Note Title — 10/9/2008

درس فیزیک سیستم‌های بی‌نظم : فصل دوم : فرآیندهای تصادفی

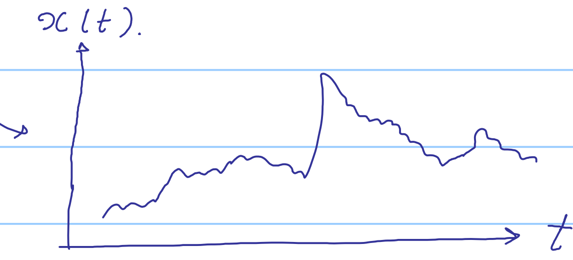
فهرست مطالب :

۱ـ فرآیندهای تصادفی : مقدمات و اصول.
۲ـ فرآیندهای مارکوف ، زنجیره مارکوف ، معادله مادر ، مثال‌ها.
۳ـ گشت تصادفی
۴ـ اولین زمان عبور
۵ـ حرکت براونی
۶ـ معادله لانژون
۷ـ چگالی طیفی
۸ـ معادله فوکر - پلانک

۱ـ فرآیندهای تصادفی

مثال‌ها :

population
Stock market
Brownian particle



$x(t)$ به طور دقیق قابل تعیین نیست در یک آن خاص نمی‌توان به طور دقیق تعیین کرد (زیرا عوامل زیادی خارج از کنترل ما هستند در این رفتار نقش دارند). بنابراین می‌بایست خود را به گرفتن احتمالات در زمان قانع کنیم. ←

$P(x_1, t_1)$ = احتمال اینکه متغیر تصادفی X در زمان t_1 مقدار x_1 داشته باشد.

$P(x_2 t_2, x_1 t_1)$ = احتمال اینکه X در زمان t_1 مقدار x_1 و در زمان t_2 مقدار x_2 داشته باشد.

$p(x_n t_n, x_{n-1} t_{n-1}, \ldots\ldots x_1 t_1) =$ به تعریف مشابه.

بهنجارش:

$$\int p(x_1, t_1)\, dx_1 = 1.$$

$$\int p(x_2, t_2; x_1, t_1)\, dx_2 = p(x_1, t_1)$$

$$\int p(x_2, t_2; x_1, t_1)\, dx_1 = p(x_2, t_2)$$

$$\int p(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}; \ldots, x_1, t_1)\, dx_k\, dx_{n-1} \ldots dx_1 = p(x_n t_n; \ldots x_{k+1} t_{k+1}).$$

احتمالات شرطی:

$p(x_2, t_2 | x_1, t_1) =$ احتمال این که متغیر تصادفی در زمان t_2 مقدار x_2 را داشته باشد به شرطی که بدانیم در زمان t_1 مقدار x_1 را داشته است.

$$p(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \frac{p(x_2, t_2; x_1, t_1)}{p(x_1, t_1)} \longrightarrow$$

$$p(x_2 t_2; x_1, t_1) = p(x_2 t_2 | x_1 t_1)\, p(x_1, t_1)$$

Similarly: $p(x_n t_n, \ldots x_{k+1} t_{k+1} | x_k t_k \ldots x_1 t_1) = \dfrac{p(x_n t_n, \ldots\ldots x_1 t_1)}{p(x_k t_k; \ldots x_1 t_1)}$

بهنجارش احتمالات شرطی:

$$\int p(x_2, t_2 | x_1, t_1)\, dx_2 = 1.$$

But $\int p(x_2, t_2 | x_1, t_1)\, dx_1 \neq 1$.

۳- فرآیند مارکوف

یک فرآیند مارکوف فرآیندی است که از حافظه‌ی کوتاه مدت داشته باشد. به طور دقیق‌تر اگر احتمالات شرطی در رابطه‌ی زیر صدق کند.

$$p(x_n t_n \mid x_{n-1} t_{n-1}; x_{n-2} t_{n-2}, \dots x_1 t_1) = p(x_n t_n \mid x_{n-1} t_{n-1})$$

