Note Title 10/9/2008

فرآیندهای تصادفی: قسمت دوم.

مثال دوم: ولگشت یک بعدی.

در ولگشت یک بعدی که روی یک شبکه با طول شبکه‌ی ۱ رخ می‌دهد داریم:

$$P_N(x) = p\,P_{N-1}(x-1) + q\,P_{N-1}(x+1) + r\,P_{N-1}(x). \quad (1)$$

این رابطه بیان می‌کند که ذره در هر قدم با احتمال p یک قدم به جلو و با احتمال q یک قدم رو به عقب بر می‌گردد، و با احتمال $r = 1-p-q$ نیز سر جای خود باقی می‌ماند.

فضای حالت‌ها برای این مسئله عبارت است از: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

و ماتریس Q برابر است با:

$$\langle x' | Q | x \rangle = p\,\delta_{x',x+1} + q\,\delta_{x',x-1} + r\,\delta_{x',x}.$$

معادله‌ی (1) یک نوع معادله‌ی کلی است که همه اطلاعات لازم برای حل این مسئله را در بر دارد. به همین دلیل این معادله اصطلاحاً معادله‌ی اصلی یا معادله‌ی مادر Master Equation خوانده می‌شود. برای حل آن می‌توانیم از یک تابع مولد استفاده کنیم.

$$Z_N(s) = \sum_x e^{sx} P_N(x).$$

$$\rightarrow \quad Z_N(s) = (p e^{s} + q e^{-s} + r)\, Z_{N-1}(s)$$

$$\rightarrow \quad Z_N(s) = (p e^{s} + q e^{-s} + r)^N\, Z_0(s)$$

اگر در لحظه‌ی صفر ذره در نقطه‌ی 0 قرار داشته باشد، آنگاه داریم: $Z_0(s) = 1$ ، و در نتیجه:

$$\boxed{Z_N(s) = (p e^{s} + q e^{-s} + r)^N}$$

از این تابع مولد بدست می‌آوریم:

$$\langle x \rangle_N = \frac{\partial Z_N}{\partial s}(s) \Big|_{s=0} = N(p-q)$$

$$\langle x^2 \rangle_N = \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}(s) \Big|_{s=0} = N(p+q) + N(N-1)(p-q)^2 .$$

$$\longrightarrow \langle x^2 \rangle_N - \langle x \rangle_N^2 = N(p+q) - N(p-q)^2$$

دقت کنید که $p+q$ برابر با یک نیست.

محاسبهٔ متوسط‌ها و توابع همبستگی در یک فرآیند مارکوف.

در یک فرآیند مارکوف که با رابطهٔ $|P_n\rangle = Q\,|P_{n-1}\rangle$ داده شده است

می‌توانیم در هر لحظه مقادیر متوسط و توابع همبستگی را نیز به راحتی حساب کنیم. شکل بازنویسی این مساله عبارت است از:

$$\langle x | P_n \rangle = \langle x | Q | P_{n-1} \rangle = \sum_{x'} \langle x | Q | x' \rangle \langle x' | P_{n-1} \rangle$$

حال می‌خواهیم مساله متوسط کمیتی مثل A در هر مرحله حساب کنیم. A هر کمیت تابعی از متغیر تصادفی X باشد بنابراین

قرار می‌دهیم $A = A(X)$ داریم:

$$\langle A(n) \rangle = \sum_x A(x) P_n(x)$$

$$= \sum_x A(x) \langle x | P_n \rangle$$

حال می‌توانیم عملگری مثل $\hat{A}$ چنان تعریف کنیم که

$$\langle x | A | x' \rangle = A(x)\, \delta_{x,x'}$$

به عبارت صریح‌تر داریم:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_x & & & \\ & A_{x'} & & \\ & & A_{x''} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

در این صورت داریم : $\hat{A}|x\rangle = A(x)|x\rangle$, $\langle x|\hat{A} = A(x)\langle x|$

و در نتیجه معادلهٔ قبل به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\langle A(n)\rangle = \sum_x \langle x|\hat{A}|P_n\rangle = \langle s|\hat{A}|P_n\rangle \quad ②$$

که در آن $\sum_x \langle x| = \langle s|$. پس با بردن مرتبهٔ ترتیب یک بستهٔ s به عنوان مستقر بزرگ عملگر ها با آن بسته به دست آوریم. برای آنکه همه توسط Q ترازی برحسب بردار اول در لحظهٔ صفر بنویسیم باید از این رابطه استفاده کنیم که

$$|P_n\rangle = Q^n|P_0\rangle \quad \text{و} \quad \langle s|Q = \langle s|$$

و در نتیجه رابطهٔ ② را به شکل زیر می‌نویسیم :

$$\langle A(n)\rangle = \langle s|Q^{-n}\hat{A}Q^n|P_0\rangle$$

عملگر $Q^{-n}\hat{A}Q^n$ در واقع تصویر هایزنبرگی عملگر $\hat{A}$ است . می‌توان آن را به شکل $\hat{A}(n)$ نیز نوشت : یعنی $\hat{A}(n) := Q^{-n}\hat{A}Q^n$ و در نتیجه

$$\langle A(n)\rangle = \langle s|\hat{A}(n)|P(0)\rangle$$

حال فرض کنید که همبستگی دو عملگر مختلف مثل A و B را در دو زمان مختلف مثل زمان‌های m, n بخواهیم حساب کنیم . بنا بر تعریف این همبستگی عبارت است از : برای تعیین حالت فرض می‌کنیم که $m>n$.

