درس دهم : ساختمان جبرهای لی

۱ مقدمه

دراین فصل باساختمان جبرهای لی به طورکلی ونه الزاماً جبرهای لی وابسته به گروه های لی یاگروه های ماتریسی آشنامی شویم. شباهت های بسیاری بین مفاهیم نظریه گروه و جبرهای لی وجود دارد ودربسیاری موارد خواننده می تواند تعاریف مربوطه مثل زیرجبر، همسانی، یکسانی، نمایش ونظایرآنها وهم چنین صورت قضایاواثبات انهارا حدس بزنند. آنچه که دراین فصل یادخواهیم گرفت ما را آماده می کند که درفصل های آینده طبقه بندی جبرهای لی ساده را انجام دهیم.

ممکن است که مباحث موجود در این درس کمی بیشتراز حوصله دانشجویان باشد. به همین دلیل بعضی از بخش های این درس با علامتِ $*$ مشخص شده‌اند. خواندن این بخش ها و یادگرفتن آنها برای گذران امتحان نهایی درس لازم نیست.

۲ جبرلی

تعریف: فضای برداری A یک جبرلی خوانده می شود هرگاه یک عمل دوتایی دوخطی $[\ ,\ ] : A\times A \longrightarrow A$ موسوم به براکت درآن تعریف شده باشد که درخاصیت های زیرصدق کند:

$$[x,y] \ = \ -[y,x] \tag{1}$$

$$[\ [x,y],\ z]+[\ [y,z],\ x]+[\ [z,x],\ y]=0. \tag{2}$$

یادآوری می شود که یک عمل دوخطی ($bilinear$) نسبت به هردومتغیرخود خطی است یعنی به ازای هر دو بردارِ x و y و هر عددِ α:

$$[\alpha x \ + \ y,z]=\alpha\ [\ x,\ z]+[\ y,\ z]$$

و

$$[x,\alpha y \ + \ z]=\alpha[\ x,\ y]+[\ y,\ z]$$

.

هرگاه فضای برداری A حقیقی (مختلط) باشد، جبرلی مربوطه نیز یک جبرحقیقی (مختلط) خوانده می شود. بعد جبر همان

بعد فضای برداری است. یک جبرلی A آبلی یاجابجایی خوانده می شود اگر $A \ni x, y \ \forall \quad 0 = [x, y]$.

هرگاه برای فضای برداری A پایه $\{e_i\}$ راانتخاب کنیم می توانیم از خاصیت دوخطی بودن استفاده کنیم و برای هر دو بردارِ دلخواه v و w بنویسیم:

$$[v, w] = [v^i e_i, w^j e_j] = v^i w^j [e_i, e_j]. \tag{3}$$

بنابراین اگر براکت بردارهای پایه را بلد باشیم می توانیم براکت هر دو بردارِ دلخواه را حساب کنیم. حال براکت دو بردارِ پایه بنابرتعریف جبر می بایست خود یک بردار باشد و بنابراین می بایست بتوان آن را برحسب بردارهای پایه فضا بسط داد. این بسط را به شکل زیر می نویسیم:

$$[e_i \ , \ e_j] = f^k_{ij} \ e_k, \tag{4}$$

که درآن روی شاخص های تکراری جمع بسته شده است. f^k_{ij} هااعداد مختلطی هستند که ثابت های ساختاری جبردرآن پایه خوانده می شوند. هرگاه پایه جبررا عوض کنیم ثابت های ساختاری نیزعوض می شوند.

تمرین: هرگاه بردارهای پایه با رابطه‌ی $e'_i = X^j_i e_j$ به هم مربوط باشند، رابطه ثابت های ساختاری را در این دو پایه بدست آورید.

ازخاصیت پادتقارن براکت و هم چنین اتحاد جاکوبی یعنی از روابط زیر

$$[e_i, e_j] = -[e_j, e_i], \tag{5}$$

$$[[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] = 0, \tag{6}$$

معلوم می شود که درهرپایه ای ثابت های ساختاری درروابط زیرصدق می کنند:

$$f^k_{ij} = -f^k_{ji} \tag{7}$$

$$f^m_{ij} f^n_{mk} + f^m_{jk} f^n_{mi} + f^m_{ki} f^n_{mj} = 0 \qquad \forall i, \ j, \ k. \tag{8}$$

یک جبر لی جابجایی $(Abelian\ Lie\ Algebra)$ ، جبری است که همه عناصرآن باهم جابجا شوند. درچنین جبری ثابت های ساختاری درهرپایه ای برابرباصفرهستند.

مثال: هرفضای برداری V را می توان با تعریف براکت به صورت $[x,y]=0 \ \ \forall\ x,y\in V$ تبدیل به یک جبرلی آبلی کرد.

مثال: هرجبرشرکت پذیر A را می توان باتعریف $[a,b]:=ab-ba$ تبدیل به یک جبرلی کرد. اگر جبرشرکت پذیراولیه ناجابجایی باشد یعنی $ab\neq ba$ آنگاه جبرلی ساخته شده نیز ناجابجایی خواهد بود، یعنی $[a,b]\neq 0$. منظور از جبر شرکت پذیر یک فضای برداری ست که در آن یک ضرب به شکل $\times : V\times V\longrightarrow V$ تعریف شده است و این ضرب دو خطی و شرکت پذیراست. به عنوان مثال فضای برداری ماتریس های مربعی یک جبر شرکت پذیراست.

مثال: فرض کنید که V یک فضای برداری و $gl(V)$ فضای برداری تمام تبدیلات خطی روی V باشد. این فضایک جبرشرکت پذیراست که درآن ضرب دو تبدیل خطی همان ترکیب دو تبدیل خطی است. یعنی $(xy)(v):=x(y(v))$. این جبرشرکت پذیررا می توان تبدیل مطابق با مثال ۲ به یک جبرلی تبدیل کرد. هرگاه V برابر با R^n باشد جبرلی مربوطه را با $gl(n,R)$ نشان می دهند. $gl(n,C)$ نیز به همین ترتیب تعریف می شود.

هرگاه پایه $\{E_{ij}\}$ را برای $gl(n,R)$ یا $gl(n,C)$ اختیارکنیم خواهیم داشت:

$$[E_{ij},E_{kl}]=\delta_{jk}E_{il}-\delta_{li}E_{kj}. \tag{9}$$

مثال: فضای برداری سه بعدی R^3 با ضرب برداری متعارف

$$[\vec{r},\vec{r'}]=\vec{r}\times\vec{r'} \tag{10}$$

یک جبرلی است. هرگاه پایه متعامد یکه $\hat{e}_1$ ، $\hat{e}_2$ ، $\hat{e}_3$ را برای فضای سه بعدی اختیار کنیم خواهیم داشت:

$$[\hat{e}_1,\hat{e}_2]=\hat{e}_3,\quad [\hat{e}_2,\hat{e}_3]=\hat{e}_1,\quad [\hat{e}_3,\hat{e}_1]=\hat{e}_2. \tag{11}$$

مثال: جبرلی $E(R^2)$ به صورت یک فضای خطی باپایه های P_x,P_y,L و روابط جابجایی زیرتعریف می شود:

$$[P_x,P_y]=0,\quad [L,P_x]=iP_y,\quad [L,P_y]=-iP_x. \tag{12}$$

این جبریک جبرلی مختلط سه بعدی است.

