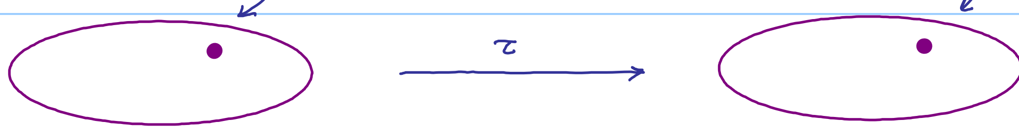
تصحیح خطای کوانتومی

Note Title 12/20/2009

آیا اصولاً رایانش کوانتومی ممکن است ؟

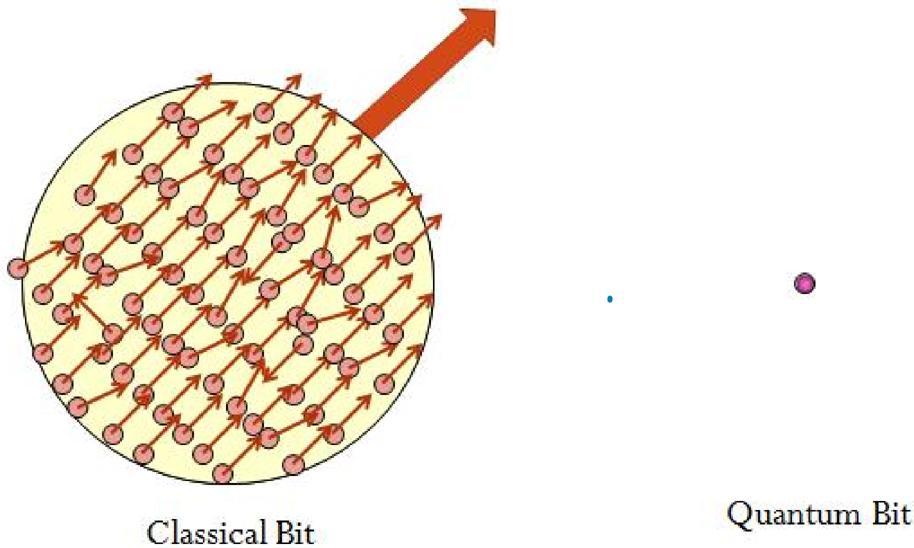
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \xrightarrow{\tau} \begin{cases} |0\rangle & \frac{1}{2} \\ |1\rangle & \frac{1}{2} \end{cases}$$



Note Title

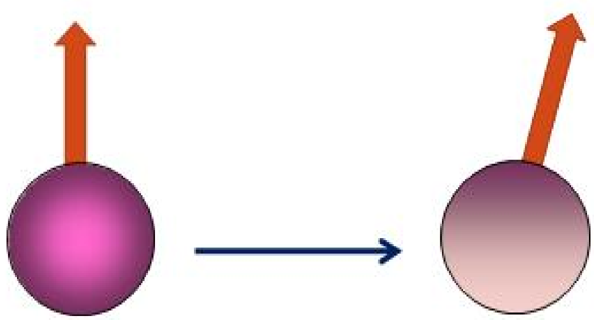
6/2010

1 - کیوبیت ها بسیار شکننده اند



8

2 - خطاها پیوسته هستند.



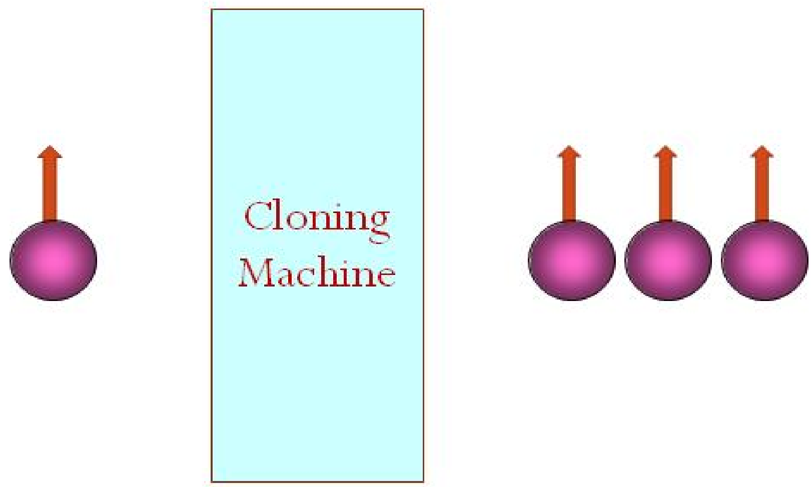
$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \qquad |\psi\rangle = a'|0\rangle + b'|1\rangle$$

