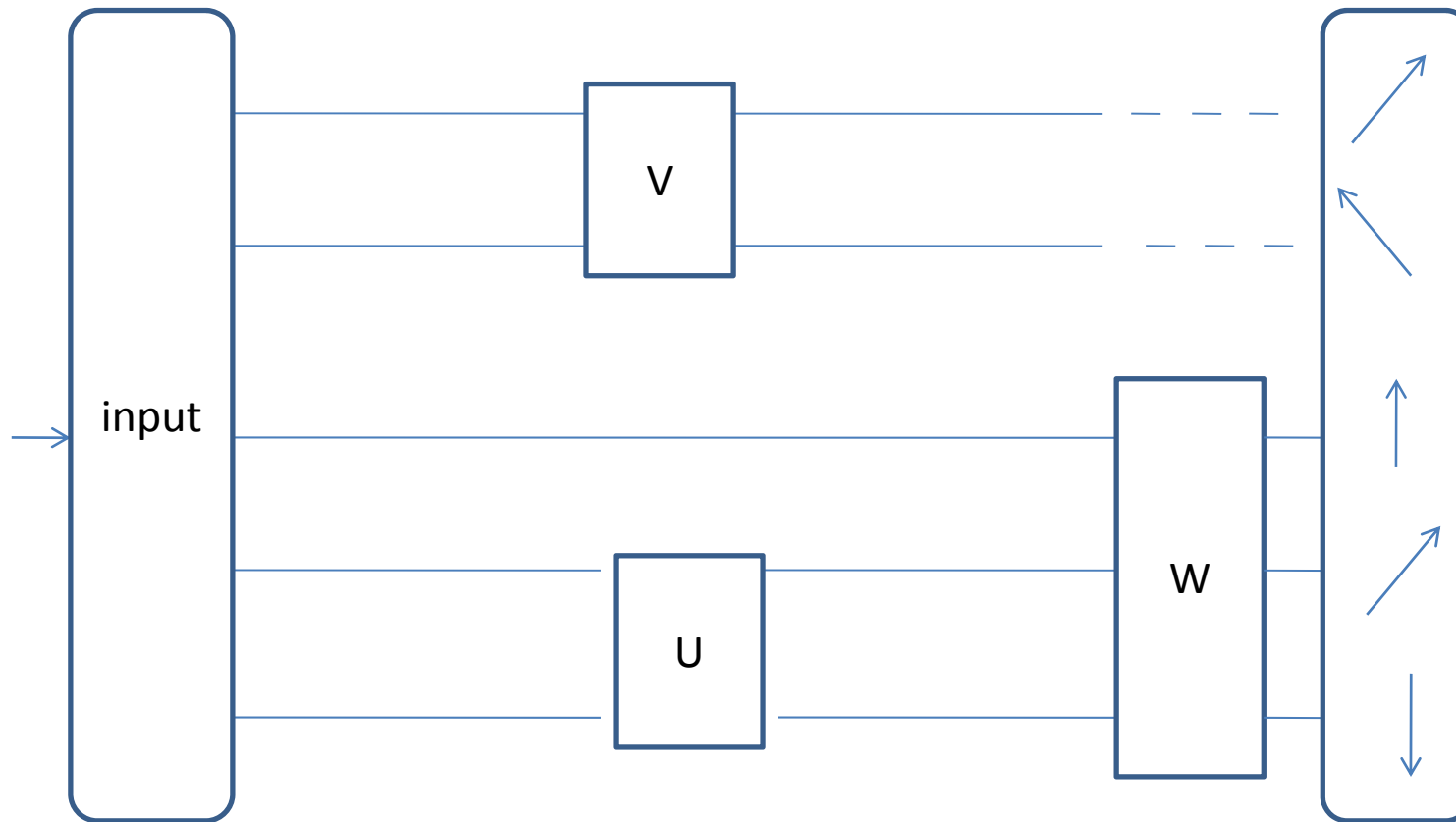


محاسبات کوانتومی بر پایه اندازه گیری

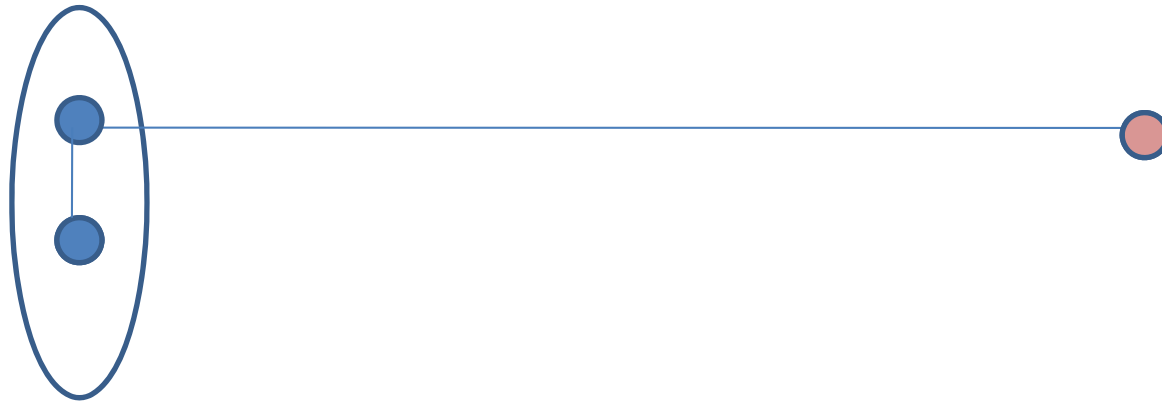
محمد حسین زارعی

89/10/4

محاسبات کو انتومی: ساده ترین مدل مدل مداری است که به صورت شماتیک نشان داده شده است.



فرابرد کوانتومی و استفاده از اندازه گیری: در این فرآیند از درهمتنیدگی و در نهایت اندازه گیری در پایه بل که یک اندازه گیری دو کیوبیتی است استفاده می شود.



$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi^+\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |\phi^-\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)) \\ + |\psi^+\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |\psi^-\rangle(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)$$