مثال: جبرلی $E(R^3)$ به صورت یک فضای خطی باپایه های $P_x,\ P_y,\ P_z,\ L_x,\ L_y,\ L_z$ وروابط جابجایی زیرتعریف می شود:

$$[P_j,P_k]=0,$$
$$[L_j,P_k]=i\epsilon_{ijk}P_k,$$

$$[L_j, L_k] = i\epsilon_{ijk} L_k. \tag{13}$$

مثال: به ازای هر عدد صحیح n فضای برداری $2n+1$ بعدی با بردارهای پایه $\{I, x_i, p_i, \quad i = 1 \cdots n\}$ و روابط جابجایی زیرتشکیل یک جبرلی می دهد:

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \qquad [x_i, p_j] = \delta_{ij} I, \qquad [I, x_i] = [I, p_i] = 0 \tag{14}$$

این جبر جبرهایزنبرگ [1] نامیده می شود.

مثال: جبربی نهایت بعدی ویراسورو[2] توسط بردارهای پایه $\{L_n \quad n \in Z\}$ جاروب می شود و دارای روابط جابجایی زیراست:

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m}. \tag{15}$$

۳ زیرجبر لی

تعریف: فرض کنید که A یک جبرلی و B یک زیرفضای خطی از A باشد. اگر B خود یک جبرلی باشد آن را یک زیرجبرلی از A می گویند.

مثال: هرجبری دو زیرجبربدیهی دارد یکی خودش و دیگری زیرفضای صفربعدی $\{0\}$.

مثال: درجبر $gl(n,R)$، مجموعه ماتریس های با ردّ صفر تشکیل یک زیرجبرمی دهند. این جبر جبرتبدیلات خطی خاص [3] نامیده می شود و با $sl(n,R)$ نشان داده می شود.

مثال: درفضای برداری حقیقی V ضرب داخلی $\langle x, y \rangle$ را درنظربگیرید. این ضرب داخلی در شرط $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ صدق می کند. مجموعه تبدیلاتی مثل T را درنظربگیرید که درخاصیت زیرصدق می کنند:

$$\langle Tx, y \rangle + \langle x, Ty \rangle = 0, \tag{16}$$

مجموعه این تبدیلات یک زیرجبرلی از $gl(V)$ تشکیل می دهند که آن را با $o(V)$ نشان می دهند و جبرتبدیلات متعامد روی فضای برداری V می خوانند. درحالتی که داشته باشیم $V = R^n$ یا $V = C^n$ جبرمزبور را بانماد $o(n,R)$ یا $o(n,C)$ نشان می

[1] Heisenberg Algebra
[2] Virasoro Algebra
[3] Special Linear Algebra

دهند. ضرب داخلی را باانتخاب پایه های مناسب همواره می توان به صورت زیردرآورد:

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i \tag{17}$$

دراین صورت عناصر $o(n,R)$ یا $o(n,C)$ ازماتریس هایی تشکیل می شوند که درشرط $T^t + T = 0$ صدق می کنند که درآن T^t ترانهاده ماتریس T است.

مثال: درفضای برداری مختلط V ضرب داخلی $\langle x,y\rangle$ را درنظربگیرید که در شرط $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle^*$ صدق می کند. مجموعه تبدیلاتی مثل T را درنظربگیرید که درخاصیت زیرصدق می کنند:

$$\langle Tx,y\rangle + \langle x,Ty\rangle = 0, \tag{18}$$

مجموعه این تبدیلات یک زیرجبرلی از $gl(V)$ تشکیل می دهند که آن را با $u(V)$ نشان می دهند و جبرتبدیلات یکانی روی فضای برداری V می خوانند. یک زیرجبراز$u(V)$ ازتبدیلاتی تشکیل می شود که ردّ آنها برابرباصفر باشد. این زیرجبررا با $su(V)$ نشان می دهیم.

درحالتی که داشته باشیم $V = C^n$ جبر های مزبور را بانماد $u(n)$ یا $su(n)$ نشان می دهند. این جبرها به ترتبب از ماتریس های پادهرمیتی برای $u(n)$ و ماتریس های پادهرمیتی بدون ردّ برای $su(n)$ تشکیل می شوند.

مثال: درفضای برداری V ضرب داخلی پادمتقارن و غیرواگن $\langle x,y\rangle$ را درنظربگیرید. ($\langle x,y\rangle = -\langle y,x\rangle$). منظورازیک ضرب داخلی غیرواگن ضربی است که درآن از $\forall y \quad \langle x,y\rangle = 0$ بتوان نتیجه گرفت که $x = 0$. مجموعه تبدیلاتی مثل T را درنظربگیرید که درخاصیت زیرصدق می کنند:

$$\langle Tx,y\rangle + \langle x,Ty\rangle = 0, \tag{19}$$

مجموعه این تبدیلات یک زیرجبرلی از $gl(V)$ تشکیل می دهند که آن را با $sp(V)$ نشان می دهند و جبرتبدیلات همتافته یا *symplectic* خوانده می شود. درحالتی که داشته باشیم $V = R^{2n}$ $V = C^{2n}$ جبر های مزبور را بانماد $sp(2n,R)$ یا $sp(2n,C)$ نشان می دهند. دریک پایه مناسب می توان ضرب داخلی پادمتقارن را به صورت زیرنشان داد.

$$\langle \eta,\eta'\rangle = \eta^t J\eta', \tag{20}$$

که درآن

$$\eta = \begin{pmatrix} x^1 \\ . \\ . \\ x^n \\ p^1 \\ . \\ . \\ p^n \end{pmatrix} \qquad \eta' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ . \\ . \\ x'^n \\ p'^1 \\ . \\ . \\ p'^n \end{pmatrix} \tag{21}$$

و

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

مثال: درجبرلی $E(R^3)$ ، فضای برداری تولید شده توسط P_i یک زیرجبراست. هم چنین فضای برداری تولید شده توسط L_i ها نیزیک زیرجبراست.

۴ همسانی و یکسانی جبرهای لی

درست مثل گروه ها در مورد جبرهای لی نیز ممکن است که دو جبر ظاهر متفاوتی داشته باشند ولی واقعاً ساختار آنها یکسان باشد. یکسان بودن این ساختار به این معناست که می توان بین این دو جبر یک تناظر یک به یک برقرار کرد به نحوی که رابطه بین براکت ها نیز حفظ شود. به عبارت بهتر یک نگاشت خطی $\phi : A \longrightarrow B$ بین دوجبرلی یک همسانی [4] نامیده می شود هرگاه شرط زیربرقرارباشد:

$$[\phi(a), \phi(a')] = \phi([a, a']). \quad (23)$$

یک همسانی یکسانی [5] نامیده می شود اگریک به یک و پوشا باشد. هرگاه یک یکسانی از یک جبر A به‌روی خودش تعریف شود آن را یک خودسانی یا [6] می خوانیم.

