مقدمات نظریهٔ احتمال.

فهرست مطالب:

۱ـ متغیر تصادفی

۲ـ تابع جرم

۳ـ نمونه‌هایی از متغیرهای تصادفی

تابع توزیع دوجمله‌ای

تابع توزیع پواسون

تابع توزیع گاوسی.

متغیر تصادفی پیوسته

۴ـ چند متغیر تصادفی

۵ـ تابع توزیع گاوسی چند متغیره.

قضیه ویک

اختلال در تابع توزیع گاوسی و گراف‌های فاینمن

1 ـ احتمال.

Let S be a set. $P : \mathcal{P}(S) \longrightarrow R^+$ is called a probability measure if it satisfies the following axioms:

1) $P(\phi) = 0$

2) $P(S) = 1$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

each element of $P(S)$ is called an "event".

$A \cap B$ is interpreted as the event that "Both A and B occur".

$A \cup B$ is interpreted as the event that "either A or B occur."

if two events are disjoint then we have: $\begin{cases} P(A \cap B) = 0. \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B). \end{cases}$

Def.: two events are called disjoints if $A \cap B = \phi$.

Def: two events A & B are called independent if

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B).}$$

Note: independent events are different from disjoint events.

احتمال شرطی:

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

So $\rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B).$

if two events A & B are independent $\longrightarrow$ $P(A|B) = P(A).$

Note: $P(S|B) = 1$ where S = the full sample space.

$P(\bar{A}) = 1 - p(A)$. $\quad \bar{A}$ = the event that A doesn't occur.

$\overline{(A_1 \cup A_2)}$ = the event that neither A_1 nor A_2 happen.

$\overline{(A_1 \cap A_2)}$ = the event that A_1 & A_2 do not happen together.

From the axioms we have:

- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- $p(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - p(A_1 \cup A_2) = 1 - \{p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2)\}$.

---

۲ متغیر تصادفی: متغیر تصادفی به متغیری گفته می‌شود که مقدار خود را از یک آزمایش تصادفی اختیار می‌کند.
بنابراین متغیر تصادفی یک تابع یک به یک از یک فضای پیشامد به اعداد حقیقی است.

$X : S \longrightarrow R$.

example: $X : \{H, T\} \longrightarrow \{0, 1\}$.
$Y : \{H, T\} \longrightarrow \{-1, 1\}$.

با توجه به این که تناظر بین فضای پیشامدها و متغیر تصادفی یک به یک است، می‌توانیم احتمالات را به خود متغیر تصادفی نسبت دهیم.

$X = \{x_1, x_2, \ldots\ldots x_N\}$. $\quad P : X \longrightarrow R^+ \quad \sum_x p(x) = 1$.

$\langle x^k \rangle = \sum_x x^k p(x) \qquad \langle f(x) \rangle = \sum_x f(x) p(x)$.

For continuous random variables, we have: $\int p(x)\,dx = 1$. $\quad \langle f(x) \rangle = \int f(x) p(x)\,dx$.

Variance: $\Delta X := \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ $\quad \boxed{\text{Note: } \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \geq 0}$

۳ تابع مولد

$$Z_X(t) := \sum_x e^{itx} P_X(x).$$

$$P_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} Z_X(t)\, dt$$

$$Z_X(0) = 1, \quad Z_X'(0) = \langle x \rangle \quad Z_X''(0) = \langle x^2 \rangle.$$

یک متغیر تصادفی گسسته را می‌توان مثل یک متغیر تصادفی پیوسته نیز در نظر گرفت:

$$P_X(x) = \sum_{x_i} P(x_i)\,\delta(x - x_i).$$

$$Z_X(t) = \int e^{tx} P_X(x)\, dx = \int e^{tx} \sum_{x_i} P(x_i)\,\delta(x - x_i)\, dx$$

$$= \sum_{x_i} e^{tx_i} p(x_i).$$ which we already know.

