sqrt{2}$. هم چنین نشان خواهیم داد که زاویه بین هردو ریشه‌ی ساده‌ای برابراست با یکی از مقادیرِ $90°$ ، $120°$ ، $135°$ یا $150°$. در واقع ساختمان یک جبرلی نیم ساده تماماً توسط ریشه های ساده آن داده می شود. این ریشه ها نسبت های طولی مشخص و هم چنین زوایه های مشخصی نسبت به یکدیگردارند. این اطلاعات رامی توان از این هم فشرده تر دریک دیاگرام که دیاگرام دینکین [7] خوانده می شود گنجاند. دیاگرام دینکین به طورکامل اطلاعات موجود درجبر را درخود دارد.

[6] Weyl Reflection
[7] Dynkin Diagram



شکل ۴: قواعد دینکین .

۵ قواعد رسم دیاگرام های دینکین

دیاگرام دینکین را مطابق با قراردادهای زیرمی سازیم. به هر ریشه ساده یک دایره کوچک نسبت می دهیم. می دانیم که زاویه بین دوریشه ساده یکی از مقادیر $90°$، $120°$، $135°$ و یا $150°$ است. متناظر با این زوایا دو دایره کوچک رابه ترتیب با صفر خط، یک خط ، دو خط و یاسه خط به هم وصل می کنیم. شکل (۴).

هم چنین ریشه های کوتاه را به صورت دایره توخالی و ریشه های بلند را به صورت دایره توپررسم می کنیم.

مثال: دیاگرام دینکین برای جبر $su(2)$ تنهاازیک دایره توخالی تشکیل شده است.

مثال: دیاگرام دینکین برای جبر $su(3)$ عبارت از دودایره توخالی است که بایک خط به یکدیگر وصل شده ا ند.

د

۶ جبر $so(4)$

در این بخش یک جبر کوچک دیگر یعنی $so(4)$ را بررسی می کنیم. جبرحقیقی $so(4)$ جبر ماتریس های پادمتقارن ۴ بعدی است. یک عنصر نمونه $x \in so(4)$ از این جبر به شکل زیراست:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

بردارهای پایه جبر عبارتند از:

$$T_{ij} := E_{ij} - E_{ji} \qquad 1 \leq i < j \leq 4.. \tag{31}$$

روابط جابجایی این ماتریس ها ساده است. اگر T_{ij} و T_{kl} هیچ شاخص مشترکی نداشته باشند آنگاه $[T_{ij}, T_{kl}] = 0$. برای وقتی که یک شاخص مشترک وجود داشته باشد داریم

$$[T_{ij}, T_{jk}] = T_{ik}$$
$$[T_{ij}, T_{ik}] = -T_{jk}. \tag{32}$$

با استفاده از این روابط می توان نشان داد که بردار های زیر باهم جابجا می شوند

$$H_1' = T_{12} \quad , \quad H_2' = T_{34}. \tag{33}$$

فعلاً این دو عنصر را به عنوان پایه های کارتان درنظرمی گیریم.

یک انتخاب برای بقیه مولد های جبر به صورت زیراست:

$$T_{13}, \qquad T_{14}, \qquad T_{23} \qquad T_{24}. \tag{34}$$

با توجه به روابط 32 بدست می آوریم

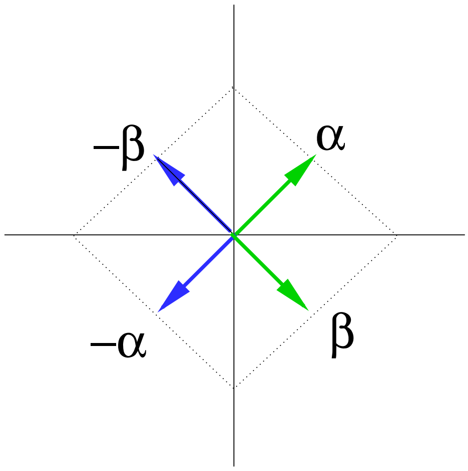
$$\begin{aligned}
&[H_1', T_{13}] = -T_{23}, \quad , \quad [H_2', T_{13}] = T_{14}\\
&[H_1', T_{14}] = -T_{24}, \quad , \quad [H_2', T_{14}] = T_{13}\\
&[H_1', T_{23}] = T_{13}, \quad , \quad [H_2', T_{23}] = -T_{24}\\
&[H_1', T_{24}] = T_{14}, \quad , \quad [H_2', T_{24}] = -T_{23}
\end{aligned} \tag{35}$$