9

$$0 \longrightarrow 000 \xrightarrow{\text{خطا}} 001$$

$$1 \longrightarrow 111 \longrightarrow 101$$

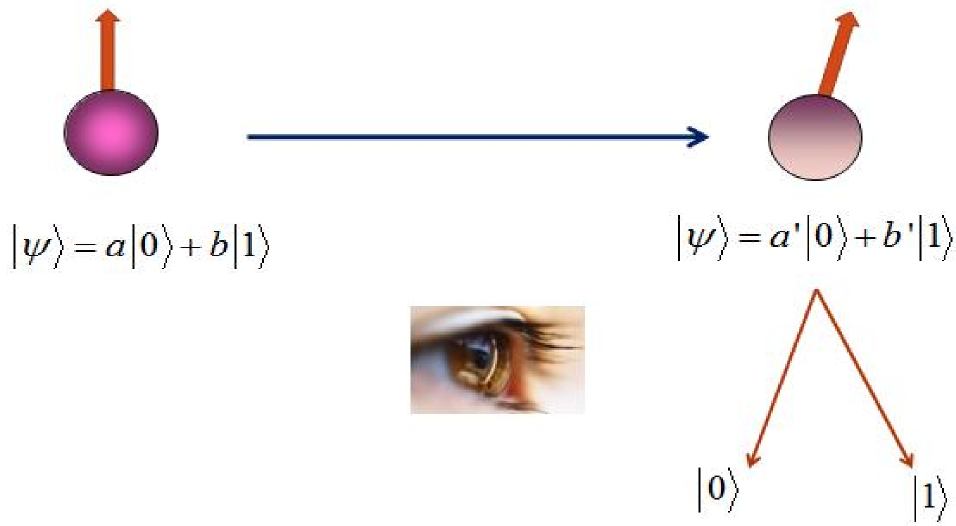
3 – امکان تکثیر کیوبیت ها نیست



10

$$|\psi\rangle|0\rangle|b\rangle \not\longrightarrow |\psi\rangle|\psi\rangle|b'\rangle$$

4 – نمی توان کیوبیت ها را مشاهده کرد.



۴) کدهای تصحیح کننده‌ی خطای کوانتومی

1 – خطاها واقعاً گسسته هستند:

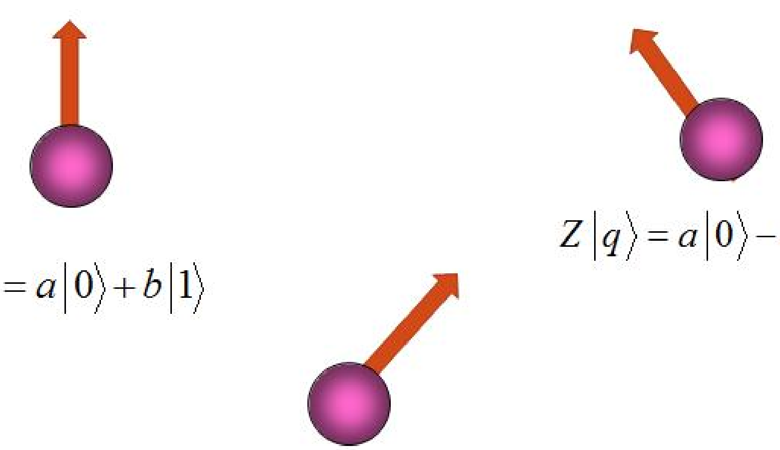
$$U = a_0 I + a_1 X + a_2 Y + a_3 Z$$

$$|q\rangle \rightarrow a_0 I|q\rangle + a_1 X|q\rangle + a_2 Y|q\rangle + a_3 Z|q\rangle$$

یک جای کار عیب دارد.

$$|q\rangle|e\rangle \rightarrow I|q\rangle|e_0\rangle + X|q\rangle|e_1\rangle + Y|q\rangle|e_2\rangle + Z|q\rangle|e_3\rangle$$

این حالت ها متعامد نیستند!!



$$|q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

$$Z|q\rangle = a|0\rangle - b|1\rangle$$

$$X|q\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle$$

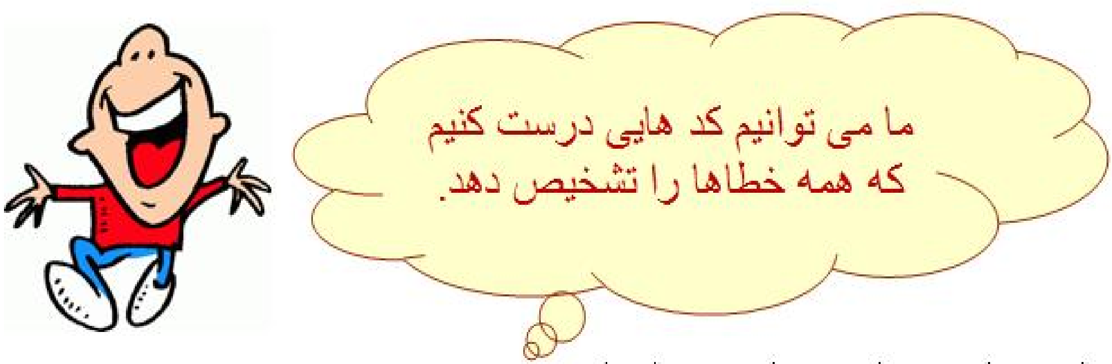
Quantum Code:

$$|q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \longrightarrow |q\rangle_c = a|00\rangle + b|11\rangle.$$

$$|q\rangle = a|00\rangle + b|11\rangle$$

$$X_1|q\rangle = a|10\rangle + b|01\rangle$$

$$X_2|q\rangle = a|01\rangle + b|10\rangle$$



$$|q\rangle = a|000\rangle + b|111\rangle$$

$$X_1|q\rangle = a|100\rangle + b|011\rangle$$

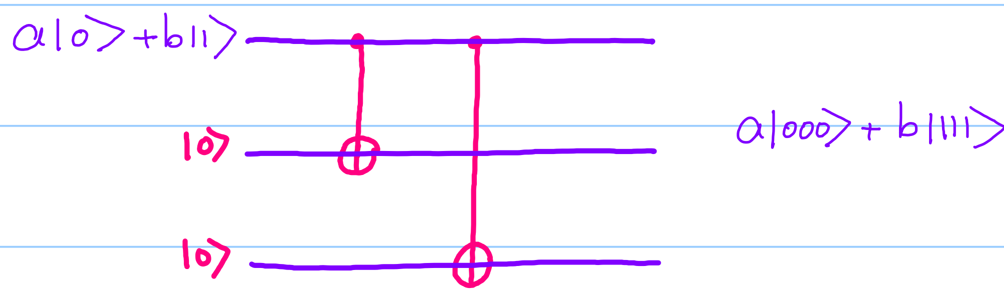
$$X_2|q\rangle = a|010\rangle + b|101\rangle$$