مثال: A را جبر حقیقی جاروب شده توسط ماتریس های زیرمی گیریم:

$$m_1 := \frac{i}{2}\sigma_1, \qquad m_2 := \frac{i}{2}\sigma_2, \qquad m_3 := \frac{i}{2}\sigma_3, \quad (24)$$

که درآن براکت دو عنصر همان تعویضگر دو ماتریس است. بااستفاده از خواص ماتریس های پاولی داریم:

$$[m_j,\ m_k] = \epsilon_{jkl}\ m_l. \quad (25)$$

این جبرباجبر فضای برداری R^3 که براکت آن همان ضرب خارجی است یکسان است. یکسانی به شکل زیرتعریف می شود:

$$\phi : A \longrightarrow R^3 \qquad \phi(m_1) = \hat{e}_1, \qquad \phi(m_2) = \hat{e}_1, \qquad \phi(m_3) = \hat{e}_3. \quad (26)$$

[4] Homomorphism
[5] Isomorphism
[6] Automorphism

هم چنین این جبرها با جبر ماتریس های پادمتقارن سه بعدی یعنی جبری که پایه های آن ماتریس های زیرهستند یکسان هستند:

$$L_1 := \begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \quad L_2 := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix} \quad L_3 := \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix} \tag{27}$$

این یکسانی به شکل زیرتعریف می شود:

$$\psi(m_j) := L_j, \qquad j = 1,\ 2,\ 3. \tag{28}$$

مثال: جبرلی $M_n(C)$ یعنی جبرماتریس های مختلط مربعی را درنظربگیرید. نگاشت $\phi : M_n(C) \longrightarrow M_n(C)$ با تعریف

$$\phi(x) := g\ x\ g^{-1} \tag{29}$$

که درآن g یک ماتریس مربعی وارون پذیراست یک همسانی است. این نگاشت یکسانی نیست.

۵ جمع مستقیم دو جبرلی

نخست بهتراست که جمع مستقیم[7] دو فضای برداری را تعریف کنیم. فرض کنید که V و W دو فضای برداری باشند. در این صورت جمع مستقیم این دو فضا به شکل زیر تعریف می شود:

$$V \oplus W = \{(v,w) |\ \ v \in V,\ w \in W\}. \tag{30}$$

دراین فضا جمع دو بردار و ضرب یک بردار در یک عدد به شکل زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} (v,w) + (v',w') &= (v+v', w+w'), \\ \alpha(v,w) &= (\alpha v, \alpha w). \end{aligned} \tag{31}$$

تمرین: تحقیق کنید که $V \oplus W$ واقعاً یک فضای برداری است.

تمرین: نشان دهید که مجموعه های زیر دو زیرفضا از $V \oplus W$ تشکیل می دهند:

$$\{(v,0) \mid v \in V\}, \qquad \{(0,w) \mid w \in W\} \tag{32}$$

[7] Direct sum

این دو زیر فضا به ترتیب با V و W یکسان هستند. حال می توانیم بنویسیم

$$(v,w)=(v,0)+(0,w)\equiv v+w, \tag{33}$$

که در رابطه‌ی آخر از تناظرِ $v\equiv (v,0)$ و $w\equiv (0,w)$ استفاده کرده‌ایم. هرگاه $\{e_i,\ i=1,\cdots m\}$ و $\{f_j,\ j=1,\cdots n\}$ دو پایه برای فضاهای V و W باشند می توانیم بنویسم

$$(v,w)=(v,0)+(0,w)=(v^ie_i,0)+(0,w^jf_j)=v^i(e_i,0)+w^j(0,f_j), \tag{34}$$

ویا

$$v+w=v^ie_i+w^jf_j. \tag{35}$$

به این ترتیب معلوم می شود که بردارهای پایه فضای $V\oplus W$ عبارتنداز $\{(e_i,0),(0,f_j)\}$ و یا $\{e_i,f_j\}$ و به این ترتیب بعد فضای $V\oplus W$ $m+n$ بعدی خواهد بود. نمونه خیلی آشنای جمع مستقیم دو فضای برداری را خواننده بارها و بارها دیده است:

$$R^3=R^2\oplus R=R\oplus R\oplus R. \tag{36}$$

حال که جمع مستقیم دو فضا را فهمیده‌ایم می توانیم به جبر مستقیم دو جبرلی بپردازیم.

تعریف: فرض کنید که A و B دوجبرلی باشند. دراین صورت فضای برداری $A\oplus B$ یعنی جمع مستقیم دوفضای برداری را می توان تبدیل به یک جبرلی کرد. برای این کار براکت را به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$[\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a'\\ b'\end{pmatrix}]:=\begin{pmatrix} [a,a']\\ [b,b']\end{pmatrix}. \tag{37}$$

درنتیجه خواهیم داشت:

$$[a,b]\equiv[(a,0),(0,b)]=([a,0],[0,b])=(0,0)=\equiv 0 \tag{38}$$

به این ترتیب می توان گفت که در جمع مستقیم، دو جبرِ A و B به طرز بیهوده یا بدیهی بایکدیگر جمع شده اند. به این ترتیب هروقت که بتوانیم که پایه های یک جبرلی را به دوقسمت تقسیم کنیم به نحوی که تعویض گر یک قسمت باقسمت دیگر صفرشود می توانیم آن جبر را به عنوان جمع مستقیم دو جبردرنظربگیریم. برای چنین جبری داریم

$$[e_i,e_j]=C_{ij}^ke_k,\qquad [f_i,f_j]=D_{ij}^kf_k,\qquad [e_i,f_j]=0. \tag{39}$$

مثال: جبرلی $so(3) \oplus so(3)$ باروابط زیرداده می شود:

$$[J_m, J_n] = \epsilon_{mnp} J_p, \quad [K_m, K_n] = \epsilon_{mnp} K_p, \quad [J_m, K_n] = 0. \tag{40}$$

درآینده جمع نیمه مستقیم یا (*semidirect sum*) راتعریف خواهیم کرد که درآن A و B را به طرز نابدیهی بایکدیگر جمع می شوند.

۶ ایده آل و جبرخارج قسمت *

نخست خارج قسمت [8] دو فضای برداری را تعریف می کنیم.

