Entanglement Measures

Note Title 12/3/2010

اندازه‌های درهم تنیدگی

درهم تنیدگی یک خصلت غیرموضعی است که می‌توان با آن کارهای خارق العاده انجام داد.

کارهای خارق العاده = کارهایی که در فیزیک کلاسیک غیرممکن هستند.

مثل :

Dense Coding

Teleportation

Cryptography

. . . . .

Entanglement - Assisted Communication

Resource

quantify this Resource

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\psi\rangle = \cos\theta\,|00\rangle + \sin\theta\,|11\rangle$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)$$

$$\rho = \frac{5}{6}|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + \frac{1}{6}|00\rangle\langle 00|$$

LOCC = local operations and Classical Communication

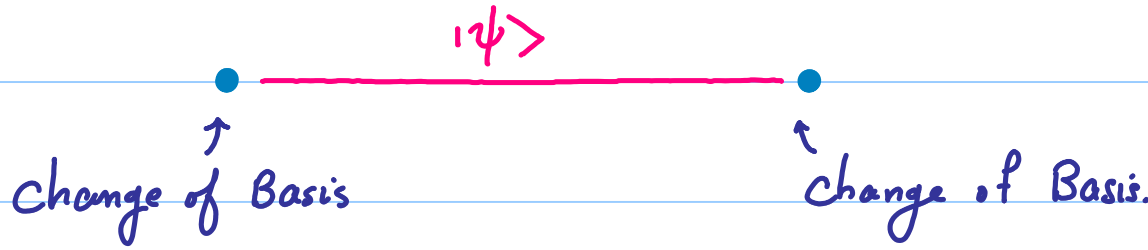
- درهم تنیدگی در اثر LOCC افزایش نمی‌یابد.

$$\rho \xrightarrow{\text{LOCC}} \sigma$$

اگر آلیس و باب یک حالت σ داشته باشند و بتوانند عمل خاص T را انجام دهند
با حالت ρ هم می‌توانند همان عمل T را انجام دهند.

زیرا با اعمال LOCC، ρ را نخست به σ تبدیل می‌کنند و پس عمل T را انجام می‌دهند.

- درهم تنیدگی در اثر اعمال یکانی موضعی تغییر نمی‌کند.



$$|\phi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right) = (I \otimes I)|\phi_{00}\rangle$$

$$|\phi_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |11\rangle\right) = (Z \otimes I)|\phi_{00}\rangle$$

$$|\phi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right) = (X \otimes I)|\phi_{00}\rangle$$

$$|\phi_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right) = (Y \otimes I)|\phi_{00}\rangle$$

$$|\phi_{mn}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0,1} (-1)^{jn} |j, j+m\rangle .$$

$$|\phi_{mn}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} \xi^{jn} |j, j+m\rangle \qquad \xi^{d} = 1.$$

واحد درهم تنیدگی

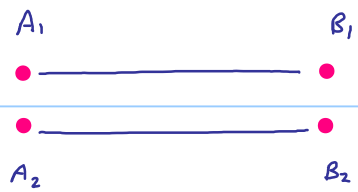
- حالت ها $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}\left(|00\rangle + \dots + |d-1, d-1\rangle\right)$

بیشترین درهم تنیدگی را دارند.

$$|\phi_2^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

$$|\phi_3^+\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + |33\rangle\right)$$

$$|\phi_{2^n}\rangle \xleftrightarrow{\text{Locc}} \underbrace{|\phi_2\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes \cdots |\phi_2\rangle}_{n}$$



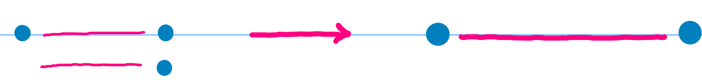
$$= |\phi_2\rangle_{A_1B_1} \otimes |\phi_2\rangle_{A_2B_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \big(|00\rangle + |11\rangle\big)_{A_1B_1} \otimes \big(|00\rangle + |11\rangle\big)_{A_2B_2}$$

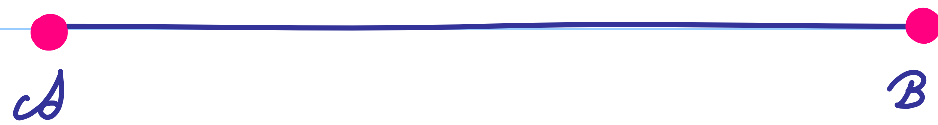
$$= \frac{1}{2} \big(|00,00\rangle + |01,01\rangle + |10,10\rangle + |11,11\rangle\big)_{A_1A_2,B_1B_2}$$

$$\equiv \frac{1}{2} \big(|\bar{0},\bar{0}\rangle + |\bar{1},\bar{1}\rangle + |\bar{2},\bar{2}\rangle + |\bar{3},\bar{3}\rangle\big)_{A,B}$$

$$=$$



فرآیند برهمکنش :



$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|0,0\rangle + |1,1\rangle + |2,2\rangle + |3,3\rangle\right)_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$$

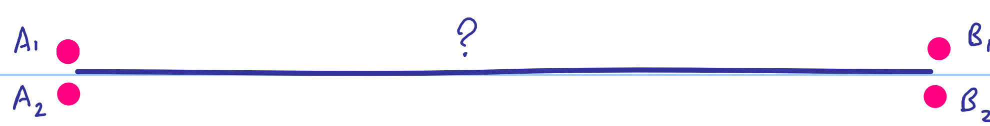
Coding

$$|0\rangle_{\mathcal{A}} = |0,0\rangle_{A_1 A_2}$$

$$|1\rangle_{\mathcal{A}} = |0,1\rangle_{A_1 A_2}$$

$$|2\rangle_{\mathcal{A}} = |1,0\rangle_{A_1 A_2}$$

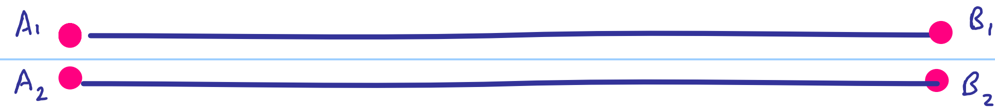
$$|3\rangle_{\mathcal{A}} = |1,1\rangle_{A_1 A_2}$$



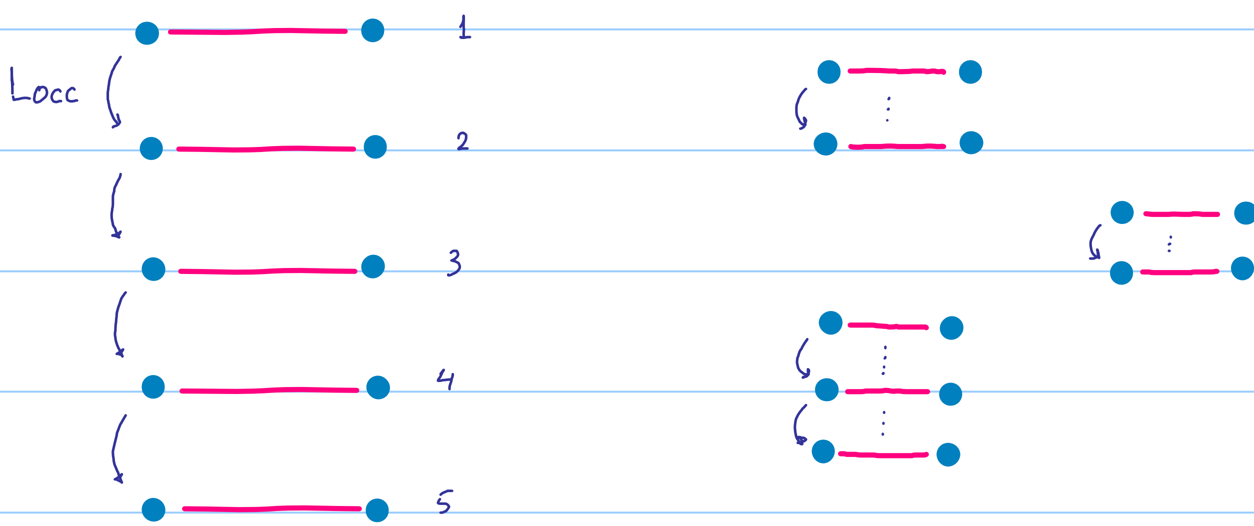
$$|\psi\rangle_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\left(|00,00\rangle + |01,01\rangle + |10,10\rangle + |11,11\rangle\right)_{A_1 A_2, B_1 B_2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(|00,00\rangle + |00,11\rangle + |11,00\rangle + |11,11\rangle\right)_{A_1 B_1,\, A_2 B_2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)_{A_1B_1} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)_{A_2B_2}$$