$$X_3|q\rangle = a|001\rangle + b|110\rangle$$

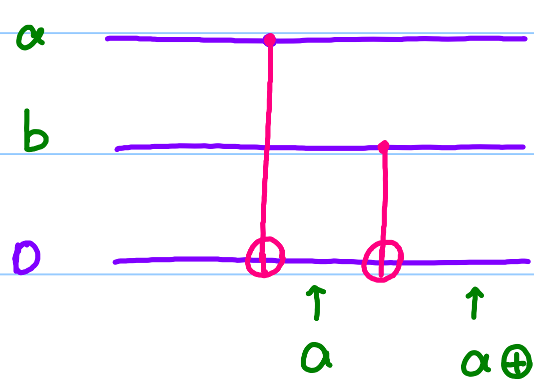
سندرم خطا

	Z_1Z_2	Z_1Z_3
$I\|q\rangle = a\|000\rangle + b\|111\rangle$	1	1
$X_1\|q\rangle = a\|100\rangle + b\|011\rangle$	-1	-1
$X_2\|q\rangle = a\|010\rangle + b\|101\rangle$	-1	1
$X_3\|q\rangle = a\|001\rangle + b\|110\rangle$	1	-1.

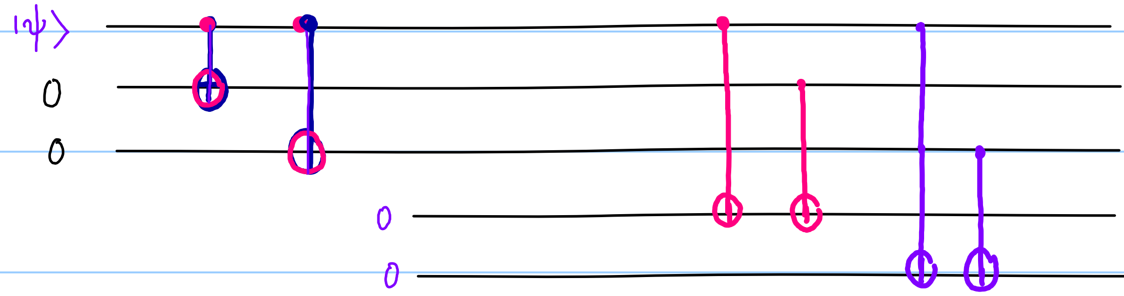
- Encoding Circuit



- Measurement Circuit



$$a \oplus b = \begin{cases} 0 & \text{if } a = b \\ 1 & \text{"} \ a \neq b \end{cases}$$



Encoding

Syndrome measurement

$Z_1 Z_2 |\psi\rangle = |\psi\rangle$, $Z_1 Z_3 |\psi\rangle = |\psi\rangle$ یک کم تفکر!

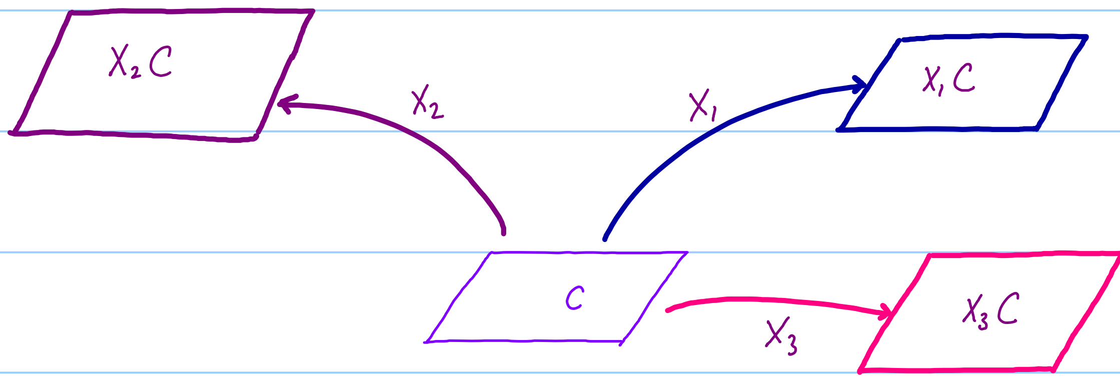
	I	X_1	X_2	X_3
$Z_1 Z_2$	+	−	−	+
$Z_1 Z_3$	+	−	+	−

$$S = \{ I, Z_1 Z_2, Z_1 Z_3, Z_2 Z_3 \} = \begin{cases} \langle Z_1 Z_2, Z_1 Z_3 \rangle \\ \text{or} \\ \langle Z_1 Z_2, Z_2 Z_3 \rangle \end{cases}$$

generators

$|\psi\rangle$ is stabilized by S.