$$|\phi^+\rangle \quad I$$

$$|\phi^-\rangle \quad Z$$

$$|\psi^+\rangle \quad X$$

$$|\psi^-\rangle \quad Y$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi^+\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |\phi^-\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)) \\ + |\psi^+\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |\psi^-\rangle(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)$$

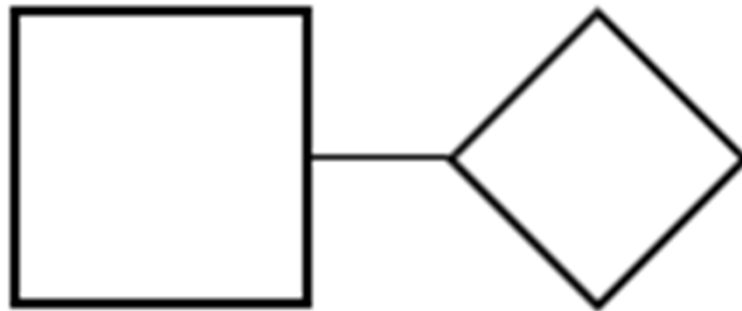
می توان با استفاده از فرابرد کوانتومی گیت نیز اعمال نمود.
کافی است که به جای اندازه گیری در پایه بل در پایه زیر
اندازه گیری کنیم.

$$U \otimes I |B\rangle$$

?