تعریف: فرض کنید که V یک فضای برداری و W یک زیرفضای آن باشد. دراین صورت گوییم $x, \quad y \in V$ بایکدیگر هم ارز هستند اگر $x - y \in W$. این رابطه یک رابطه هم ارزی است. این رابطه تمام فضای برداری را به کلاس های هم ارزی افراز می کند. همه عناصرهم ارزبا x را با $[x]$ نشان می دهیم. مجموعه تمام این کلاس هاباتعریف زیریک فضای برداری تشکیل می دهد که آن را فضای برداری خارج قسمت می خوانیم و با V/W نشان می دهیم.

$$[x] + [y] := [x + y], \qquad \alpha\ [x] := [\alpha\ x]. \tag{41}$$

مثال: V را فضای سه بعدی دکارتی بامحورهای x, y, z و W را محور z می گیریم. هردوبردار که تفاوت آنهاموازی محور z باشد یعنی هردوبردار به شکل (x, y, z) و (x, y, z') بایکدیگرهم ارزهستند. نماینده هرکلاس را برداری به صورت $(x, y, 0)$ انتخاب می کنیم. دراین صورت V/W همان صفحه xy خواهد شد یابه عبارت دیگر خواهیم داشت $R^3/R = R^2$.

مثال: V را فضای سه بعدی دکارتی بامحورهای x, y, z و W را صفحه $x, \ y$ می گیریم. هردوبردار که تفاوت آنهاموازی صفحه x, y باشد یعنی هردوبردار به شکل (x, y, z) و (x', y', z) بایکدیگرهم ارزهستند. نماینده هرکلاس را برداری به صورت $(0, 0, 0)$ انتخاب می کنیم. دراین صورت V/W همان محور z خواهد شد یابه عبارت دیگر خواهیم داشت $R^3/R^2 = R$.

بعدازاین مقدمه می توانیم زیرجبرناوردا و جبرخارج قسمت را تعریف کنیم.
زیرجبرناوردا درست همان نقشی را درجبربازی می کند که زیرگروه بهنجار درگروه ایفامی کرد و جبرخارج قسمت نیز درست مثل گروه خارج قسمت تعریف می شود.

[8] Quotient Space

تعریف: زیرجبرناوردا یاایده آل [9].

فرض کنید که A یک جبرلی و B زیرجبری ازآن باشد. دراین صورت گوییم B یک ایده آل A است اگر به ازای هر $a \in A$ و هر $b \in B$ ، داشته باشیم $[a,b] \in B$.

مثال: هرجبرلی دو ایده آل بدیهی دارد یکی خودش ودیگری زیرفضای $\{0\}$.

مثال: اگر B و C دوزیرجبراز A باشند $B+C$ را به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$B + C := \{b + c|\ b \in B,\ c \in C\}. \tag{42}$$

اگر B یک ایده آل و C تنها یک زیرجبرباشد آنگاه $B+C$ نیزیک زیرجبراز A است.
تمرین: این موضوع یعنی صحت ادعای مثال ۲۱ را نشان دهید. درکجا از ایده‌ال بودن B استفاده می کنید؟

مثال: همانطور که دریکی ازمثال های بالا گفتیم اگر A و B دوجبرلی باشند،آنگه $A \oplus B$ یعنی جمع مستقیم آنها نیزیک جبرلی و A و B هرکدام زیرجبری از $A \oplus B$ هستند. براحتی دیده می شود که A و B هرکدام یک ایده آل از $A \oplus B$ نیزهستند.

مثال: جبرلی $E(R^3)$ یعنی جبرتبدیلات اقلیدسی روی فضای ۳ بعدی رادرنظرمی گیریم. این جبر ٦ بعدی است و دارای ٦ مولد به نام های $P_x,\ P_y,\ P_z$ و $L_x,\ L_y,\ L_z$ است. دراین جبر P_i مولفه تکانه درراستای i و L_i مولفه تکانه زاویه ای درراستای i است. دیده می شود که P_i ها یک زیرجبر و L_i هانیز یک زیرجبردیگر را تولید می کنند. زیرجبرتولید شده توسط تکانه ها یک زیرجبرناورداست ولی زیرجبرتولید شده توسط L_i ها ناوردانیست.

مثال: درجبرلی $M_n(C)$ یعنی جبرلی تشکیل شده از ماتریس های مختلط n بعدی، ماتریس های قطری تشکیل یک زیرجبرمی دهند. این زیرجبر آبلی است اما ناوردانیست.

تعریف: هرگاه A یک جبرلی و B یک ایده آل آن باشد، فضای خارج قسمت یعنی A/B تبدیل به یک جبرلی می شود که آن را جبرلی خارج قسمت می خوانیم. دراین جبرلی براکت به شکل زیرتعریف می شود:

$$[[x],[y]] := [[x,y]]. \tag{43}$$

آیده آل بودن B تضمین می کند که جبرخارج قسمت فوق خوش تعریف باشد. برای فهم این مطلب می بایست ثابت کنیم که طرف راست عبارت بالا بستگی به انتخاب نماینده های کلاس های هم ارزی ندارد. فرض کنید که $x \sim x'$ و $y \sim y'$. ازاین دو نتیجه می گیریم

$$\exists\ \ b_1,\ b_2 \in B|\ \ x' = x + b_1, \quad y' = y + b_2, \tag{44}$$

[9] Invariant Subalgebra or Ideal

درنتیجه خواهیم داشت

$$[x', y'] = [x + b_1, y + b_2] = [x, y] + [b_1, y] + [x, b_2] + [b_1, b_2] = [x, y] + b_3 \tag{45}$$

که درتساوی آخر از زیرجبربودن و ایده آل بودن B استفاده کرده ایم. بنابراین نتیجه می گیریم که $[x', y'] \sim [x, y]$ واین همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

مثال: جبرلی $E(R^3)$ رادرنظرمی گیریم. این جبریک ایده آل دارد که توسط تکانه های $P_x,\ P_y,\ P_z$ تولید می شود. این جبررا با $T(R^3)$ نمایش می دهیم. داریم

$$[L_x] \equiv L_x + T_3, \quad [L_y] \equiv L_y + T_3, \quad [L_z] \equiv L_z + T_3. \tag{46}$$

درنتیجه بنابرتعریف خواهیم داشت:

$$[[L_x], [L_y]] = [[L_x, L_y]] = [L_z], \cdots. \tag{47}$$

بنابراین جبرخارج قسمت $E(R^3)/T(R^3)$ چیزی نیست جز $so(3)$.

۷ قضیه اساسی درمورد همسانی ها*

قضیه: فرض کنید که A و B دو جبرلی و $\phi : A \longrightarrow B$ یک همسانی باشد. دراین صورت :

الف: $Ker(\phi)$ یک ایده آل از A است.

ب: $Im(\phi)$ یک زیرجبر B است.

ج: بین $Im(\phi)$ و $A/Ker(\phi)$ یک یکسانی برقراراست.

