مقدمات نظریه احتمال : قسمت (۲).

۵ بسط کومولانت : داریم :

$$Z_x(t) = \int e^{tx} p(x)\, dx.$$

$G_x(t) = \log Z_x(t)$ $\quad G_x(t)$ is called the generating of Commulants.

so $\quad Z_x(t) \equiv \int e^{tx} p(x)\, dx = e^{G_x(t)} \quad \rightarrow \quad G_x(0) = 0 \rightarrow$

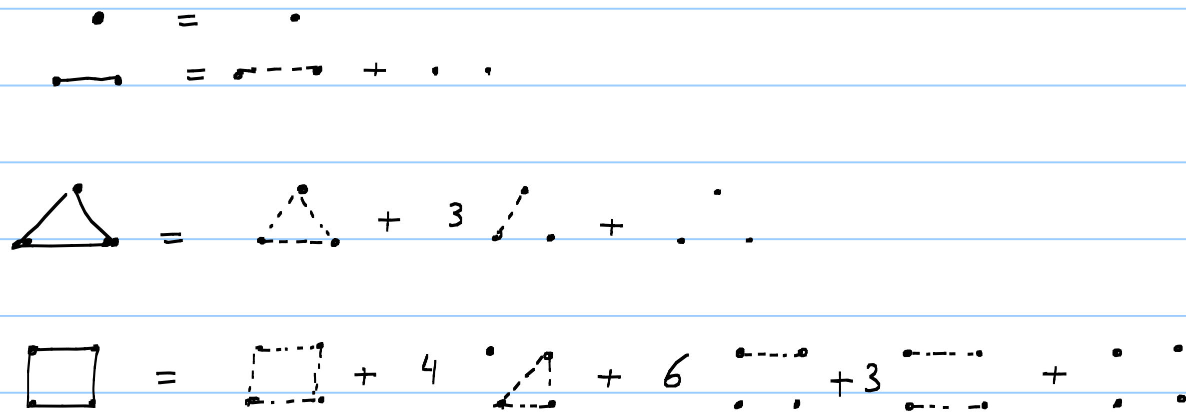
$$G_x(t) = t\langle x\rangle_c + \frac{t^2}{2!}\langle x^2\rangle_c + \frac{t^3}{3!}\langle x^3\rangle_c + \cdots$$

Now: $\quad Z_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\langle x^n\rangle = e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!}\langle x^m\rangle_c}$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\langle x^n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!}\langle x^m\rangle_c\right)^k$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\langle x^n\rangle = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!}\langle x^m\rangle_c + \frac{1}{2!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\sum_{p=b}^{\infty}\frac{t^p}{p!}\langle x^m\rangle_c\langle x^p\rangle_c +$$
$$\frac{1}{3!}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{t^{m+p+q}}{m!\,p!\,q!}\langle x^m\rangle_c\langle x^p\rangle_c\langle x^q\rangle_c + \cdots$$

From comparison of both sides, we obtain the following graphical rule:



the analytical expression for these graphical equalities are:

$$\langle x \rangle = \langle x \rangle_c$$

$$\langle x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_c + \langle x \rangle_c^2$$

$$\langle x^3 \rangle = \langle x^3 \rangle_c + 3 \langle x \rangle_c \langle x^2 \rangle_c + \langle x \rangle_c^3$$

$$\langle x^4 \rangle = \langle x^4 \rangle_c + 4 \langle x \rangle_c \langle x^3 \rangle_c + 6 \langle x \rangle_c \langle x \rangle_c \langle x^2 \rangle_c + 3 \langle x^2 \rangle_c^2 + \langle x \rangle_c^4$$

---

۵ تابع توزیع گاوسی و رابطه آن با تابع توزیع دوجمله‌ای. فرض کنید که K یک متغیر تصادفی با تابع توزیع دوجمله‌ای باشد. یعنی:

$$P_K^N(k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

حال متغیر تصادفی زیر را تعریف می‌کنیم.

$$Y = \left(\frac{K - np}{\sqrt{npq}} \right)$$

این متغیر انحراف نسبی مقادیر تجربی را از مقدار متوسط نشان می‌دهد. می‌خواهیم ببینیم که تابع توزیع این متغیر چه جوری است؟

