تمرینات سری سوم : درس نظریه گروه

آخرین مهلت تحویل : ۲۸ اسفندماه ۱۳۸٦

۱ — نشان دهید که یک همسانی $\phi : G \longrightarrow G'$ یکسانی است اگر وفقط اگر $Ker(\phi) = \{e\}$.

---

۲ — فرض کنید که $\phi : G \longrightarrow G'$ یک همسانی باشد. هسته این همسانی را با K نشان می دهیم، یعنی $ker(\phi) = K$. حال زیرگروهی مثل H' از G' درنظربگیرید و قراردهید:

$$H := \{g \in G | \phi(g) \in H'\}. \tag{۱}$$

الف: نشان دهید که

$$K \subset H \subset G, \tag{۲}$$

که درآن علامت $\subset$ را به معنای زیرگروه بودن به کاربرده ایم.

ب: نشان دهید که اگر H' در G' بهنجارباشد، آنگاه H نیز در G بهنجاراست.

ج: درحالت (ب) نشان دهید که G/H با G'/H' یکسان است.

---

۳ — فرض کنید که G یک گروه دلخواه و g یک عنصر از G باشد. نشان دهید که نگاشت

$$T_g : G \longrightarrow \qquad T_g(x) := gxg^{-1}$$

یک همسانی از G به روی G است.

---

۴ — فرض کنید که G یک گروه آبلی متناهی از مرتبه $|G|$ با شد و n را عدد صحیحی بینگارید که نسبت به $|G|$ اول باشد. نشان دهید که هر $g \in G$ را می توان به ازای x ای در G به صورت $g = x^n$ درآورد. (راهنمایی : نگاشت $\phi : G \longrightarrow G$ را به صورت $\phi(y) := y^n$ تعریف کنید و ثابت کنید که این نگاشت یک یکسانی از G به روی G است .)

---

۵ $-$ G را گرو هی بینگارید که عبارت است از مجموعه همه علامات صوری

$$\{X^iR^j, \quad i=0,\ 1, \quad j=0,1,2,\cdots n-1 \quad |X^2=R^n=e, \quad XR=R^{-1}X\}$$

ثابت کنید که :

الف : زیر گروه $N=\{e,R,R^2,\cdots R^{n-1}\}$ در G بهنجار است.

ب : $G/N\sim Z_2$.

این گروه را گروه دووجهی می نامند. این گروه را می توان گروه تبدیلات زیرروی صفحه دوبعدی درنظرگرفت : R عبارت است از یک دوران حول مبداء به اندازه زاویه $\frac{2\pi}{n}$ و X عبارت است از انعکاس نسبت به محور x.

---

٦ $-$ منظور از خودسانی یا $Automorphism$ یک نگاشت یکسانی از یک گروه به روی خودش است. مجموعه همه خودسانی های یک گروه G را با $A(G)$ نمایش می دهیم .

الف : نشان دهید که $A(G)$ باعمل ترکیب نگاشت ها یک گروه است.

ب :به ازای هر $g\in G$ نگاشت $T_g:G\longrightarrow G$ را به صورت $T_g(x)=gxg^{-1}$ تعریف می کنیم. ثابت کنید که T_g یک خودسانی است. این نوع خودسانی را خودسانی درونی $InnerAutomorphism$ می نامیم. نشان دهید که مجموعه تمام خودسانی های درونی تشکیل یک زیرگروه از $A(G)$ می دهند. این زیر گروه را با $I(G)$ نشان می دهیم. دقت کنید که $I(G):=\{T_g\in A(G)|g\in G\}$.

ج :نشان دهید که $I(G)$ یک زیرگروه بهنجار $A(G)$ است.

د: حال نگاشت زیر از G به $A(G)$ را درنظر بگیرید:

$$\psi:G\longrightarrow A(G) \qquad \psi(g):=T_g$$

نشان دهید که ψ یک همسانی است. هسته($Kernel$) این همسانی را پیدا کنید. تصویر G را تحت این همسانی پیدا کنید.

ه : با استفاده از قسمت های قبل نشان دهید که $G/Z\sim I(G)$ که درآن Z مرکز گروه است.

---

۷ $-$ ثابت کنید که به ازای هرگروه G ، $I(G)$ یک زیرگروه بهنجار $A(G)$ است. گروه $A(G)/I(G)$ را گروه خودسانی های خارجی می نامند.

---

۸ $-$ گروه خودسانی های S_3 را مشخص کنید.

---

۹ $-$ چنانچه G گروه مرتبه چهارزیر باشد

$$G:=\{e,a,b,ab| \quad a^2=b^2=2, \quad ab=ba\}$$

، $A(G)$ را مشخص کنید.

---

۱۰ — گروه های زیر را که درهردو عمل ضرب همان ضرب ماتریس هاست درنظربگیرید.

$$G := \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid \ a,\ b,\ c,\ d \in R \quad ad \neq 0\}, \tag{۳}$$

و

$$G' := \{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \ x \in R\}. \tag{۴}$$

نشان دهید که این دوگروه یکسان هستند.