اثبات الف: فرض کنید که $x \in Ker(\phi)$ و $a \in A$. دراین صورت

$$\phi([x, a]) = [\phi(x), \phi(a)] = [0, \phi(a)] = 0 \ \longrightarrow \ [x, a] \in Ker(\phi). \tag{48}$$

اثبات ب: فرض کنید که $y_1,\ y_2 \in Im(\phi)$. دراین صورت

$$\exists\ \ x_1,\ x_2 \in A,\ |y_1 = \phi(x_1),\ \ \phi(x_2) = y_2. \tag{49}$$

بنابراین نتیجه می گیریم

$$[y_1, y_2] = [\phi(x_1), \phi(x_2)] = \phi([x_1, x_2]) \ \ \longrightarrow \ \ [y_1, y_2] \in\ Im(\phi). \tag{50}$$

اثبات ج: چون $Ker(\phi)$ یک ایده آل جبر A است پس جبرخارج قسمت $A/ker(\phi)$ وجود دارد. اعضای این جبررا با $[x],\ [y],\ [z],\cdots$ نشان می دهیم که درآن $x,\ y,\ z\cdots \in Ker(\phi)$. حال نگاشت $\psi : A/ker(\phi) \longrightarrow Im(\phi)$ را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\psi([x]) := \phi(x). \tag{51}$$

باید ثابت کنیم که این نگاشت خوش تعریف است یعنی طرف راست بستگی به انتخاب نماینده کلاس ندارد. هم چنین باید ثابت کنیم که این نگاشت یک همسانی وارون پذیراست.

اثبات خوش تعریف بودن: فرض کنید که $x \sim x'$.دراین صورت نتیجه می گیریم که

$$\exists\ y \in Ker(\phi)|x' = x + y. \tag{52}$$

بنابراین نتیجه خواهیم گرفت که:

$$\phi(x') = \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) = \phi(x) + 0 = \phi(x). \tag{53}$$

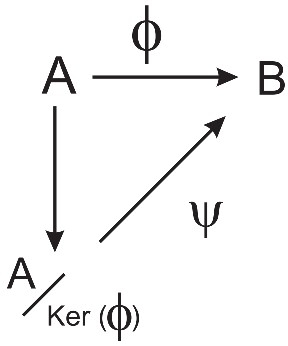
پس این نگاشت خوش تعریف است.

اثبات همسانی:

$$\psi([[x], [y]]) = \psi([[x, y]]) = \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] = [\psi([x]), \psi([y])]. \tag{54}$$

اثبات وارون پذیربودن. این نگاشت بنابرساخت پوششی است. تنهاباید ثابت کنیم که یک به یک است. فرض کنید که $\psi([x]) = \psi([y])$. دراین صورت نتیجه می گیریم که

$$\phi(x) = \phi(y) \ \ \longrightarrow \ \ \phi(x - y) = 0, \quad x - y \in Ker(\phi) \longrightarrow x \sim y \longrightarrow [x] = [y]. \tag{55}$$



شکل ۱: قضیه اساسی همسانی ها. فلش عمودی رو به پایین، نشان دهنده نگاشت مصوّر است یعنی نگاشتی که به هر عضو $a \in A$ کلاس هم ارزی آن یعنی $[a]$ را نسبت می دهد.

۸ اشتقاق های یک جبر لی *

یک اشتقاق [10] نگاشتی است که روی یک بردارهای یک جبرلی عمل می کند و به نوعی دارای خاصیت مشتق است. نام آن نیز از همین خاصیت استخراج شده‌است.

تعریف: یک اشتقاق یا $Derivation$ ازیک جبرلیِ A نگاشتی خطی مثل $D : A \longrightarrow A$ است که درخاصیت زیرصدق می کند:

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [y, D(x)]. \qquad (56)$$

مثال: به ازای هر $z \in A$ نگاشت $ad_z : A \longrightarrow A$ یک اشتقاق است. این نگاشت به صورت زیر تعریف می شود:

$$ad_z(x) := [z, x]. \qquad (57)$$

تمرین: ادعای مثال فوق را ثابت کنید.

مثال: فرض کنید که $\sigma(s)$ یک خانواده یک پارامتری از خودسانی های جبرلی A باشد یعنی به ازای هر s داشته باشیم:

$$\sigma(s)([x, y]) = [\sigma(s)(x), \sigma(s)(y)]. \qquad (58)$$

---
[10] Derivation

که درآن پارامترِ s را طوری انتخاب کرده ایم که $\sigma(0)$ تگاشت همانی باشد. دراین صورت می توانیم از طرفین رابطه بالا درنقطه $s=0$ نسبت به s مشتق بگیریم. باقراردادن $D := \frac{d}{ds}\sigma(s)\mid_{s=0}$ وکمی محاسبه بدست می آوریم که

$$D([x,y]) = [D(x),y] + [y,D(x)], \tag{59}$$

یعنی D یک اشتقاق است. بنابراین هر خانواده یک پارامتری از خودسانی ها یک اشتقاق تعریف می کند.

۹ نمایش یک جبر

دراین بخش هدف ما تنهاآن است که مفهوم نمایش یک جبرلی را معرفی کنیم و نمی خواهیم که نظریه نمایش های جبرهای لی را شرح دهیم. این کاررا به درس های آینده موکول می کنیم. نمایش یک جبردرست مثل نمایش گروه به معنای آن است که دریک فضای برداری عملگرهایا ماتریس هایی را پیداکنیم که دارای همان رابطه تعویضگری ای باشند که درجبروجود دارد. دقت کنید که این نگاشت حتماً می بایست خطی هم باشد به این معنا که ساختار خطی فضای برداری جبر را نیز می بایست نمایش دهد. این مفهوم را به طوردقیق تردرتعریف زیرمی آوریم.

تعریفِ نمایش یک جبرلی: A را یک جبرلی و V رایک فضای برداری می گیریم. گوییم نگاشت خطی $D : A \longrightarrow End(V)$ یک نمایش است هرگاه رابطه زیربرقرارباشد:

$$D[x,y] = [D(x),D(y)], \quad \forall\ x,y \in A. \tag{60}$$

تمرین: ثابت کنید که $\phi(0)=0$ و $\phi(-x) = -\phi(x)$.

درست مثل گروه ها برای هر جبرلی A یک نمایش منظم وجود دارد که آن را اصطلاحاً نمایش الحاقی یا $(Adjoint)$ می نامند. دراین نمایش از فضای برداری خود جبر برای نمایش دادن عناصر جبراستفاده می شود. بنابراین، بعد این نمایش با بعد خود جبریکسان است. این نمایش رابه چای D بانماد $ad : A \longrightarrow End(A)$ نشان می دهیم وآن را چنین تعریف می کنیم:

$$ad : x \in A \longrightarrow ad_x, \ \ | \ \ ad_x(y) := [x,y] \ \ \forall\ y \in A. \tag{61}$$

خواننده براحتی می تواند ثابت کند که این نگاشت دارای خاصیت های زیراست:

$$\begin{aligned} &ad_{\alpha x+y} = \alpha\ ad_x + ad_y, \\ &[ad_x, ad_y] = ad_{[x,y]}. \end{aligned} \tag{62}$$

