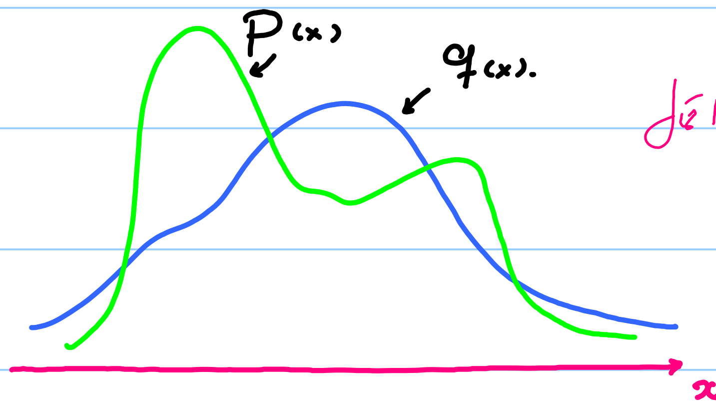
معیارهای فاصله بین حالت‌های کوانتومی

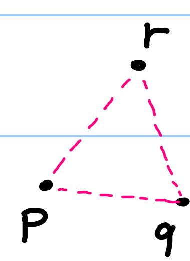


- فاصله‌ی بین دو تابع توزیع احتمال

Def: $D(p,q) := \frac{1}{2} \sum_x |P_x - q_x|$.

- خاصیت‌ها:

- $D(p,q) \geq 0$
- $D(p,q) = 0 \longleftrightarrow p = q$
- $D(p,q) = D(q,p)$
- $D(p,q) \leq D(p,r) + D(r,q)$



• بهترین و با معناترین حالت

$$X = \{ x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n \}$$

$$S = \{ x_1, x_3, x_7 \} \qquad P(S) = P(x_1) + P(x_3) + P(x_7)$$

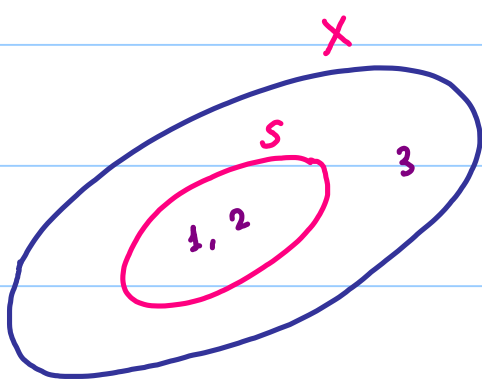
$$q(S) = q(x_1) + q(x_3) + q(x_7)$$

• قضیه:

$$D(p,q) = \max_{S} |P(S) - q(S)|.$$

• اثبات:

نخست یک مثال:



$$|P(S) - q(S)| = |P_1 + P_2 - q_1 - q_2| = |P_1 - q_1 + P_2 - q_2|$$

$$= \frac{1}{2} |P_1 - q_1 + P_2 - q_2| + \frac{1}{2} |P_1 - q_1 + P_2 - q_2|$$

$$= \qquad // \qquad + \frac{1}{2} |P_3 - q_3|$$

$$\leq \frac{1}{2}|p_1-q_1| + \frac{1}{2}|p_2-q_2| + \frac{1}{2}|p_3-q_3| = D(p,q).$$

حالت کلی :

$$|p(S)-q(S)| = \Big|\sum_{x\in S}(p_x-q_x)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2}\Big|\sum_{x\in S}(p_x-q_x)\Big| + \frac{1}{2}\Big|\sum_{x\in S}(p_x-q_x)\Big|$$

$$= \frac{1}{2}\Big|\sum_{x\in S}(p_x-q_x)\Big| + \frac{1}{2}\Big|\sum_{x\in S'}(p_x-q_x)\Big|$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{x\in X}|p_x-q_x| = D(p,q).$$

- شباهت بین دو توزیع احتمال

$$F(p,q) := \sum_x \sqrt{p_x q_x}$$

$$F(p,q) := \int dx \sqrt{p(x)\,q(x)}\,.$$

خواص شباهت : Fidelity.

- $F(p,q) = F(q,p)$,

- $0 \leq F(p,q) \leq 1$
- $F(p,q) = 1 \longrightarrow P_x = q_x \quad \forall x.$

Proof: $F(p,q) = \langle \tilde{p} | \tilde{q} \rangle$ where $\begin{cases} |\tilde{p}\rangle = (\sqrt{p_1}, \dots \sqrt{p_n}) \\ |\tilde{q}\rangle = (\sqrt{q_1}, \dots \sqrt{q_n}) \end{cases}$