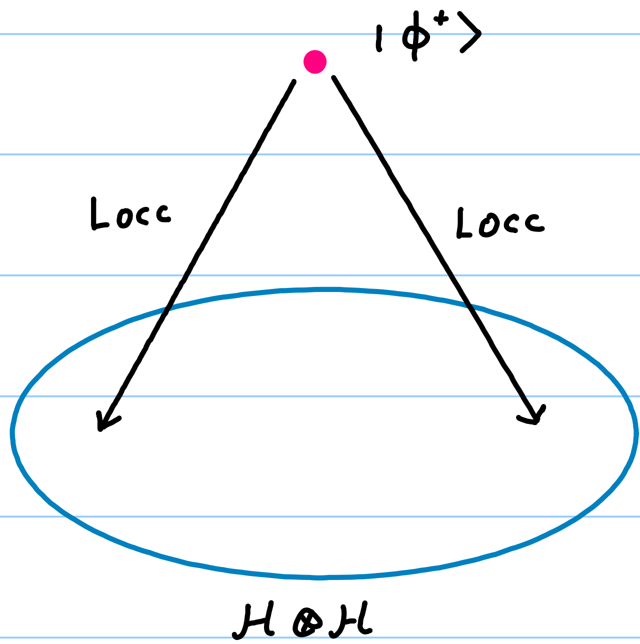


● سوال مهم: آیا LOCC می‌تواند حالت‌ها را به طور کامل مرتب کند؟



● پاسخ: نه!

• دسته‌های حالت‌های منفرد



آیا با عملگرهای یکانی می‌توان
$|\phi^+\rangle$ را به هر حالت دلخواهی تبدیل کرد؟

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle \right) \longrightarrow |\psi\rangle = \alpha\, |00\rangle + \beta\, |11\rangle$$

$$U = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

$$(U \otimes V)|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} xc & xd & yc & yd \\ -xd & xc & -yd & yc \\ -yc & -yd & xc & xd \\ yd & -yc & -xd & xc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \quad (x+y)(c+d) = \sqrt{2}\,\alpha$

$(x+y)(c-d) = 0$

$(x-y)(c+d) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ $\boxed{\text{No Solution.}}$

$(x-y)(c-d) = \sqrt{2}\,\beta$

- ولی با LOCC می‌توان این کار را انجام داد.

- یک روش برای تبدیل حالت $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ به حالت:

$$|\psi\rangle = \cos\theta\,|00\rangle + \sin\theta\,|11\rangle$$

آلیس یک اندازه‌گیری نامتعامد با مجموعه

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

انجام می‌دهد. دقت کنید که

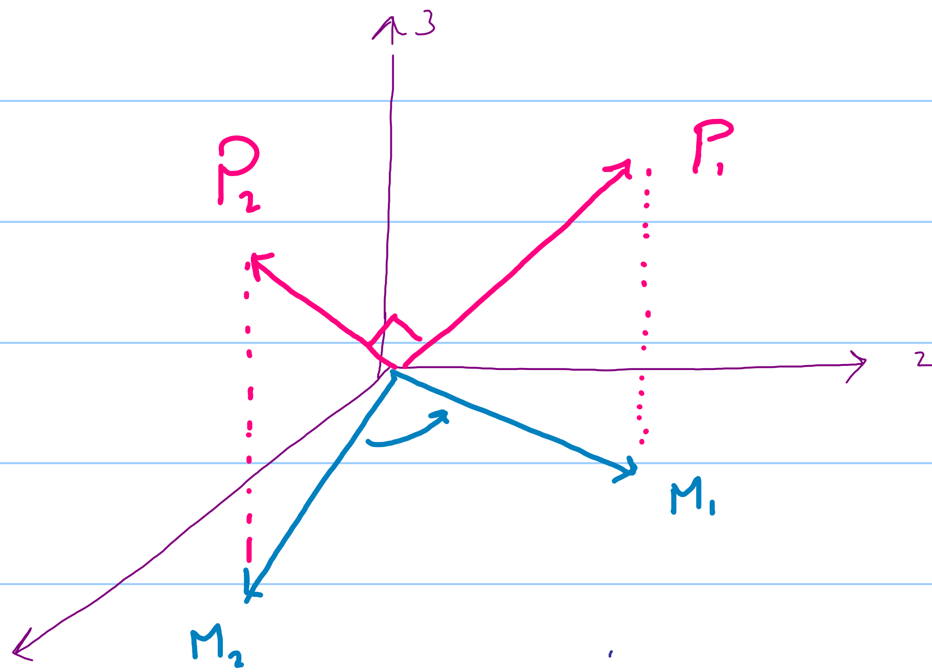
$$M_1^\dagger M_1 + M_2^\dagger M = I$$

$$\rho = |\phi\rangle\langle\phi| \longrightarrow \begin{cases} M_1 \rho M_1^\dagger & p_1 = tr(M_1 \rho M_1^\dagger) \\ M_2 \rho M_2^\dagger & p_2 = tr(M_2 \rho M_2^\dagger) \end{cases}$$

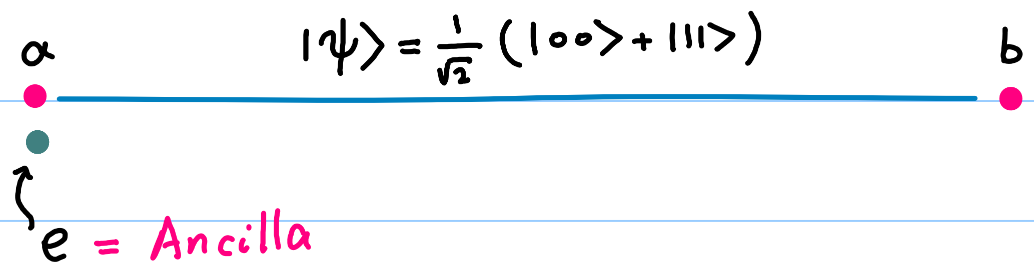
$$M_1 \rho M_1^\dagger = \frac{1}{2}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| \qquad |\psi_1\rangle = \cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle \qquad P_1 = \frac{1}{2}$$

$$M_2 \rho M_2^\dagger = \frac{1}{2}|\psi_2\rangle\langle\psi_2| \qquad |\psi_2\rangle = \sin\theta|00\rangle + \cos\theta|11\rangle \qquad P_2 = \frac{1}{2}$$

• قضیه Nymark : هر اندازه‌گیری نامتعامد را می‌توان از یک اندازه‌گیری متعامد یک فضای با بعد بالاتر به دست آورد.