بااستفاده ازاین روابط می توانیم ریشه های جبر را پیداکنیم. برای این کار عنصری کلی به صورت $X = aT_{13} + bT_{14} + cT_{23} + dT_{24}$ درنظرگرفته و تقاضا می کنیم که روابط $[H_1', X] = \lambda X$ و $[H_2', X] = \mu X$ برقرارباشند. کمی محاسبه نشان می دهد که ویژه مقادیر λ و μ برابربا $\pm i$ خواهند بود. هم چنین ویژه بردارهای X درجبرحقیقی جواب نخواهند داشت. بنابراین می بایست جبررا مختلط کنیم. درجبر مختلط مولد های زیرجبرکارتان را به شکل زیردرنظرمی گیریم:

$$H_1 = i(E_{12} - E_{21}) \quad , \quad H_2 = i(E_{34} - E_{43}). \tag{36}$$

بقیه ریشه های جبر به صورت زیردرمی آیند:

$$\begin{aligned}
E_{\alpha} &= T_{13} - iT_{14} - iT_{23} - T_{24}\\
E_{-\alpha} &= T_{13} + iT_{14} + iT_{23} - T_{24}
\end{aligned}$$



شکل ۵: دیاگرام ریشه های $so(4)$.

$$\begin{aligned} E_\beta &= T_{13} + iT_{14} - iT_{23} + T_{24} \\ E_{-\beta} &= T_{13} - iT_{14} + iT_{23} + T_{24} \end{aligned} \tag{37}$$

که درآن

$$\alpha = (1,1) \qquad \beta = (-1,1), \qquad -\alpha = (-1,-1), \qquad -\beta = (1,-1). \tag{38}$$

روابط جابجایی جبر به صورت زیرخواهد بود:

$$\begin{aligned} [H_1, E_\alpha] &= E_\alpha & [H_2, E_\alpha] = E_\alpha \\ [H_1, E_\beta] &= E_\beta & [H_2, E_\beta] = -E_\beta \\ [H_1, E_{-\alpha}] &= -E_{-\alpha} & [H_2, E_{-\alpha}] = -E_{-\alpha} \\ [H_1, E_{-\beta}] &= -E_{-\beta} & [H_2, E_{-\beta}] = E_{-\beta} \end{aligned} \tag{39}$$

دیاگرام ریشه ها ی $so(4)$ در شکل (۵) نشان داده شده است. خواننده می تواند برای خود تحقیق کند که آیا خاصیت های گفته شده درمورد دیاگرام ریشه های $su(3)$ درمورد این جبر نیز صادق هستند یانه.

دیاگرام دینکین این جبر از دو دایره توخالی تشکیل شده است که با هیچ خطی به هم وصل نیستند. این امر در واقع انعکاسی از این است که این جبر با جمع مستقیم دو جبرلی $su(2)$ یکسان است، یعنی $so(4) = su(2) \oplus su(2)$. با استفاده از روابطِ 39 خواننده می تواند این یکسانی را به طور صریح نشان دهد.

دربخش های آینده این درس خواهیم دید که باتغییرات جالب توجهی تمام این خواص برای هرجبرلی دیگر ی نیز برقراراست. در درس آینده از نیم ساده بودن جبرلی استفاده می کنیم و قدم به قدم ساختمان فضای ریشه هارابرای یک جبرنیم

ساده دلخواه مشخص کنیم. ولی فعلاً توجه خود را معطوف می کنیم به مطالعه مثال های بیشتر.

یک نکته درمورد نامگذاری: دراین درس اصطلاح ریشه را هم برای یک بردار E_α درجبر بکارمی بریم و هم برای بردار متناظر با آن یعنی α درفضای ریشه هایادیاگرام ریشه ها. خواننده درهرمورد می تواند بفهمد که منظور ما از ریشه کدام است.

g

۱.۶ جبر $su(n)$

این جبر، بعد از مختلط کردن، جبر ماتریس های هرمیتی بدون ردّ تشکیل می شود. مشابه با $su(3)$ می توان بردارهای پایه این جبر را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1}{2}(E_{11} - E_{22}),\\
H_2 &= \frac{1}{\sqrt{12}}(E_{11} + E_{22} - 2E_{33}),\\
&\cdots\\
H_k &= \frac{1}{\sqrt{2k(k+1)}}(E_{11} + \cdots E_{kk} - kE_{k+1,k+1}),\\
&\cdots\\
H_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{2(n-1)n}}(E_{11} + \cdots E_{n-1,n-1} - (n-1)E_{n,n}),
\end{aligned} \tag{40}$$

