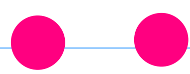
Note Title 6/24/2010

درهم تنیدگی و جدایی پذیری

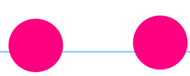


A B

$$|\psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A \otimes |\phi'\rangle_B$$

$$\langle M_A \rangle = \langle \phi | M | \phi \rangle_A \times 1$$

$$\langle N_B \rangle = 1 \times \langle \phi' | N | \phi' \rangle_B$$

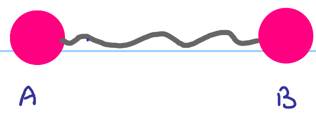


A B

$$|\psi\rangle_{AB} = |\nearrow\rangle_A \otimes |\nwarrow\rangle_B$$

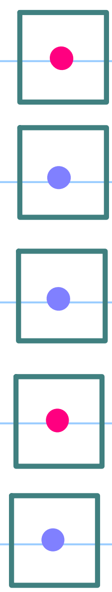
$$P_A(z,+) = {}_{AB}\langle \psi | \left(|z+\rangle\langle z+| \otimes I \right) |\psi\rangle_{AB} = |\langle z+|\nearrow\rangle|^2$$

$$P_B(x,-) = {}_{AB}\langle \psi | \left(I \otimes |x-\rangle\langle x-| \right) |\psi\rangle_{AB} = |\langle x-|\nwarrow\rangle|^2$$

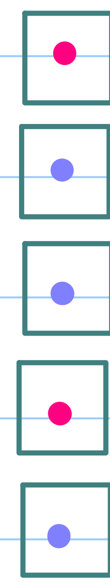


$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,0\rangle + |1,1\rangle\right)$$

perfect correlation $\quad P(00) = \frac{1}{2} \quad P(11) = \frac{1}{2} \quad P(01) = P(10) = 0$



perfect classical Correlation



$$|\psi\rangle = |\text{Singlet}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n_+, n_-\rangle - |n_-, n_+\rangle\right)$$

- چه فرقی بین همبستگی کلاسیک و کوانتومی هست؟
- نامساوی Bell
- ناموضعیت و واقع گرایی
- متغیرهای پنهان

$\Longleftarrow$

درس نامه محاسبات کوانتومی

درس چهارم

- حالتِ خالص

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \longrightarrow \rho_A = |\phi\rangle\langle\phi| \longrightarrow \rho_A^2 = \rho_A$$

- تجزیه اشمیت

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

$$\mathcal{H}_A = \mathrm{span}\{\, |i\rangle \;;\; i=1,\dots d_A \}$$

$$\mathcal{H}_B = \mathrm{span}\{\, |\mu\rangle \;;\; \mu=1,\dots d_B \}$$

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_A} \sum_{\mu=1}^{d_B} \psi_{i\mu} \; |i\rangle \otimes |\mu\rangle$$

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B (|\psi\rangle\langle\psi|)$$

$$(\rho_A)_{ij} = \sum_{\mu=1}^{d_B} \psi_{i\mu} \psi_{j\mu}^*$$

We choose the basis for $\mathcal{H}_A$ such that ρ_A is diagonal.

$$\rightarrow \quad |\psi\rangle = \sum_{i,\mu} \psi_{i\mu} \, |i\rangle \otimes |\mu\rangle$$

$$\rightarrow \quad |\psi\rangle = \sum_{i} |i\rangle \otimes \left(\sum_{\mu} \psi_{i\mu} \, |\mu\rangle \right)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{|\psi\rangle = \sum_{i} |i\rangle \otimes \lambda_i \, |\phi_i\rangle}$$

$\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij}$.

Schmidt Coefficents.