For a Markov process we have:

$$p(x_2 t_2; x_1 t_1) = p(x_2 t_2 \mid x_1 t_1)\, p(x_1 t_1) \longrightarrow$$

$$p(x_2 t_2) = \int p(x_2 t_2 \mid x_1 t_1)\, p(x_1 t_1)\, dx_1$$

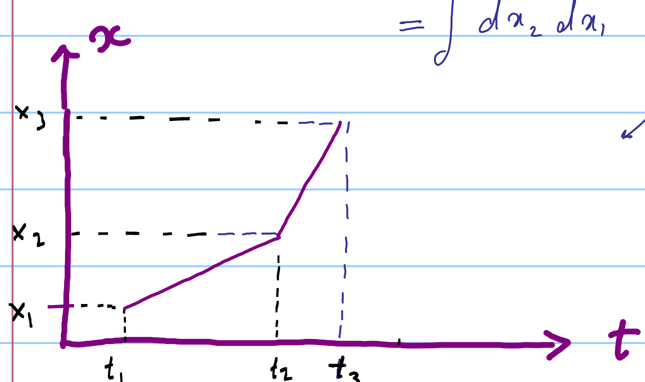
همچنین برای یک فرآیند مارکوف داریم :

$$\begin{aligned} p(x_3 t_3; x_2 t_2; x_1 t_1) &= p(x_3 t_3 \mid x_2 t_2, x_1 t_1)\, p(x_2 t_2, x_1 t_1) \\ &= p(x_3 t_3 \mid x_2 t_2)\, p(x_2 t_2, x_1 t_1) \\ &= p(x_3 t_3 \mid x_2 t_2)\, p(x_2 t_2 \mid x_1 t_1)\, p(x_1 t_1) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad p(x_3 t_3) = \int p(x_3 t_3; x_2 t_2; x_1 t_1)\, dx_2\, dx_1$$

$$= \int dx_2\, dx_1\; p(x_3 t_3 \mid x_2 t_2)\, p(x_2 t_2 \mid x_1 t_1)\, p(x_1 t_1).$$

این رابطه به شکل زیر را نشان داد :



بنابراین داریم:

$$p(x_n t_n) = \int dx_{n-1}\, dx_{n-2} \dots dx_1\; p(x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1})\, p(x_{n-1} t_{n-1} | x_{n-2} t_{n-2}) \cdots p(x_2 t_2 | x_1 t_1)\, p(x_1 t_1)$$

فرآیند تصادفی ایستا: Stationary stochastic process

یک فرآیند تصادفی، ایستا نامیده می‌شود هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$P(x_n t_n ; x_{n-1} t_{n-1}, \dots x_1 t_1) = P(x_n, t_n + \tau, x_{n-1}, t_{n-1} + \tau, \dots x_1 t_1)$$

هرگاه فرآیند تصادفی مارکوف باشد، ایستا بودن به این معناست که،

$$P(x_2 t_2 | x_1 t_1) = P(x_2\; t_2 + \tau | x_1\; t_1 + \tau)$$

زنجیره مارکوف: یک فرآیند مارکوف که در آن هم زمان و هم متغیر تصادفی گسسته باشند یک زنجیره مارکوف (Markov chain) خوانده می‌شود.

در چنین شرایطی بجای $P(x_n, t_n)$ می‌نویسیم $P(x_n, n)$، زیرا زمان‌ها در یک تعداد مراحل گسسته ۱، ۲، ۳، ... n اندازه‌گیری می‌شوند. برای یک زنجیره مارکوف داریم:

$$P(x_2, 2) = P(x_2, 2 | x_1, 1)\, P(x_1, 1) \qquad (1)$$

$$P(x_3, 3) = P(x_3, 3 | x_2, 2)\, P(x_2\, 2 | x_1, 1)\, P(x_1, 1).$$

هرگاه زنجیره مارکوف ایستا باشد می‌توانیم بنویسیم:

$$P(x_n\, n | x_{n-1}\, n-1) = Q(x_n | x_{n-1}).$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$P(x_n, n) = \sum_{x_{n-1}} \cdots \sum_{x_1} Q(x_n | x_{n-1})\, Q(x_{n-1} | x_{n-2}) \cdots Q(x_2 | x_1)\, P(x_1, 1)$$