Choushy-Sharwtz $\rightarrow \quad \langle \tilde{p} | \tilde{q} \rangle^2 \leq \langle \tilde{p} | \tilde{p} \rangle \langle \tilde{q} | \tilde{q} \rangle = 1$

if $F(p,q) = 1 \rightarrow \quad |\tilde{p}\rangle \parallel |\tilde{q}\rangle \longrightarrow$ Normalization $\Rightarrow$

$$|\tilde{p}\rangle = |\tilde{q}\rangle.$$

فاصله بین حالت‌های کوانتومی

① اندازه‌ی هندسی

- اندازه‌ی هیلبرت-اشمیت   Hilbert-Schmidt

$$\|A\|_{HS} \equiv \|A\|_2 = \sqrt{tr(A^{\dagger}A)}$$

- $\| A \|_2 = 0 \longrightarrow A = 0$
- $\| A + B \|_2 \leq \| A \|_2 + \| B \|_2$
- $\| cA \|_2 = |c| \; \| A \|_2 \quad , \quad \| A^\dagger \| = \| A^* \| = \| A \| = \| A^T \|$
- $\| U A U^\dagger \|_2 = \| A \|_2$

لم ۱) $\boxed{\| A^\dagger A \| \leq \| A \| \, \| A^\dagger \| = \| A \|^2}$

proof: $A^\dagger A$ is a positive, hermitian Matrix $=: X$

$$\| X \|^2 = tr(X^2) = \sum_i \lambda_i^2 \leq \left(\sum_i \lambda_i\right)^2 = (tr X)^2$$

$$\text{so} \rightarrow \| A^\dagger A \|^2 \leq tr(A^\dagger A)^2 = \| A \|^2.$$

لم ۲) $\| AB \| \leq \| A \| \, \| B \|.$

proof: $\| AB \|^2 = tr(A B B^\dagger A^\dagger) = tr(A^\dagger A \, B B^\dagger) =$

$$= \langle A^\dagger A \mid B B^\dagger \rangle$$

که در آن از ضرب داخلی هیلبرت-اشمیت استفاده کرده‌ایم. $\longleftarrow$

$$\rightarrow \| AB \|^2 \leq \| A^\dagger A \| \, \| B B^\dagger \| \leq \| A \|^2 \, \| B \|^2$$

$$\boxed{\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|.}$$ نابرابری :

- اندازهٔ رد Trace Norm

$$\|A\|_1 := \operatorname{tr}|A| \equiv \operatorname{tr}\sqrt{A^\dagger A}$$

- $\|A\|_1 = \sum_i |\lambda_i|$ $\qquad \lambda_i = $ eigenvalue of A

proof: $A = \Omega D \Omega^\dagger$, $A^\dagger = \Omega D^* \Omega^\dagger$

$$AA^\dagger = \Omega DD^* \Omega^\dagger, \quad \sqrt{AA^\dagger} = \Omega \sqrt{DD^*}\, \Omega^\dagger$$

$$\operatorname{tr}\sqrt{AA^\dagger} = \operatorname{tr}\sqrt{DD^*} = \sum_i |\lambda_i|.$$

- خاصیت در $\|A\|_1$.

- $\|A\|_1 = 0 \longrightarrow A = 0$
- $\|cA\|_1 = |c| \, \|A\|_1$
- $\|A+B\|_1 \leq \|A\|_1 + \|B\|_1$ $\qquad$ proof ?
- $\|A\|_1 = \|A^\dagger\|_1 = \|A^*\|_1 = \|A^T\|_1$

- $\| U A U^\dagger \|_1 = \| A \|_1$

- فاصله بین دو حالت کوانتومی

$$D_1(\rho, \sigma) := \frac{1}{2} \operatorname{tr} |\rho - \sigma|.$$

- مثال:

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) \qquad \sigma = \frac{1}{2}(1 + \vec{s} \cdot \vec{\sigma})$$

$$D_1(\rho, \sigma) = \frac{1}{4} \operatorname{tr} \left| (\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{\sigma} \right|.$$

$$\text{eigenvalues of } \vec{R} \cdot \vec{\sigma} = R, -R \rightarrow D_1(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} |\vec{r} - \vec{s}|$$

- اگر $[\rho, \sigma] = 0 \longleftarrow$

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$$

$$\sigma = \sum_i q_i |i\rangle\langle i|$$

$$\rightarrow D_1(\rho, \sigma) = D_1(p, q)_{\text{classical}}$$

- خواص فاصله D_1.

