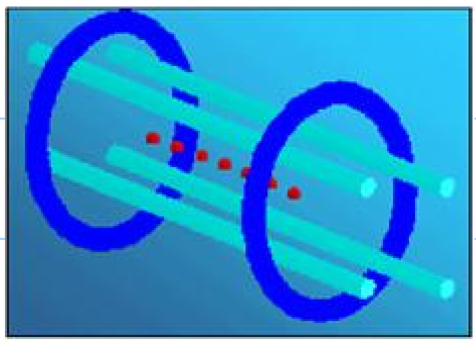
Positive Maps and Channels; part I

Note Title 6/17/2010

نگاشت‌ها و کانال‌های کوانتومی



- تهیه حالت
- اندازه‌گیری
- تحول یکانی ناگزیر
- تحول یکانی کنترل شده

نوفه‌ی کوانتومی

- quantum operation
- quantum channel

$\mathcal{H}$ = Hilbert Space

$B(\mathcal{H})$ = فضای تمام عملگرهای کراندار روی $\mathcal{H}$

$A \in B(\mathcal{H}) \qquad A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$

$\|A\| < \infty$

$$\rho \in B(\mathcal{H}) \xrightarrow{\mathcal{E}} \rho' \in B(\mathcal{H}')$$

$\rho' := T(\rho)$

- T is linear
- $\rho > 0 \longrightarrow T(\rho) > 0$
- $\mathrm{tr}(T(\rho)) = \mathrm{tr}(\rho)$
- $(T \otimes I)_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'} > 0 \quad \forall \mathcal{H}'$

Completely Positive.

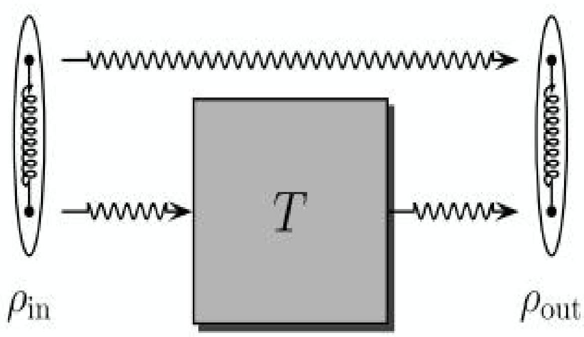


Figure 5.2. Channels can be applied to subsystems even if the overall system is in an entangled state.

$(T \otimes I)$ turns density matrices into density matrices.

Kraus decomposition $\rightarrow$ $T(\rho) = \sum_\mu A_\mu \rho A_\mu^\dagger$

$\sum_\mu A_\mu^\dagger A_\mu = I$ Trace-preserving ; $\mathrm{Tr}(T(\rho)) = \mathrm{tr}(\rho)$

$\sum_\mu A_\mu A_\mu^\dagger = I$ Unital ; $T(I) = I$

Schrodinger Representation : $\rho \in B(\mathcal{H}) \xrightarrow{\mathcal{T}} \rho' \in B(\mathcal{H}')$

Heisenberg Representation : $\langle X \rangle := \mathrm{tr}_H(X \rho)$

$X \in B(\mathcal{H}) \xleftarrow{\mathcal{T}^*} X' \in B(\mathcal{H}')$

$$\mathrm{tr}\left(\mathcal{J}^*(X')\rho\right) = \mathrm{tr}\left(\mathcal{J}(\rho)X'\right)$$

$$\mathrm{tr}\left(\mathcal{J}^*(X')\rho\right) = \mathrm{tr}\left(\sum_\mu A_\mu \rho A_\mu^\dagger X'\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(\rho \sum_\mu A_\mu^\dagger X' A_\mu\right)$$

$$\mathcal{J}^*(X') = \sum_\mu A_\mu^\dagger X' A_\mu .$$

$$\mathcal{J}(\rho) = \sum_\mu A_\mu \rho A_\mu^\dagger$$

$\mathcal{T}, \mathcal{T}^* \geq 0$ and Hermitian.