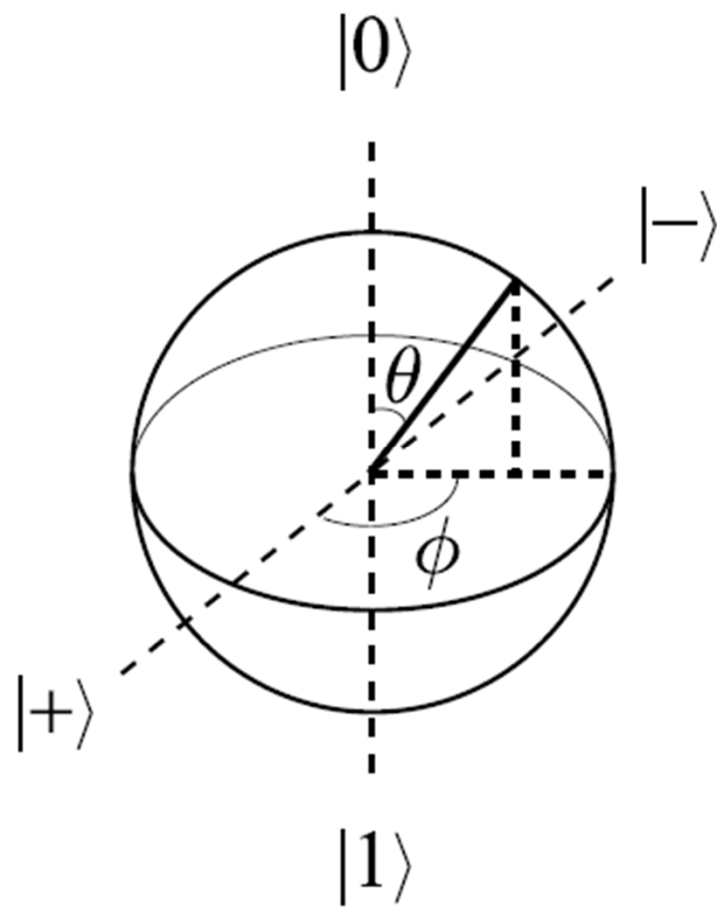
محاسبات کوانتومی بر پایه اندازه گیری: در اینجا از درهمتنیدگی و در نهایت اندازه گیری تک کیوبیتی استفاده می شود که ساده تر از اندازه گیری بل در فرابرد کوانتومی است.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|0\rangle|+\rangle + \beta|1\rangle|-\rangle)$$

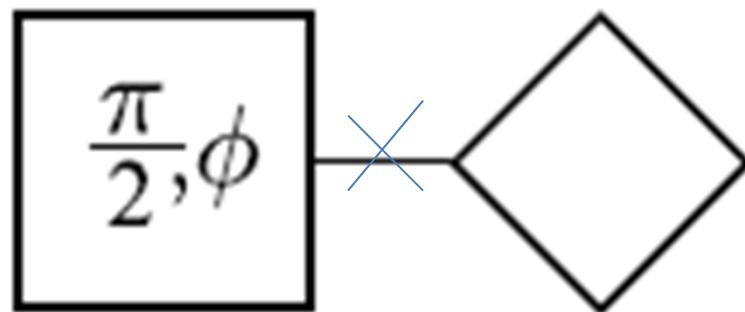


$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - e^{i\varphi}|1\rangle) \end{cases}$$

کره بلوخ:



با اندازه گیری کیوبیت اول در پایه تعیین شده ، در همتندگی از بین رفته و روی کیوبیت دوم حالت مورد نظر قرار خواهد گرفت. البته یک خطای پائولی قابل تصحیح نیز وجود دارد.



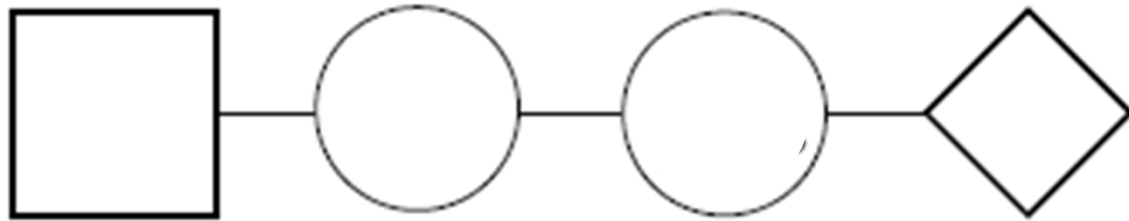
$$X^m H U_z(\phi) |\psi\rangle$$

$$J(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\varphi} \\ 1 & -e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

گیت تک کیوبیتی دلخواه:

$$U_z(\gamma)U_x(\beta)U_z(\alpha)$$

در اینجا از تعداد بیشتری کیوبیت استفاده شده در واقع عملگری که در صفحه قبل نشان دادیم را در سه مرحله با اندازه گیری متوالی کیوبیت های اول و دوم و سوم اعمال می کنیم . و حالت مورد نظر ما روی کیوبیت نهایی قرار می گیرد.