• روش عملی LOCC برای تبدیل فوق:



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)_{ab} |0\rangle_e$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{ae}|0\rangle_b + |10\rangle_{ae}|1\rangle_b\right) \xrightarrow{U_{ae}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta|00\rangle + \sin\theta|01\rangle\right)_{ae}|0\rangle_b +$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\theta|10\rangle + \cos\theta|11\rangle\right)_{ae}|1\rangle_b$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle\right)_{ab}|0\rangle_e +$$

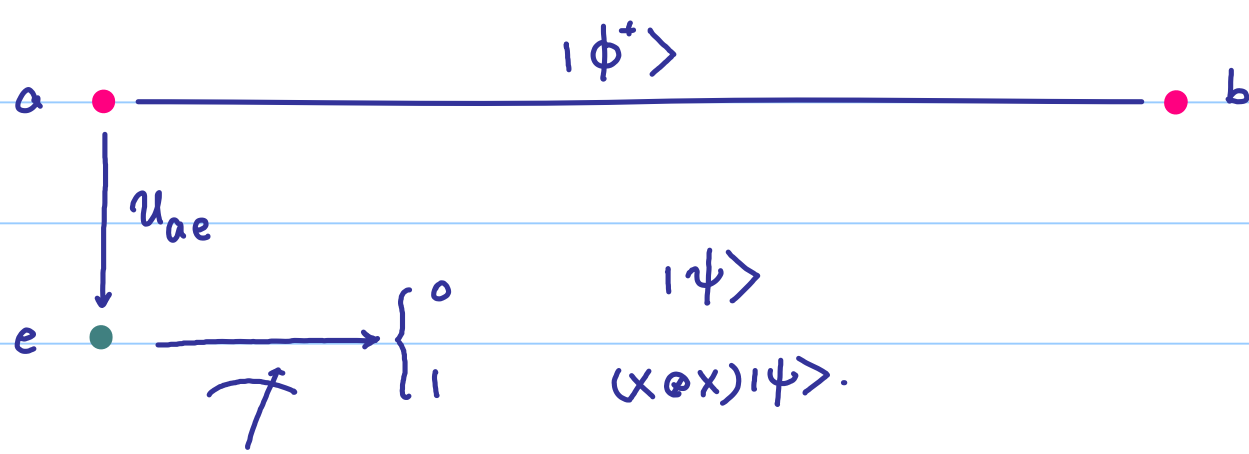
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\theta|00\rangle + \cos\theta|11\rangle\right)_{ab}|1\rangle_e$$

$$U_{ae}: \quad |00\rangle \longrightarrow \cos\theta\,|00\rangle + \sin\theta\,|01\rangle$$

$$|10\rangle \longrightarrow \sin\theta\,|10\rangle + \cos\theta\,|11\rangle$$

$$U_{ae} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= |0\rangle\langle 0| \otimes U(\theta) + |1\rangle\langle 1| \otimes U\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)$$

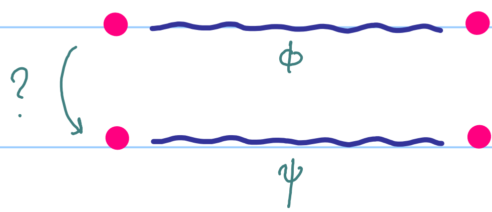


تمرین: نشان دهید با LOCC می‌توان حالتِ $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle\right)$

را به حالتِ $|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle + \gamma|22\rangle$ تبدیل کرد.

• سوال : آیا یک حالتِ درهم‌تنیده $|\phi\rangle$ را می‌توان به یک حالتِ درهم‌تنیده دیگر مثل $|\psi\rangle$ تبدیل کرد؟ آن هم فقط با تبدیلاتِ LOCC ؟

LOCC



• پاسخ: فقط برای حالت‌های خالص پاسخ وجود دارد.

تجزیه اشمیت

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \, |\mu_i, \tilde{\mu}_i\rangle \qquad |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \beta_i \, |\nu_i, \tilde{\nu}_i\rangle$$

ضرایب اشمیت

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_d \qquad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_d$$

• $|\phi\rangle$ را می‌توان با احتمال ۱ به حالتِ $|\psi\rangle$ تبدیل کرد، اگر و فقط اگر

$$[\beta] \preceq [\alpha]$$

$$\beta_1 \le \alpha_1$$

$$\beta_1 + \beta_2 \le \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots \beta_k \le \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_k$$

$$\vdots$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots \beta_d \le \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d .$$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle \right)$$: dim

$$|\psi\rangle = \cos\theta\ |00\rangle + \sin\theta\ |11\rangle \qquad 0 \le \theta \le \pi/4$$

$$\lambda_\phi = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \qquad \lambda_\psi = \left\{\cos\theta, \sin\theta\right\}$$

$\phi \xrightarrow{\text{Locc.}} \psi$ possible.

$$\phi \xleftarrow{\text{Locc}} \psi \qquad \text{impossible.}$$

- البته می‌توان یک پروتکل احتمالی تصور کرد که $|\psi\rangle$ را با احتمال p به $|\phi\rangle$ تبدیل کند. p بزرگترین عددی است که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$p\{\lambda_\psi\} \preceq \{\lambda_\phi\}$$

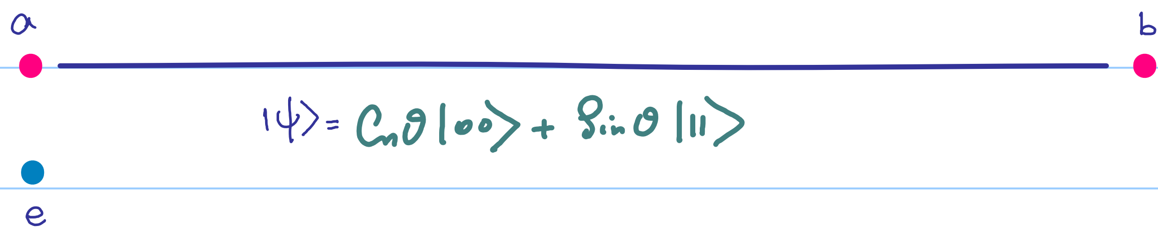
مثال.

$$|\psi\rangle = \cos\theta\,|00\rangle + \sin\theta\,|11\rangle \quad , \quad |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

$$\lambda_\psi = \{\cos\theta, \sin\theta\} \qquad \lambda_\phi = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

$$p\cos\theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \boxed{p = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}}$$