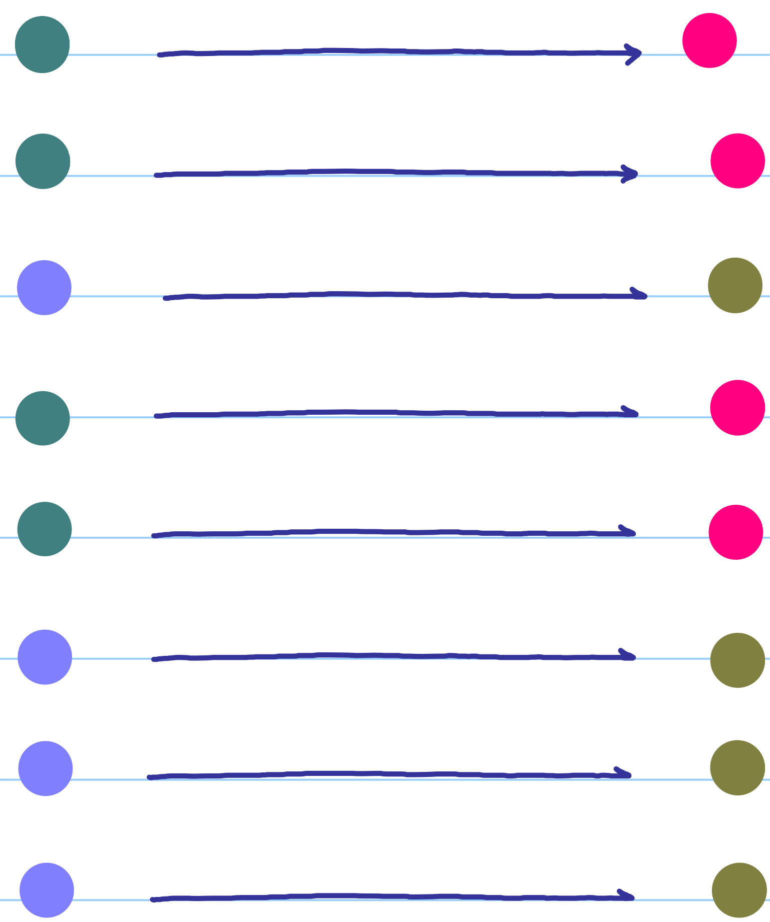
$1 \leq i \leq \min(d_A, d_B)$

$$\rho_A = \sum_i \lambda_i^2 \, |i\rangle\langle i| \qquad \rho_B = \sum_i \lambda_i^2 \, |\phi_i\rangle\langle \phi_i|$$

$$\sum_i \lambda_i^2 = 1$$

• حالت‌های آمیخته جدایی‌پذیر

Alice (A) Bob (B)



$$\rho_{AB} = p_1 |\bullet\,\bullet\rangle\langle\bullet\,\bullet| + p_2 |\bullet\,\bullet\rangle\langle\bullet\,\bullet|$$

$$= p_1 |\bullet\rangle\langle\bullet| \otimes |\bullet\rangle\langle\bullet| + p_2 |\bullet\rangle\langle\bullet| \otimes |\bullet\rangle\langle\bullet|$$

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \, |e_i\rangle\langle e_i| \otimes |f_i\rangle\langle f_i| \quad ①$$

$\leftarrow$ Seperable State

Classical Correlation

$$P_{AB}(X=x, Y=y) = \mathrm{tr}\left(|x\rangle\langle x| \otimes |y\rangle\langle y| \, \rho_{AB} \right)$$

$$= \sum_i p_i \, P_A^i(x) \, P_B^i(y) \neq P_A(x) \, P_B(y).$$

- قضیه: یک حالت ρ_{AB} جدایی‌پذیر است اگر و فقط اگر بتوان آن را به این صورت نوشت:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \, \rho_A^i \otimes \rho_B^i \quad ②$$

- اثبات:

① $\Rightarrow$ ② : به طور اتوماتیک برقرار است. ① حالت خاصی از ② است.

② $\Rightarrow$ ① :

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \left(\sum_\mu \mu_i |e^i_\mu\rangle\langle e^i_\mu| \right) \otimes \left(\sum_\nu \nu_i |f^i_\nu\rangle\langle f^i_\nu| \right)$$

$$= \sum_{\mu,\nu,i} p_i \mu_i \nu_i \, |e^i_\mu\rangle\langle e^i_\mu| \otimes |f^i_\nu\rangle\langle f^i_\nu|$$

$$= \sum_{x} p_x \, |e_x\rangle\langle e_x| \otimes |f_x\rangle\langle f_x|.$$

- ملاک جدایی پذیری

- تعریف : ترانهاده جزئی   partial Transposition

$$X = \sum_{ij,\mu\nu} X_{i\mu,j\nu} \, |i\mu\rangle\langle j\nu| = \sum_{ij,\mu\nu} X_{i\mu,j\nu} \, |i\rangle\langle j| \otimes |\mu\rangle\langle\nu|$$

$$X^{T_A} = \sum_{ij,\mu\nu} X_{i\mu,j\nu} \, |j\mu\rangle\langle i\nu|.$$

$$X^{T_B} = \sum_{ij,\mu\nu} X_{i\mu,j\nu} \, |i\nu\rangle\langle j\mu|.$$

- $(X^{T_A})^{T_A} = X$
- $X^T = (X^{T_A})^{T_B}$

• یک خاصیت مهم :

$$\mathrm{tr}(X^{T_A} Y) = \mathrm{tr}(X Y^{T_A})$$

$$\mathrm{tr}(X^{T_A} Y) = \sum_{ij} \langle ij | X^{T_A} Y | ij \rangle = \sum_{ij,rs} \langle ij | X^{T_A} | rs \rangle \langle rs | Y | ij \rangle$$

$$= \sum_{ij,rs} \langle rj | X | is \rangle \langle rs | Y | ij \rangle$$

$$= \sum_{ij,rs} \langle rj | X | is \rangle \langle is | Y^{T_A} | rj \rangle = \mathrm{tr}(X Y^{T_A})$$

• **قضیه:** اگر ρ یک حالت جدایی‌پذیر باشد آنگاه. $\rho^{T_A} \geq 0$.

• **اثبات:**

$$\rho = \sum_i p_i \, \rho_i^A \otimes \rho_i^B$$

$$\rho^{T_A} = \sum_i p_i \, (\rho_i^A)^T \otimes \rho_i^B$$

$$(\rho_i^A)^T \geq 0 \longrightarrow (\rho_i^A)^T \otimes \rho_i^B \geq 0 \longrightarrow \rho^{T_A} \geq 0.$$

• شرط بالا برای $2 \otimes 2$, $2 \otimes 3$ به صورت لازم و کافی است.