$\mathcal{T}$ unital $\longleftrightarrow$ $\mathcal{T}^*$ trace-preserving

$\mathcal{T}$ trace-preserving $\longleftrightarrow$ $\mathcal{T}^*$ unital

---

- $\mathcal{E}, \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \circ \mathcal{F}$
- $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}(\rho) = \lambda \mathcal{E}_1(\rho) + (1-\lambda)\mathcal{E}_2(\rho)$

- عملگرهای کراوس یکتا نیستند:

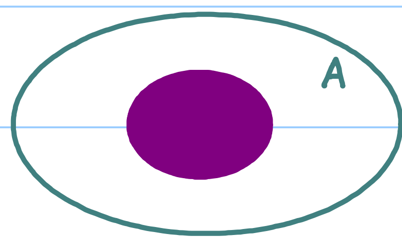
$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_\mu A_\mu \rho A_\mu^\dagger$$

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_\nu B_\nu \rho B_\nu^\dagger$$

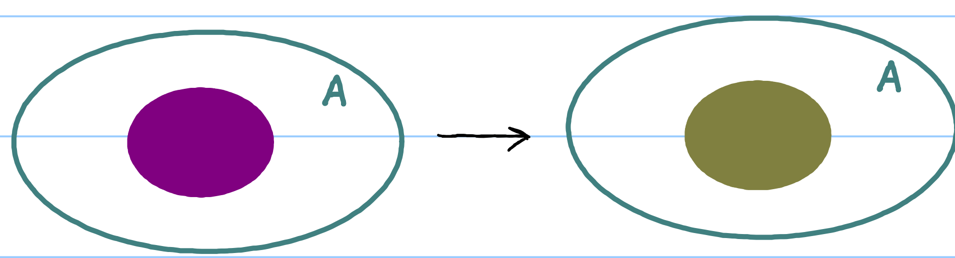
$$B_\nu = \sum_\mu U_{\nu\mu} A_\mu \qquad U = \text{Unitary}$$

- تعداد عملگرهای کراوس $\quad \dim(\mathcal{H}) = 2 \leftarrow$ $N \leq d^2$.

- تحول یکانی : $\mathcal{T}(\rho) := U\rho U^\dagger$
- گسترش : $\mathcal{T}(\rho) := \rho \otimes \sigma$
- ردّ جزئی : $\mathcal{T}(\rho) = \mathrm{tr}_B(\rho)$



- نوفه محیط : $\mathcal{T}(\rho) = \mathrm{Tr}_E\left(U(\rho \otimes \sigma_E) U^\dagger \right)$



- Bit-flip channel

مثال ع:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p X\rho X$$

- phase flip channel

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p Z\rho Z$$

$$\mathcal{E}(\rho) = \int d\theta \, e^{-\lambda \frac{\theta^2}{2}} e^{i\theta Z} \rho \, e^{-i\theta Z}$$

- Depolrizing

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p \frac{I}{2}$$

- Pauli

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p_x-p_y-p_z)\rho + p_x X\rho X + p_y Y\rho Y + p_z Z\rho Z$$

- qudit-flip

$$\mathcal{E}(\rho) = \left(\frac{1-2p+p^d}{1-p}\right)\rho + \sum_{i=1}^{d-1} p^i \, X^i \rho X^{-i}$$

- **Measurement**

$$\mathcal{E}(\rho) = |0\rangle\langle 0|\rho|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\rho|1\rangle\langle 1|.$$

$$= |0\rangle\langle 0| \langle 0|\rho|0\rangle + |1\rangle\langle 1| \langle 1|\rho|1\rangle$$

$$= \frac{1}{2}(1+Z)\langle 0|\rho|0\rangle + \frac{1}{2}(1-Z)\langle 1|\rho|1\rangle$$

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\rho)\, I + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\rho Z)\, Z.$$

- **General Pauli**

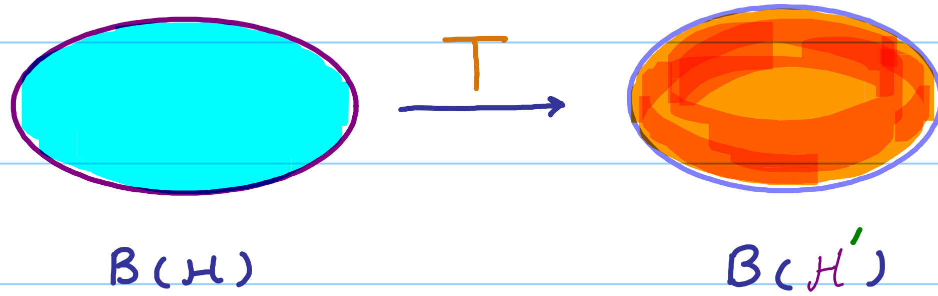
$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{i,j} P_{ij}\, X^i Z^j \rho (X^i Z^j)^\dagger$$