• یک روش احتمالاتی برای تغییر حالت



$$|\psi\rangle = \cos\theta\,|00\rangle + \sin\theta\,|11\rangle$$

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_{ab}|0\rangle_e = \left(\cos\theta\,|00\rangle + \sin\theta\,|11\rangle\right)_{ab}|0\rangle_e$$

$$= \cos\theta\,|00\rangle_{ae}|0\rangle_b + \sin\theta\,|10\rangle_{ae}|1\rangle_b$$

$$\xrightarrow{U_{ae}} \cos\theta\left(a|00\rangle + b|01\rangle\right)_{ae}|0\rangle_b + \sin\theta\left(c|10\rangle + d|11\rangle\right)_{ae}|1\rangle_b$$

$$= \left(a\cos\theta\,|00\rangle + c\sin\theta\,|11\rangle\right)_{ab}|0\rangle_e + \left(b\cos\theta\,|00\rangle + d\sin\theta\,|11\rangle\right)_{ab}|1\rangle_e$$

$$U = \begin{bmatrix} a & . & . & . \\ b & . & . & . \\ 0 & . & c & . \\ 0 & . & d & . \end{bmatrix}$$

$$\text{let}\begin{cases} a = \sin\theta \\ c = \cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \cos\theta \\ d = \sin\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow |\psi\rangle = \sqrt{2}\sin\theta\cos\theta\, |\phi^+\rangle_{ab}|0\rangle_e + \left(\cos^2\theta|00\rangle + \sin^2\theta|11\rangle\right)_{ab}|1\rangle_e$$

اندازه‌گیری e در پایهٔ $|0\rangle, |1\rangle$

$$\begin{cases} |\phi^+\rangle_{ab} & \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \quad \text{با احتمال} \\[2em] \dfrac{\cos^2\theta|00\rangle + \sin^2\theta|11\rangle}{\sqrt{\cos^4\theta + \sin^4\theta}} & 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \quad \text{با احتمال} \end{cases}$$

حالت‌هایی که نمی‌توان آنها را با هم مقایسه کرد:

Neither ψ_1 Nor ψ_2 majorizes the other.

تمرین: نشان دهید که در سیستم‌های دو بیتی، همهٔ حالت‌ها را می‌توان با هم مقایسه کرد.

تمرین: مثالی از دو حالت غیر قابل مقایسه ارائه کنید.

- بنابراین اگر قرار بر دستکاری حالت در منفرد باشد، نمی‌توان حالت‌ها را برحسب درهم‌تنیدگی رتبه‌بندی کرد.

این اشکال در حد مجانبی رفع می‌شود.

دستکاری حالت‌ها در حد مجانبی

Manipulation of States in the Asymptotic limit

Entanglement Distillation $E_D(\rho)$

حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|\phi\rangle = \cos\theta\,|00\rangle + \sin\theta\,|11\rangle$$

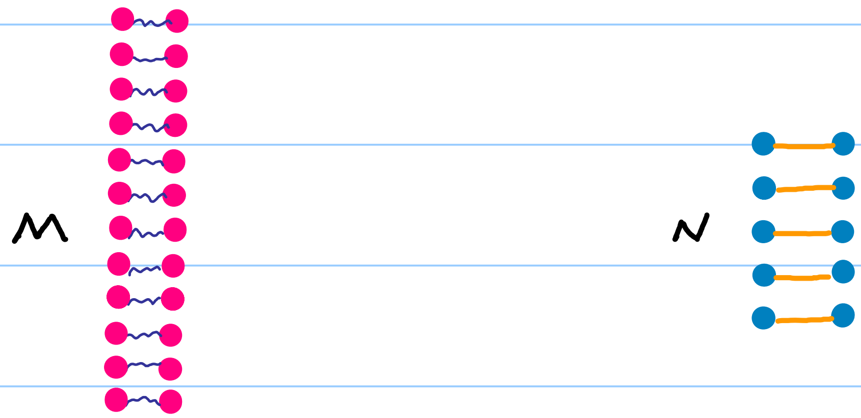
$$\rho = (1-p)\,|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + p\,|00\rangle\langle 00|$$

یا به طور کلی:

$$\rho = \sum_{ij} r_{ij}\ \sigma_i \otimes \sigma_j$$

- سوال مهم: اگر ۱۰۰۰ تا حالت ρ داشته باشید چند تا حالت بل می‌توانید از آن‌ها تهیه کنید؟

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$



$$M > N$$

$$\rho^{\otimes M} \longrightarrow (|\phi\rangle\langle\phi|)^{\otimes N}$$

$$\lim_{M\to\infty} \max_{P_r} \left(\frac{N}{M}\right) =: E_D(\rho)$$

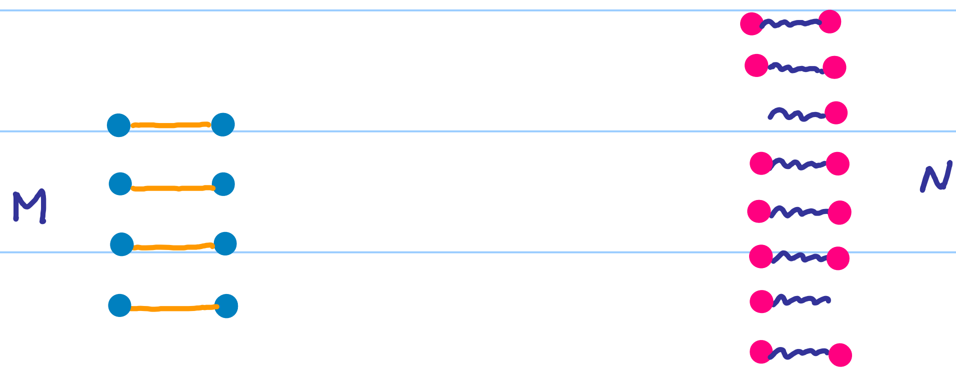
$$M : \rho \longrightarrow M E_D(\rho) : |\phi^+\rangle$$

$$\rho^{\otimes M} \longrightarrow (|\phi^+\rangle\langle\phi^+|)^{\otimes M E_D(\rho)}$$

یک معیار دیگر:

Entanglement Cost $E_C(\rho)$

• برای درست کردن ۱۰۰۰ تا حالتِ ρ چند تا حالتِ بل احتیاج داریم؟



$$M < N$$

$$\mathcal{E}_c(\rho) := \lim_{\frac{M}{N}\to\infty} \min_{P_r} \left(\frac{M}{N}\right)$$

$$P_r = \text{Locc}$$

$$M \text{ تا } |\phi^+\rangle\langle\phi^+| \xrightarrow{\text{Locc}} \frac{M}{E_c(\rho)} \text{ تا } \rho$$

$$\left(|\phi^+\rangle\langle\phi^+|\right)^M \xrightarrow{\text{Locc}} \rho^{\otimes \frac{M}{E_c(\rho)}}$$

• قضیه: $\mathcal{E}_C(\rho) \geq \mathcal{E}_D(\rho)$.

• اثبات: برهان خلف: فرض کنید که $\mathcal{E}_C(\rho) < \mathcal{E}_D(\rho)$

$$M \text{ تا } |\phi^+\rangle \longrightarrow \frac{M}{E_C(\rho)} \text{ تا } \rho$$

$$\Big\downarrow \text{LOCC}$$

$$\left(\frac{M}{E_C(\rho)}\right) E_D(\rho) \text{ تا } |\phi^+\rangle$$

if $E_C(\rho) < E_D(\rho) \longrightarrow$

فقط با LOCC توانسته‌ایم حالت‌های $|\phi^+\rangle$ تولید کنیم.

• یک قضیه‌ی مهم: که فقط برای حالت‌های خالص هم‌ارزی درست است:

$$\mathcal{E}_D(|\psi\rangle) = \mathcal{E}_C(|\psi\rangle) = S$$

von Neumann Entropy

$$S = -\mathrm{tr}(\rho_A \ln \rho_A) = -\mathrm{tr}(\rho_B \ln \rho_B).$$

$$|\psi_1\rangle^{\otimes M_1} \longrightarrow |\psi_2\rangle^{\otimes M_2}$$

$$\boxed{M_1 S(\psi_1) = M_2 S(\psi_2).}$$

- برای سیستم های آمیخته، فرم بسته برای E_D به طور کلی پیدا نشده است.