• **مثال:**

$$\rho = p\,\frac{1}{2} + (1-p)\,|\psi\rangle\langle\psi| \qquad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

$$\rho = \begin{bmatrix} p/2 & & & \\ & p/2 & & \\ & & p/2 & \\ & & & p/2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(1-p)\begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & & & 1-p \\ & p & & \\ & & p & \\ 1-p & & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda(\rho) = \frac{1}{2}\{p, p, 2-p, 2\}$$

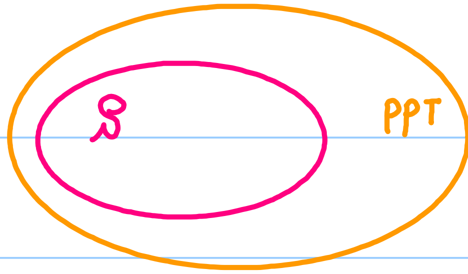
$$\rho^{T_A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & p & 1-p & \\ & 1-p & p & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda(\rho^{T_A}) = \frac{1}{2}\{1, 1, 1, 1-2p\}$$

$\rightarrow$ ρ is seperable only for $0 \leq p \leq 1/2$.

- $\mathcal{S} =$ مجموعهٔ تمام حالت‌های جدایی‌پذیر

$PPT =$ مجموعهٔ تمام حالت‌هایی که $\rho^{T_A} \geq 0$

- نکتهٔ ۱) $\mathcal{S} \subset PPT$
- نکتهٔ ۲) $\mathcal{S}$ و PPT هر دو محدب هستند.



• یک مدل دیگر

Majorization

• تعریف: $\{x_1, x_2, x_3, \dots x_N\}$ و $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_N\}$ دو تابع توزیع احتمال هستند،

هر دو به صورت نزولی مرتب شده‌اند: $x_1 \geq x_2 \dots \geq x_N$

اگر $\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i \quad \forall k$

گوییم

x is majorized by y.

در نتیجه ،

$$x \prec y.$$

برای توابع توزیع پیوسته :

$$p \prec q \quad \text{if} \quad \text{for } \forall\, x < L$$

$$\int_0^x p(u)\,du \le \int_0^x q(u)\,du.$$

مثال :

$$x = \left\{ \frac{8}{16}, \frac{4}{16}, \frac{2}{16}, \frac{2}{16} \right\}$$

$$y = \left\{ \frac{9}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16} \right\} \Longrightarrow x \prec y$$

$$x = \left\{ \frac{4}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right\}$$

$$y = \left\{ \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8} \right\} \Longrightarrow y \prec x$$

$$x = \left\{ \frac{4}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right\} \qquad x \not\prec y$$

$$y = \left\{ \frac{5}{8}, \frac{1.5}{8}, \frac{1.5}{8} \right\} \qquad y \not\prec x$$

• قضیه :

$$x \prec y \iff x = Dy$$

D = Doubly Stochastic

$$\Downarrow$$

$$H(x) \geq H(Y).$$

• مثال :

$$x = \left\{ \frac{4}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8} \right\}$$

$$y = \left\{ \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8} \right\} \Longrightarrow y \prec x$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

• مثال

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 1-a-b \\ c & d & 1-c-d \\ 1-a-c & " & " \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 7a = 5 \\ \rightarrow 7c = 3 \\ \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$1 - \frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{-1}{7}$$

• قضیه: اگر ρ_{AB} جدایی‌پذیر باشد، آنگاه

$$\lambda(\rho_{AB}) \prec \lambda(\rho_A), \quad \lambda(\rho_{AB}) \prec \lambda(\rho_B)$$

• مثال:

$$\rho = p\,\frac{I}{2} + (1-p)\,|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & & & 1-p \\ & p & & \\ & & p & \\ 1-p & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1+p \end{bmatrix} \qquad \rho_B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1+p \end{bmatrix}$$

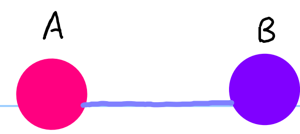
$$\lambda(\rho_{AB}) = \frac{1}{2}\{2-p, p, p, p\}$$

$$\lambda(\rho_A) = \lambda(\rho_B) = \frac{1}{2}\{1+p, 1+p, 0, 0\}$$

اگر $\lambda(\rho_{AB}) \nprec \lambda(\rho_A) \Longleftarrow \rho_{AB}$ جدایی‌پذیر نیست ←

$\frac{1}{2} < p \equiv 2-p \nprec 1+p$ ← حال محدوده را با بست مرجعه به شرط PPT .

آنتروپی فون نویمان



$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)$$

$$S(\rho_{AB}) = 0 \qquad\qquad S(\rho_A) = S(\rho_B) = 1$$

یک نتیجه‌ی کاملاً کوانتومی

کل سیستم AB منظم است $(S_{AB} = 0)$ ولی اجزاء آن ماکزیمم بی‌نظمی را دارند.

$$S_n^{AB} = 0 \qquad\qquad S_n^{A} = S_n^{B} = \pm\frac{1}{2}$$

• **قضیه:** اگر ρ_{AB} جدایی‌پذیر باشد آنگاه

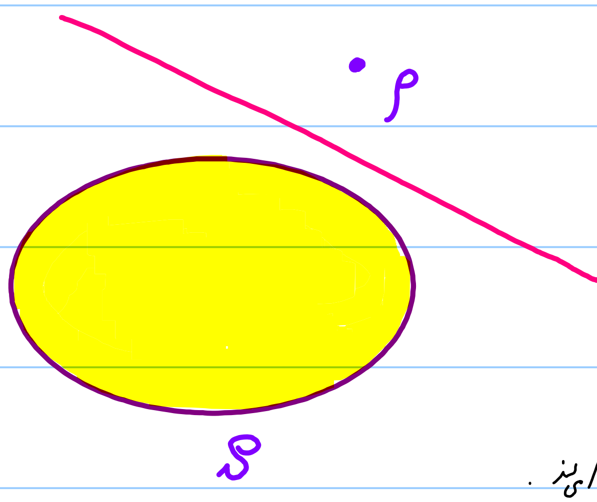
$$S(\rho_A) \le S(\rho_{AB}) \quad ; \quad S(\rho_B) \le S(\rho_{AB})$$

• شاهدِ درهم تنیدگی

• فضای باناخ Banach Space

یک فضای برداری دارای اندازه که کامل باشد.