$$U = HZ^{m_3}U_z(\phi_3)HZ^{m_2}U_z(\phi_2)HZ^{m_1}U_z(\phi_1).$$

همه خطاهای پائولی را به انتهای فرآیند منتقل می‌کنیم. یک عملگر هادامارد باقی می‌ماند که بعداً نشان می‌دهیم با اضافه کردن یک کیوبیت پنجم می‌توان آن را از بین برد

$$HZ^{m_3}U_z(\phi_3)X^{m_2}U_x(\phi_2)Z^{m_1}U_z(\phi_1)$$

$$XU_z(\phi) = U_z(-\phi)X \quad ZU_x(\phi) = U_x(-\phi)Z$$

$$X^{m_3}Z^{m_2}X^{m_1}HU_z((-1)^{m_2}\phi_3)U_x((-1)^{m_1}\phi_2)U_z(\phi_1).$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \alpha & \phi_2 &= (-1)^{m_1}\beta \\ & & \phi_3 &= (-1)^{m_2}\gamma, \end{aligned}$$

هزینه ای که پرداخت کردیم وابستگی هر اندازه گیری به اندازه گیری قبلی بود. اما تصحیح خطا های پائولی به انتهای محاسبات موکول شد.

با اضافه شدن یک عملگر دو کیوبیتی هر عملگر دلخواهی قابل اعمال است.

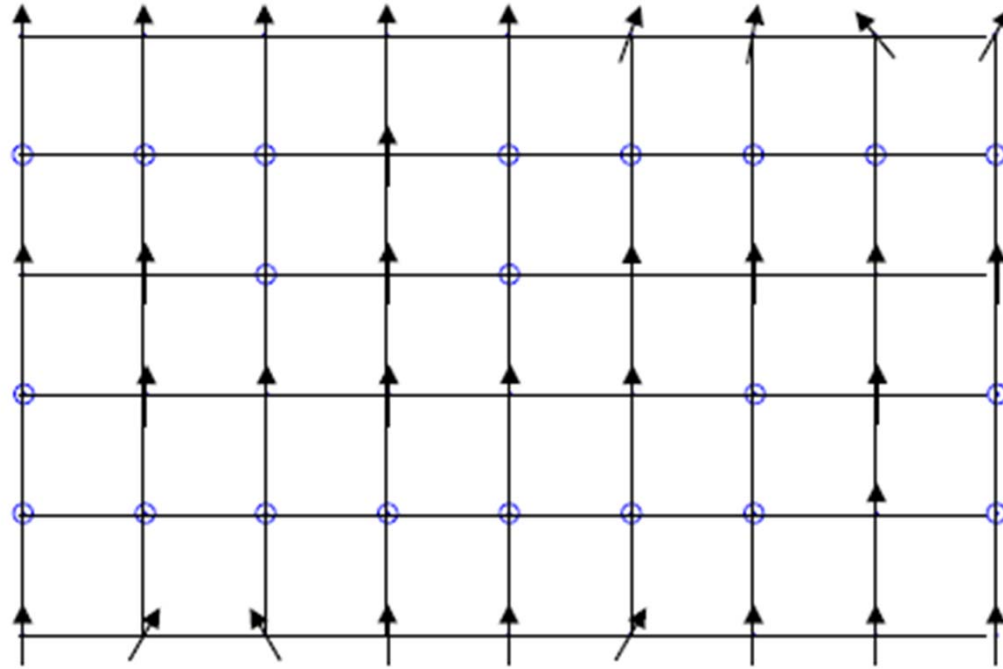
	1	2	3	4	5	6	7
control	X	Y	Y	Y	Y	Y	●
				Y	8		
target	X	X	X	Y	X	X	●
	9	10	11	12	13	14	15

MBQC در حالت کلی:

حالت گراف به عنوان منبع:

$$|G\rangle = \prod U_{ab} |+\rangle^{\otimes V}$$

$$U_{ab} = |\circ\rangle\langle\circ| \otimes I + |\sphericalangle\rangle\langle\sphericalangle| \otimes Z$$



حالت های گراف حالت های پایدار هستند:

$$K_a = X^a \prod_{b \in N_a} Z^b$$

اندازه گیری پائولی:

اندازه گیری در پایه محاسباتی روی هر اسپین گرافی جدید با یک اسپین کمتر ایجاد خواهد کرد.