برای بعضی از حالت های آمیخته، فرم بسته برای E_D وجود دارد. مثل حالت زیر:

$$\rho_B = (1-F)\,|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + F\,|\phi^-\rangle\langle\phi^-|$$

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right).$$

$$E_D(\rho_B) = -F\log_2 F - (1-F)\log_2(1-F).$$

- خبر بد :
- در حالت کلی حتی معلوم نیست که آیا یک حالت ρ تقطیرپذیر هست یا نه؟
- شرط لازم برای تقطیرپذیری. $\rho^{T_A} < 0.$

$$\rho^{\otimes M} \xrightarrow{\text{Locc}} (|\phi^+\rangle\langle\phi^+|)^{\otimes N}$$

- اثبات :

$$|\phi^+\rangle\langle\phi^+| = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$(|\phi^+\rangle\langle\phi^+|)^{T_A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (|\phi^+\rangle\langle\phi^+|)^{T_A} < 0$$

$$\rightarrow \left[(|\phi^+\rangle\langle\phi^+|)^{\otimes N}\right]^{T_A} < 0$$

لم: اگر $\rho^{T_A} > 0 \Longrightarrow [\mathrm{LOCC}(\rho)]^{T_A} > 0$

$$\rho' = \mathrm{LOCC}(\rho) \longrightarrow \rho' = (A\otimes B)\,\rho\,(C\otimes D)$$

$$\rho'^{T_1} = (C^T\otimes B)\,\rho^{T_1}\,(A^T\otimes D)$$

We have. $C = A^\dagger$, $D = B^\dagger$ $\Longrightarrow$

$$\rho'^{T_1} = (A^*\otimes B)\,\rho^{T_1}\,(A^T\otimes B^\dagger)$$
$$= (\mathcal{A}\otimes B)\,\rho^{T_1}\,(\mathcal{A}^\dagger\otimes B^\dagger)$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\mathrm{Spectrum}(\rho'^{T_1}) = \mathrm{Spectrum}(\rho^{T_1})}$$

بنابراین اگر $\rho^{T_1} > 0$ باشد، تحت LOCC نیز $\rho'^{T_1} > 0$ خواهد بود و نمی‌تواند

به بیان دیگر ⟵ درهم تنیده کوه.

if ρ is PPT $\Longrightarrow$ $LOCC(\rho)$ is PPT.

بنابراین NPT بودن شرط لازم برای تقطیرپذیر بودن است.

- فقط برای ابعاد کم، یعنی در بعد 3×2 یک شرط کافی و لازم برای تقطیرپذیری وجود دارد.

  ρ تقطیرپذیر است اگر و فقط اگر $\rho^{T_A} < 0$.

- شرط کافی برای تقطیرپذیری سیستم‌های $d \times d$. (Horodecki)

if $\rho^A \otimes 1 - \rho < 0 \rightarrow \rho$ is distillable.

- مثال: $\rho = F\,|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + (1-F)\,\frac{\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}}{d^2}$

Spectrum of ρ :

$$\begin{cases} |\phi^+\rangle : & F + \dfrac{(1-F)}{d^2} & 1 \\[2ex] |\phi^{+\perp}\rangle : & \dfrac{1-F}{d^2} & d^2-1. \end{cases}$$

Since $\rho > 0 \longrightarrow \quad 0 < F < 1$

$$\rho^A = F \frac{\mathbb{1}}{d} \mathbb{I} + (1-F) \frac{\mathbb{1}}{d} = \frac{\mathbb{1}}{d}$$

$$\rho^A \otimes \mathbb{1} - \rho = \frac{\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}}{d} - (1-F) |\phi^+\rangle\langle\phi^+| - \frac{F}{d^2} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$$

$$= \frac{(d-F)}{d^2} \mathbb{1} - (1-F) |\phi^+\rangle\langle\phi^+| .$$

ویژه بردارهای $\rho^A \otimes \mathbb{1} - \rho$:

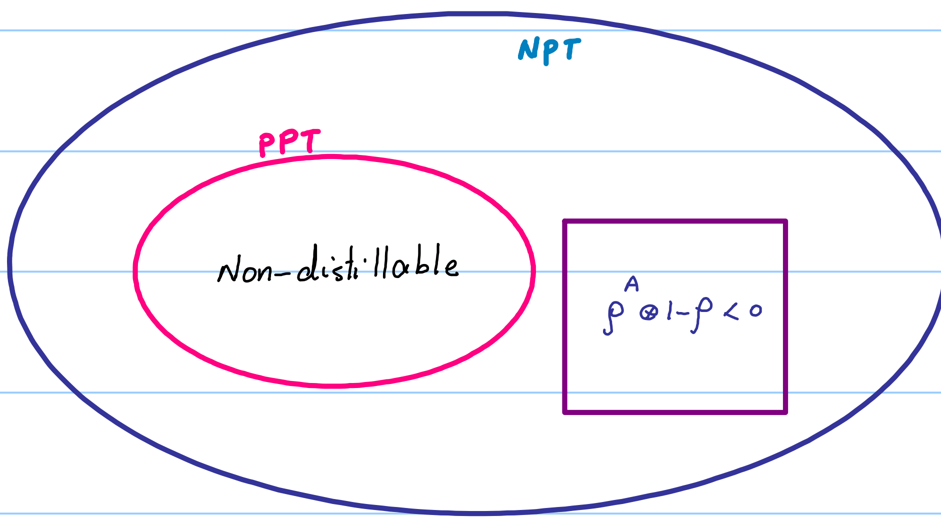
$$|\phi^+\rangle : \quad \frac{d-F}{d^2} - (1-F)$$

$$|\phi^+\rangle^\perp : \quad \frac{d-F}{d^2}$$

Negative eigenvalue: $\frac{d-F}{d^2} - (1-F) < 0$

$\rightarrow \quad d - F < (1-F)\,d^2 \longrightarrow F(d^2-1) < d^2 - d$

$\rightarrow \quad F(d+1) < d \longrightarrow \boxed{0 \le F < \frac{d}{d+1}}$



1) Filtering Protocols.   روش‌های تقطیرسازی

فرض کنید که a و b حالت زیر را دارند.

$$\rho = F\,|\psi\rangle\langle\psi| + (1-F)\,|00\rangle\langle 00|.$$

که در آن:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)$$

می‌خواهند این حالت را به حالتِ $|\psi\rangle\langle\psi|$ تقطیر کنند.

$$O_A = \sqrt{\epsilon}\,|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad O_B = O_A$$

$$O'_A = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O'_B$$

$$\rho' = (O_A \otimes O_B)\,\rho\,(O_A \otimes O_B)$$

$$O_A|0\rangle = \sqrt{\epsilon}\,|0\rangle \quad , \qquad O_A|1\rangle = |1\rangle$$

$$(O_A \otimes O_B)\,|\psi\rangle = \sqrt{\epsilon}\,|\psi\rangle$$

$$\rightarrow \rho'_{un} = \left\{ \epsilon F\,|\psi\rangle\langle\psi| + \epsilon^2(1-F)\,|00\rangle\langle 00| \right\}$$

un-normalized.