- $D_1(\rho,\sigma) = 0 \longleftrightarrow \rho = \sigma$
- $D_1(\rho,\sigma) \leq D_1(\rho,\mu) + D_1(\mu,\sigma)$
- $D_1(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = D_1(\rho,\sigma)$

- مهم‌ترین خاصیت D_1.

$$D_1(\rho,\sigma) = \max_{P} \operatorname{tr}\left(P(\rho-\sigma)\right).$$

این رابطه آنالوگ کوانتومی رابطه کلاسیک زیر است:

$$D(p,q) = \max_{S} |p(S) - q(S)|$$

- اثبات: همواره می‌توان نوشت: $\rho - \sigma = Q - S$

که در آن Q , S ماتریس‌های مثبت هستند.

$$\rho-\sigma = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -2 & & \\ & & 5 & \\ & & & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 5 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 4 \end{pmatrix} = Q - S$$

$$\operatorname{tr} Q = \operatorname{tr} S$$

$$|\rho-\sigma| = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 5 & \\ & & & 4 \end{pmatrix} = Q+S.$$

$$D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}|\rho-\sigma| = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(Q+S) = \operatorname{tr} Q.$$

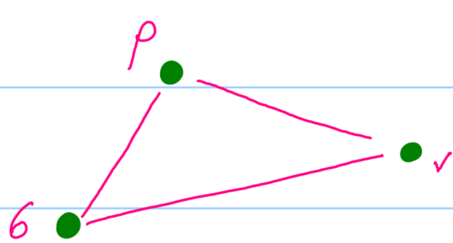
let P be a projector. $P \geq 0. \rightarrow$

$$\operatorname{tr}(P(\rho-\sigma)) = \operatorname{tr}(P(Q-S)) \leq \operatorname{tr}(PQ) \leq \operatorname{tr}(Q)$$

So $\rightarrow$ $\operatorname{tr}(P(\rho-\sigma)) \leq D(\rho,\sigma).$

. let $P = I_Q$ آیا یک تصویرگر وجود دارد که به ازای آن تساوی برقرار باشد؟ پاسخ: بله:

then $\rightarrow$ $\operatorname{tr}(I_Q(\rho-\sigma)) = \operatorname{tr}(Q) = D(\rho,\sigma).$



- نامساوی مثلث

$$D(\rho,\sigma) \leq D(\rho,\nu) + D(\nu,\sigma)$$

• اثبات: با استفاده از قضیهٔ قبل

$$D(\rho,\sigma) = tr(P^{+}(\rho-\sigma))$$

که در آن P^{+} عملگر تصویری است که نامساوی قضیهٔ قبل را به تساوی تبدیل می‌کند.

$$\to \quad D(\rho,\sigma) = tr\left(P^{+}(\rho-\nu) + P^{+}(\nu-\sigma)\right)$$

$$= tr(P^{+}(\rho-\nu)) + tr(P^{+}(\nu-\sigma))$$

$$\leq D(\rho,\nu) + D(\nu,\sigma).$$

• تشابه حالت‌های کوانتومی Fidelity

$$F(\psi,\phi) := |\langle\psi|\phi\rangle|$$

$$F(\psi,\phi) = \sqrt{\langle\psi|\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(\rho\sigma)}$$

the Correct version: $F(\rho,\sigma) := \operatorname{tr}\sqrt{(\sqrt{\rho}\,\sigma\sqrt{\rho})}$

- if ρ is pure $\longrightarrow$ $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \longrightarrow \sqrt{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \longrightarrow$

$(\sqrt{\rho}\,\sigma\sqrt{\rho}) = (|\psi\rangle\langle\psi|\sigma|\psi\rangle\langle\psi|) \rightarrow$

$\sqrt{\sqrt{\rho}\,\sigma\sqrt{\rho}} = \sqrt{\langle\psi|\sigma|\psi\rangle}\,|\psi\rangle\langle\psi| \longrightarrow F(|\psi\rangle,\sigma) = \sqrt{\langle\psi|\sigma|\psi\rangle}$

- if $[\rho,\sigma]=0 \longrightarrow$ $\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$, $\sigma = \sum_i q_i |i\rangle\langle i|$

$\sqrt{\rho}\,\sigma\sqrt{\rho} = \rho\sigma = \sum_i p_i q_i |i\rangle\langle i|$

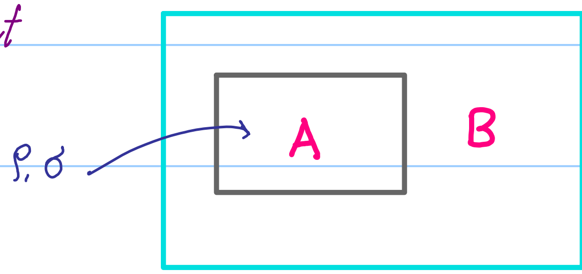
$\sqrt{\sqrt{\rho}\,\sigma\sqrt{\rho}} = \sum_i \sqrt{p_i q_i}\,|i\rangle\langle i|$