فرض کنید که $\{e_i\}$ یک پایه برای جبرباشد. دراین صورت داریم

$$ad_{e_i}(e_j) = [e_i, e_j] = f_{ij}^k e_k, \tag{63}$$

وازآنجا

$$ad_x(y) = x^i y^j f_{ij}^k e_k. \tag{64}$$

بعنوان یک ماتریس بعد ad_{e_i} بابعد خود جبربرابراست و درایه های آن باتوجه به رابطه بالا عبارتند از:

$$(ad_{e_i})_j^k = f_{ij}^k, \tag{65}$$

وازآنجا

$$(ad_x)_j^k = x^i f_{ij}^k. \tag{66}$$

مثال ۲۸: نمایش الحاقی جبر $so(3)$ به شکل زیراست:

$$ad_{e_1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \quad ad_{e_2} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix} \quad ad_{e_3} = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}. \tag{67}$$

مثال: نمایش الحاقی جبر $E(R^2)$ به شکل زیراست:

$$ad_{P_x} = \begin{pmatrix} & & \\ & & -i \\ & & \end{pmatrix} \quad ad_{P_y} = \begin{pmatrix} & & i \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad ad_L = \begin{pmatrix} & -i & \\ i & & \\ & & \end{pmatrix}. \tag{68}$$

قضیه: فرض کنید که $\sigma : A \longrightarrow A$ یک خودسانی روی جبرلی A باشد. دراین صورت برای هر $x \in A$ رابطه زیربرقراراست:

$$ad_{\sigma(x)} = \sigma \circ ad_x \circ \sigma^{-1}. \tag{69}$$

اثبات: اثر $ad_{\sigma(x)}$ راروی عضو دلخواهی مثل $y \in A$ حساب می کنیم و ازخاصیت خودسانی σ وهم چنین وارون پذیربودن آن استفاده می کنیم:

$$ad_{\sigma(x)}(y) = [\sigma(x), y] = [\sigma(x), \sigma(\sigma^{-1}(x))] = \sigma([x, \sigma^{-1}(y)]) = \sigma(ad_x(\sigma^{-1}(y))) \tag{70}$$

بابرداشتن y ازدوطرف به رابطه (69) می رسیم.

۱۰ جمع نیمه مستقیم دوجبرلی *

فرض کنید که A و B دوجبرلی باشند. قبلاً جمع مستقیم این دوجبرلی را تعریف کرده ا یم. درجمع مستقیم براکت عناصر A و عناصر B برابر با صفر هستند. به عبارت دیگر A و B به طرز بیهوده یا بدیهی بایکدیگر جمع شده اند. درجمع نیمه مستقیم می خواهیم A و B را به طرز نابدیهی بایکدیگر جمع کنیم. برای این کار می بایست براکت بین عناصر A و B را تعریف کنیم. برای این کار به ترتیب زیرعمل می کنیم. می دانیم که جبرلی A را می توان روی یک فضای برداری نمایش داد. بیایید فضای برداری ای را که برای نمایش A انتخاب می کنیم همان فضای برداری جبر B بگیرید ونگاشتی که این نمایش را تعریف می کند ϕ بنامیم. دقت کنید که ϕ یک نگاشت خطی از B به B است که درشرط نمایش بودن یعنی

$$\phi[a, a'] = \phi(a)\phi(a') - \phi(a')\phi(a) \tag{71}$$

صدق می کند. حال یک شرط اضافه نیز روی ϕ قرارمی دهیم وآن اینکه به ازای هر a، $\phi(a)$ یک اشتقاق روی B باشد. دراین صورت

$$\phi(a)[b, b'] = [\phi(a)b, b'] + [b, \phi(a)b']. \tag{72}$$

بااین مقدمات برای تعریف جمع نیمه مستقیم دو جبرلی A و B آماده شده ایم. برای این کار تنهامی بایست براکت عناصر A وB را تعریف کنیم که این کاررا با رابطه زیرانجام می دهیم:

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \phi(a)b, \qquad \forall a \in A,\ b \in B, \\ [b, a] &:= -[a, b]. \end{aligned} \tag{73}$$

حال می بایست ثابت کنیم که بااین تعریف اتحاد جاکوبی برقرارخواهد بود. داریم

$$\begin{aligned} [[a, a'], b] &= \phi([a, a'])b = (\phi(a)\phi(a') - \phi(a')\phi(a))\, b = \phi(a)(\phi(a')b) - \phi(a')(\phi(a)b) \\ &= \phi(a)([a', b]) - \phi(a')([a, b]) = [a, [a', b]] - [a', [a, b]], \end{aligned} \tag{74}$$

که درآن از همسانی بودن ϕ استفاده کرده ایم. بنابراین دراین مورد اتحاد جاکوبی برقراراست. هم چنین داریم

$$[a, [b, b']] \;=\; \phi(a)[b, b'] = [\phi(a)(b), b'] + [b, \phi(a)b']$$

$$= \quad [[a,b],b']) + [b,[a,b']], \tag{75}$$

که درآن ازاشتقاق بودن ϕ استفاده کرده ایم. این رابطه نیز چیزی نیست جزاتحاد جاکوبی. بنابراین براکت تعریف شده اتحاد جاکوبی را برقرارمی کند و جمع نیمه مستقیم را تبدیل به یک جبرلی می کند. این جبرلی با نماد $A \oplus_\phi B$ نشان داده می شود.

۱۱ فرم کیلینگ

می دانیم که یک جبرلی یک فضای برداری هم هست، بنابراین می توان آن را به ضرب داخلی مجهزکرد. برای یک جبرلی نیز می توان بااستفاده از نمایش الحاقی چیزی شبیه به یک ضرب داخلی طبیعی تعریف کرد که آن را فرم کیلینگ[11] می نامند و به شکل زیرتعریف می شود:

$$K(x,y) := tr(ad_x ad_y). \tag{76}$$

که درآن tr روی فضای برداری A محاسبه می شود.

فرم کیلینگ دارای خاصیت های زیراست:

$$\begin{aligned} &K(x,y) = K(y,x) \\ &K(\alpha x + y, z) = \alpha K(x,z) + K(y,z) \\ &K([x,y],z) = K([z,x],y) = K([y,z],x). \end{aligned} \tag{77}$$

ازاین خواص تنها خاصیت آخربدیهی نیست. برای اثبات آن توجه می کنیم که بنابرتعریف

$$K([x,y],z) = tr(ad_{[x,y]} ad_z) \tag{78}$$

امااز‌آنجا که $ad_{[x,y]} = ad_x\ ad_y - ad_y\ ad_x$ عبارت بالارامی توان به شکل زیرنوشت:

$$K([x,y],z) = tr((ad_x\ ad_y - ad_y\ ad_x)ad_z) = tr((ad_y\ ad_z - ad_z\ ad_y)ad_x) = tr(ad_{[y,z]} ad_x) = K([y,z],x). \tag{79}$$

که درآن ازخاصیت دوره ای ردّ استفاده کرده ایم.