مطابق با آنچه که تا کنون یاد گرفتیم داریم: ←

$$P_Y(y) = \left\langle \delta_{y, \frac{k-np}{\sqrt{npq}}} \right\rangle = \sum_{k,\, y = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}}{}' P_n(k)$$

$$\rightarrow Z_Y(t) = \sum_y e^{ty} P_Y(y) = \sum_y e^{ty} \sum_{k,\, k = y\sqrt{npq}+np}{}' P_n(k).$$

$$\rightarrow Z_Y(t) = \sum_y e^{ty} \binom{n}{y\sqrt{npq}+np} p^{y\sqrt{npq}+np} (1-p)^{nq - y\sqrt{npq}}$$

$$=$$

تمرین.

---

۶ قضیه‌ی حد مرکزی Central Limit theorem.

فرض کنید که یک آزمایش انجام می‌دهیم و مقدار یک شاخص را اندازه‌گیری می‌کنیم. این اندازه‌گیری را N بار انجام می‌دهیم و مقدار شاخص در بار iام را با X_i نشان می‌دهیم. می‌خواهیم توزیع مقادیر

نشان دهنده یک متغیر تصادفی است. البته همه متغیرهای تصادفی تابع توزیع یکسان دارند و متوسط آنها نیز یکسان و برابر است: $\bar{X}$. حال متغیر زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$Y := \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_N}{N} - \bar{X}$$

می‌خواهیم تابع توزیع متغیر تصادفی Y را پیدا کنیم. (البته در حد $N \to \infty$.)

$$Y = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_N \quad \text{where} \quad \zeta_1 = \frac{X_1 - \bar{X}}{N} \quad \text{etc.}$$

$$\to \quad Z_Y(t) = Z_{\zeta_1}(t)\, Z_{\zeta_2}(t) \cdots Z_{\zeta_N}(t)$$

but what is $Z_{\zeta_1}(t)$? $\to$ $Z_{\zeta_1}(t) = \int e^{t\zeta_1} P_{\zeta}(\zeta_1)\, d\zeta_1$

since $P_{\zeta}(\zeta)\, d\zeta = P_x(x)\, dx$ $\to$ $Z_{\zeta_1}(t) = \int e^{t\left(\frac{x_1 - \bar{x}}{N}\right)} P_x(x_1)\, dx_1$

$$= e^{-t\frac{\bar{x}}{N}} Z_X\left(\frac{t}{N}\right).$$

$$\to \quad Z_Y(t) = e^{-t\bar{X}} \left[Z_X\left(\frac{t}{N}\right) \right]^N$$

Now we expand $Z_X\left(\frac{t}{N}\right)$ and note that it's argument is small so

$$\to \quad Z_X\left(\frac{t}{N}\right) = 1 + \frac{t}{N}\bar{X} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{N^2}\overline{X^2} + \cdots$$

$$\rightarrow \left[Z_x\left(\frac{t}{N}\right)\right]^N = \left[1+\frac{1}{N}\left(t\bar{x}+\frac{1}{2}\frac{t^2}{N}\bar{x}^2+\cdots\right)\right]^N = e^{t\bar{x}+\frac{1}{2}\frac{t^2\bar{x}^2}{N}}$$

$$\rightarrow Z_Y(t) = e^{\frac{1}{2}t^2\frac{\overline{x^2}}{N}} \longrightarrow P_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} Z_Y(ik)\, dk$$

$$\rightarrow P_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky-\frac{1}{2}k^2\frac{\overline{x^2}}{N}}\, dk = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi N}{\overline{x^2}}}\, e^{-\frac{1}{2}N\frac{y^2}{\overline{x^2}}}$$

so if you define $\sigma_y := \frac{\overline{x^2}}{N} \Longrightarrow$

$$P_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sigma_y}}$$

معنای این قضیه چیست؟ اولاً این قضیه بیان می‌کند که در حد $N \to \infty$ ، دقیقاً تابع توزیع y به یک تابع $\delta(y)$ میل می‌کند. یعنی این که y دقیقاً فقط مقدار صفر را می‌تواند اختیار کند. پس $\frac{x_1+x_2+\cdots x_N}{N}$ چیزی نیست جز $\bar{x}$.