$\langle\psi|X_1X_2|\psi\rangle = 0 \qquad \langle\psi|X_1X_3|\psi\rangle = 0 \qquad \langle\psi|X_2X_3|\psi\rangle = 0.$



اما این که هر خطا را تصحیح نکند.

$$|q\rangle = a|000\rangle + b|111\rangle \xrightarrow{Z_1} |q\rangle = a|000\rangle - b|111\rangle.$$

چگونه می‌توان کدی ساخت که خطای phase flip را تصحیح کند؟

$Z|+\rangle = |-\rangle \quad , \quad Z|-\rangle = |+\rangle.$

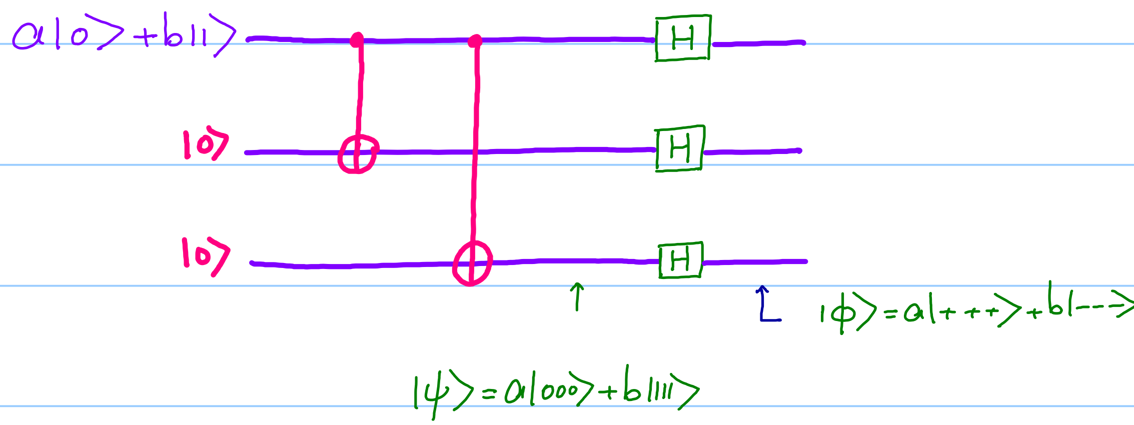
$|0\rangle \longrightarrow |+++\rangle$

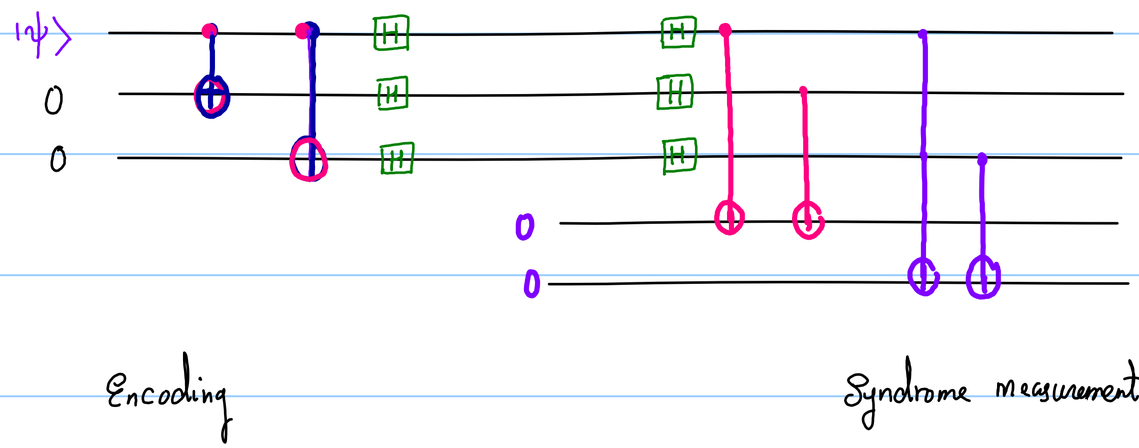
$|1\rangle \longrightarrow |---\rangle$

$$|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \longrightarrow |\psi\rangle_E = a|+++\rangle + b|---\rangle.$$

$HXH = Z \quad , \quad HZH = X$

• Encoding Circuit



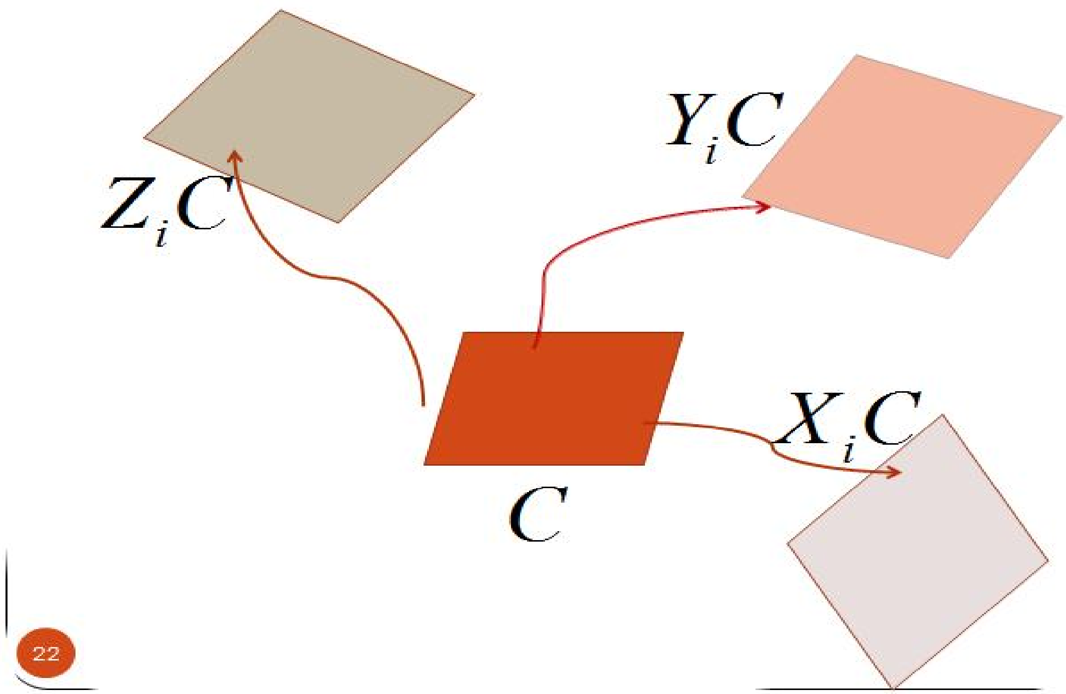


Shor Code

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|000\rangle+|111\rangle\right)\left(|000\rangle+|111\rangle\right)\left(|000\rangle+|111\rangle\right)$$

