تمرینات سری چهارم : درس نظریه گروه

آخرین مهلت تحویل : ۱۵ فروردین ماه ۱۳۸۷

۱ – دستگاه لخت S' نسبت به دستگاه لخت S باسرعت v حرکت می کند. جهت حرکت درصفحه xy است و بامحور x زاویه ۳۰ درجه می سازد. فرض کنید که درلحظه صفر محورهای هردودستگاه روی هم قرارداشته است. رابطه مختصات (t,x,y,z) را بامختصات (t',x',y',z') بدست آورید.

---

۲ – تعداد پارامترهای گروه لورنتز را در $d+1$ بعد بدست آورید.

---

۳ – مولدهای گروه لورنتز را در فضا زمان $1+1$ بعدی بدست آورید. شکل کلی یک تبدیل لورنتز و هم چنین شکل صریح یک ماتریس لورنتز را بدست آورید. گروه لورنتز دراین فضا زمان ازچند تکه جداازهم تشکیل شده است.

---

۴ – مولدهای گروه لورنتز را در فضا زمان $2+1$ بعدی بدست آورید. مختصات یک نقطه p دراین فضا زمان با (t,x,y) داده شده است. نخست یک خیز با پارامتر α درجهت x و سپس یک دوران درصفحه xy باپارامتر θ و سپس یک خیرباپارامتر $-\alpha$ درجهت x اعمال می کنیم. مختصات نقطه p را پس از اعمال این سه تبدیل بدست آورید.

---

۵ – دراین تمرین می خواهیم شکل صریح ماتریس دورانی را که یک دوران حول محور $\hat{n} := (n_1,n_2,n_3)$ به اندازه زاویه θ ایجاد می کند بدست آوریم. می دانیم که چنین دورانی توسط ماتریس زیرایجادمی شود:

$$R_{\hat{n}}(\theta) = e^{\theta \hat{n}\cdot J}, \qquad (۱)$$

که درآن J_2, J_1 و J_3 مولدهای دوران هستند. برای اینکه شکل صریح ماتریس $R_{\hat{n}}(\theta)$ راپیداکنیم می بایست عبارت نمایی دردست راست رابطه بالا را حساب کنیم. بهترین کارآن است که این محاسبه را درپایه ای انجام دهیم که ماتریس $\hat{n}\cdot J$ قطری است. بنابراین :

الف :ماتریس $\hat{n}\cdot J$ راقطری کنید وویژه مقادیر و ویژه بردارهای آن را بدست آورید. این کاربه این معناست که ماتریسی مثل Ω بدست آورده اید که

$$\Omega(\hat{n}\cdot J)\Omega^{-1} = D, \tag{۲}$$

که درآن $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ قطری شده ماتریس $\hat{n}\cdot J$ است.

ب : حال شکل صریح ماتریس $R_{\hat{n}}(\theta)$ را بااستفاده از رابطه زیربدست آورید:

$$R_{\hat{n}}(\theta) \equiv e^{\theta\hat{n}\cdot J} = e^{\theta\Omega^{-1}D\Omega} = \Omega e^{\theta D}\Omega^{-1}. \tag{۳}$$

ج: حال بااستفاده از نتیجه قسمت (ب) بدست آورید که تحت دوران فوق یک بردار $\vec{r}$ به بردار $\vec{r'}$ تبدیل می شود که درآن:

$$\vec{r'} = \vec{r}\cos\theta + (\hat{n}\cdot\vec{r})\hat{n}(1-\cos\theta) + \hat{n}\times\vec{r}\sin\theta. \tag{۴}$$

د: این رابطه را بااستدلال هندسی نیز بدست آورید.

ه: $e^{\theta\hat{n}\cdot J}$ را برحسب توان های صفرم، اول و دوم J ها می توان نوشت. این بسط را بدست آورید.

---

۶ — دراین تمرین می خواهیم بفهمیم که چراماتریس های $SU(2)$ درفضای اسپین نقش ماتریس های دوران را ایفا می کنند. می دانیم که درمکانیک کوانتومی حالت اسپینی یک ذره بایک بردار دوبعدی مختلط توصیف می شود. اسپین خصلتی از ذره است که درست مثل یک بردار سه بعدی است اگر چه خود حالت ذره درفضای اسپین تنها دومولفه مختلط دارد.

عملگرهای σ_y, σ_x و σ_z عملگرهایی هستند که به مولفه های برداراسپین نسبت می دهیم. بنابراین وقتی که ذره درحالت کوانتومی $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = |\psi\rangle$ قراردارد کمیت $\langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle$ متوسط مولفه x برداراسپین را دراین حالت نشان می دهد. درحالت کلی

عملگر $\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$ به مولفه اسپین درراستای $\hat{n}$ نسبت داده می شود.

الف : نشان دهید که ویژه مقدارهای $\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$ تنها $+1$ و -1 هستند. بنابراین هرگاه مولفه های برداراسپین را درهرجهتی بخواهیم بدست آوریم همیشه مقدارهای $+1$ یا -1 مشاهد ه خواهند شد. این کیفیت برداراسپین را به شدت با بردارهای معمولی سه بعدی متمایزمی کند.

ب : ویژه بردارهای این ماتریس رابدست آورید.آنهارا با $|\hat{n},+\rangle$ و $|\hat{n},-\rangle$ نشان دهید. فازهای بردارهاراطوری انتخاب کنیدکه درحالت خاص داشته باشید:

$$\begin{aligned}
|z,+\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |z,-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
|x,+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad |x,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
|y,+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad , \quad |y,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{۵}$$

ج : حال کمیت های زیررامحاسبه کنید. این کمیت ها متوسط مولفه های اسپین راوقتی که ذره درحالت $|\hat{n},+\rangle$ است نشان می دهند:

$$\langle\hat{n},+|\sigma_x|\hat{n},+\rangle,$$

$$\langle\hat{n},+|\sigma_y|\hat{n},+\rangle,$$

$$\langle\hat{n},+|\sigma_z|\hat{n},+\rangle.$$

د: حال بردارحالت $|x,+\rangle$ رادرنظرگرفته و ماتریس $g=e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y}$ را روی آن اثردهید. بردارحالت جدید چیست؟

ه :حال بردارحالت $|z,+\rangle$ رادرنظرگرفته و ماتریس $g=e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_y}$ را روی آن اثردهید. بردارحالت جدید چیست؟

———
—

۷ — نشان دهید که اگر $g = I + L$ یک ماتریس مربعی باشد و L یک ماتریس بی نهایت کوچک، به این معنا که بتوان از توان دوم درایه های آن صرف نظر کرد، آنگاه

$$det(g) = 1 + tr(L). \qquad (٦)$$

——

۸ — فرض کنید که روی فضای برداری R^n دو نوع ضرب داخلی تعریف شده است، یکی ضرب داخلی استاندارد که آن را به صورت زیر نشان می دهیم

$$\langle x, y\rangle := x^T y, \qquad (۷)$$

و دیگری ضرب داخلی زیر

$$\langle x, y\rangle' := x^T K y, \qquad (۸)$$

که درآن K یک ماتریس متقارن و مثبت است. (ماتریس مثبت ماتریسی است که ویژه مقادیرآن بزرگتر از صفر باشند.) حال گروهی از تبدیلات خطی که ضرب داخلی اول را حفظ می کنند با $O(n, R)$ و گروهی از تبدیلات خطی که ضرب داخلی دوم را حفظ می کنند با $O_K(n, R)$ نشان می دهیم. نشان دهید که این دو گروه یکسان هستند. نگاشتی که این یکسانی را تعریف می کند به طور دقیق بدست آورید.

——