$$\mathrm{tr}(\rho'_{un}) = \epsilon F + \epsilon^2(1-F)$$

$$\rightarrow \rho' = \frac{F}{F+\epsilon(1-F)}|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{\epsilon(1-F)}{F+\epsilon(1-F)}|00\rangle\langle 00|$$

$$F' = \langle\psi|\rho'|\psi\rangle = \frac{F}{F+\epsilon(1-F)}$$

$$P = \mathrm{tr}\left((O_A\otimes O_B)\rho(O_A\otimes O_B)\right) = \mathrm{tr}(\rho'_{un}) = \epsilon F + \epsilon^2(1-F)$$

$$F \longrightarrow \boxed{F' = \frac{F}{F+\epsilon(1-F)} \quad , \quad P = \epsilon F + \epsilon^2 (1-F)}$$

$$\text{if } \epsilon \ll 1 \rightarrow \quad F' \approx 1 \quad \text{but} \quad P \simeq \epsilon F$$

بنابراین درحالت دور اول مرزوال حالت

$$\rho = F|\psi\rangle\langle\psi| + (1-F)|00\rangle\langle 00|$$

به $|\psi\rangle\langle\psi|$ تبدیل که ولی با احتمال کم. در واقع $P = \epsilon F$ دیگر F زیاد بشود

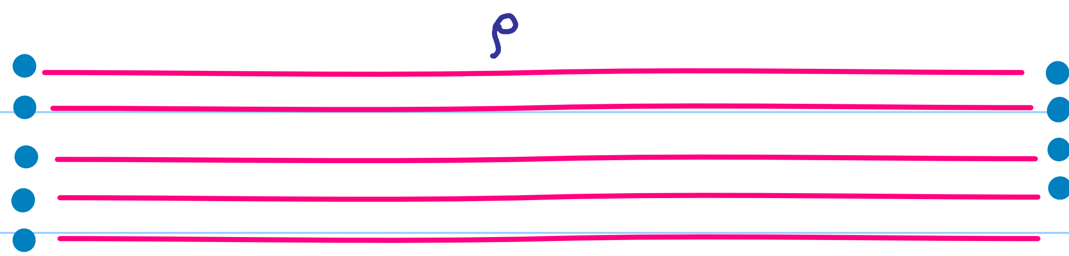
P تقریباً حفظ خواهد شد.

$$\text{if } F = \frac{1}{2} \longrightarrow \quad F' = \frac{1}{1+\epsilon} \quad P = \frac{\epsilon}{2}$$

$$F_{n+1} = \frac{F_n}{F_n + \epsilon(1-F_n)}.$$

$$F^* = \frac{F^*}{F^* + \epsilon(1-F^*)} \Longrightarrow F^* = 1.$$

Recurrence Protocols.



هر یک حالتِ کاملاً دلخواه، درهم‌تنیده است.

[7] C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **76**, 722 (1996); C. H.Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).

- مقدماتی درباره‌ی حالت‌های Bell.

$$|\phi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

$$|\phi_{mn}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,m\rangle + (-1)^n\,|1,\bar{m}\rangle\right)$$

	$K_1 = X \otimes X$	$K_2 = Z \otimes Z$
$\lvert \phi_{00} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lvert 00 \rangle + \lvert 11 \rangle \right)$	1	1
$\lvert \phi_{01} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lvert 00 \rangle - \lvert 11 \rangle \right)$	-1	1
$\lvert \phi_{10} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lvert 01 \rangle + \lvert 10 \rangle \right)$	1	-1
$\lvert \phi_{11} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lvert 01 \rangle - \lvert 10 \rangle \right)$	-1	-1

$$K_1 \lvert \phi_{mn} \rangle = (-1)^n \lvert \phi_{mn} \rangle \qquad K_2 \lvert \phi_{mn} \rangle = (-1)^m \lvert \phi_{m,n} \rangle$$

- این حالت‌ها، درهم‌تنیده ماکزیمال هستند و تشکیل یک پایه متعامد برای فضای دو کیوبیت می‌دهند.

- یک حالت دلخواه را می‌توان برحسب این حالت‌ها بسط داد.

$$\rho = \sum_{\substack{mn \\ m'n'}} \lambda_{mn,m'n'} \lvert \phi_{mn} \rangle \langle \phi_{m'n'} \rvert$$

• قضیه: با اعمال موضعی عملگر، می‌توان این حالت ρ را به شکل زیر درآورد:

$$\boxed{\rho_{\text{Werner}} = \rho_W = x\,|\phi_{00}\rangle\langle\phi_{00}| + \frac{1-x}{4} I.}$$

• در این اعمال موضعی تشابه ρ با $|\phi_{00}\rangle$ ثابت باقی می‌ماند.

• اثبات: اگر آلیس و باب با احتمال $\frac{1}{2}$ اعمال موضعی I و K_1 را در حالت ρ انجام دهند:

$$\frac{1}{2}\left(\rho + K_1 \rho K_1^{\dagger}\right) = \sum_{\substack{mn \\ m'n'}} \lambda_{mn,m'n'} \left(\frac{1+(-1)^{n+n'}}{2}\right) |\phi_{mn}\rangle\langle\phi_{m'n'}|$$

This operation makes $n=n'$ $\rightarrow$

اگر با احتمال $\frac{1}{4}$ اعمال K_1، K_2، K_1K_2 و I را انجام دهند: ρ تبدیل می‌شود به:

$$\frac{1}{4}\left(\rho + K_1 \rho K_1^{\dagger} + K_2 \rho K_2^{\dagger} + K_1 K_2 \rho K_2^{\dagger} K_1^{\dagger}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{mn} \lambda_{mn,mn} \, |\phi_{mn}\rangle\langle\phi_{mn}| .$$

بنابراین آلیس و باب می‌توانند با اعمال برخی ρ را به صورت قطری درآورند.

- آلیس و باب از این هم می‌توانند فراتر روند و با اعمال برخی می‌توانند حالت ρ را تبدیل به حالت زیر کنند:

$$\boxed{\rho = F \, |\phi_{00}\rangle\langle\phi_{00}| + (1-F) \frac{I}{4} .}$$

- این حالت به حالتِ Werner خوانده می‌شود، و هم‌ناوردا است به این معنا که:

$$(U\otimes U^*) \rho \, (U\otimes U^*)^\dagger = \rho \qquad \forall \, U \in SU(2)$$

- ثابت کنید که $(U\otimes U^*)|\phi_{00}\rangle = |\phi_{00}\rangle$، و خاصیت فوق را از آن نتیجه بگیرید.

- روش تبدیل حالتِ کلی به حالتِ ورنر.

$$\rho' = \int du \; (u \otimes u^*) \rho (u \otimes u^*)^\dagger$$

$$du = d(gu) \qquad g \in SU(2)$$

Invariant measure.

$$(g \otimes g^*) \rho' (g \otimes g^*)^\dagger = \int du \; (g \otimes g^*)(u \otimes u^*) \rho (u \otimes u^*)^\dagger (g \otimes g^*)^\dagger$$

$$= \int du \; (gu \otimes (gu)^*) \rho (gu \otimes (gu)^*)^\dagger$$

$du = dgu$

$$= \int dv \; (v \otimes v^*) \rho (v \otimes v^*)^\dagger = \rho'$$

So $\rightarrow$ ρ' is isotropic

$$\rightarrow \quad \rho' = \alpha |\phi_{00}\rangle\langle\phi_{00}| + \beta \frac{I}{4} .$$

- تبدیلی که آلیس و باب انجام می‌دهند تشابه حالت اولیه ρ را با $|\phi_{00}\rangle\langle\phi_{00}|$ تغییر نمی‌دهد.