فرمول‌بندی دیگری از فرآیندهای مارکوف

برای سادگی یک زنجیر مارکوف در نظر بگیرید. ولی همهٔ آنچه می‌گوییم برای کلیهٔ فرآیندهای مارکوف صادق است. قرار دهیم :

$$|P_n\rangle = \begin{pmatrix} P_n(x_1) \\ P_n(x_2) \\ \vdots \\ P_n(x_N) \end{pmatrix}$$

مجموعهٔ همهٔ حالت‌هایی که متغیر تصادفی به خود می‌گیرد را $X = \{x_1, x_2, \dots x_N\}$ نشان می‌دهیم. بنابراین در لحظهٔ n، بردار احتمال زیر، احتمال اشغال هر حالت را در همان لحظه نشان می‌دهد.

هم چنین می‌توانیم بنویسیم :

$$|P_n\rangle = \sum_k P_n(x_k)\,|x_k\rangle$$

که در آن

$$|x_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad |x_N\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین به ازای هر حالت x_k یک بردار حالت $|x_k\rangle$ داریم. این بردارها در حالت ترکیب متعامد یک مجموعهٔ بردار کامل تشکیل می‌دهند.

$$\langle x_k | x_l\rangle = \delta_{kl} \quad , \quad \sum_k |x_k\rangle\langle x_k| = I.$$

در این صورت داریم :

$$\langle x | P_n\rangle = P_n(x).$$

دقت کنید که بردار احتمال $|P_n\rangle$ دارای یک نوع نمایش خاص است که با نمایش‌هایی که در مکانیک کوانتومی دیده‌ایم تفاوت دارد. این نمایش به شکل زیر است:

$$\sum_k P_n(x_k) = 1 \longrightarrow \sum_k \langle x_k | P_n \rangle = 1$$

$$\rightarrow \quad \langle S | P_n \rangle = 1 \longrightarrow \boxed{\langle S| = \sum_k \langle x_k|}$$

که در آن

رابطه اصلی ما به شکل زیر است:

$$P_n(x') = \sum_x Q(x', x)\, P_{n-1}(x)$$

این رابطه را با تعریف

$$Q(x', x) = \langle x' | Q | x \rangle$$

می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\langle x' | P_n \rangle = \sum_x \langle x' | Q | x \rangle \langle x | P_{n-1} \rangle$$

و یا

$$\boxed{|P_n\rangle = Q\, |P_{n-1}\rangle} \qquad (۲)$$

این رابطه، رابطه بسیار مهمی است. زیرا ما را قادر می‌سازد که از روش‌های جبری برای حل مسائل مربوط به فرایندهای مارکوف استفاده کنیم. نخستین چیزی که از رابطه ۲ یاد می‌گیریم این است که می‌توان آن را تکرار کرد که به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\boxed{|P_n\rangle = Q^n\, |P_0\rangle} \qquad (۳)$$

بنابراین اگر بردار احتمال در لحظه صفر را داشته باشیم می‌توانیم بردار احتمال در لحظه n را به راحتی بدست بیاوریم.

روش حل معادله ③ : ماتریس Q الزوماً یک ماتریس متقارن نیست، زیرا هیچ دلیلی وجود ندارد که

یعنی $Q(x',x) = Q(x,x')$ برقرار باشد. مثلاً احتمال گذار از حالت x به x'

الزاماً مساوی با احتمال گذار از حالت x' به x نیست. با این وجود می‌توان این ماتریس

را قطری کرد. ویژه بردارهای راست و چپ این ماتریس را به شکل زیر نشان می‌دهیم.

$$Q|\lambda_\alpha\rangle = \lambda_\alpha|\lambda_\alpha\rangle$$

$$\langle\lambda_\alpha| Q = \lambda_\alpha \langle\lambda_\alpha| .$$

تمرین ۱) نشان دهید برای $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$: $\langle\lambda_\alpha|\lambda_\beta\rangle = 0$.

می‌توان بردارهای چپ و راست را چنان بهنجار کرد که $\langle\lambda_\alpha|\lambda_\alpha\rangle = 1$ نیز برقرار باشد.