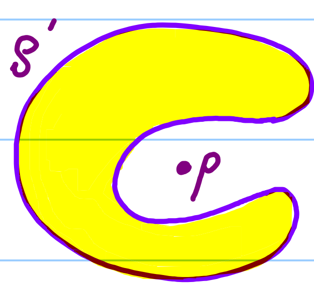
• قضیه‌ی هان-باناخ Hahn-Banach Theorem



اگر S یک مجموعه‌ی محدب در یک فضای باناخ باشد و p یک نقطه بیرون S آنگاه حتماً یک صفحه وجود دارد که p را از S جدا می‌کند.

مثال نقض

الف)



ب)

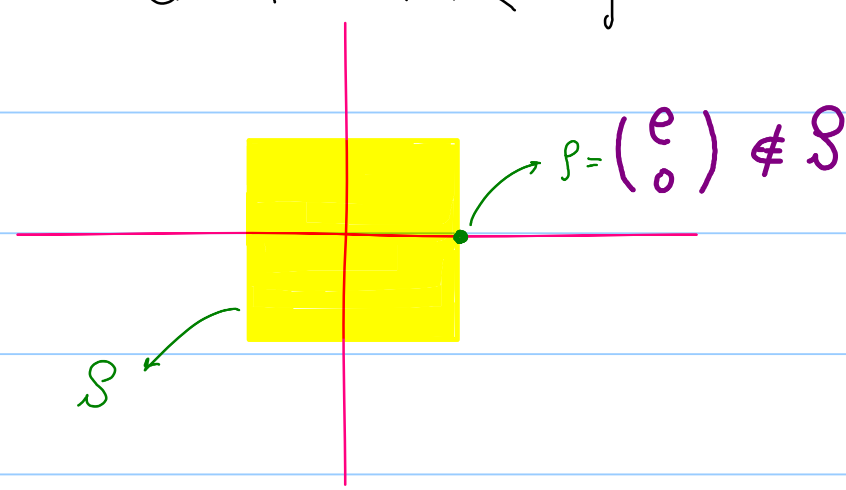
$\mathbb{Q} =$ مجموعهٔ اعداد گویا

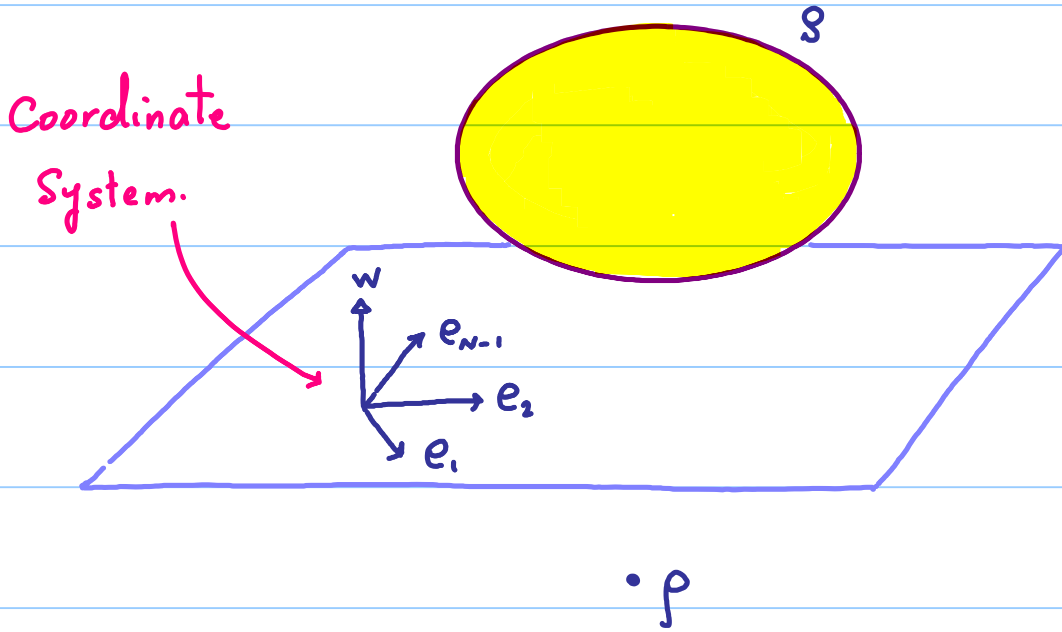
$$\mathbb{Q}^2 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \right\}$$

$\mathbb{Q}^2$ is a vector space over $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}^2$ is normed with $\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|)$

$$S = \{ x \in \mathbb{Q}^2 \mid \|x\| < e \}$$





مولفه‌ی N ام ρ منفی است.