که بردارهای پایه زیر جبر کارتان را تشکیل می دهند بعلاوه ماتریس های زیر

$$X_{ij} := \frac{1}{2}(E_{ij} + E_{ji}), \qquad Y_{ij} := \frac{-i}{2}(E_{ij} - E_{ji}), \qquad 1 \le i < j \le n. \tag{41}$$

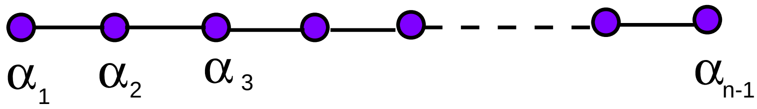
بعد این جبر برابر است با $n^2 - 1$ و رتبه آن برابر است با $n - 1$. این عناصر طور بهنجارشده اند که داشته باشیم $tr(H_iH_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$. بازهم می توانیم ریشه های جبر را به سادگی و با تعمیمی ساده از مثال $su(3)$ بدست آوریم. این ریشه ها عبارتند از:

خواننده می تواند نشان دهد که ریشه های جبر عبارتنداز:

$$J^+_{ij} := X_{ij} + iX_{ij} = E_{ij}, \qquad J^-_{ij} = X_{ij} - iY_{ij} = E_{ji} \quad 1 \le i < j \le n. \tag{42}$$

هم چنین می تواند براحتی نشان دهد که

$$[J^+_{ij}, J^+_{jk}] = J^+_{ik}, \tag{43}$$



شکل ٦: دیاگرام دینکین برای جبر $su(n)$.

این امر نشان می دهد که $J_i := J^+_{i,i+1}$ هاعناصر وابسته به ریشه های ساده هستند. برای بدست آوردن ریشه های ساده کافی است که عبارت $[H_k, J_i]$ را حساب کنیم. یک محاسبه ساده نشان می دهد که

$$[H_k, J_i] = (\alpha_i)_k J_i \tag{44}$$

که درآن

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\alpha_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\alpha_3 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\cdots &= \cdots \\
\alpha_k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\frac{k-1}{2k}} & \sqrt{\frac{k+1}{2k}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\cdots &= \cdots \\
\alpha_{n-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} & \sqrt{\frac{n}{2(n-1)}} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{45}$$

هرگاه بردارهای e_i را به‌این شکل تعریف کنیم که $(e_i)_k = \delta_{ik}$ آنگاه می توانیم ریشه های ساده فوق را به صورت زیربازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= e_1, \\
\alpha_2 &= \frac{-1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2, \\
\alpha_3 &= \frac{-1}{\sqrt{3}}e_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}e_3 \\
&\cdots \\
\alpha_k &= \sqrt{\frac{k-1}{2k}}e_{k-1} - \sqrt{\frac{k+1}{2k}}e_k \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{46}$$

دیده می شود که اولاً طول همه این ریشه ها برابربا یک است، ثانیاً زاویه بین هردوریشه متولی ۱۲۰ درجه و زاویه بین هردوریشه غیرمتوالی ۹۰ درجه است. دیاگرام دینکین این جبر در شکل ٦ نشان داده شده‌است.
می توانیم از خود بپرسیم که اگر تعدادِ $n-1$ تا بردار در یک فضای برداری داشته باشیم که روابط طولی و زاویه‌ای آنها توسط دیاگرام دینکین ٦ باشند، چگونه می توان به شکل ساده‌ای این بردارها را نشان داد؟ یک پاسخ ساده برای این سوال به

شکل زیراست. تعداد n بردارِ متعامد یکه در نظر می گیریم. آنگاه ریشه‌های ساده‌ای را که در دیاگرام دینکینِ $su(n)$ نشان داده شده‌اند، می توان به شکل زیر نشان داد:

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \quad \alpha_2 = e_2 - e_3, \quad \alpha_3 = e_3 - e_4, \cdots \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n. \tag{47}$$

از این نوع نمایش ریشه‌ها برای مثال های دیگر نیز استفاده خواهیم کرد.

