

تمرینات سری ششم: درس نظریه گروه

آخرین مهلت تحویل: ۱۰ اردیبهشت ماه ۱۳۸۷

۱ - نمایش منظم گروه Z_3 را بدست آورید. تبدیل تشابهی را بدست آورید که این نمایش را به نمایش های کاهش ناپذیر تجزیه می کند.

۲ - نمایش منظم گروه Z_n را بدست آورید. تبدیل تشابهی را بدست آورید که این نمایش را به نمایش های کاهش ناپذیر تجزیه می کند.

۳ - گروه دووجهی D_n به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_2 := \{y^i, xy^i | i = 0, 1, \dots, n-1, x^2 = 1, y^n = 1, xy = y^{-1}x\}. \quad (1)$$

حال گروه D_2 را در نظر بگیرید.

الف: تمام نمایش های کاهش ناپذیر این گروه را بدست آورید.

ب: نمایش منظم این گروه را بدست آورید.

۴ - گروه دووجهی D_n به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_2 := \{y^i, xy^i | i = 0, 1, \dots, n-1, x^2 = 1, y^n = 1, xy = y^{-1}x\}. \quad (2)$$

حال گروه D_3 را در نظر بگیرید.

الف: تمام نمایش های کاهش ناپذیر این گروه را بدست آورید.

ب: نمایش منظم این گروه را بدست آورید.

۵ - تمام نمایش های کاهش ناپذیر گروه $Z_n \times Z_m$ را بدست آورید.

۶ - گروه S_4 را در نظر بگیرید. در یکی از سری تمرین های قبلی کلاس های تزویجی این گروه را بدست آورده اید. با استفاده از نتایج آن تمرین کارهای زیر را انجام دهید.
 الف: تعداد نمایش های کاهش ناپذیر را تعیین کنید.
 ب: بعد این نمایش ها را بدست آورید.
 ج: تاجاییکه می توانید بردارهای کاراکتر این نمایش ها را تعیین کنید.

۷ - شبکه ای در نظر بگیرید متشکل از N نقطه که به صورت یک حلقه مرتب شده اند. نقاط این شبکه را از 0 تا $N-1$ نامگذاری کنید. گروه انتقال های روی این شبکه بایک مولد که آن را با T نشان می دهیم، تولید می شود. عمل T روی این شبکه به صورت زیر تعریف می شود:

$$T(x) = x + 1 \pmod n, \quad x = 0, 1, 2, \dots, (n-1). \quad (3)$$

هر تابع مختلط مثل f که روی این شبکه تعریف می شود می بایست در شرط زیر صدق کند:

$$f(x) = f(x+n). \quad (4)$$

هر تابع به این شکل را می توان به صورت یک بسط فوری به شکل زیر نوشت:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{2\pi i \frac{kx}{n}}, \quad (5)$$

که در آن c_k ها اعداد دلخواه مختلط هستند.

الف: نمایش T را روی توابع روی این شبکه بدست آورید.

ب: نمایش T که در قسمت الف بدست آوردید روی ضرایب فوری c_k چه عملی انجام می دهد؟

ج: نمایش های کاهش ناپذیر گروه انتقال را روی توابع ای که روی این شبکه تعریف شده اند بدست آورید.

۸ - نمایش منظم گروه S_3 را در نظر بگیرید. بایک تبدیل تشابهی مناسب این نمایش را به نمایش های کاهش ناپذیر تجزیه کنید.