- **Random Unitary**

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i P_i\, U_i \rho U_i^\dagger \qquad \sum_i P_i = 1$$

$$\mathcal{E}(\rho) = \int p(\lambda)\, U(\lambda) \rho U^\dagger(\lambda)\, d\lambda$$

Choi-Jamilchovski Isomorphism



Basis of $B(\mathcal{H}) = \{ E_{ij} = |i\rangle\langle j| \}$

$$|\phi\rangle := \sum_{i=0}^{d-1} |i,i\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$$

$$|\phi\rangle\langle\phi| = \sum_{i,j} |i,i\rangle\langle j,j| \in B(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$$

$$= \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ij}$$

$$R_T := (T\otimes I)|\phi\rangle\langle\phi| = \sum_{i,j} T(E_{ij}) \otimes E_{ij}$$

Choi-Matrix.

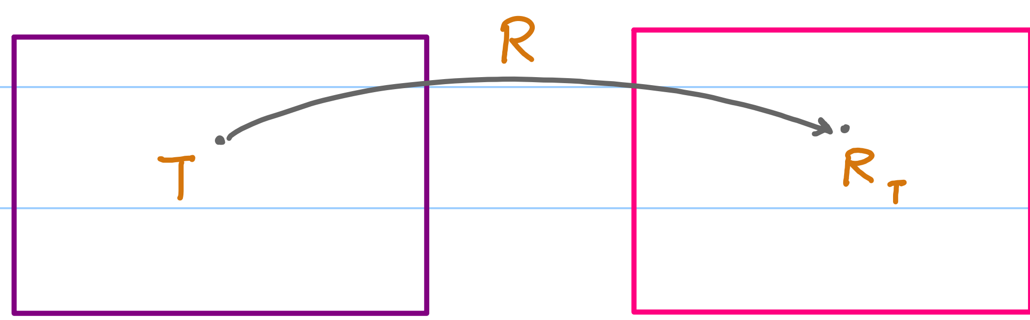
$R_T \in B(\mathcal{K} \otimes \mathcal{H})$.

① $$R_{T+T'} = R_T + R_{T'}$$

② $$R_{\lambda T} = \lambda R_T$$

③ $$J(\mathcal{E}) = J(\mathcal{E}') \Longrightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}'$$

$T \in \mathcal{L}$ = the space of CPM's.
from $B(\mathcal{H}) \longrightarrow B(\mathcal{H}')$.



$\mathcal{L}$ $\qquad\qquad$ $B(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H})$

در یکی از درس‌های قبل نشان دادیم که خواص زیر برقرار است:

- اگر T رد نگهدار باشد (TP) $\longleftrightarrow$ $\mathrm{Tr}_1 R_T = I_2$
- اگر T یونیتال باشد یعنی $\mathcal{E}(I) = I$ $\longleftrightarrow$ $\mathrm{Tr}_2 R_T = I_1$
- اگر T کاملاً مثبت باشد. $\longleftrightarrow$ $J(\mathcal{E})$ مثبت است.

چگونه می‌توان از روی R_T ، اثر T روی هر حالت دلخواه مثل ρ را بدست آورد؟

$$R_T = \sum_{ij} T(E_{ij}) \otimes E_{ij}$$

$$R_T \times (I \otimes E_{kl}) = \sum_{ij} T(E_{ij}) \otimes \delta_{jk} E_{il}$$

$$tr_2\left(R_T (I \otimes E_{kl})\right) = \sum_{ij} T(E_{ij}) \, \delta_{jk} \delta_{il} = \mathcal{E}(E_{lk})$$

$$T(\rho) = T(\rho_{kl} E_{kl}) = \rho_{kl} \, tr_2\left(R_T (I \otimes E_{lk})\right)$$

$$T(\rho) = tr_2\left(R_T (I \otimes \rho^T)\right)$$

Examples:

- $T(\rho) = \rho \Rightarrow R_T = ?$

$$R_T = \sum_{ij} T(E_{ij}) \otimes E_{ij} = \sum_{ij} E_{ij} \otimes E_{ij}$$

$$= \sum_{ij} |i\rangle\langle j| \otimes |i\rangle\langle j| \Rightarrow$$

$$R_T = d\,|\phi\rangle\langle\phi|.$$

- $T(\rho) = \rho^T$ $\quad R_T = \sum_{ij} E_{ji} \otimes E_{ij} = \sum_{ij} |ji\rangle\langle ij|$

So $\rightarrow$ R_T = Permutation operator P

$$P|ij\rangle = |ji\rangle$$

P has a negative eigenvalue:

$$P\big(|12\rangle - |21\rangle\big) = |21\rangle - |12\rangle$$

$\Longrightarrow$ Transposition is NOT completly positive Map!!

- $T(\rho) = p\,\rho + (1-p)\dfrac{I}{2}$

$$R_T = \sum_{i,j} \left(p\, E_{ij} + (1-p)\frac{I}{2}\right) \otimes E_{ij} = d\,p\,|\phi\rangle\langle\phi| + (1-p)\frac{d}{2}\, I \otimes |q\rangle\langle q|$$

where $|q\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i |i\rangle \Rightarrow R_T \geq 0 \Rightarrow T$ is CP.

- تمرین: اگر T یک کانال Bit-flip باشد، R_T را بدست آورید.
- تمرین: اگر T یک کانال phase-flip باشد، R_T را بدست آورید.

در هر دو مورد R_T را به صورت مخلوطی از حالات Bell درآورید.

- تمرین: اگر T یک کانال Amplitude damping باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

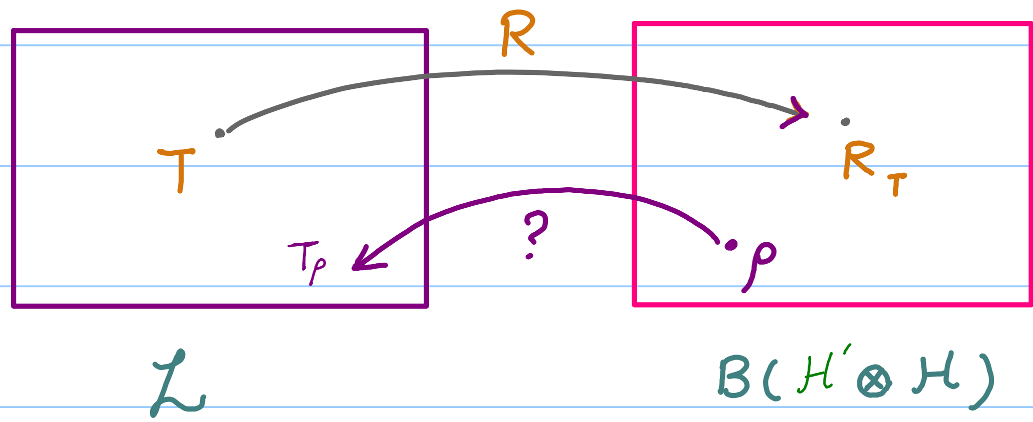
$$T(\sigma) := A_0 \sigma A_0^\dagger + A_1 \sigma A_1^\dagger$$

که $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix}$ و $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$، ماتریس R_T را بطور صریح بدست آورید.

- تمرین: تمرین قبلی را برای کانال phase damping نیز انجام دهید. عملگرهای کراوس این کانال عبارتند از:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix}$$

$T \in \mathcal{L}$ = the space of CPM's.
from $B(\mathcal{H}) \longrightarrow B(\mathcal{H}')$.