برای N های محدود هم این رابطه بیان می‌کند که توزیع حول $y=0$ یک توزیع گاوسی است.

Joint probability Distribution   توزیع احتمال چندتایی :   V

let $X \times Y = \{(x_i, y_j) \mid x_i \in X,\ y_j \in Y\}$. the probability of (x_i, y_j) is $P(x_i, y_j)$.

Def: Marginal probability distribution: $P_X(x) = \sum_y P(x,y)$.

$$P_Y(y) = \sum_x P(x,y).$$

Def: X & Y are called independent random variables if

$$p(x,y) = P_X(x)\, P_Y(y)$$

We can define $\langle O(X,Y)\rangle = \int O(x,y)\, p(x,y)\, dx\, dy$.

in particular we have: $\langle XY\rangle = \int xy\, p(x,y)\, dx\, dy$

Definition: $Cov(X,Y) := \langle XY\rangle - \langle X\rangle\langle Y\rangle$.

Note: if X & Y are independent random variables, then $Cov(X,Y) = 0$. so Cov is a measure of dependence of these two random variables.

In general we can define multivariable probability distributions and covariance matrices: $\mathrm{Cov}(X_i; X_j) := \langle X_i X_j \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle$.

یکی از مهمترین توابع توزیع چند متغیره، تابع توزیع گاوسی است.

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n) = C\, e^{-\frac{1}{2} x^T A x}.$$ متغیر تصادفی گاوسی چند متغیره ۸

useful integrals:

1) $$\int e^{-\frac{1}{2} x^T A x} Dx = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}$$

2) $$\int e^{-\frac{1}{2} x^T A x + b^T x} Dx = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2} b^T A^{-1} b}$$

So if we define the generating function of a Gaussian distribution function by $Z_0(J)$, we have: $$Z_0(J) = \int Dx\, e^{-\frac{1}{2} x^T A x + J^t x} C \Rightarrow$$

$$\rightarrow Z_0(J) = \frac{\int Dx\, e^{-\frac{1}{2} x^T A x + J^t x}}{\int Dx\, e^{-\frac{1}{2} x^T A x}} = e^{\frac{1}{2} J^t A^{-1} J}.$$

$\rightarrow \quad \boxed{Z_0(J) = e^{\frac{1}{2}J^t A^{-1} J}} \quad \longrightarrow \quad \langle x_i \rangle_0 = 0 \qquad \langle x_i x_j \rangle_0 = (A^{-1})_{ij} =: \Delta_{ij}$

$\rightarrow \quad \langle x_i \cdot x_j \cdot x_k \rangle_0 = 0 \quad \longrightarrow$

$\rightarrow \quad \langle x_i x_j x_k x_l \rangle_0 = \Delta_{ij} \Delta_{kl} + \Delta_{ik} \Delta_{jl} + \Delta_{il} \Delta_{jk}$ Wick's theorem.

Now consider a function which is approximately Gaussian like:

$P(x_1\, x_2 \ldots x_n) = C\, e^{-\frac{1}{2}x^T A x + g V(x)}.$ where g is small.

می‌خواهیم توابع چند نقطه‌ای را برای این تابع توزیع حساب کنیم:

$$\langle x_i x_j \rangle = \frac{\int x_i \cdot x_j \cdot P(x_1 x_2 \ldots x_n)\, Dx}{\int P(x_1 x_2 \ldots x_n)\, Dx} \Rightarrow$$ to calculate the numerator

and the denominator one proceed as follows: First we note that

C cancells out from top to bottom.

Second: we calculate: $Z(J) := \int e^{-\frac{1}{2}x^T A x + g V(x) + J^T x}.$

then $\rightarrow$ $$\langle x_i x_j \rangle = \frac{1}{Z(J=0)} \left[\frac{\partial}{\partial J_i} \frac{\partial}{\partial J_j} Z(J) \right]_{J=0}.$$ So everything depends

on the calculation of the partition function $Z(J)$.