مولفه‌ی N ام هر بردار $\in \mathcal{S}$ مثبت است

• سوال: از کجا می‌فهمیم که یک W یک نقطه‌ی خوب است؟ ↲

• پاسخ: می‌بایست داشته باشیم:

1) $\mathrm{tr}(W\sigma) \geq 0 \quad \forall\, \sigma \in \mathcal{S}$

2) $\mathrm{tr}(W\rho) < 0$ for some ρ.

• مثال از تحقق‌گر شرط ① را ندارد: $W = -\rho_{AB}$ ، $\rho =$ عملگر تصویر

● مثال از تشخیص‌گر به شرط ② لازمه : $W = P_{AB}$

● مثال از یک شاهد درهم‌تنیدگی ؟ $W = \rho^{T_A}$

● لم : $\mathrm{tr}(R^{T_A} S) = \mathrm{tr}(R S^{T_A})$

● اثبات :

کافی است که توجه کنیم :

$(R^{T_A})^{T_B} = R^{T}$ زیرا $R = R_{ij,kl} \, |ij\rangle\langle kl|$

بقیه‌اش کاملاً ساده است.

let Q = any projector on $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

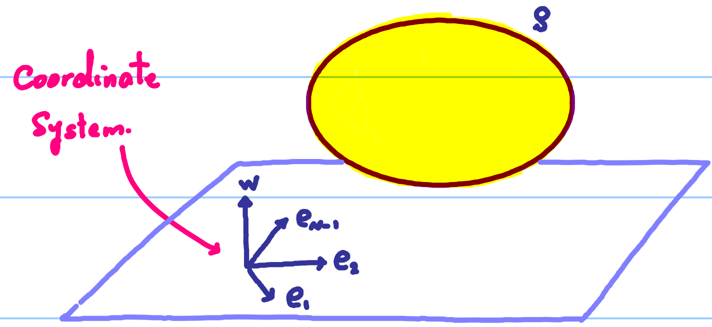
$$W := Q^{T_A}$$

for any $\sigma \in \mathcal{S}$

then $\longrightarrow$ $\mathrm{tr}(W\sigma) = \mathrm{tr}(Q^{T_A}\sigma) = \mathrm{tr}(Q\sigma^{T_A}) \geq 0.$

It's obvious that $\exists \rho :$ $\mathrm{tr}(W\rho) < 0.$

● اگر یک W پیدا کنیم با آن چه کاری می‌توانیم انجام دهیم ؟



given ρ

$\downarrow$

① if $tr(W\rho) > 0$ $\rightarrow$ ρ بالای صفحه است

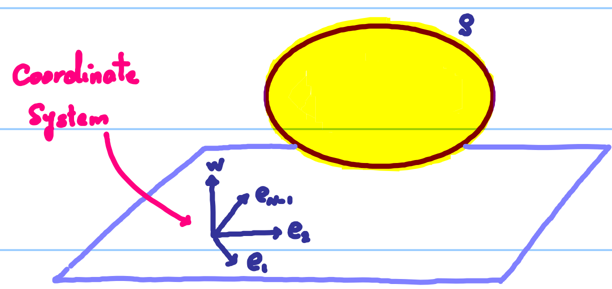
$\downarrow$

ρ ممکن است جدایی‌پذیر یا درهم‌تنیده باشد.

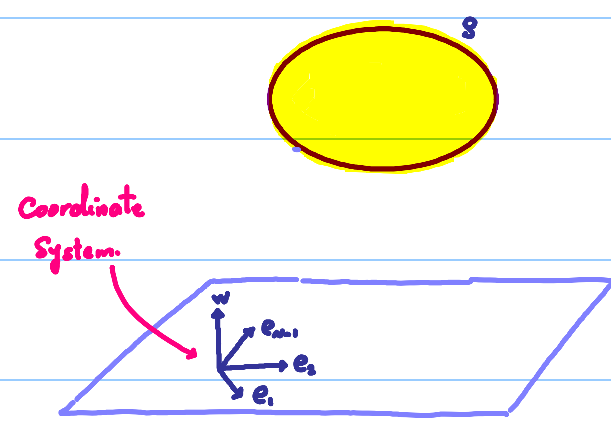
② if $tr(W\rho) < 0$ $\rightarrow$ ρ پایین صفحه است

$\downarrow$

ρ قطعاً درهم‌تنیده است.



یک W خوب



یک W نه چندان خوب

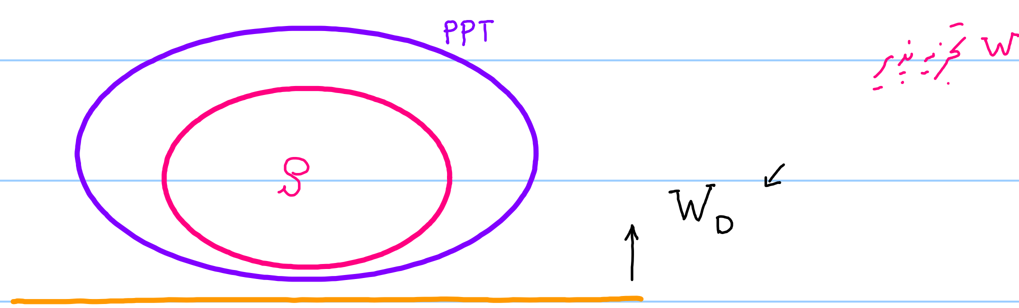
تعریف: یک W تجزیه‌پذیر است اگر عملگرهای تصویرگر P , Q وجود داشته باشند به‌قسمی که