$$|1\rangle \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|000\rangle-|111\rangle\right)\left(|000\rangle-|111\rangle\right)\left(|000\rangle-|111\rangle\right)$$

$$\mathcal{E} = \{ X_1, \ldots X_9 \; ; \; Z_1, \ldots Z_9 \; ; \; Y_1, \ldots Y_9 \}$$

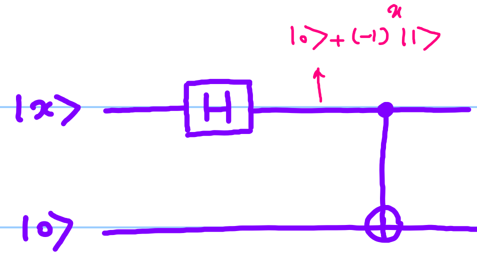


generators of S for shor Code:

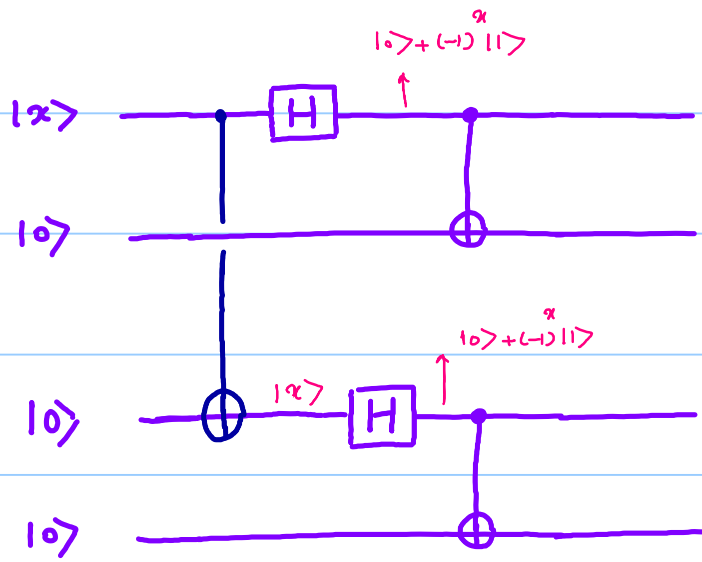
$$S = \left\langle \begin{array}{c} Z_1Z_2, Z_1Z_3 \; ; \; Z_4Z_5, Z_4Z_6 \; ; \; Z_7Z_8, Z_7Z_9, \\ X_I X_{II} \; ; \; X_I X_{III} \end{array} \right\rangle$$