• قضیه‌ی اول چبیشف: فرض کنید که X یک متغیر تصادفی مثبت، $\overline{X}$ متوسط آن و α یک عدد مثبت باشد. در این صورت رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\boxed{P(X \geq \alpha) \leq \frac{\overline{X}}{\alpha}}$$

اثبات:

$$P(X \geq \alpha) = \sum_{x \geq \alpha} p(x) \leq \sum_{x \geq \alpha} \frac{x}{\alpha} p(x) \leq \frac{1}{\alpha}\overline{X}$$

• قضیه‌ی دوم چبیشف: فرض کنید که X یک متغیر تصادفی دلخواه، و σ واریانس آن و k یک عدد مثبت باشد. در این صورت نامساوی زیر برقرار است:

$$\boxed{P(|X - \overline{X}| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.}$$

اثبات : متغیر تصادفی مثبت زیر را تعریف کنیم : $Y = (X-\bar{X})^2$

داریم : $\bar{Y} = \overline{(X-\bar{X})^2} = \sigma^2$. بنابراین مطابق با قضیه اول داریم :

$$P(Y \geq \alpha) \leq \frac{\bar{Y}}{\alpha} \qquad \text{Now take } \alpha = k^2\sigma^2$$

$$P\left((X-\bar{X})^2 \geq k^2\sigma^2\right) \leq \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}$$

$$P\left(|X-\bar{X}| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2} \; . \quad Q.E.D.$$

۱-۳ تابع توزیع دوجمله‌ای

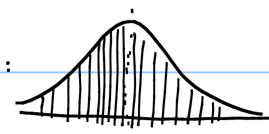
$X = \{0,1\} \qquad X^n = X \times X \times X \cdots \times X = \{(s_1, s_2, \ldots s_n) \mid s_i \in X\}.$

$P(s_1 s_2 \ldots s_n) = \prod_i p(s_i)$ example: $p(00011) = p^3 q^2$

$P^n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad q = 1-p.$

$Z_K(t) = \sum_k e^{tk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (pe^t + q)^n \longrightarrow \langle k \rangle = np.$

$\langle k^2 \rangle = n^2p^2 + npq \longrightarrow \Delta K = \sqrt{npq} \longrightarrow P^n(k):$

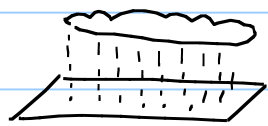


np

۲-۳ تابع توزیع پواسان ← $n \to \infty \quad p \to 0 \quad np = \lambda$

under the above conditions: $P^n(k) \to P_\lambda(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

امثله‌ای برای تابع توزیع پواسان: مثلاً:



۱- ریزش قطرات باران

۲- تابش رادیواکتیو

۳- آمدن مشتری به یک فروشگاه

۳-۳ تابع توزیع گاوسی

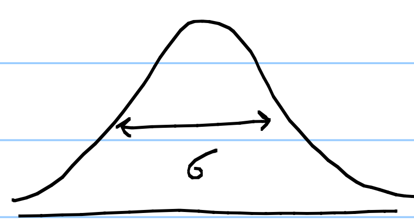
$$P(x) = C\, e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2/\sigma^2}$$

two important integrals:

1) $\displaystyle\int e^{-\frac{1}{2}ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$

2) $\displaystyle\int e^{-\frac{1}{2}ax^2+bx}\,dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\; e^{\frac{1}{2}\frac{b^2}{a}}$

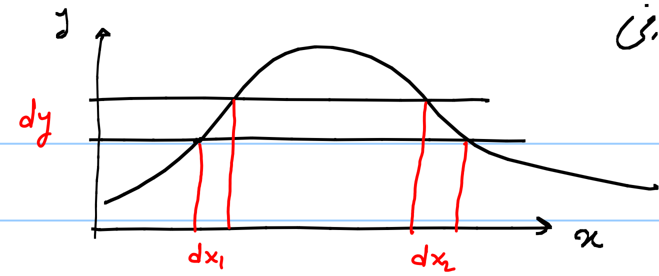
$\to C = \sigma\sqrt{2\pi} \;\to\; P(x) = \sigma\sqrt{2\pi}\; e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)^2/\sigma^2}$.

$P(x) =$ 

$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sigma$.

۴ تغییر متغیر تصادفی

let $Y = f(x)$.



$$P(y)\,|dy| = P(x_1)\,|dx_1| + P(x_2)\,|dx_2|$$

$$\rightarrow P(y) = P(x_1)\left|\frac{dx}{dy}\right|_{x_1} + P(x_2)\left|\frac{dx}{dy}\right|_{x_2} \longrightarrow$$

$$P(y) = P(x_1)\frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x_1}} + P(x_2)\frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x_2}} \longrightarrow$$

$$P(y) = \int P(x)\,\delta(x-x_1)\,dx\,\frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x}} + \int P(x)\,\delta(x-x_2)\,\frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x}}\,dx$$

$$= \int P(x)\left\{\delta(x-y(x))\right\}dx = \langle \delta(X-y(X))\rangle.$$

$$\longrightarrow \boxed{P(y) = \langle \delta(X-y(X))\rangle}$$