هرگاه برای جبرلی n بعدی پایه $\{e_a, \quad a = 1,2,\cdots n\}$ را درنظربگیریم، ضرب داخلی تعریف شده دربالا یک ماتریس مربعی متقارن n بعدی را به شکل زیر مشخص می کند:

$$K_{ab} := K(e_a, e_b) \tag{80}$$

باتوجه به رابطه (63) بدست می آوریم:

$$K_{ab} = f^d_{ac} f^c_{bd}. \tag{81}$$

---

[11] Killing Form

درنتیجه ضرب داخلی هردوعضواز جبرمثل $x = x^a e_a, y = y^b e_b$ به شکل زیردرخواهد آمد:

$$K(x,y) = K_{ab} x^a y^b. \tag{82}$$

ماتریس K را اصطلاحاً فرم کیلینگ جبرلی می نامند. بااستفاده از فرم کیلینگ می توان شاخص بالای تانسورهای مختلف را پایین آورد. به عنوان مثال قرارمی دهیم:

$$x_a := K_{ab} x^b \qquad f_{abc} = K_{cd} f^d_{ab}, \cdots. \tag{83}$$

هرگاه فرم کیلینگ وارون پذیرباشد درایه های وارون آن را با K^{ab} نشان می دهیم ودرنتیجه خواهیم داشت:

$$K^{ab} K_{bc} = \delta^a_c. \tag{84}$$

بافرم K^{ab} نیزمی توان شاخص هارا بالابرد. به عنوان مثال خواهیم داشت:

$$e^a := K^{ab} e_b. \tag{85}$$

می دانیم که روابط جابجایی جبربه شکل کلی زیرهستند:

$$[e_a, e_b] = f^c_{ab} e_c \tag{86}$$

متریک کیلینگ مثل هرضرب داخلی ای که دریک فضای برداری تعریف می شود به ما اجازه می دهد که ضرایب f^c_{ab} را با ضرب کردن دو طرف دریک بردار پایه بدست آوریم بااین تفاوت که متریک کیلینگ یک ضرب داخلی خاص است که خواص مناسب آن به مااجازه می دهد که ازساختارجبرلی نیز استفاده کنیم.

قضیه: ثابت های ساختاری درروابط زیرصدق می کنند:

$$\begin{aligned} f_{abc} &= K([e_a, e_b], e_c), \\ f_{abc} &= f_{bca} = f_{cab}, \\ f_{abc} &= -f_{bac} = -f_{acb}. \end{aligned} \tag{87}$$

رابطه دوم بیان می کند که ثابت های ساختاری $f_{abc} := K_{cd} f^d_{ab}$ تقارن دوره ای نسبت به جایگشت اندیس ها دارند. رابطه سوم نیز بیان می کند که این ضرایب نسبت به تعویض هرجفت از اندیس ها پادمتقارن هستند.

اثبات : از رابطه 86 نتیجه می گیریم که

$$K([e_a, e_b], e_d) = f^c_{ab} K(e_c, e_d) = f^c_{ab} K_{cd} = f_{abc}. \tag{88}$$

حال اگر از خواص متریک کیلینگ استفاده کنیم دو رابطه دیگر بدیهی خواهند شد.

مثال ۳۶: برای جبر $so(3)$ یک محاسبه ساده بااستفاده از رابطه (67) نشان می دهد که

$$K = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}. \tag{89}$$

یک قضیه مهم درمورد فرم کیلینگ آن است که هرنوع خودسانی درجبرمقداراین ضرب داخلی را حفظ می کند.
قضیه: اگر σ یک خودسانی جبر لی A باشد، خواهیم داشت:

$$K(\sigma(x), \sigma(y)) = K(x, y). \tag{90}$$

اثبات این امر ساده است. باتوجه به تعریف فرم کیلینگ (76) و رابطه (69) داریم:

$$K(\sigma(x), \sigma(y)) = tr(ad_{\sigma(x)} ad_{\sigma(y)}) = tr(\sigma \circ ad_x \circ \sigma^{-1} \sigma \circ ad_y \circ \sigma^{-1}) = tr(ad_x\ ad_y) = K(x, y). \tag{91}$$

۱.۱۱ جبرلی تعویض گر– جبرهای لی حل پذیر

تعریف جبرلی تعویضگر:[12] فرض کنید که A یک جبرلی باشد. $A^{(1)}$ را به عنوان زیرفضایی درنظر می گیریم که عناصر آن را بتوان به عنوان ترکیب خطی تعویضگرهایی از A نوشت. به عبارت دیگر

$$A^{(1)} := \{x \in A | x = \sum_i [x_i, y_i], \cdots x_i,\ y_i \in A\} \tag{92}$$

بدیهی است که $A^{(1)}$ نسبت به براکت لی بسته و بنابراین یک زیرجبر A است. علامت مناسبی که برای $A^{(1)}$ بکارمی بریم به شکل زیراست $A^{(1)} = [A, A]$ که به خوبی گویای تعریف فوق است.

[12] Commutator Subalgebra

قضیه: هرگاه A یک جبرلی باشد، $A^{(1)}$ یک ایده آل آن است.

اثبات: بنابرتعریف واضح است.

حال به تعریف جبرهای لی حل پذیرمی پردازیم. برای یک جبرلی A می توانیم رشته زیرجبرهای تعویضگر را به شکل زیرتعریف کنیم

$$A^{(1)}=[A,A], \qquad A^{(2)}=[A^{(1)},A^{(1)}], \qquad A^{(3)}=[A^{(2)},A^{(2)}], \qquad \cdots \tag{93}$$

این کارسلسله ای از زیرجبرهای تودرتو را برای A تعریف می کند:

$$\cdots A^{(3)} \subset \cdots A^{(2)} \subset A^{(1)}) \subset A. \tag{94}$$

هرگاه این سلسله زیرجبرها به زیرجبر $\{0\}$ ختم شود، جبرA حل پذیر[13] خوانده می شود.
مثال: نشان دهید که جبرلی ماتریس های مثلثی یعنی جبرلی تولید شده توسط ماتریس های $\{E_{ij}, \ | \ i\leq j\}$ یک جبرلی حل پذیراست.

مثال: جبرلی $A\equiv so(3)$ را باروابط تعریف کنندهٔ

$$[L_1,L_2]=L_3, \quad [L_2,L_3]=L_1, \quad [L_3,L_1]=L_2, \tag{95}$$

درنظرمی گیریم. برای این جبرداریم:

$$A^{(1)}=A \quad \longrightarrow \quad A^{(n)}=A \quad \forall n. \tag{96}$$

بنابراین جبر $so(3)$ یک جبرحل پذیرنیست.

مثال: جبرلی $E(R^2)$ را باروابط تعریف کنندهٔ

$$[P_x,P_y]=0, \qquad [L,P_x]=iP_y, \qquad [L,P_y]=-iP_x, \tag{97}$$

را درنظربگیرید. برای این جبرداریم:

$$A^{(1)}=Span\{P_x,P_y\}, \qquad A^{(2)}=0. \tag{98}$$

بنابراین، $E(R^2)$ یک جبرحل پذیراست.