$F(\rho,\sigma) = \sum_i \sqrt{p_i q_i} = F_{\text{class.}}(p,q).$

- قضیهٔ یولمان

Uhlmann

let



$$\rho = \mathrm{tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) \qquad \sigma = \mathrm{tr}_B(|\phi\rangle\langle\phi|)$$

$$F(\rho,\sigma) = \max_{\text{purifications}} |\langle\psi|\phi\rangle|$$

- یک کانال کوانتومی با فاصلهٔ حالت‌ها و شباهت آن‌ها چه می‌کند؟

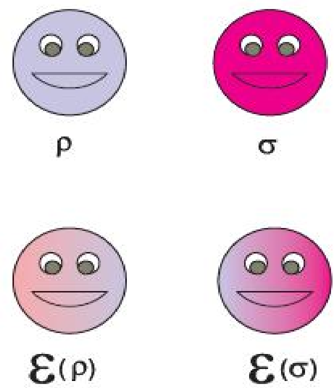
- در اثر نویز، شباهت‌ها زیاد، و تفاوت‌ها کم می‌کنند.

یعنی: به ازای هر کانال $\mathcal{E}$

$$F(\rho,\sigma) \leq F(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{E}(\sigma))$$

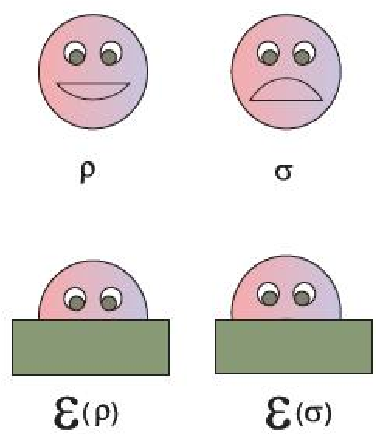
و

$$D(\rho,\sigma) \geq D(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{E}(\sigma))$$



مثال: $\mathcal{E} = \text{Partial Trace}$

$\mathcal{E}(\rho) = tr_B(\rho)$



• اثبات: دلیل: $\rho - \sigma = Q - S$

$|\rho - \sigma| = Q + S \qquad Q, S \geq 0$

$\downarrow$

$\mathcal{E}(Q), \mathcal{E}(S) \geq 0$

همچنین داریم: $tr\,\mathcal{E}(Q) = tr\,Q$, $tr(\mathcal{E}(S)) = tr(S)$.

$$\rightarrow \quad D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}|\rho-\sigma| = \operatorname{tr}(Q) = \operatorname{tr}(\mathcal{E}(Q))$$

$$\geq \operatorname{tr}(\mathcal{E}(Q)-\mathcal{E}(S)) \quad ① \qquad \text{چون } 0 \leq \mathcal{E}(S)$$

حال به یاد آوریم که با توجه به قضیه قبل یک تصویرگر مثل P_* وجود دارد به قسمی که

$$\operatorname{tr}(P_*(\mathcal{E}(Q)-\mathcal{E}(S))) = \operatorname{tr}(P_*(\mathcal{E}(\rho)-\mathcal{E}(\sigma))) \quad ②$$

$$= D(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{E}(\sigma))$$

$$① \rightarrow \quad D(\rho,\sigma) \geq \operatorname{tr}(P_*(\mathcal{E}(Q)-\mathcal{E}(S))) = D(\mathcal{E}(\rho),\mathcal{E}(\sigma))$$

$$\boxed{D(\rho,\sigma) \geq D(\mathcal{E}(\rho),\mathcal{E}(\sigma))}$$

Distances Between Channels

Minimal Distance $\quad D_{\inf}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{1}{2} \inf_{\rho} \| \mathcal{E}_1(\rho) - \mathcal{E}_2(\rho) \|_{tr}$

Maximal Distance $D_{max}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{1}{2} \sup \| \mathcal{E}_1(\rho) - \mathcal{E}_2(\rho) \|_{tr}$

Average Distance $D_{av}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \int_{B(H)} d\rho \, \| \mathcal{E}_1(\rho) - \mathcal{E}_2(\rho) \|_{tr}$

مثال:

ϕ_0 := Contraction to total mixture

σ_u := unitary channel

$$\phi_0(\rho) = \frac{1}{d} I \, , \quad \sigma_u(\rho) = u \rho u^{\dagger}$$

$$D_{min}(\sigma_u, \phi_0) = 0$$

$$D_{max}(\sigma_u, \phi_0) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

Quantification of Noise :

$$\Delta_{sup}(\mathcal{E}) := \frac{1}{2} \sup_{\rho} \| \mathcal{E}(\rho) - \rho \|$$

$C_\psi :=$ Contraction to pure state ψ

$$\Delta_{sup}(C_\psi) = \frac{1}{2} \sup_{\rho} \| |\psi\rangle\langle\psi| - \rho \|$$

$$\rho = |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp| \rightarrow \Delta_{sup}(C_\psi) = 1.$$

Contraction to maximally mixed state

$$\Delta_{sup}(\phi_0) = \frac{1}{2} \sup_{\rho} \| \frac{1}{d} I - \rho \| = 1 - \frac{1}{d}$$