تمرینات سری پنجم : درس نظریه گروه

آخرین مهلت تحویل : ۳۱ فروردین ماه ۱۳۸۷

---

۱ — بامتریکی که دردرس ششم تعریف شده است فاصله ماتریس های پاوولی راازیکدیگر محاسبه کنید.
باهمان متریک فاصله بین ماتریس های E_{ij} رادربعد n حساب کنید.

---

۲ — ثابت کنید که درهرفضای متریک اجتماع تعداددلخواهی از مجموعه های بازحتماً بازاست. هم چنین ثابت کنید که اشتراک تعداد متناهی ازمجموعه های بازحتماً بازاست. مثالی ذکرکنید که نشان دهد اشتراک تعداد نامتناهی ازمجموعه های باز ممکن است بازنباشد.

---

۳ — درفضای دوبعدی R^2 شکل ناحیه $B_1(0,0)$ یعنی گوی بازبه شعاع ۱ حول مبداء برای متریک های زیررسم کنید.

$$d_1(\vec{x},\vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \tag{۱}$$

$$d_2(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}, \tag{۲}$$

$$d_\infty(\vec{x},\vec{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, x_2 - y_2|\}, \tag{۳}$$

---

۴ — نشان دهید که هرگاه یک تابع $f : (M,d) \longrightarrow (M',d)$ پیوسته باشد، تصویروارون هرمجموعه باز از M' یک مجموعه باز در M است.

---

۵ — برای کره سه بعدی که درفضای چهاربعدی غوطه ورشده است ومختصات آن درمتن درس داده شده است بردارهای یکه مماس زیر را بدست آورید:
الف :برداری که دریک نقطه دلخواه برمنحنی θ متغیر مماس است.
ب : برداری که درهمان نقطه برمنحنی ϕ متغیرمماس است.

ج : زوایه بین این دوبردارراحساب کنید.

---

۶ − با یک پارامتربندی مناسب مولدهای جبر لی $so(1,n)$ را بدست آورید. روابط جابجایی مولد هارا بدست آورید.

---

۷ − تمرین قبلی را برای جبرلی $su(n)$ تکرارکنید. نشان دهید که دراین جبر تعداد $n-1$ تاازمولدها بایکدیگر جابجا می شوند. مولدها را طوری انتخاب کنید که داشته باشیم :

$$\langle T_i, T_j\rangle \equiv tr(T_iT_j) = \delta_{ij} \tag{۴}$$

---

۸ − مولدهای جبرلی $so(2,2)$ را بدست آورید. روابط جابجایی آنهارا مشخص کنید.

---

۹ − مولدهای جبرلی $su(1,1)$ را بدست آورید. روابط جابجایی آنهارامشخص کنید.

---

۱۰ − درفضای توابع مشتق پذیر روی R^2 با مختصات موضعی x, y، عملگرهای دیفرانسیل زیررادرنظربگیرید:

$$P_x := \frac{\partial}{\partial_x}, \qquad P_y := \frac{\partial}{\partial_y}, \qquad L := x\frac{\partial}{\partial_y} - y\frac{\partial}{\partial_x}. \tag{۵}$$

ثابت کنید که فضای برداری جاروب شده توسط این سه عملگرتشکیل یک جبرلی می دهد.

---

۱۱ − درفضای توابع مشتق پذیر روی R^3 با مختصات موضعی x, y, z، عملگرهای دیفرانسیل زیررادرنظربگیرید:

$$\begin{aligned} &P_x := \frac{\partial}{\partial_x}, && P_y := \frac{\partial}{\partial_y}, && P_z := \frac{\partial}{\partial_z} \\ &L_x = y\frac{\partial}{\partial_z} - z\frac{\partial}{\partial_y} && L_y = z\frac{\partial}{\partial_x} - x\frac{\partial}{\partial_z} && L_z = x\frac{\partial}{\partial_y} - y\frac{\partial}{\partial_x}. \end{aligned} \tag{۶}$$

ثابت کنید که فضای برداری جاروب شده توسط این عملگرتشکیل یک جبرلی می دهد. روابط جابجایی بین عملگرهارامشخص کنید.