بجای محاسبهٔ $Z(J)$، سعی می‌کنیم مستقیماً توابع چند نقطه‌ای را پیدا کنیم. دلیل:

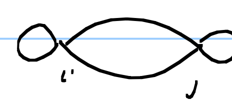
$$\langle x_i x_j \rangle = \frac{\int Dx \; x_i x_j \; e^{-\frac{1}{2}x^T A x + gV(x)}}{\int Dx \; e^{-\frac{1}{2}x^T A x + gV(x)}} = \frac{\langle x_i x_j \, e^{gV(x)} \rangle_0}{\langle e^{gV(x)} \rangle_0}$$

so we should calculate the numerator & denominator separately.

مثال: $\quad V(x) = \sum_i x_i^4 \leftarrow$

$$\langle e^{g\sum_i x_i^4} \rangle_0 = \langle 1 + g\sum_i (x_i x_i x_i x_i) + \frac{1}{2} g^2 \sum_{i,j} (x_i x_i x_i x_i \, x_j x_j x_j x_j) + \cdots \rangle_0$$

$$\langle x_i x_i x_i x_i \rangle_0 = 3 \underset{i}{\infty} \qquad \sum_i \langle x_i x_i x_i x_i \rangle_0 = 3 \infty$$

$$\langle x_i x_i x_i x_i x_j x_j x_j x_j \rangle = 9 \underset{i}{\infty} \underset{j}{\infty} + 36$$  $+24$ 

so $\rightarrow$ $\langle e^{g\sum_i x_i^4} \rangle_0 = 1 + 3g\infty + g^2 \{ 9 \, 88 + 36$  $+ 24$  $\} + \cdots$

Now we come to the numerator:

$$\langle e^{g\sum_i x_i^4} x_k x_l \rangle_0 = \langle x_k x_l \rangle_0 + g \langle x_k x_l \sum_i x_i^4 \rangle + \frac{1}{2} g^2 \sum_i \sum_j \langle x_k x_l \, x_i^4 x_j^4 \rangle + \cdots$$

$\longrightarrow \quad \langle x_k x_\ell \rangle_0 = \underset{k \qquad \ell}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet}$

$\langle x_k x_\ell \sum_i x_i^4 \rangle_0 = \text{"}\ \underset{k}{\cdot} \quad \times_i \quad \underset{\ell}{\cdot}\ \text{"} = 3\, \underset{k \qquad \ell}{\overset{\infty}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet}} + 12\, \underset{k \qquad \ell}{\bullet\!\!-\!\!\bigcirc\!\!-\!\!\bullet}$

This is for first order calculation. putting all this together we will find:

$\longrightarrow$ مخرج $= 1 + 3g\,\infty + O(g^2) + \cdots$

صورت $= \underset{k \quad \ell}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!\bullet} + 3g\, \underset{k \qquad \ell}{\overset{\infty}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet}} + 12g\, \underset{k \qquad \ell}{\bullet\!\!-\!\!\bigcirc\!\!-\!\!\bullet} + O(g^2).$

$$\longrightarrow \langle x_k x_\ell \rangle = \frac{\bullet\!\!-\!\!-\!\!\bullet + 3g\, \overset{\infty}{-\!\!-\!\!-} + 12g\, -\!\!\bigcirc\!\!-}{1 + 3g\,\infty} + O(g^2)$$

$$\longrightarrow \langle x_k x_\ell \rangle = \left(\bullet\!\!-\!\!-\!\!\bullet + 3g\, \overset{\infty}{-\!\!-\!\!-} + 12g\, -\!\!\bigcirc\!\!- + \cdots\right)\left(1 - 3g\,\infty\right)$$

$$= \bullet\!\!-\!\!-\!\!\bullet + 12g\, -\!\!\bigcirc\!\!-$$

$$\longrightarrow \boxed{\langle x_k x_\ell \rangle = \underset{k \quad \ell}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!\bullet} + 12g\, \underset{k \qquad \ell}{-\!\!\bigcirc\!\!-} + O(g^2).}$$

In analytical form this means that:

$$\langle x_k x_\ell \rangle = \Delta_{k\ell} + 12g \sum_m \Delta_{km} \Delta_{mm} \Delta_{m\ell} + O(g^2) \quad \text{where}$$

{ Information of entropy should be added.
Saddle point approximation should be modified.