آیا به ازای هر $\rho \in B(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H})$ یک نگاشت کاملاً مثبت T_ρ وجود دارد؟

$$\exists ? \quad T \;\Big|\; \sum_{ij} T_\rho(E_{ij}) \otimes E_{ij} = \rho \quad ?$$

$$\rightarrow \quad \sum_{ij} T_\rho(E_{ij}) \otimes E_{ij} = \sum_{ij,\alpha\beta} \rho_{\alpha i,\beta j} \, |\alpha i \rangle\langle \beta j| \;\; ?$$

$$\rightarrow \quad \sum_{ij} T_\rho(E_{ij}) \otimes |i\rangle\langle j| = \sum_{ij\,\alpha\beta} \rho_{\alpha i,\beta j} \, |\alpha\rangle\langle\beta| \otimes |i\rangle\langle j|$$

$$\rightarrow \quad T_\rho(E_{ij}) = \sum_{\alpha\beta} \rho_{\alpha i,\beta j} \, |\alpha\rangle\langle\beta| .$$

$$\langle \alpha | T_\rho(E_{ij}) | \beta \rangle = \rho_{\alpha i,\beta j}$$

$$\langle \alpha | T_\rho(\sigma) | \beta \rangle = \; ?$$

$$\langle \alpha | T_\rho(\sigma) | \beta \rangle = \sum_{ij} \sigma_{ij} \, \langle \alpha | T_\rho(E_{ij}) | \beta \rangle$$

$$= \sum_{ij} \sigma^T_{ji} \, \rho_{\alpha i,\beta j}$$

$$= \sum_{ij} \langle j | \sigma^T | i \rangle \langle \alpha i | \rho | \beta j \rangle$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{i,j,\gamma} \langle \gamma j | (1 \otimes \sigma^T) | \gamma i \rangle\langle \alpha i | \rho | \beta j \rangle$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{i,j,\gamma} \mathrm{Tr} \left\{ (1 \otimes \sigma^T) \, | \gamma i \rangle\langle \alpha i | \, \rho \, | \beta j \rangle\langle \gamma j | \right\}$$

$$= \frac{1}{d} \, \mathrm{Tr} \left\{ (1 \otimes \sigma^T)(|\gamma\rangle\langle\alpha| \otimes I) \rho (|\beta\rangle\langle\gamma| \otimes I) \right\}$$

$$= \frac{1}{d} \, \mathrm{Tr} \left\{ (|\beta\rangle\langle\alpha| \otimes \sigma^T) \rho \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle \alpha | T_\rho(\sigma) | \beta \rangle = \frac{1}{d} \, \mathrm{Tr} \left\{ (|\beta\rangle\langle\alpha| \otimes \sigma^T) \rho \right\}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_\rho(\sigma) = \frac{1}{d} \sum_{\alpha,\beta} \mathrm{Tr} \left\{ (E_{\beta\alpha} \otimes \sigma^T) \rho \right\} E_{\alpha\beta}}$$

• تمرین: اگر $\rho = I$ باشد، $T_\rho(\sigma)$ را بدست آورید.

• تمرین: اگر $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ باشد به طوری‌که $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |x\rangle$ نشان دهید

$$T_\rho(\sigma) = \langle x|\sigma^T|x\rangle \, |\phi\rangle\langle\phi|$$

$$\boxed{\langle\alpha|T_\rho(\sigma)|\beta\rangle = \frac{1}{d}\,\mathrm{Tr}\left\{\left(|\beta\rangle\langle\alpha| \otimes \sigma^T\right)\rho\right\}}$$

• انبساط استاین‌اسپرینگ

• Stienspring Dilation.

• مقدمه

① $\rho \longrightarrow \rho' = V\rho V^\dagger$ Unitary Evolution

is a completely positive Map. (CPM)

② $\rho \longrightarrow \rho \otimes I$ Extension or Dilation

③ if T & S are CPM's then TS is also a CPM.

- ## Stienspring Dilation

با بزرگ کردن فضای هیلبرت، هر نگاشت کاملاً مثبت را می‌توان از ۱، ۲، ۳ ساخت، به این شکل:

به ازای هر $T : B(H) \to B(H')$ ، وجود دارد یک فضای K و یک عملگر

$V : H' \to H \otimes K$ به طوری که:

$$T(\sigma) = V^{\dagger}(\sigma \otimes I)V$$

Note:

$$\sigma : H \to H \qquad T(\sigma) : H' \to H'$$

$$V : H' \to H \otimes K$$

$$\begin{tikzcd}
H' \arrow[r, "T(\sigma)"] \arrow[d, "V"'] & H' \\
H \otimes K \arrow[r, "(\sigma \otimes I)"'] & H \otimes K. \arrow[u, "V^{\dagger}"']
\end{tikzcd}$$