$$\forall \, s \in S \qquad s|\psi\rangle = |\psi\rangle .$$

Encoding Circuit

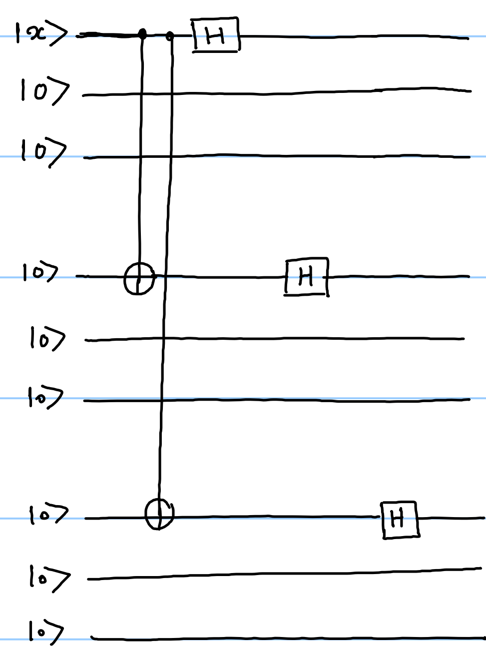


$|00\rangle + (-1)^x |11\rangle.$



$|00\rangle + (-1)^x |11\rangle$

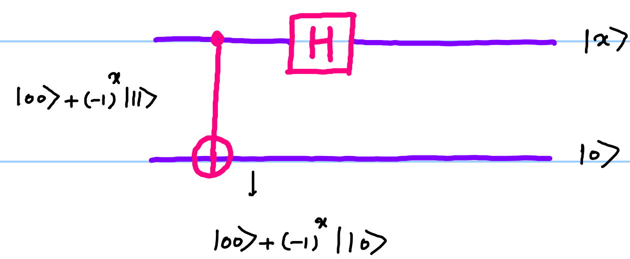
$|00\rangle + (-1)^x |11\rangle$



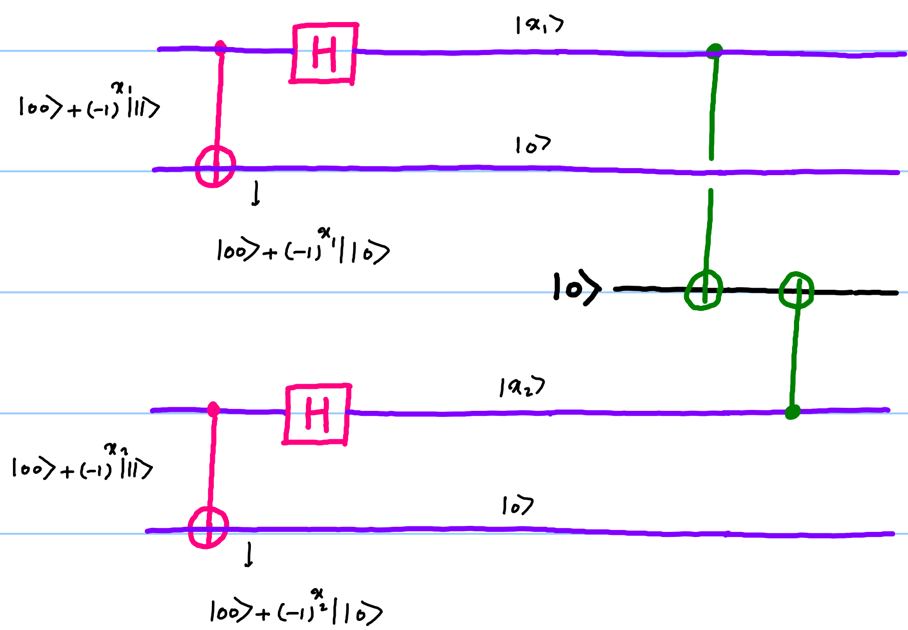
$\left(|000\rangle + (-1)^x |111\rangle\right)^{\otimes 3}$

Syndrome Measurement

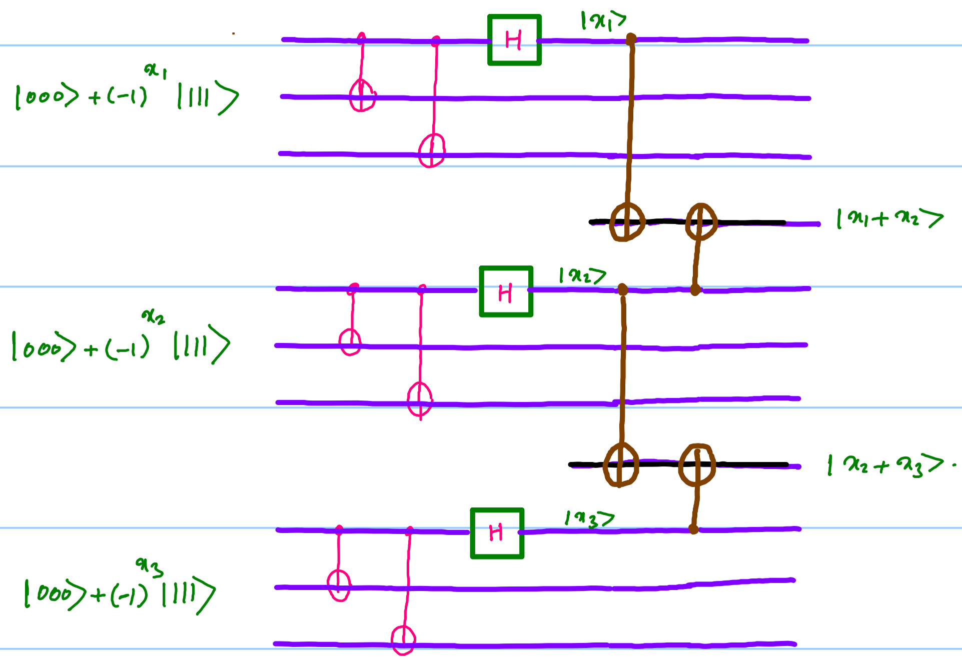
• مثال ساده: می‌خواهیم تشخیص دهیم که آیا حالت $|00\rangle+|11\rangle$ را برای ارسال کرده‌اند یا حالت $|00\rangle-|11\rangle$ را. مدار اندازه‌گیری به ترتیب زیر است:



• می‌خواهیم ببینیم که آیا دو کیوبیت $|00\rangle+(-1)^{x_1}|11\rangle$ و $|00\rangle+(-1)^{x_2}|11\rangle$ که در یک کد شبه شور، وجود دارند مثل هم هستند یا نه. مدار اندازه‌گیری به شکل زیر است:



- با این مثال می‌توانیم مدار اندازه‌گیری‌های سندرم‌های $X_I X_{II}$ و $X_{II} X_{III}$ را به گونه دیگر طراحی کنیم.



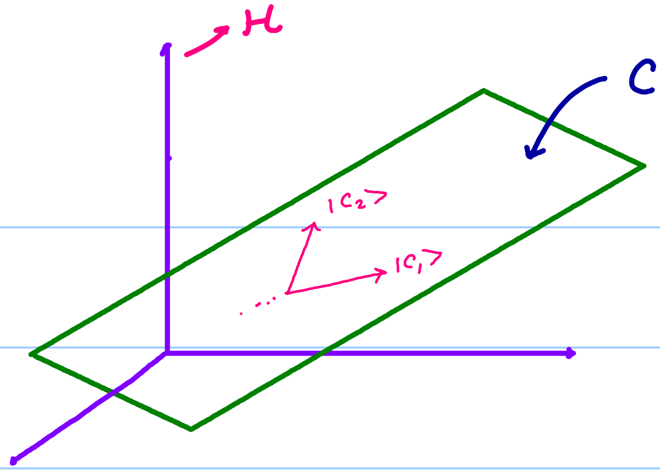
قضیه اساسی تصحیح خطای کوانتومی

$\mathcal{H}$ = a Hilbert Space $\qquad$ Q = a quantum channel acting on $\mathcal{H}$.

$$\rho \longrightarrow \boxed{\;Q\;} \longrightarrow Q(\rho)$$

$$Q(\rho) = \sum_k P_k \, E_k \rho E_k^{\dagger}$$

errors.