بنابراین هر جا به اسپینی احتیاج نبود آنرا در پایه محاسباتی اندازه گیری می کنیم.

اندازه گیری در پایه x گیت هادامارد را اعمال می کند

بنابراین با دوبار اعمال هادامارد ماتریس واحد اعمال می شود که برای انتقال حالت روی گراف مناسب است .

نکته : اندازه گیری های پائولی را می توان همزمان انجام داد. و وابسته به اندازه گیری های دیگر نیستند.

روش پیدا الگوی اندازه گیری:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(\alpha) &:= X_2^{\alpha_1} M_1^{-\alpha} E_{12} \\ \wedge \mathfrak{J} &:= E_{12} \end{aligned}$$

هر عملگر دلخواه را می توان بر حسب این دو عملگر تجزیه کرد .

مثال: گیت تک کیوبیتی دلخواه:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = J(0)J(\alpha)J(\beta)J(\gamma)$$

بعد از تجزیه یک گیت دلخواه به عملگر های بنیادی صفحه قبل باید همه اعمال در همتندیگی را به سمت راست و خطای پائولی را به سمت چپ منتقل کرد و به این ترتیب انجام یک محاسبات کوانتومی به چند قسمت تقسیم می شود ابتدا تهیه حالت گراف بعد اندازه گیری و در نهایت تصحیح خطا. به این منظور از روابط جابجایی زیر استفاده می کنیم.

$$\begin{array}{lll}
 E_{ij} X_i^s & \Rightarrow & X_i^s Z_j^s E_{ij} & EX \\
 E_{ij} Z_i^s & \Rightarrow & Z_i^s E_{ij} & EZ \\
 {}^t[M_i^\alpha]^s X_i^r & \Rightarrow & {}^t[M_i^\alpha]^{s+r} & MX \\
 {}^t[M_i^\alpha]^s Z_i^r & \Rightarrow & {}^{r+t}[M_i^\alpha]^s & MZ
 \end{array}$$

$${}^t[M_i^\alpha]^s := M_i^{(-1)^s \alpha + t\pi}$$

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{J}(0)(4, 5)\mathfrak{J}(\alpha)(3, 4)\mathfrak{J}(\beta)(2, 3)\mathfrak{J}(\gamma)(1, 2) & = \\
& X_5^{s_4} M_4^0 E_{45} X_4^{s_3} M_3^\alpha E_{34} X_3^{s_2} M_2^\beta E_{23} X_2^{s_1} M_1^\gamma E_{12} & \Rightarrow EX \\
& X_5^{s_4} M_4^0 E_{45} X_4^{s_3} M_3^\alpha E_{34} X_3^{s_2} M_2^\beta X_2^{s_1} Z_3^{s_1} M_1^\gamma E_{123} & \Rightarrow MX \\
& X_5^{s_4} M_4^0 E_{45} X_4^{s_3} M_3^\alpha E_{34} X_3^{s_2} Z_3^{s_1} [M_2^\beta]^{s_1} M_1^\gamma E_{123} & \Rightarrow EXZ \\
& X_5^{s_4} M_4^0 E_{45} X_4^{s_3} M_3^\alpha X_3^{s_2} Z_3^{s_1} Z_4^{s_2} [M_2^\beta]^{s_1} M_1^\gamma E_{1234} & \Rightarrow MXZ \\
& X_5^{s_4} M_4^0 E_{45} X_4^{s_3} Z_4^{s_2 s_1} [M_3^\alpha]^{s_2} [M_2^\beta]^{s_1} M_1^\gamma E_{1234} & \Rightarrow EXZ \\
& X_5^{s_4} M_4^0 X_4^{s_3} Z_4^{s_2} Z_5^{s_3 s_1} [M_3^\alpha]^{s_2} [M_2^\beta]^{s_1} M_1^\gamma E_{12345} & \Rightarrow MXZ \\
& X_5^{s_4} Z_5^{s_3 s_2} [M_4^0]^{s_1} [M_3^\alpha]^{s_2} [M_2^\beta]^{s_1} M_1^\gamma E_{12345} &
\end{aligned}$$

چه چیزی بیش از مدل مداری داریم:

آیا این مدل محاسباتی کاری بیش از شبیه سازی مدل مداری می تواند انجام دهد؟

1- اعمال گروه کلیفورد در یک گام زمانی.

$$C\Sigma C^\dagger = \Sigma'$$

بنا بر این با جابجا کردن خطاهای پائولی به انتهای محاسبات عملگرهای کلیفورد تغییر نمی کنند.