تمرین ۲) نشان دهید که :

$$\sum_\alpha |\lambda_\alpha\rangle\langle\lambda_\alpha| = I$$

در این صورت می‌توان نوشت :

$$Q = \sum_\alpha \lambda_\alpha|\lambda_\alpha\rangle\langle\lambda_\alpha|$$

و

$$Q^n = \sum_\alpha \lambda_\alpha^n |\lambda_\alpha\rangle\langle\lambda_\alpha|$$

و در نتیجه

$$|P_n\rangle = \sum_\alpha \lambda_\alpha^n \, |\lambda_\alpha\rangle\langle\lambda_\alpha|P_0\rangle \qquad ③$$

به این ترتیب می‌توان بردار احتمال را به ازای هر مرحله n (هر زمان) تنها با دانستن شرایط اولیه، و ویژگی‌های Q به دست آورد.

قبل از آنکه به مطالعه یک مثال خاص بپردازیم، خواص کلی ماتریس Q را بررسی می‌کنیم. اصطلاحاً ماتریس Q

یک ماتریس استوکاستیک (stochastic Matrix) نامیده می‌شود.

تعریف: یک ماتریس Q، یک ماتریس استوکاستیک نامیده می‌شود اگر دو شرط زیر را برآورده کند.

الف) همه درایه‌های آن مثبت باشند.

ب) مجموع همه عناصر هر ستون آن برابر با ۱ باشد.

دقت کنید که ماتریس Q در یک فرآیند مارکوف هر دو شرط را دارد. زیرا داریم:

$$\langle x'|Q|x\rangle = p(x',n|x,n-1) \geq 0.$$

و

$$\sum_{x'} \langle x'|Q|x\rangle = \sum_{x'} p(x',n|x,n-1) = 1.$$

قضیه: اگر Q یک ماتریس استوکاستیک باشد، آنگاه:

الف - Q حتماً یک ویژه‌مقدار برابر با ۱ دارد.

ب - اندازهٔ همه ویژه‌مقدارهای Q مساوی یا کمتر از یک است.

اثبات: الف) با توجه به اینکه $\sum_{x'} \langle x'|Q|x\rangle = 1 \leftarrow$

$$\langle s|Q = \sum_{x'} \langle x'|Q = \sum_{x',x} \langle x'|Q|x\rangle \langle x| = \sum_{x} \langle x| = \langle s|$$

پس

$$\langle s|Q = \langle s|$$

یعنی اینکه Q حتماً یک ویژه‌بردار چپ با ویژه‌مقدار ۱ دارد و این به معنای این است که Q حتماً یک ویژه‌مقدار ۱ دارد.

ب) داریم:

$$\langle \lambda|Q = \lambda \langle \lambda|$$

$$\langle\lambda|Q|x\rangle = \lambda\langle\lambda|x\rangle \longrightarrow \sum_{x'}\langle\lambda|x'\rangle\langle x'|Q|x\rangle = \lambda\langle\lambda|x\rangle$$

به سادگی قرار دهیم : $\langle\lambda|x\rangle = \psi_x. \longleftarrow$

$$\sum_{x'}\psi_{x'}\langle x'|Q|x\rangle = \lambda\psi_x.$$

قدرمطلق طرفین رابطه بالا را حساب کنیم، از نامساوی مثلث کمک بگیریم و هم این طور از این فرض که درایه‌های $\langle x'|Q|x\rangle$ غیرمنفی هستند استفاده کنیم. در این صورت $\longleftarrow$

$$|\lambda|\,|\psi_x| = \left|\sum_{x'}\psi_{x'}\langle x'|Q|x\rangle\right|$$

$$\longrightarrow\quad |\lambda|\,|\psi_x| \le \sum_{x'}|\psi_{x'}|\langle x'|Q|x\rangle.$$

اگر بزرگترین مقدار $|\psi_{x'}|$ را $|\psi_m|$ فرض کنیم از نامساوی بالا به دست می‌آید :

$$|\lambda|\,|\psi_x| \le |\psi_m|\underbrace{\sum_{x'}\langle x'|Q|x\rangle}_{=1} = |\psi_m|$$