- تمرین: این موضوع را ثابت کنید.

بنابراین مسئله‌ای که با آن روبرو هستیم این است که از حالت‌هایی مثل حالت زیر حالت $|\phi_{00}\rangle$ را تقطیر کنیم.

$$\rightarrow \quad \rho_w = x |\phi_{00}\rangle\langle\phi_{00}| + (1-x)\frac{I}{4}$$

فیدلیتی این حالت با $|\phi_{00}\rangle$ برابر است با:

$$F = x + \frac{1-x}{4} = \frac{1+3x}{4} .$$

هدف ما آن است که با مجموعه‌ای از اعمال LOCC، F را زیاد کنیم و به مقدار ۱ برسانیم.

• مرحلهٔ تغلیظ حالت ورنر به حالت $|\phi_{00}\rangle$.

• تمرین: نشان دهید که رابطهٔ زیر صحیح است.

$$\boxed{C^{A_1\to A_2}\, C^{B_2\to B_1}\, |\phi_{mn}\rangle_{A_1B_1}|\phi_{pq}\rangle_{A_2B_2} = |\phi_{m,n+q}\rangle_{A_1B_1}|\phi_{p+m,q}\rangle_{A_2B_2}}$$

منظور از $C^{A_1\to A_2}$، یک عمل CNOT است که بیت کنترل کنندهٔ آن A_1 و بیت هدف آن A_2 است.

بنابراین اگر به طور خلاصه بنویسیم:

$$|\phi_{mn}\rangle\langle\phi_{mn}| =: \rho_{mn}$$

آنگاه:

$$\boxed{C^{A_1\to A_2}\, C^{B_2\to B_1} : \rho_{mn}\otimes\rho_{pq} \longrightarrow \rho_{m,n+q}\otimes\rho_{p+m,q}}$$

حالت اولیه ورنر به شکل زیر قابل بازنویسی است:

$$\rho = x\,\rho_{00} + (1-x)\frac{I}{4} = \frac{1+3x}{4}\rho_{00} + \frac{1-x}{4}\left(\rho_{01}+\rho_{10}+\rho_{11}\right)$$

درنتیجه برای دو کپی از این حالت داریم:

$$\begin{aligned}
\rho^{A_1B_1}\otimes\rho^{A_2B_2} = {} & \left(\frac{1+3x}{4}\right)^2 \rho_{00}\otimes\rho_{00} \; + \\
& \frac{1+3x}{4}\,\frac{1-x}{4}\left\{\rho_{00}\otimes\rho_{01} + \rho_{10}\otimes\rho_{10} + \rho_{10}\otimes\rho_{11}\right\} + \\
& \frac{1+3x}{4}\,\frac{1-x}{4}\left\{\rho_{01}\otimes\rho_{01} + \rho_{10}\otimes\rho_{00} + \rho_{11}\otimes\rho_{01}\right\} + \\
& \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 \{\rho_{01}\otimes\rho_{00} + \rho_{11}\otimes\rho_{11} + \rho_{11}\otimes\rho_{10} \; + \\
& \quad \rho_{10}\otimes\rho_{01} + \rho_{00}\otimes\rho_{10} + \rho_{00}\otimes\rho_{11} \; + \\
& \quad \rho_{11}\otimes\rho_{00} + \rho_{01}\otimes\rho_{11} + \rho_{01}\otimes\rho_{10} \}
\end{aligned}$$

- مرحله اول: Alice و Bob به ترتیب اعمال $C^{A_1\to A_2}$ ، $C^{B_2\to B_1}$ را انجام می‌دهند و حالت زیر را به دست می‌آورند:

$$\rho \to \left(\frac{1+3x}{4}\right)^2 \rho_{00}\otimes\rho_{00} +$$

$$\frac{1+3x}{4}\,\frac{1-x}{4}\left\{\rho_{00}\otimes\rho_{01}+\rho_{10}\otimes\rho_{10}+\rho_{10}\otimes\rho_{11}\right\}+$$

$$\frac{1+3x}{4}\,\frac{1-x}{4}\left\{\rho_{01}\otimes\rho_{01}+\rho_{10}\otimes\rho_{00}+\rho_{11}\otimes\rho_{01}\right\}+$$

$$\left(\frac{1-x}{4}\right)^2\Big\{\rho_{01}\otimes\rho_{00}+\rho_{11}\otimes\rho_{11}+\rho_{11}\otimes\rho_{10}+$$

$$\rho_{10}\otimes\rho_{01}+\rho_{00}\otimes\rho_{10}+\rho_{00}\otimes\rho_{11}+$$

$$\rho_{11}\otimes\rho_{00}+\rho_{01}\otimes\rho_{11}+\rho_{01}\otimes\rho_{10}\Big\}$$

- مرحلهٔ دوم: آلیس و باب هر دو عملگر X را اندازه می‌گیرند. اگر نتایج آنها با هم یکی بود، حالت را نگه می‌دارند.

یادآوری:

	$X\otimes X$
$\lvert\phi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 00\rangle + \lvert 11\rangle)$	1
$\lvert\phi_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 00\rangle - \lvert 11\rangle)$	−1
$\lvert\phi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 01\rangle + \lvert 10\rangle)$	1
$\lvert\phi_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 01\rangle - \lvert 10\rangle)$	−1

این کار به این معنی است که در بسط حالت ρ، جملاتی مثل $\rho_{ij}\otimes\rho_{k0}$ را نگه داریم و جملاتی مثل $\rho_{ij}\otimes\rho_{k1}$ را دور بریزیم.

$$
\begin{aligned}
\rho \to\ & \left(\frac{1+3x}{4}\right)^2 \underline{\rho_{00}}\otimes\rho_{00} \ + \\
& \frac{1+3x}{4}\,\frac{1-x}{4}\left\{\rho_{00}\otimes\rho_{01} + \underline{\rho_{10}}\otimes\rho_{10} + \rho_{10}\otimes\rho_{11}\right\} + \\
& \frac{1+3x}{4}\,\frac{1-x}{4}\left\{\rho_{01}\otimes\rho_{01} + \underline{\rho_{10}}\otimes\rho_{00} + \rho_{11}\otimes\rho_{01}\right\} + \\
& \left(\frac{1-x}{4}\right)^2\left\{\underline{\rho_{01}}\otimes\rho_{00} + \rho_{11}\otimes\rho_{11} + \underline{\rho_{11}}\otimes\rho_{10} \ + \right. \\
& \qquad \rho_{10}\otimes\rho_{01} + \underline{\rho_{00}}\otimes\rho_{10} + \rho_{00}\otimes\rho_{11} \ + \\
& \qquad \left. \underline{\rho_{11}}\otimes\rho_{00} + \rho_{01}\otimes\rho_{11} + \underline{\rho_{01}}\otimes\rho_{10}\right\}
\end{aligned}
$$

حالت نهایی:

$$
\rho' \propto \left\{\left(\frac{1+3x}{4}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{4}\right)^2\right\}\rho_{00} + 2\left(\frac{1-x}{4}\right)^2\left\{\rho_{01} + \rho_{11}\right\} + 2\,\frac{1+3x}{4}\,\frac{1-x}{4}\,\rho_{10}
$$

