

تمرینات سری اول : درس نظریه گروه

آخرین مهلت تحویل : ۵ اسفندماه ۱۳۸۶

۱ - جدول ضرب تمام گروه های با ۴ عنصر را بسازید. چند گروه متفاوت پیدا می کنید؟ چند تا از این گروه ها آبدلی هستند؟ کدام یک از آنها با گروه Z_4 یکسان است؟ کدام یک از آنها با گروه $Z_2 \times Z_2$ یکسان است؟

۲ - فرض کنید که G یک گروه است که در آن خاصیت زیر برقرار است:

$$a^2b^2 = (ab)^2 \quad \forall a, b \in G \quad (1)$$

نشان دهید که این گروه آبدلی است.

۳ - فرض کنید که G یک گروه است که در آن خاصیت زیر برای سه عدد متوالی (مثلا ۵ و ۴ و ۳) برقرار است:

$$a^ib^i = (ab)^i \quad \forall a, b \in G \quad (2)$$

نشان دهید که این گروه آبدلی است.

۴ - نشان دهید که درگروه S_3 چهار عنصر وجود دارد که مربع آنها برابر با عنصر واحد است. هم چنین نشان دهید که سه عنصر وجود دارد که مکعب آنها عنصر واحد است.

۵ - نشان دهید که اگر در یک گروه هر عضو وارون خودش باشد آن گروه حتماً یک گروه آبلی است.

۶ - اگر مرتبه یک گروه زوج باشد نشان دهید که حتماً یک عنصر مخالف عضو واحد مثل a وجود دارد که دارای خاصیت $a^2 = e$ است. e در اینجا عنصر وارون گروه است.

۷ - اگر F میدان Z_2 باشد، تمام عناصر گروه $GL_2(F)$ را بنویسید.

۸ - اگر F میدان Z_2 باشد، تمام عناصر گروه $GL_3(F)$ را بنویسید.

۹ - میدان F به صورت $Z/3Z[x^2 + 1]$ نوشته می شود. این نماد گذاری به این معناست که اعضای میدان F عبارت اند از چند جمله ای هایی از متغیر x که ضرایب آنها اعداد $0, 1, 2$ هستند و جمع این اعداد نیز به سنج ۳ انجام می گیرد. هم چنین عبارت $x^2 + 1$ به این معناست که در جمع و ضرب این چند جمله ای ها همواره $x^2 + 1$ را معادل با ۰ می گیریم. عناصر این میدان و مرتبه آن را پیدا کنید. هم چنین در یک جدول وارون جمعی و وارون ضربی هر عنصر را مشخص کنید.

۱۰ - فرض کنید که G یک گروه و H و K دو زیرگروه آن باشند. مجموعه HK را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$HK := \{hk \mid h \in H \quad k \in K\} \quad (۳)$$

نشان دهید که HK یک زیرگروه G است اگر و فقط اگر $HK = KH$.

۱۱ – فرض کنید که G یک گروه باشد. زیر گروه $G^{(1)}$ بنا برتعریف زیر گروهی است که ازتمام اعضای به فرم $aba^{-1}b^{-1}$ تولید می شود. این زیرگروه را زیرگروه تعویضگر G می نامند. نشان دهید که $G^{(1)}$ یک زیرگروه بهنجار G است.

۱۲ – الف : نشان دهید که گروه های با مرتبه ۳ حتماً آبلی هستند.
ب : قسمت الف را برای وقتی که مرتبه گروه ۴ باشد تحقیق کنید.
ج : قسمت الف را برای وقتی که مرتبه گروه ۵ باشد تحقیق کنید.

۱۳ – فرض کنید که مجموعه ناتهی مثل G تحت یک ضرب شرکت پذیر بسته باشد و نیز خواص اضافی زیر را دارا باشد:
الف : عضوی مثل $e \in G$ وجود داشته باشد به قسمی که $\forall a \in G, ae = a$ و
ب : به ازای هر عضو a ، عضوی مثل $x(a) \in G$ وجود داشته باشد به قسمی که $a \cdot x(a) = e$.
نشان دهید که دراین صورت این مجموعه یک گروه است.

۱۴ – فرض کنید که G مجموعه ای متناهی باشد که تحت یک ضرب شرکت پذیر بسته باشد. بعلاوه فرض کنید که دراین مجموعه هم قانون حذف از چپ و هم قانون حذف از راست برقرارباشند. ثابت کنید که دراین صورت G یک گروه است.

۱۵ – به ازای هر $n > 2$ گروهی بسازید ناآبلی که ازمرتبه $2n$ باشد. (راهنمایی: از روابط موجود در S_{3r} تقلید کنید.)

۱۶ – اگر p یک عدد اول و $F = Z_p$ باشد. ثابت کنید که $G = GL_2(F)$ یک گروه است. مرتبه این گروه را پیدا کنید.

۱۷ – درمسئله قبل زیرگروهی را در نظر بگیرید که اعضای آن دارای شرط $ad - bc = 1 \pmod{p}$ هستند. این زیرگروه با نماد $SL_2(F)$ مشخص می شود که در آن SL از لفظ *SpecialLinearGroup* آمده است. مرتبه این زیرگروه را تعیین کنید.