مثال: جبرلی $E(R^3)$ را باروابط تعریف کنندهٔ

---
[13] Solvable Lie Algebra

$$[P_j, P_k] = 0,$$
$$[L_j, P_k] = i\epsilon_{ijk} P_k,$$
$$[L_j, L_k] = i\epsilon_{ijk} L_k. \tag{99}$$

درنظرمی گیریم. برای این جبرداریم:

$$A^{(1)} = A, \quad \longrightarrow \quad A^{(n)} = A \quad \forall n. \tag{100}$$

بنابراین، $E(R^3)$ یک جبرحل پذیرنیست.

۱۲ جبرهای لی ساده

جبرهای لی ساده [14] جبرهایی هستند که هیچ نوع زیرجبر ناوردای غیربدیهی نداشته باشند.

مثال: جبرلی $so(3)$ یک جبرلی ساده است. برای اثبات این امر از یکسان بودن جبرلی $so(3)$ و فضای برداری R^3 به همراه ضرب خارجی بردارها استفاده می کنیم. در فضای R^3 داریم

$$[a, b] = a \times b, \tag{101}$$

و با این تعریف از براکت فضای R^3 با $so(3)$ یکسان است. حال ثابت می کنیم که R^3 نمی تواند هیچ زیرجبرناوردایی داشته باشد. اگر این زیرجبر بخواهد یک بعدی باشد، (یعنی یک خط که از مبداء می گذرد) دراین صورت می دانیم که ضرب خارجی هر بردار از این خط با یک بردار دلخواه، بنابر خواص ضرب خارجی، حتماً می بایست بر این خط عمود باشد و نمی تواند در امتداد خط قرار بگیرد. بنابراین، این خط نمی تواند یک زیر جبر ناوردا باشد. حال به سراغ زیرفضاهای دوبعدی می رویم. در یک صفحه یعنی یک زیرفضای دوبعدی نیز براکت هر دوبردار یعنی ضرب خارجی آنها می بایست بر آن صفحه عمود باشد. بنابراین R^3 اصلاً زیر جبر دوبعدی ندارد چه رسد به این که زیرجبر ناوردای دوبعدی داشته باشد. بنابراین R^3 و در نتیجه $so(3)$ یک جبر ساده است.

۱۳ جبرهای لی نیم ساده

فرض کنید که A و B دو جبر لی ساده باشند. دراین صورت جبرلی $A \oplus B$ یک جبرلی است که دیگر ساده نیست. دلیل اش این است که A و B هردو زیرجبرهای $A \oplus B$ هستند و درعین حال هرکدام ایده آل نیز هستند. درواقع می دانیم که برای چنین

[14] Simple Lie Algebras

جبری

$$[A, A] \subset A, \quad [B, B] \subset B, \quad [A, B] = 0 \tag{102}$$

و وجه نامگذاری جمع مستقیم نیز همین است به این معنی که براکتِ زیرجبرهای A و B بایکدیگر مساوی صفراست.

تعریف: یک جبرلی نیم ساده یا $(Semisimple)$ است اگر هیچ نوع ایده آل آبلی نداشته باشد.

مثال: جبرلی $E(R^3)$ رادرنظربگیرید. این جبریک ایده‌آل دارد که توسط بردارهای $\{P_x,\ P_y,\ P_z\}$ جاروب می شود. ازآنجا که این ایده آل آبلی است، جبرلی $E(R^3)$ نیم ساده نیست.

مثال: درجبرهایزنبرگ، زیرجبری که توسط I تولید می شود یک ایده آل آبلی است، بنابراین، جبرهایزنبرگ ساده نیست. هم چنین زیرجبری که توسط I و مجموعه $\{x_i\}$ تولید می شود یک آیده آل آبلی است.

نکته‌ی مهم: یک جبر نیم ساده را می توان به صورت جمع مستقیم دو یا چند جبر ساده نوشت. یعنی

$$A_{semi-simple} = B_{simple} \oplus C_{simple} \oplus D_{simple} \oplus \cdots \tag{103}$$

در نگاه اول به یک جبر نیم ساده مثلِ $E(R^3)$ معلوم نیست که این جبر جمع مستقیم کدام جبرهای ساده است. برای این کار می بایست ترکیب های خطی مناسبی از پایه های اولیه گرفت تا بتوان به وضوح جبرهای ساده‌ای را که $E(R^3)$ از جمع مستقیم آنها تشکیل شده است پیداکرد.

چگونه می توان نوع یک جبررا تشخیص داد؟ چگونه می توان تعیین کرد که آن جبر نیم ساده یا حل پذیراست؟ اگربخواهیم این شناسایی را با استفاده مستقیم ازتعاریف انجام دهیم کاربسیارمشکلی است. درعوض کارتان ملاک های بسیارساده ای برای تعیین نوع یک جبردراختیارما قرارداده است. این ملاک ها بااستفاده از فرم کیلینگ یک جبرمشخص می شوند که دربخش بعد به توصیف آن می پردازیم.

۱۴ ملاک های کارتان

همانطورکه دربخش پیشین گفتیم تشخیص اینکه یک جبرحل پذیراست یا نه یا آیا نیم ساده است یانه بااستفاده از تعریف های اولیه کاردشواری است . خوشبختانه الی کارتان $Elie\ \ Cartan$ ملاک های ساده ای برای این شناسایی بدست داده است که ما آنها را بدون اثبات می آوریم.

ملاک کارتان برای حل پذیری: یک جبرلی A حل پذیراست اگر وفقط اگر $K(A, A^{(1)}) = 0$ که به این معناست که به ازای هر $x \in A$ و هر $y \in A^{(1)}$ می بایست داشته باشیم $K(x, y) = 0$.

ملاک کارتان برای نیم ساده بودن یک جبر لی: یک جبرلی A نیم ساده است اگر وفقط اگر فرم کیلینگ آن غیرواگن باشد، که به این معناست که ماتریس K وارون پذیرباشد.

۱۵ طبقه بندی جبرهای لی

چگونه می توانیم جبرهای لی را باتوجه به تنوع بی پایان آنها طبقه بندی کنیم؟ این سوال درمورد جبرهای لی مثل هرساختارریاضی دیگری پیش می آید که انواع جبرهای لی کدامند. پاسخ این سوال درقضیه ای که موسوم به قضیه لِوی $Levi$ داده شده است. البته دانش ما درمورد جبرهای لی محصول کار مستقل ریاضیدانان بزرگی همچون لی Lie، کارتان $Cartan$، وایل $Weyl$، دینکین $Dynkin$، شوالی $Chevallie$ ودیگران است. دراین جا این قضیه رابدون اثبات می آوریم. هدف ماتنها آن است که محتوی این قضیه را بفهمیم.

قضیه: هرجبرلی چیزی نیست جزجمع نیمه مستقیم یک جبرحل پذیر و یک جبر نیم ساده. یک جبرنیم ساده نیز چیزی نیست جز جمع مستقیم جبرهای ساده.

$$\begin{aligned} Lie\ \ Algebra &= Solvable \oplus_s Semisimple \\ Semisimple &= Simple \oplus Simple \oplus Simple \cdots \end{aligned} \tag{104}$$