بنابراین به دست آوردیم ،

$$|\lambda|\,|\psi_x| \le |\psi_m| \qquad \forall x.$$

حال اگر در سمت چپ قرار دهیم $x=m \longleftarrow$

$$|\lambda| \le 1$$

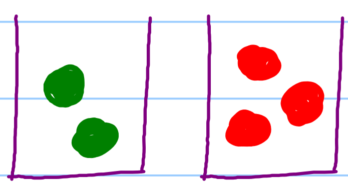
یک نتیجه: یک نتیجه از تصویر فوق آن است که پس از طی مراحل طولانی (زمان های طولانی) بردار احتمال $|P_n\rangle$ همان ویژه برداری می شود که به بزرگترین ویژه مقدار یعنی مقدار ۱ مربوط است و بقیه ویژه بردارها سهم شان از بین می رود. برای فهمیدن این نکته به رابطه ③ نگاه کنید.

$$|P_n\rangle = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha^n |\lambda_\alpha\rangle\langle\lambda_\alpha|P_0\rangle$$

for very large $n \longrightarrow$ $\boxed{|P_n\rangle \longrightarrow |\lambda_m\rangle\langle\lambda_m|P_0\rangle}$

که در آن $|\lambda_m\rangle$ ویژه بردار با ویژه مقدار ۱ از Q است.

مثال: دو جعبه A و B در نظر بگیرید.



A B

در ابتدا جعبه A حاوی دو توپ و جعبه B حاوی ۳ توپ است. حال در هر قدم یک توپ از جعبه A و یک توپ از جعبه B بیرون می آوریم و سپس جای آن ها را عوض می کنیم و به جعبه ها بر می گردانیم. می خواهیم بدانیم بعد از n قدم احتمال این که در جعبه B، k توپ سبز وجود داشته باشد چقدر است؟

حل: متغیر تصادفی که داریم، تعداد توپ های قرمز در جعبه B است. این متغیر تصادفی مقادیر ۱، ۲، ۳ را اختیار می کند. بنابراین بردار احتمال برابر است با:

$$|P_n\rangle = \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \\ P(3) \end{pmatrix}$$

حال باید با دقت ماتریس Q را تشکیل دهیم. این ماتریس 9 درایه دارد. $\langle n|Q|m\rangle$ احتمال آن است که در یک جابجایی تعداد توپ‌ها در جعبه B، از m به n تبدیل شود. داریم:

$\langle 3|Q|3\rangle = 0$ $\qquad \langle 3|Q|2\rangle = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ $\qquad \langle 3|Q|1\rangle = 0$

$\langle 2|Q|3\rangle = 1$ $\qquad \langle 2|Q|2\rangle = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad \langle 2|Q|1\rangle = \frac{2}{3}$

$\langle 1|Q|3\rangle = 0$ $\qquad \langle 1|Q|2\rangle = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{2}{6}$ $\qquad \langle 1|Q|1\rangle = \frac{1}{3}$

$$\rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

حال باید ویژه‌بردارهای Q را پیدا کنیم:

$$\det(Q - \lambda 1) = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

the eigenvalues are: $1, \frac{1}{6}, \frac{-1}{3}$. the un-normalized eigenvectors are:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\tfrac{1}{6}\rangle = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\tfrac{-1}{3}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

the left eigenvectors are:

$$\langle 1| = (1 \quad 1 \quad 1) \qquad \langle \tfrac{1}{6}| = (4, \ -1, \ -6) \qquad \langle \tfrac{-1}{3}| = (1 \quad -1 \quad 3)$$

we can normalize the right eigenvectors and obtain:

$$|1\rangle_n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix} \qquad \left|\frac{1}{6}\right\rangle_n = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \qquad \left|\frac{-1}{3}\right\rangle_n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad Q^n = |1\rangle_n\langle 1| + \left(\frac{1}{6}\right)^n \left|\frac{1}{6}\right\rangle_n\left\langle\frac{1}{6}\right| + \left(\frac{-1}{3}\right)^n \left|\frac{-1}{3}\right\rangle_n\left\langle\frac{-1}{3}\right|$$

بعد از طی تعداد زیادی مراحل ($1 \ll n$) خواهیم داشت،

$$|P_n\rangle \longrightarrow |1\rangle_n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix}$$

که به این معناست که

$$P_n(1) = \frac{3}{10}, \qquad P_n(2) = \frac{3}{5}, \qquad P_n(3) = \frac{1}{10}.$$