2- عملگر های قطری: در اینجا از پایدارنده ها استفاده می شود.

$$Z \otimes X |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

$$Z \otimes \mathbf{1} |\psi\rangle = \mathbf{1} \otimes X |\psi\rangle$$

$$(Z \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes X) |\psi\rangle = 0$$

$$\exp \left[i \frac{\phi}{2} (Z \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes X) \right] |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

$$U_z(\phi) \otimes \mathbf{1} |\psi\rangle = \mathbf{1} \otimes U_x(\phi) |\psi\rangle.$$

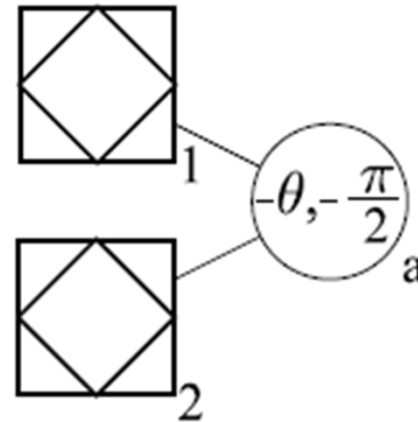
$$D_n = \prod_{\vec{m}} \exp\left[i \frac{\phi_{\vec{m}}}{2} (Z_1)^{m_1} (Z_2)^{m_2} \dots (Z_n)^{m_n}\right]$$

مثال:

$$e^{-i \frac{\phi}{2} Z_1 Z_2}$$

$$X_a Z_1 Z_2$$

$$\rightarrow [U_x(\theta)]_a |\psi\rangle = e^{-\frac{\theta}{2} Z_1 Z_2} |\psi\rangle$$