۲.۶ $so(2n)$

حال جبر $so(2n)$ را درنظرمی گیریم. جبر$so(2n+1)$ رادربخش بعدی بررسی می کنیم. این جبر از ماتریس های پادمتقارن حقیقی تشکیل شده است. یک پایه برای آن عبارت است از ماتریس های به شکل $\{T_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq 2n\}$ که درآن $T_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$. بعدازمختلط کردن جبر می توان عناصر زیررابرای زیرجبرکارتان درنظرگرفت:

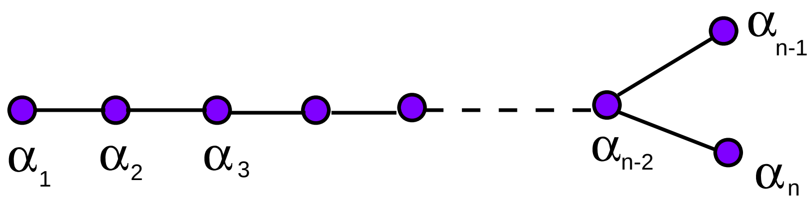
$$\begin{aligned} H_1 &:= iT_{12}, \\ H_2 &:= iT_{34}, \\ H_3 &:= iT_{56}, \\ &\cdots \\ H_k &:= iT_{2k-1,2k} \\ \cdots, & \\ H_n &:= iT_{2n-1,2n}. \end{aligned} \tag{48}$$

برای بدست آوردن ریشه های جبر توجه به نکته زیرمهم است. اگر T_{ij} و T_{kl} هیچ اندیس مشترکی نداشته باشند بایکدیگرجابجامی شوند. درصورتی که یک اندیس مشترک داشته باشند نیز روابط جابجایی آنهابه صورت زیراست:

$$\begin{aligned} [T_{ij}, T_{jk}] &= T_{ik} \\ [T_{ij}, T_{ik}] &= -T_{jk} \end{aligned} \tag{49}$$

حال مطابق با آنچه که درابتدای این فصل درمورد جبر $so(4)$ دیدیم می توان برای هر دو اندیس k, l چهارعنصر به شکل زیردرنظرگرفت:

$$\begin{aligned} E^+_{kl} &= T_{2k-1,2l-1} - iT_{2k-1,2l} - iT_{2k,2l-1} - T_{2k,2l} \\ E^-_{kl} &= T_{2k-1,2l-1} + iT_{2k-1,2l} + iT_{2k,2l-1} - T_{2k,2l} \\ F^+_{kl} &= T_{2k-1,2l-1} + iT_{2k-1,2l} - iT_{2k,2l-1} + T_{2k,2l} \\ F^-_{kl} &= T_{2k-1,2l-1} - iT_{2k-1,2l} + iT_{2k,2l-1} + T_{2k,2l} \end{aligned} \tag{50}$$



شکل ۷: دیاگرام دینکین برای جبر $so(2n)$.

این چهارعنصر برای $H_k,\ \ H_l$ دارای ویژه مقادیر $(+1,+1)$، $(+1,-1)$، $(-1,+1)$ و $(-1,-1)$ هستند. ویژه مقادیر آنها برای دیگر H هابوضوح صفراست. هرگاه بردارهای سطری e_m را به شکل زیرتعریف کنیم $(e_m)_j=\delta_{jm}$ می توانیم به شکل فشرده ای ریشه های مربوط به این چهارعنصررابنویسیم. این ریشه هاباتوجه به جمله قبل به شکل زیرهستند:

$$e_k+e_l, \quad e_k-e_l, \quad -e_k+e_l, \quad -e_k-e_l. \tag{51}$$

به ازای هرجفت اندیس $1\leq k<l\leq n$ می توان چهارعنصر $E^{\pm}_{kl},\ F^{\pm}_{kl}$ را به شکل بالا درنظرگرفت که ریشه های متناظرباآنها عبارتند از $\pm e_k\pm e_l$. بنابراین تعداد ریشه هابرابراست با $4\times\frac{n(n-1)}{2}=2n(n-1)$. ریشه های مثبت عبارتند از $1\leq k<l\leq n \quad e_k\pm e_l$. برخواننده است که ثابت کند ریشه های ساده عبارتنداز

$$\prod=\{e_1-e_2,\ e_2-e_3,\ e_3-e_4,\cdots,e_{n-2}-e_{n-1},e_{n-1}-e_n\}\bigcup\{e_{n-1}+e_n\} \tag{52}$$

دیاگرام دینکین این جبر درشکل (۷) آمده است.