Basis of C $= \{ |c_1\rangle, |c_2\rangle, \dots |c_k\rangle \}$

قضیه : C یک کد کوانتومی تصحیح‌کننده خطا برای کانال Q است اگر و فقط اگر

$\forall\ E_k, E_l$ & $\forall\ i,j$

$$\langle c_i | E_k^\dagger E_l | c_j \rangle = 0 \qquad \text{if } i \neq j$$

$$\langle c_i | E_k^\dagger E_l | c_i \rangle = \alpha_{kl} \qquad \forall\ i$$

Complex conjucation: $\rightarrow$

$$\langle c_i | E_l^\dagger E_k | c_i \rangle = \alpha_{kl}^*$$

$\rightarrow$ α is a Hermitian Matrix.

$$\Omega^\dagger \alpha \Omega = D$$

قطری

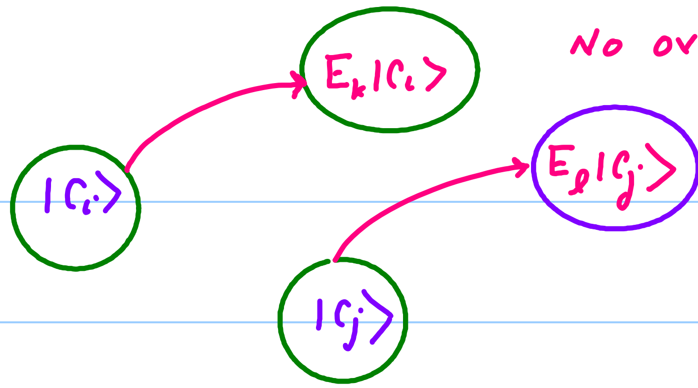
Define: $F_\mu := \Omega_{\mu k} E_k \Rightarrow F_\mu^\dagger = \Omega_{\mu k}^* E_k^\dagger$

$$\rightarrow \langle c_i | F_\mu^\dagger F_\nu | c_i \rangle = \langle c_i | \Omega_{\mu k}^* \Omega_{\nu l} \, E_k^\dagger E_l | c_i \rangle$$

$$= \Omega_{\mu k}^* \Omega_{\nu l} \, \alpha_{kl} = (\Omega^\dagger \alpha \, \Omega)_{\mu\nu} = \omega_\mu \delta_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \langle c_i | F_\mu^\dagger F_\nu | c_i \rangle = \omega_\mu \cdot \delta_{\mu\nu}$$

if $\omega_\mu = 0 \Rightarrow F_\mu | c_i \rangle = 0$



No overlap

دلیل شهودی.

Shor Code $\qquad |0\rangle_E = \left(|000\rangle + |111\rangle\right)^{\otimes 3}$

$$|1\rangle_E = \left(|000\rangle - |111\rangle\right)^{\otimes 3}$$

$$Z_1|0\rangle_E = Z_2|0\rangle_E = Z_3|0\rangle_E$$

Z_1، Z_2 و Z_3 هر سه حالت $|0\rangle_E$ را به حالت زیر می‌برند:

$$Z_i|0\rangle_E = \left(|000\rangle - |111\rangle\right) \otimes \left(|000\rangle + |111\rangle\right) \otimes \left(|000\rangle + |111\rangle\right)$$

اثر هر سه خطا روی حالت $|0\rangle_E$ یکسان است.

Z_1، Z_2 و Z_3 هر سه حالت $|1\rangle_E$ را به حالت زیر می‌برند:

$$Z_i|1\rangle_E = \left(|000\rangle + |111\rangle\right) \otimes \left(|000\rangle - |111\rangle\right) \otimes \left(|000\rangle - |111\rangle\right)$$

اثر هر سه خطا روی حالت $|1\rangle_E$ یکسان است.

با اندازه‌گیری $X_I X_{II}$ و $X_{II} X_{III}$، بدون این که تشخیص دهیم حالت $|0\rangle_E$ یا $|1\rangle_E$ ارسال شده است می‌توانیم خطا را تشخیص داد و آن را اصلاح کنیم.

• یک کُد پنج کیوبیتی   5 qubit Code ؟!

$$S_1 = ZZXXX$$
$$S_2 = XZZXX$$
$$S_3 = XXZZX \quad \rightarrow [S_1, S_2, S_3, S_4] = 0$$
$$S_4 = XXXZZ \qquad |C| = 2$$

Syndromes.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
S_1	−	−	+	+	+
S_2	+	−	−	+	+
S_3	+	+	−	−	+
S_4	+	+	+	−	−

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
S_1	+	+	−	−	−
S_2	−	+	+	−	−
S_3	−	−	+	+	−
S_4	−	−	−	+	+

This is not a

Good Code !

$(X_2 \otimes Z_4)$ have the same Syndrome.

$(X_4 \otimes Z_2)$ 〃 〃 〃 .

The 5-qubit Code.