پس از بهنجارش:

$$\rho' = \frac{\left[(1+3x)^2 + (1-x)^2\right]\rho_{00} + 2(1-x)^2(\rho_{01}+\rho_{10}) + 2(1+3x)(1-x)\rho_{10}}{(1+3x)(3+x) + 5(1-x)^2}$$

$$F' = \frac{(1+3x)^2 + (1-x)^2}{(1+3x)(3+x)+5(1-x)^2} \qquad F = \frac{1+3x}{4}$$

$$F' = \frac{F^2 + \left(\frac{1-F}{3}\right)^2}{F^2 + 2F\left(\frac{1-F}{3}\right) + 5\left(\frac{1-F}{3}\right)^2}$$

if $F = \frac{1}{2} \longrightarrow F' = \frac{1}{2}$

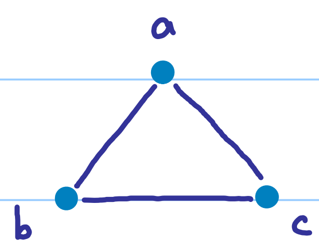
if $F = \frac{2}{3} \longrightarrow$

Multi-Partite Systems سیستم‌های چندقسمتی

No Schmidt Decomposition

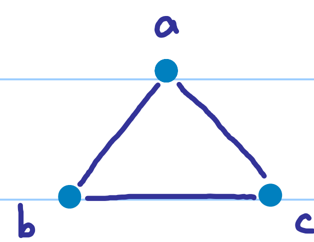
هیچ شرط لازم و کافی برای تبدیل حالت‌ها به یکدیگر وجود ندارد.

برای بیش از سه قسمت ، دو حالت متفاوت را نمی‌توان با احتمال غیرصفر به هم تبدیل کرد.



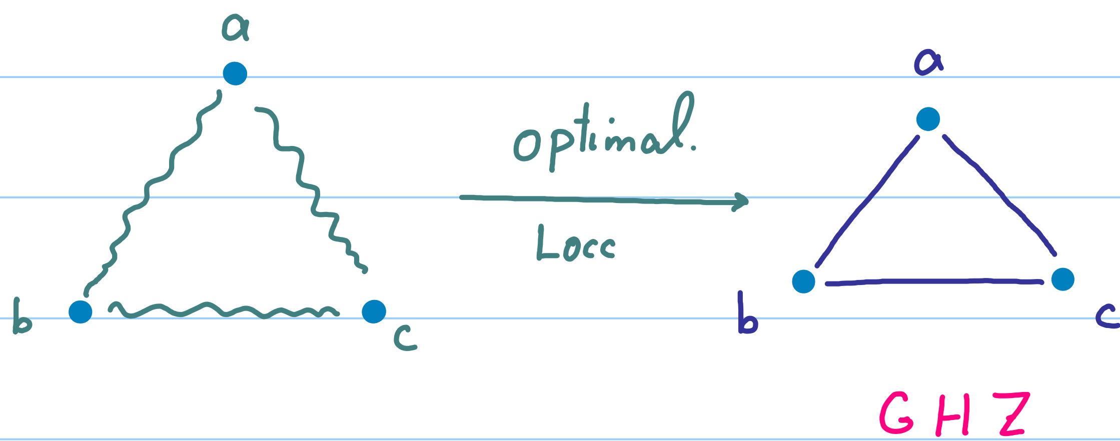
GHZ

No LOCC

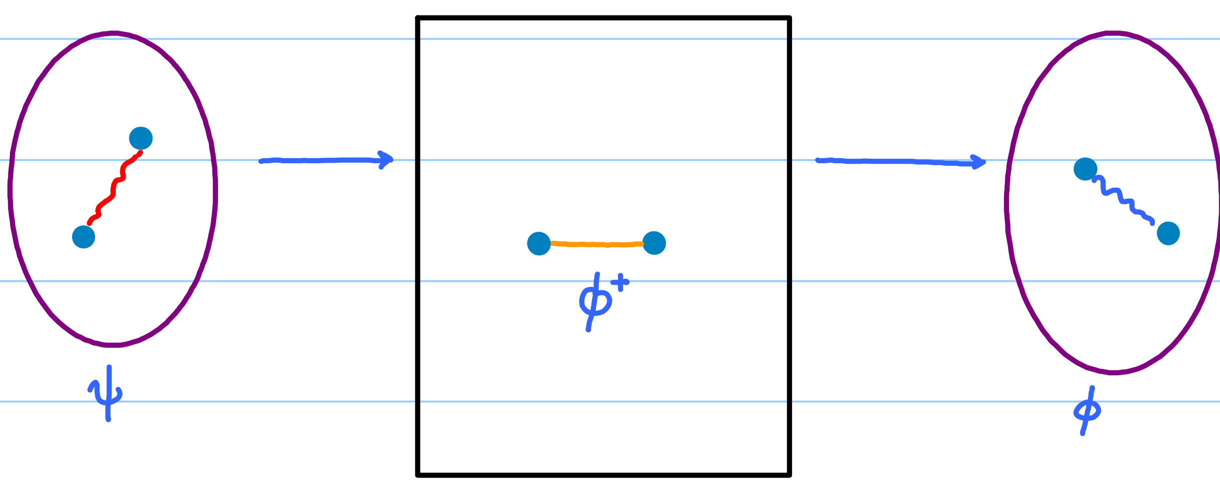


W

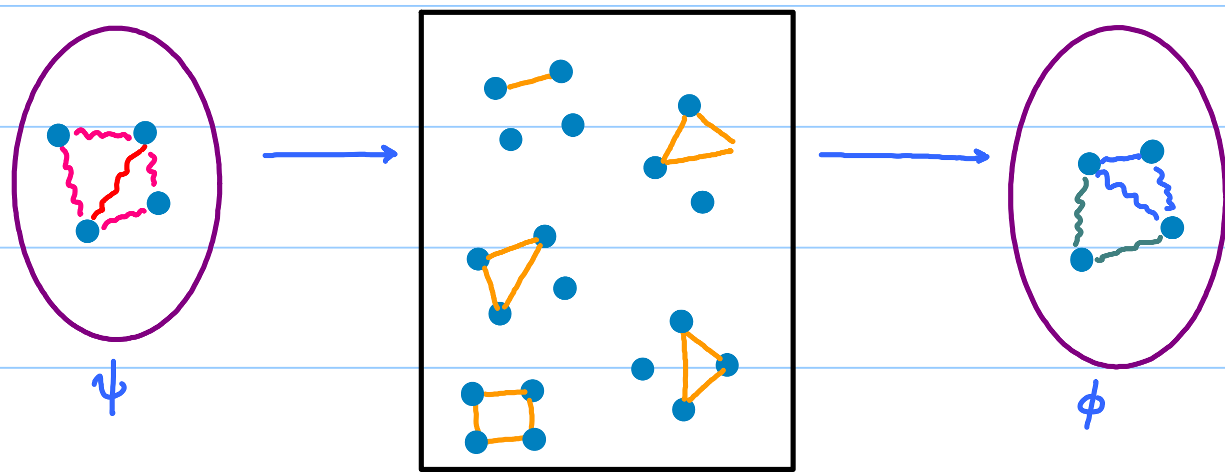
$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle + |111\rangle\right) \qquad |W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle\right)$$



Bi-partite. با یک ی اندازه استاندارد



Multi-partite.   بانک ی اندازه‌ی دستازله



To be Continued.

اندازه: درهم تنیدگی

$\mathcal{E}_C$ = Entanglement Cost

$\mathcal{E}_D$ = Entanglement of Distillation

$\mathcal{E}_R$ = Relative Entropy of entanglement.

$\mathcal{E}_S$ = squashed entanglement