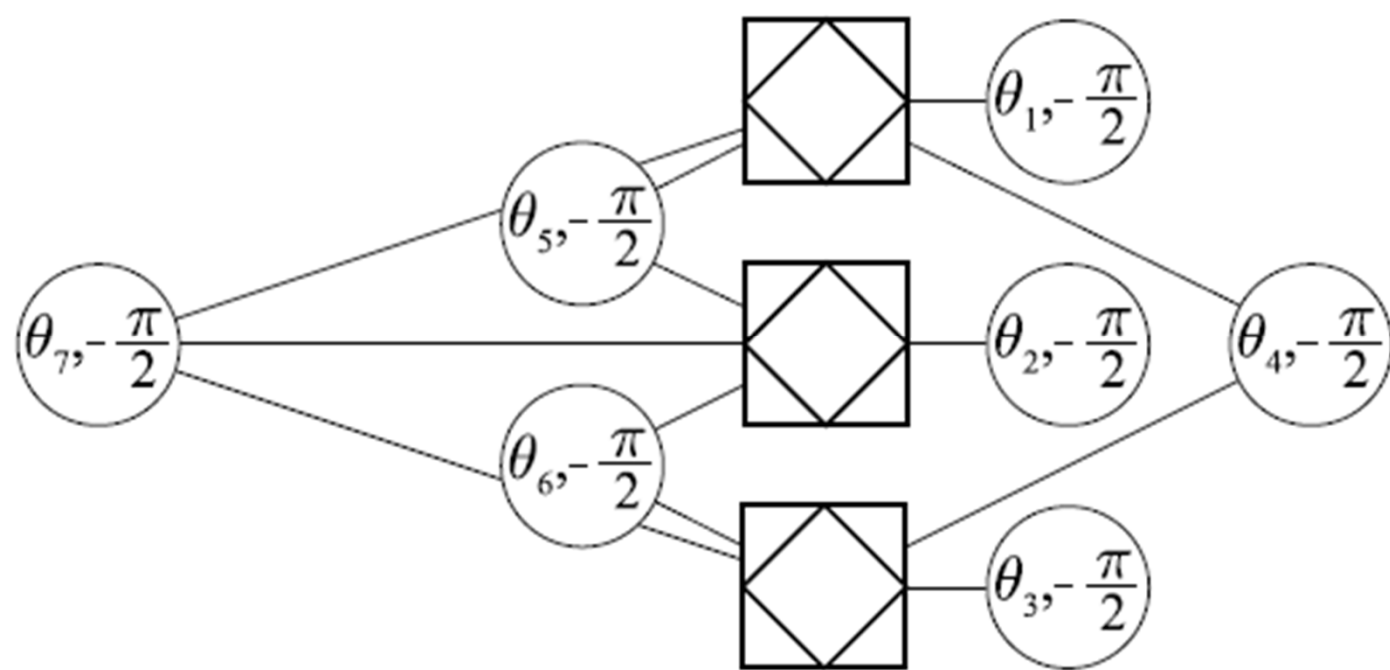


به این ترتیب اندازه گیری کیوبیت دایره ای شکل در پایه مشخص شده معادل با اعمال گیت دو کیوبیتی روی کیوبیت های اول و دوم است.

گیت توفولی: یک کاربرد از آنچه در صفحه قبل بیان شد.

$$\exp\left[\frac{i}{2}(\theta_1 Z \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \theta_2 \mathbf{1} \otimes Z \otimes \mathbf{1} + \theta_3 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes Z + \theta_4 Z \otimes \mathbf{1} \otimes Z + \theta_5 Z \otimes Z \otimes \mathbf{1} + \theta_6 \mathbf{1} \otimes Z \otimes \bar{Z} + \theta_7 Z \otimes Z \otimes Z)\right]$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_7 = -\pi/4 \text{ and } \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = \pi/4.$$



کلیترین عملگر قابل تجزیه به عملگر های قطری و
کلیفورد:

$$\exp[(i/2) [\sum_a \alpha_a \Sigma_a]].$$

$$[\Sigma_a, \Sigma_{a'}] = 0$$

مثلا برای دوتایی:

$$C_1 D_1 C_1^\dagger C_2 D_2 C_2^\dagger = C_1 D_1 C_3 D_2 C_2^\dagger$$

مورد دوم واقعا بیش از مدل مداری بود ولی شاید حالت
گراف آن زیادی انتزاعی باشد.

وضعیّت در ابعاد بالاتر:

$$|x, q\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} \omega^{-jq} |j\rangle$$

ویژه حالت های X

$$CZ = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes Z + \dots + |d-1\rangle\langle d-1| \otimes Z^{d-1}$$

مثال: حالت گراف با دوسیستم سه ترازی (کیوتریت) را بدست می آوریم.

$$\begin{aligned} CZ|x, \circ\rangle|x, \circ\rangle &= CZ \frac{1}{\sqrt{3}}(|\circ\rangle + |1\rangle + |2\rangle)|x, \circ\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|\circ\rangle|x, \circ\rangle + |1\rangle Z|x, \circ\rangle + |2\rangle Z^2|x, \circ\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|\circ\rangle|x, \circ\rangle + |1\rangle|x, 1\rangle + |2\rangle|x, 2\rangle) \end{aligned}$$

پایه ی اندازه گیری:

نتیجه اندازه گیری 0 معادل با اعمال گیت زیر روی کیوتریت دوم است.

$$J(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_0} & e^{i\alpha_1} & e^{i\alpha_2} \\ e^{i\alpha_0} & \omega^2 e^{i\alpha_1} & \omega e^{i\alpha_2} \\ e^{i\alpha_0} & \omega e^{i\alpha_1} & \omega^2 e^{i\alpha_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} = 0! \\ = 1! \\ = 2. \end{matrix}$$

به این ترتیب همه چیز مشابه کیوبیت ها می شود. تنها مساله مهم آن است که مانند مورد کیوبیت ها هر عملگر تک کیودیتی تجزیه ای ساده نخواهد داشت.