۷ جبر $so(2n)$

حال جبر $so(2n+1)$ را درنظرمی گیریم.این جبر از ماتریس های پادمتقارن حقیقی بابعد فرد تشکیل شده است. پایه کارتان این جبر درست مثل جبر $so(2n)$ است. یعنی

$$\begin{aligned} H_1 &:= iT_{12}, \\ H_2 &:= iT_{34}, \\ H_3 &:= iT_{56}, \\ &\cdots, \\ H_n &:= iT_{2n-1,2n}. \end{aligned} \tag{53}$$

بازهم به ازای هر جفت اندیس $1\leq k<l\leq n$ چهارعنصر زیر رادرنظرمی گیریم

$$E^{+}_{kl} \quad = \quad T_{2k-1,2l-1}-iT_{2k-1,2l}-iT_{2k,2l-1}-T_{2k,2l}$$

$$
\begin{aligned}
E_{kl}^{-} &= T_{2k-1,2l-1} + iT_{2k-1,2l} + iT_{2k,2l-1} - T_{2k,2l} \\
F_{kl}^{+} &= T_{2k-1,2l-1} + iT_{2k-1,2l} - iT_{2k,2l-1} + T_{2k,2l} \\
F_{kl}^{-} &= T_{2k-1,2l-1} - iT_{2k-1,2l} + iT_{2k,2l-1} + T_{2k,2l}
\end{aligned} \tag{54}
$$

این چهارعنصر برای $H_k, \quad H_l$ دارای ویژه مقادیر $(+1,+1)$، $(+1,-1)$، $(-1,+1)$ و $(-1,-1)$ هستند. ویژه مقادیر آنها برای دیگر H هابوضوح صفراست. ریشه‌های مربوط به این عناصر عبارتنداز:

$$
e_k + e_l, \quad e_k - e_l, \quad -e_k + e_l, \quad -e_k - e_l. \tag{55}
$$

به ازای هرجفت اندیس $1 \leq k < l \leq n$ می توان چهارعنصر $E_{kl}^{\pm}, \ F_{kl}^{\pm}$ را به شکل بالا درنظرگرفت که ریشه های متناظربا‌آنها عبارتند از $\pm e_k \pm e_l$. تاکنون تعداد $2n(n-1)$ ریشه راساخته ایم. اما هنوز تمام ریشه ها را نیافته ایم زیرااز اندیس $2n+1$ هنوز هیچ استفاده ای نکرده ایم.

عناصر زیررادرنظرمی گیریم:

$$
\begin{aligned}
&G_1^{\pm} := T_{1,2n+1} \mp iT_{2,2n+1}, \\
&G_2^{\pm} := T_{3,2n+1} \mp iT_{4,2n+1}, \\
&G_3^{\pm} := T_{5,2n+1} \mp iT_{6,2n+1}, \\
&\cdots \\
&G_n^{\pm} := T_{2n-1,2n+1} \mp iT_{2n,2n+1}.
\end{aligned} \tag{56}
$$

خواننده براحتی می تواند تحقیق کند که ریشه های متناظربااین عناصر به ترتیب زیرهستند:

$$
\pm e_1, \pm e_2, \cdots \pm e_n. \tag{57}
$$

بنابراین فضای ریشه های این جبرعبارت است از:

$$
\sum = \{\pm(e_k \pm e_l), \quad , \pm e_k, \quad 1 \leq k < l \leq n\}. \tag{58}
$$

ریشه های مثبت عبارتنداز:

$$
\sum^{+} = \{e_k \pm e_l, \quad e_k \quad 1 \leq k < l \leq n\}. \tag{59}
$$

شکل ۸: دیاگرام دینکین برای جبر $B_n = so(2n+1)$.

ریشه های ساده عبارتنداز:

$$\prod = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, \cdots e_{n-1} - e_n, e_n\}. \tag{60}$$

رتبه این جبربرابراست با n ودیاگرام دینکین آن درشکل (۹) داده شده است. بنابراین تعداد ریشه هابرابراست با $4 \times \frac{n(n-1)}{2} = 2n(n-1)$. ریشه های مثبت عبارتند از $1 \leq k < l \leq n \quad e_k \pm e_l$. برخواننده است که ثابت کند ریشه های ساده عبارتنداز

$$\prod = \{e_1 - e_2,\ e_2 - e_3,\ e_3 - e_4, \cdots, e_{n-2} - e_{n-1}, e_{n-1} - e_n\} \bigcup \{e_{n-1} + e_n\} \tag{61}$$

دیاگرام دینکین این جبر درشکل (۸) آمده است.