$S_1 = X X Z I Z$

$S_2 = Z X X Z I$

$S_3 = I Z X X Z$

$S_4 = Z I Z X X$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
S_1	0	0	1	0	1
S_2	1	0	0	1	0
S_3	0	1	0	0	1
S_4	1	0	1	0	0

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
S_1	1	1	0	0	0
S_2	0	1	1	0	0
S_3	0	0	1	1	0
S_4	0	0	0	1	1

the encoded qubits:

$$S_1 |i_1 i_2 i_3 i_4 i_5\rangle = (-1)^{i_3+i_5} |\bar{i}_1 \bar{i}_2 i_3 i_4 i_5\rangle$$

$$S_2 |i_1 i_2 i_3 i_4 i_5\rangle = (-1)^{i_1+i_4} |i_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3 i_4 i_5\rangle$$

$$S_3 |i_1 i_2 i_3 i_4 i_5\rangle = (-1)^{i_3+i_4} |i_1 i_2 \bar{i}_3 \bar{i}_4 i_5\rangle$$

$$S_4 |i_1 i_2 i_3 i_4 i_5\rangle = (-1)^{i_4+i_5} |i_1 i_2 i_3 \bar{i}_4 \bar{i}_5\rangle$$

$S_1 = X X Z I Z$

$S_2 = Z X X Z I$

$S_3 = I Z X X Z$

$S_4 = Z I Z X X$

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} \, |i_1 i_2 i_3 i_4 i_5\rangle$$

$$S_1|\psi\rangle = \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} \, (-1)^{i_3+i_5} \, |\bar{i}_1 \bar{i}_2 i_3 i_4 i_5\rangle$$

$$= \sum a_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 i_3 i_4 i_5} \, (-1)^{i_3+i_5} \, |i_1 i_2 i_3 i_4 i_5\rangle$$

$$\begin{cases} a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = (-1)^{i_3+i_5} \, a_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 i_3 i_4 i_5} . \\ a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = (-1)^{i_1+i_4} \, a_{i_1 \bar{i}_2 \bar{i}_3 i_4 i_5} \\ a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = (-1)^{i_3+i_4} \, a_{i_1 i_2 \bar{i}_3 \bar{i}_4 i_5} \\ a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = (-1)^{i_4+i_5} \, a_{i_1 i_2 i_3 \bar{i}_4 \bar{i}_5} \end{cases}$$

- تمرین: تحت این کد، کیوبیت $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ به چه حالتی کد می‌شود؟

- یک کد دیگر با ماتریس کد همینگ

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S_1 = X_4 X_5 X_6 X_7$ $\quad$ $S_4 = Z_4 Z_5 Z_6 Z_7$

$S_2 = X_2 X_3 X_6 X_7$ $\quad$ $S_5 = Z_2 Z_3 Z_6 Z_7$

$S_3 = X_1 X_3 X_5 X_7$ $\quad$ $S_6 = Z_1 Z_3 Z_5 Z_7.$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
S_1	0	0	0	0	0	0	0
S_2	0	0	0	0	0	0	0
S_3	0	0	0	0	0	0	0
S_4	0	0	0	1	1	1	1
S_5	0	1	1	0	0	1	1
S_6	1	0	1	0	1	0	1

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7.
S_1	0	0	0	1	1	1	1
S_2	0	1	1	0	0	1	1
S_3	1	0	1	0	1	0	1
S_4	0	0	0	0	0	0	0
S_5	0	0	0	0	0	0	0
S_6	0	0	0	0	0	0	0

CSS Codes.

Calderbank-Shor-Steane Codes.

- یادآوری کدهای خطی

$$C : \begin{cases} \text{generator } G \\ \text{parity check } H \end{cases} \qquad x \in C \rightarrow x = uG \leftrightarrow xH^T = 0$$

$$C^\perp : \begin{cases} \text{generator } H \\ \text{parity check } G \end{cases} \qquad y \in C^\perp \rightarrow y = vH \leftrightarrow yG^T = 0$$

- لم ۱)

$$\sum_{x \in F_2^n} (-1)^{x \cdot y} = 2^n \delta_{y,0}.$$

- لم ۲)

$$\sum_{w \in C} (-1)^{w \cdot y} = 2^n \delta_{y \in C^\perp}$$

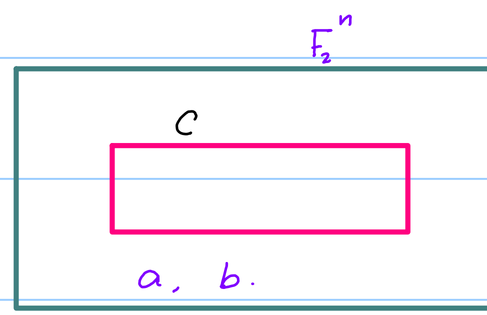
• اثبات :

$$\sum_{w\in C} (-1)^{w\cdot y} = \sum_{w\in C} (-1)^{w\cdot y^T}$$

w سطری، y^T ستونی است.

$$= \sum_{x\in F_2^n} (-1)^{\underbrace{xG}_{w} y^T} = 2^n \delta_{Gy^T,0} = 2^n \delta_{y\in C^\perp} .$$

let $a,b\in F_2^n$ then



$$|\psi\rangle := \frac{1}{\sqrt{|C|}} \sum_{c\in C} (-1)^{a.c} |c+b\rangle$$

then $$H_{2^n}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|C|}}\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{c\in C}\sum_{x\in F_2^n} (-1)^{x.(c+b)} (-1)^{a.c}|x\rangle$$

با استفاده از (۲

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n|C|}}\sum_{x\in F_2^n} 2^n \delta_{x+a\in C^\perp} (-1)^{x.b}|x\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{2^n}{|C|}} \sum_{c'\in C^\perp} (-1)^{(c'+a).b} |c'+a\rangle$$

می‌دانیم که اگر $|C| = 2^k$ ، $|C^\perp| = 2^{n-k}$ ← $|C||C^\perp| = 2^n$

بنابراین ←

$$H_{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{|C|}}\sum_{c\in C}(-1)^{a\cdot c}\,|b+c\rangle\right) = \frac{(-1)^{a\cdot b}}{\sqrt{|C^\perp|}}\sum_{c\in C^\perp}(-1)^{b\cdot c}\,|a+c\rangle$$