$$W = P + Q^{T_A}$$

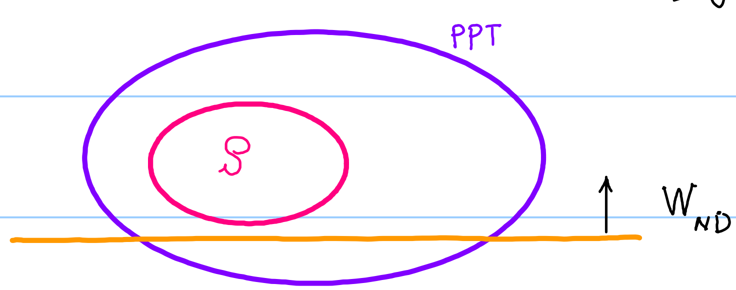
قضیه: اگر یک شاهد درهم‌تنیدگی W، تجزیه‌پذیر باشد، حالت‌های PPT را نمی‌تواند آشکار کند.

$$\mathrm{tr}(W\rho) = \mathrm{tr}\left((P + Q^{T_A})\rho\right) = \mathrm{tr}(P\rho) + \mathrm{tr}(Q\rho^{T_A}) \geq 0 .$$

نمایش برای یک W تجزیه‌پذیر به شکل زیر برقرار است:



- نمایش برای یک W تجزیه‌ناپذیر وضعیت به شکل زیر است:



example: $|\phi^+\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$

$$Q = |\phi^+\rangle\langle\phi^+| = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix}$$

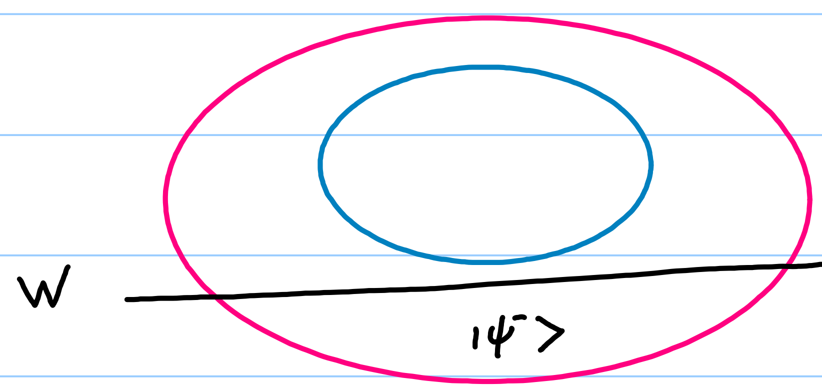
$$Q^{T_A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Q^{T_A} is an EW.

Q^{T_A} detects $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)$

$$\rho = |\psi^-\rangle\langle\psi^-| = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & -1 & \\ & -1 & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{tr}(\rho^- W) = -1$



نامساوی‌های بل، به‌عنوان شاهد درهم‌تنیدگی.

A particles B

a, a' Measurements b, b'

A_a , $A_{a'}$ Measurement Results B_b , $B_{b'}$

$A_a = A_a(\lambda)$ Before measurement Reality

$A_a = A_a(\lambda)$ doesn't depent on b. Locality

$$\int p(\lambda)\, d\lambda = 1$$

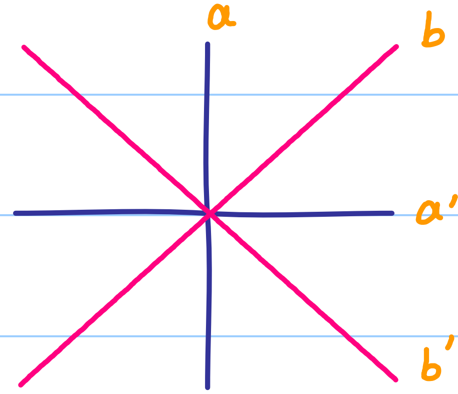
$$(A_a + A_{a'})\, B_a + (A_a - A_{a'})\, B_{a'} = \pm 2$$

$$\to \quad E(a,b) = \int A_a(\lambda)\, B_b(\lambda)\, P(\lambda)\, d\lambda$$

$$E(a,b) + E(a',b) + E(a,b') - E(a',b') =$$

$$= \int P(\lambda) \left\{ (A_a(\lambda) + A_{a'}(\lambda))\, B_b(\lambda) + (A_a(\lambda) - A_{a'}(\lambda))\, B_{b'}(\lambda) \right\} d\lambda$$

$$\boxed{\left| E(a,b) + E(a',b) + E(a,b') - E(a',b') \right| \leq 2}$$



$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)$$

$$E(a,b) + E(a',b) + E(a,b') - E(a',b') =$$

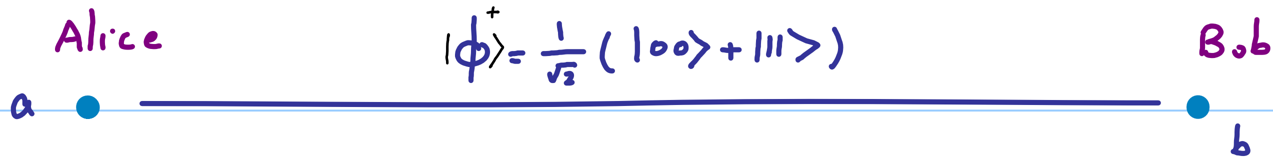
$$= \langle\psi^-|\ \sigma_a \otimes \sigma_b + \sigma_{a'} \otimes \sigma_b + \sigma_a \otimes \sigma_{b'} - \sigma_{a'} \otimes \sigma_{b'}\ |\psi^-\rangle$$

$$= 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{W := 2 - \sigma_a \otimes \sigma_b - \sigma_{a'} \otimes \sigma_b - \sigma_a \otimes \sigma_{b'} + \sigma_{a'} \otimes \sigma_{b'}}$$

