تمرینات سری دوم : درس نظریه گروه

آخرین مهلت تحویل : ۲۲ اسفندماه ۱۳۸۶

۱ − هرگاه G یک گروه باشد، دوعنصر $x, y \in G$ را مزدوج یکدیگرمی خوانیم هرگاه عضوی مثل $g \in G$ وجود داشته باشد به قسمی که $y = gxg^{-1}$. ثابت کنید که این رابطه یک رابطه هم ارزی است. چنانکه می دانیم هررابطه هم ارزی یک مجموعه را به کلاس های هم ارزی افراز می کند. دراینجاهرکلاس هم ارزی را یک کلاس تزویجی یا $ConjugacyClass$ می خوانیم.

———————————————————————————————————————

۲ − گروه S_4 را درنظر بگیرید.

الف: تمام کلاس های تزویجی آن را بدست آورید.

ب : زیرگروهی از S_4 بدست آورید که با S_3یکسان باشد.

هم مجموعه های راست و هم مجموعه های چپ این زیرگروه را بدست آورید. آیا این زیرگروه بهنجاراست؟

———————————————————————————————————————

۳− اگر $a \in G$، تعریف می کنیم $N(a) := \{x \in G | xa = ax\}$. نشان دهید که $N(a)$ یک زیرگروه G است. $N(a)$ را عموماً بهنجارساز ($Normalizer$) یا متمرکزساز ($Centralizer$) عضو a در G می خوانند. متمرکز ساز مولد σ_1 را درگروه جایگشت S_4 بدست آورید.

———————————————————————————————————————

۴ − اگر H زیر گروهی از G باشد و $a \in G$ مجموعه aHa^{-1} را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$aHa^{-1} := \{aha^{-1} | h \in H\} \qquad (۱)$$

الف : نشان دهید که aHa^{-1} یک زیر گروه G است.

ب : اگر H متناهی باشد مرتبه aHa^{1} چه خواهد بود.

ج :حال مجموعه زیر را تعریف می کنیم :

$$N(H) := \{a \in G | aHa^{-1} = H\} \tag{۲}$$

نشان دهید که $N(H)$ یک زیر گروه G است. هم چنین نشان دهید که H یک زیر گروه $N(H)$ است.

---

۵ — اگر N یک زیرگروه بهنجار G و H زیرگروه دلخواهی از G باشد نشان دهید که NH زیرگروهی از G است.

---

۶ — نشان دهید که اشتراک دو زیرگروه بهنجار از یک گروه، یک زیرگروه بهنجار است.

۷— اگر H زیرگروهی از G باشد به قسمی که حاصلضرب هردوهم مجموعه راست H در G بازهم یک هم مجموعه راست H درG باشد، ثابت کنیدکه H یک زیرگروه بهنجار G است.

---

۸ — چنانچه H زیرگروهی از G و N زیرگروه بهنجار G باشد، نشان دهید که $H \cap N$ یک زیرگروه بهنجار H است.

۹— G را مجموعه همه ماتریس های حقیقی 2×2 مانند $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ، بگیرید که که درآن $ad \neq 0$ و N را مجموعه همه ماتریس های به فرم $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ بگیرید.

الف : ثابت کنید که N یک زیرگروه بهنجار G است.

ب : ثابت کنید که G/N آبلی است.

---

۱۰ – فرض کنید که G مجموعه همه علامات صوری مثل x^iy^j باشد که درآن $i = 0,1$ و $j = 0,1,2,\cdots n-1$ باشد. هم چنین فرض کنید که شرایط زیر روی x, y برقرارباشند:

$$x^iy^j = x^{i'}y^{j'} \longrightarrow i = i' \quad j = j' \tag{۳}$$

$$x^2 = y^n = e \quad n > 2 \tag{۴}$$

$$xy = y^{-1}x \tag{۵}$$

الف : حاصلضرب $(x^iy^j)(x^ky^l)$ را به شکل $x^\alpha y^\beta$ درآورید.

ب : بااستفاده از قسمت الف ثابت کنید که G گروهی ناآبلی است از مرتبه $2n$.

ج : ثابت کنید که مرکز این گروه به ازای n های فرد برابر $\{e\}$ است . اما به ازای n های زوج این مرکز بزرگتر از $\{e\}$ است.

۱۱– فرض کنید که H زیرگروهی از G باشد به قسمی که هرگاه $Ha \neq Hb$، آنگاه $aH \neq bH$. ثابت کنید که به ازای هر $g \in G$، $gHg^{-1} \subset H$.