۸ جبر $sp(2n)$

درآخرین بخش این درس جبر $sp(2n)$ را بررسی می کنیم. این جبر از ماتریس های x تشکیل یافته است که دررابطه $xJ + Jx^t = 0$ صدق می کنند که درآن $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. درنتیجه هرماتریس $x \in sp(2n)$ یک ماتریس $2n$ بعدی به شکل

$$x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} \tag{62}$$

که درآن A یک ماتریس n بعدی دلخواه و B و C ماتریس های متقارن هستند.

برای سادگی نخست حالت ساده تر $C_2 = sp(4)$ رابررسی می کنیم. هرماتریس متعلق به این جبر را به صورت زیرمی توان نوشت:

$$x = \begin{pmatrix} a & b & \alpha & \beta \\ c & d & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & -a & -c \\ \beta' & \gamma' & -b & -d \end{pmatrix} \tag{63}$$

درنتیجه مولدهای این جبر که ضرایب پارامترهای فوق هستند به راحتی بدست می آیند. خوشبختانه لازم نیست هیچ نوع ترکیب خطی جدیدی ازاین مولد ها اختیار کنیم تا پایه کارتان ساخته شود. درواقع ضرایب a و d زیرجبر کارتان را تشکیل می دهند: یعنی

$$H_1 := E_{11} - E_{33} \qquad H_2 := E_{22} - E_{44} \tag{64}$$

بقیه عناصر جبر نیز که هرکدام ضریب یکی از پارامترها هستند به ترتیب زیرنوشته می شوند که درجلوی هرکدام بردارریشه مربوط به آن را می نویسیم:

$$\begin{array}{ll}
E_{12} - E_{43} & (1,-1) \\
E_{21} - E_{34} & (-1,1) \\
E_{14} + E_{23} & (1,1) \\
E_{41} + E_{32} & (-1,-1) \\
E_{13} & (2,0) \\
E_{31} & (-2,0) \\
E_{24} & (0,2) \\
E_{42} & (0,-2)
\end{array} \tag{65}$$

بنابراین برای این جبرخواهیم داشت:

$$\begin{array}{l}
\sum = \{e_1 \pm e_2, -e_1 \pm e_2, \pm 2e_1, \pm 2e_2\}, \\
\sum_+ = \{e_1 \pm e_2, 2e_1, 2e_2\}, \\
\prod = \{e_1 - e_2, 2e_2\}.
\end{array} \tag{66}$$

حال می توانیم به جبر $C_n = sp(2n)$ بپردازیم. باتوجه به آنچه که درمورد $sp(4)$ یادگرفتیم زیرجبرکارتان به شکل زیرخواهد بود:

$$\begin{array}{lcl}
H_1 & = & E_{11} - E_{n+1,n+1} \\
H_2 & = & E_{22} - E_{n+2,n+2} \\
H_3 & = & E_{33} - E_{n+3,n+3} \\
\cdots & & \\
H_n & = & E_{nn} - E_{2n,2n}.
\end{array} \tag{67}$$

شکل ۹: دیاگرام دینکین برای جبر $C_n = sp(2n)$.

بقیه ریشه ها به شکل زیرهستند که درجلو هرکدام ریشه مربوط به آن رانوشته ایم:

$$\begin{array}{lll} E_{i,n+j}+E_{j,n+i} & e_i+e_j & i<j \\ E_{i,n+j}+E_{j,n+i} & -e_i+e_j & i>j \\ E_{i,j}-E_{n+j,n+i} & e_i-e_j & i<j \\ E_{n+i,j}+E_{n+j,i} & -e_i-e_j & i<j \\ E_{i,n+i} & 2e_i & \\ E_{n+i,i} & -2e_i. & \end{array} \tag{68}$$

بنابراین برای جبر $C_n = sp(2n)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum &= \{e_i \pm e_j, \quad \pm 2e_i \quad 1 \leq i < j \leq n\} \\ \sum_+ &= \{e_i \pm e_j, \quad 2e_i\} \\ \prod &= \{e_1-e_2, e_2-e_3, \cdots e_{n-1}-e_n, 2e_n\}. \end{aligned} \tag{69}$$

دیاگرام دینکین این جبر درشکل (۹) نشان داده شده است.