- دسته بندی حالت های درهم تنیده بر اساس استفاده ی آنها در Dense Coding

What is Dense Coding.



$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle + |01\rangle\right)$$

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |11\rangle\right)$$

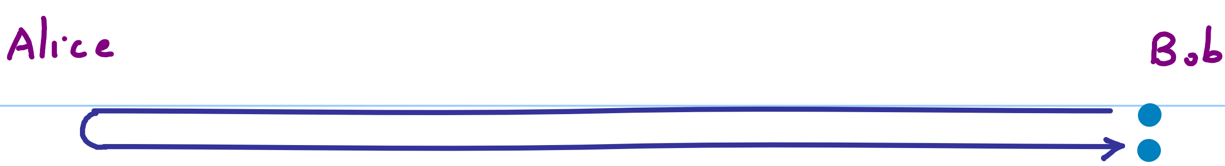
$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle - |01\rangle\right)$$

$$(1 \otimes 1)\,|\phi^+\rangle = |\phi^+\rangle$$

$$(X \otimes 1)\,|\phi^+\rangle = |\psi^+\rangle$$

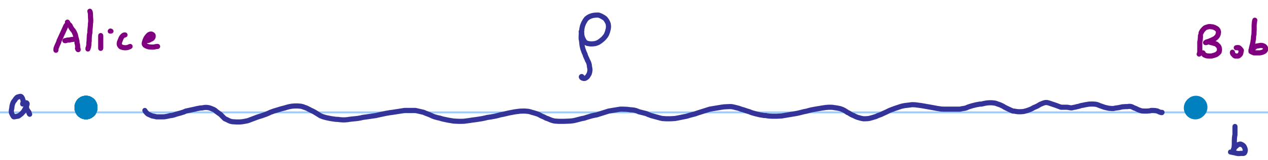
$$(Z \otimes 1)\,|\phi^+\rangle = |\phi^-\rangle$$

$$(Y \otimes 1)\,|\phi^+\rangle = |\psi^-\rangle$$



1 - qubit $\equiv$ 2 bits.

what if instead of $|\phi^+\rangle$ we have this?



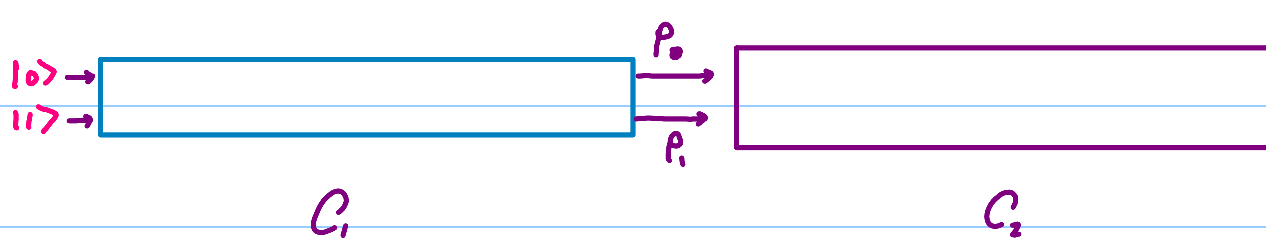
Holevo Bound

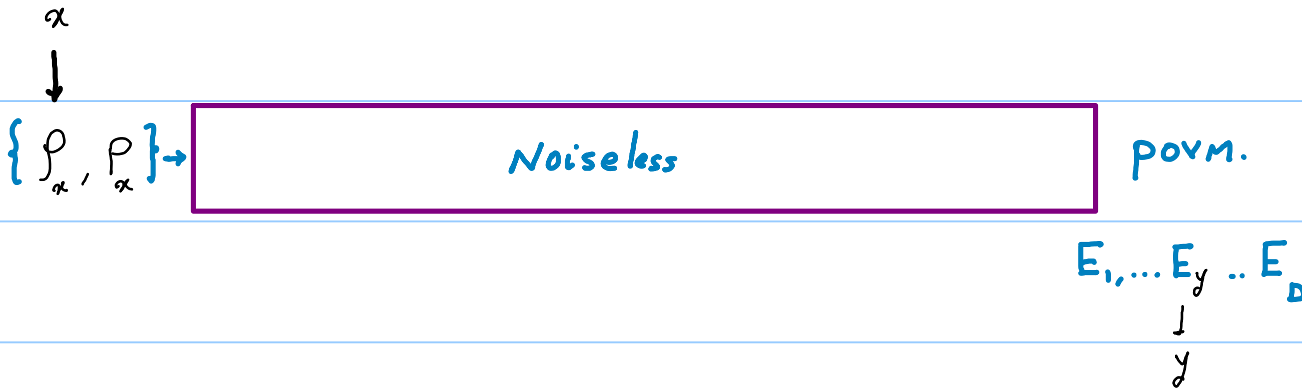
Alice

Classical Message   0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1

$0 \longrightarrow |0\rangle$ or $0 \longrightarrow |+\rangle$ or $0 \longrightarrow \rho_0$

