تمرینات سری هفتم: درس نظریه گروه

آخرین مهلت تحویل : ۲۰ اردیبهشت ماه ۱۳۸۷

۱ – ثابت کنید که مجموعه ماتریس های بالامثلثی یک زیرجبرلی از جبرلی تمام ماتریس های مربعی است.

---

۲ – اگر A و B دوجبرلی باشند و $\phi : A \longrightarrow B$ یک همسانی بین این دوباشد، ثابت کنید که :

الف: تصویرهرزیرجبراز A تحت ϕ، یک زیرجبراز B است.

ب : تصویروارون هرزیرجبراز B تحت ϕ یک زیرجبراز A است.

ج : تصویروارون هرایده آل از B تحت ϕ یک ایده آل از A است.

---

۳ – ثابت کنید که اگر A یک جبرحل پذیرباشد آنگاه هرزیرجبری ازآن نیز حل پذیراست.

---

۴ – A را یک جبرلی و B و C را دوزیرجبر ازآن درنظربگیرید. $B + C$ راچنین تعریف می کنیم:

$$B + C := \{b + c \mid b \in B,\ c \in C\}. \qquad (۱)$$

الف: ثابت کنید که اگر B و C هردو ایده آلAِباشند آنگاه $B + C$ یک زیرجبر A است. مثالی ارایه دهید ازحالتی که B و C ایده آل نیستند و درنتیجه $B + C$ نیزیک زیرجبرنیست.

ب : ثابت کنید که اگر B و C هردوایده آلِ A باشند آنگاه $B + C$ نیز یک ایده آلِ A است.

۵– ثابت کنید که جبرلی $so(3)$ یک جبرساده است. (راهنمایی: از یکسانی $so(3)$ با جبر R^3 تحت ضرب خارجی بردارها استفاده کنید.)

٦– بااستفاده از ملاک های کارتان نشان دهید که جبر لی $E(R^2)$ حل پذیراست.

۷– بااستفاده از ملاک های کارتان نشان دهید که جبرلی $su(4)$ نیم ساده است.

۸– بااستفاده از ملاک های کارتان نشان دهید که جبرلی ماتریس های سه بعدی بالامثلثی حل پذیراست.

۹– اگر A یک جبرلی حقیقی باشد، نشان دهید که به ازای هر $x \in A$، تمام درایه های ماتریس ad_x حقیقی است. بنابراین نشان دهید که ماتریس کیلینگ یک ماتریس بادرایه های حقیقی است.

۱۰– روابط جابجایی جبر $so(4)$ را بنویسید. نشان دهید که این جبر با جبر $so(3) \oplus so(3)$ یکسان است. (راهنمایی: ترکیب مناسبی از عناصرپایه این جبررادرنظربگیرید و نشان دهید که عناصرپایه جدید را می توان به دو قسمت تقسیم کرد که روابط جابجایی هرقسمت مثل $so(3)$ باشد.)

---

۱۱ – یک نمایش وفادار نمایشی است که یک به یک باشد به این معنا که اگر $D(x) = D(y)$ بتوانیم نتیجه بگیریم که $x = y$. این تعریف چه برای گروه و چه برای جبر برقراراست. نشان دهید که اگر یک جبر نیم ساده باشد آنگاه نمایش الحاقی آن یعنی نمایش $adjoint$، یک نمایش وفاداراست.
(راهنمایی: ازملاک کارتان برای نیم ساده بودن جبر استفاده کنید.)

۱۲– بااستفاده از ملاک کارتان نشان دهید که جبر $su(3)$ نیم ساده است.

---

۱۳ – نشان دهید که اگر یک جبرساده باشد نمایش الحاقی یا $adjoint$ آن کاهش ناپذیراست. (راهنمایی: یک نمایش کاهش پذیرمثل D نمایشی است که درآن فضای نمایش یعنی V را می توان به صورت $V_1 \oplus V_2$ نوشت به قسمی که $D(V_1) \subset V_1$.)