نشان می دهیم برای حالت هایی که بعد عددی اول است یک تجزیه مناسب وجود دارد:

پایه های MUB:

$$\{|e_i\rangle\}, \{|f_j\rangle\} \quad \langle e_i | f_j \rangle = \frac{1}{d}$$

تجزیه به کمک این پایه ها:

اگر d^2 تا ماتریس هرمیتی $\{H_j\}$ که مستقل خطی باشند

$$U = \exp\left(i \sum_{j=1}^{d^2} \alpha_j H_j\right) = \prod_{j=1}^{d^2} e^{i\beta_j H_j}$$

اگر d عددی اول باشد ویژه حالت های عملگر های زیر پایه های مناسبی هستند.

$$Z, X, ZX, ZX^2, \dots, ZX^{d-1}$$

فرض کنیم ویژه بردارهای این ماتریس ها به صورت زیر باشند:

$$\{|a_1\rangle, \dots, |a_d\rangle\}, \{|b_1\rangle, \dots, |b_d\rangle\}, \dots, \{|e_1\rangle, \dots, |e_d\rangle\} \quad (26.5)$$

از این پایه ها استفاده می کنیم و d^2 ماتریس به شکل زیر می سازیم.

$$\{|a_1\rangle\langle a_1|, \dots, |a_d\rangle\langle a_d|, |b_1\rangle\langle b_1|, \dots, |b_d\rangle\langle b_d|, \dots, |e_1\rangle\langle e_1|, \dots, |e_d\rangle\langle e_d|\}$$

ادعا می شود که این ماتریس ها مستقل خطی اند، برای اثبات این مطلب باید ثابت کنیم که ترکیب خطی از این ماتریس ها هرگز صفر نمی شود مگر اینکه همه ضرائب ماتریس ها صفر باشند. بنابراین ترکیب خطی به فرم زیر در نظر می گیریم:

$$\alpha_1|a_1\rangle\langle a_1| + \dots + \alpha_d|a_d\rangle\langle a_d| + \beta_1|b_1\rangle\langle b_1| + \dots + \beta_d|b_d\rangle\langle b_d| + \dots + \epsilon_1|e_1\rangle\langle e_1| + \dots + \epsilon_d|e_d\rangle\langle e_d| = 0$$

چون این رابطه برای همه j ها برقرار است، نتیجه گیری می شود که همه α_j ها با هم برابرند. اگر این فرایند را برای β_j ها و ϵ_j ها تکرار کنیم در نهایت به این نتیجه می رسیم که:

$$\alpha_j = \alpha, \beta_j = \beta, \epsilon_j = \epsilon$$

$$\Rightarrow \alpha(|a_1\rangle\langle a_1| + \dots + |a_d\rangle\langle a_d|) + \beta(|b_1\rangle\langle b_1| + \dots + |b_d\rangle\langle b_d|) + \dots + \epsilon(|e_1\rangle\langle e_1| + \dots + |e_d\rangle\langle e_d|) = 0$$

باتوجه به اینکه هر یک از پایه ها کامل هستند، خواهیم داشت:

در مرحله بعد، یک مرتبه $\langle b_1 | \dots | b_1 \rangle$ و مرتبه دیگر $\langle b_2 | \dots | b_2 \rangle$ را به رابطه بالا اعمال می کنیم دو نتیجه زیر حاصل می شود.

$$(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \epsilon) = \beta + \frac{1}{d}(\gamma + \dots + \epsilon)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma + \dots + \epsilon) = \frac{1}{d}(\gamma + \dots + \epsilon)$$

به این ترتیب نتیجه می شود که $\beta = 0$ و به طور مشابه دیگر ضرائب نیز صفر می شوند. بنابراین به ازای d های اول d^2 تا ماتریس مستقل خطی بدست می آیند که از ویژه پایه های عناصر گروه پائولی ساخته می شوند.

هریک از عملگرهایی که در تجزیه U بدست می آیند به فرم زیر تبدیل می شوند.

عملگر کلیفورد

$$\exp(i\theta|\lambda\rangle\langle\lambda|) = \exp(i\theta C|j\rangle\langle j|C^\dagger) = C e^{i\theta|j\rangle\langle j|} C^\dagger$$

یک عملگر قطری

$$D(e^{i\alpha_0}, e^{i\alpha_1}, \dots, e^{i\alpha_{d-1}}) = H^\dagger J(\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}) = H^\dagger J(\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1})$$

یک عملگر قطری

چون تمام عملگرهای کلیفورد و هادامارد و نیز J را می توانیم اعمال کنیم مساله حل می شود.

پایان