$1 \longrightarrow |1\rangle$ $\quad$ $1 \longrightarrow |-\rangle$ $\quad$ $1 \longrightarrow \rho_1$





$$p(y|x) = \mathrm{tr}(E_y \rho_x)$$

mutual information:

$$I(\text{in}, \text{out}) := H(X) - H(X|Y).$$

$$\text{Accessible Information} = \max_{\text{povm's}} I(\text{in}, \text{out})$$

Holevo Bound:

$$\text{Acc} \leq \chi$$

$$\chi := S(\bar{\rho}) - \sum_i p_i S(\rho_i)$$

example: For pure states $S(\rho_i) = 0$ $\chi = S(\bar{\rho})$

$$\chi = S\left(\sum_i p_i \rho_i\right)$$

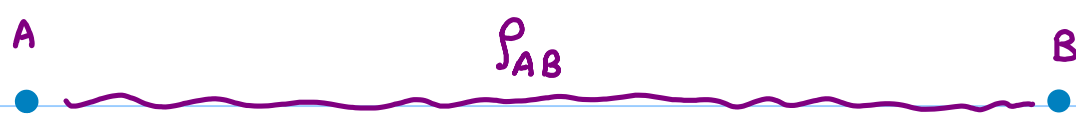
if the input ensemble is $\{(|+\rangle, \frac{1}{2}), (|-\rangle, \frac{1}{2})\}$

$$\chi = 1.$$

if the input ensemble is : $\{(|\uparrow\rangle, \frac{1}{2}), (|\nearrow\rangle, \frac{1}{2})\}$

then $\chi \leq 1$.

Capacity of quantum dense coding channel.



تعریف این کانال چیست ؟

1) Alice: applies $\mathcal{U}_i$ with probability p_i &

produces $\rho_i = (\mathcal{U}_i \otimes 1)\, \rho_{AB}\, (\mathcal{U}_i^{\dagger} \otimes 1).$

2) she sends ρ_i to Bob.

3) Bob does his best measurements to identify i:

$$C(\rho_{AB}) := \max_{\{p_i, \rho_i\}} \chi\{p_i, \rho_i\}$$

$$C(\rho_{AB}) = \max_{\{p_i, \rho_i\}} S\Big(\sum_i p_i \rho_i\Big) - \sum_i p_i S(\rho_i)$$

1) Since $\rho_i = (\mathcal{U}_i \otimes 1)\, \rho_{AB}\, (\mathcal{U}_i^{\dagger} \otimes 1) \longrightarrow S(\rho_i) = S(\rho_{AB}).$

2) $S(\bar{\rho}) \leq S(\bar{\rho}_A) + S(\bar{\rho}_B)$

$$\bar{\rho} = \sum_i p_i \rho_i = \sum_i p_i (U_i \otimes 1) \rho_{AB} (U_i^\dagger \otimes 1)$$

$$\bar{\rho}_B = \mathrm{tr}_A (\bar{\rho}) = \mathrm{tr}_A \sum_i p_i (1 \otimes 1) \rho_{AB} =$$

$$= \mathrm{tr}_A \, \rho_{AB} = \rho_B$$

$$S(\bar{\rho}_A) \leq \log_2 d_A$$

$$\rightarrow \quad S(\bar{\rho}) \leq \log_2 d_A + S(\rho_B)$$

- سوال: آیا به حد $S(\bar{\rho}_A) = \log_2 d_A$ می‌توان رسید؟
- پاسخ: بله: W_i , $p_i = \frac{1}{d_A^2}$

W_i ها می‌بایستی یک مجموعه کامل باشند به این معنا که :

$$\frac{1}{d^2}\sum_i W_i \, \sigma \, W_i^\dagger = tr(\sigma)\, \mathbb{1} \qquad \forall \sigma .$$

تحت این شرایط، $S(\bar{\rho}_A) = \log_2 d_A$.

$$\rightarrow \boxed{C(\rho_{AB}) = \log_2 d_A + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})}$$

- بدون حالت درهم تنیده، ظرفیت این کانال $\log_2 d_A$ است.

بنابراین ظرفیت چنین کانالی در حالت کلاسیک برابر است با:

$$C_{classical} = \log_2 d_A$$

حالت درهم تنیده فقط وقتی ظرفیت کوانتومی را از ظرفیت کلاسیک بیشتر می‌کند که شرط زیر برقرار گردد:

$$S(\rho_B) \geq S(\rho_{AB}).$$

• **تمرین:** نشان دهید که هرگاه یک حالت PPT باشد، آنگاه نامساوی فوق برقرار است، یعنی این حالت‌های PPT برای Dense Coding مناسب نیستند.

• **تمرین:** نشان دهید که حالت ورنر یعنی

$$\rho_W = x\,|\phi_{00}\rangle\langle\phi_{00}| + (1-x)\frac{I}{4}$$

به‌ازای بعضی از مقادیر x NPT است. ولی با این وجود، حالت فوق برای Dense Coding مناسب نیست.

وضع حالت‌ها براساس قابلیت آنها در Dense Coding.