$$\langle A(m)B(n)\rangle = \sum_{x,x'} A(x)B(x')P(x,m;x',n)$$

$$\rightarrow \langle A(m)B(n)\rangle = \sum_{x,x'} A(x)B(x')P(x,m|x',n)P(x',n)$$

$$= \sum_{x,x'} A(x)\, B(x') \quad \langle x|\, Q^{m-n} \,|x'\rangle \langle x'|P(n')\rangle$$

لازم به تعریف عملگر $\hat{A}$, $\hat{B}$ به طوری که $\hat{A}|x\rangle = A(x)|x\rangle$, $\hat{B}|x\rangle = B(x)|x\rangle \leftarrow$

$$\langle A(m)\, B(n)\rangle = \sum_{x,x'} \langle x|\, A\, Q^{m-n}\, B\, |x'\rangle \langle x'|P(n')\rangle$$

$$= \sum_{x} \langle x|\, A\, Q^{m-n}\, B\, |P(n)\rangle$$

$$= \langle s|\, A\, Q^{m-n}\, B\, Q^{n}\, |P(0)\rangle$$

$$= \langle s|(Q^{-m} A\, Q^{m})(Q^{-n} B\, Q^{n})|P(0)\rangle$$

بنابراین حساب کردیم که

$$\boxed{\langle A(m)\, B(n)\rangle = \langle s|\, \hat{A}(m)\, \hat{B}(n)\, |P(0)\rangle}$$

فرآیندهای مارکوف در زمان پیوسته.

بهتر است از این به بعد برای توصیف حالت‌های مارکوف سیستم، نمادهای c, c', c'' را به‌کار ببریم. بنابراین مطالبی که در قسمت‌های قبلی گفته‌ایم در روابط زیر خلاصه می‌شوند. دقت کنید که c می‌تواند یک حالت ساده، مثل موقعیت یک ذره، یا یک حالت پیچیده، مثل وضعیت ۴۷ شرکت بازار بورس باشد.

احتمال اینکه در قدم n ام، سیستم در حالت c باشد. $= P(c,n)$

$$P(c',n) = \sum_{c} P(c',n|c,n-1)\, P(c,n-1)$$

$$\langle c | c' \rangle = \delta_{c,c'} \qquad \sum_c |c\rangle\langle c| = I.$$

$$P(c,n) = \langle c | P(n) \rangle;$$

$$|P(n)\rangle = Q\,|P(n-1)\rangle.$$

حال فرض کنید که فاصله‌ی زمانی تحولات آنقدر کم باشد، و ما قادر باشیم که کل فرایندها را برحسب زمان مطالعه کنیم.
اگر فاصله‌ی زمانی بین دو مرحله را با ε نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$n\varepsilon = t \qquad (n+1)\varepsilon = t+\varepsilon \qquad P(c,n) = P(c,t)$$

همچنین می‌توانیم بنویسیم:

$$P(c',n \mid c,n-1) \equiv P(c',t+\varepsilon \mid c,t)$$

حال دقت کنید که اگر $c \neq c'$ باشد، در حد $\varepsilon \to 0$ طرف راست به سمت صفر میل می‌کند، زیرا برای هیچ سیستمی این امکان وجود ندارد که در فاصله‌ی زمانی ۰، از یک حالت به یک حالت متفاوت گذار انجام دهد.. در نتیجه تا رتبه‌ی ε می‌توانیم بنویسیم.

$$P(c',t+\varepsilon \mid c,t) \simeq \varepsilon\, W(c';c;t) \qquad \text{if } c \neq c' \qquad \text{(a)}$$

که در آن $W(c';c;t)$ نرخ گذار در واحد زمان از حالت c به حالت c' است.

اگر $c=c'$ باشد، در این صورت می‌توانیم از رابطه‌ی بهنجارش احتمالات شرطی استفاده کنیم و بنویسیم:

$$P(c,t+\varepsilon \mid c,t) = 1 - \sum_{c' \neq c} P(c',t+\varepsilon \mid c,t) = 1 - \varepsilon \sum_{c' \neq c} W(c';c;t) \qquad \text{(b)}$$

حال معادله‌ی مارکوف را در نظر بگیرید که در آن به جای $n\varepsilon$، $(n+1)\varepsilon$ از t، $t+\varepsilon$ استفاده کرده‌ایم.

$$P(c',t+\varepsilon) = \sum_c P(c',t+\varepsilon \mid c,t)\, P(c,t)$$

در رابطه بالا جمع روی c ها هست است. این جمع را به دو قسمت مجزا تقسیم می‌کنیم. ←

$$P(c', t+\varepsilon) = P(c', t+\varepsilon \mid c', t)\, P(c', t) + \sum_{c \neq c'} P(c', t+\varepsilon \mid c, t)\, P(c, t)$$

حال از روابط ⓐ و ⓑ در معادله بالا استفاده می‌کنیم: ←

$$P(c', t+\varepsilon) = \Big\{1 - \varepsilon \sum_{c \neq c'} W(c, c'; t)\Big\} P(c', t) + \sum_{c \neq c'} \varepsilon\, W(c', c; t)\, P(c, t)$$

با کمی مرتب کردن و پس تقسیم طرفین بر ε به دست می‌آوریم: ←

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} P(c', t) = \sum_{c \neq c'} W(c', c; t)\, P(c, t) - \sum_{c \neq c'} W(c, c'; t)\, P(c', t). \qquad (c)$$

این معادله، معادله مادر در زبان پیوسته است. جملات این معادله تعبیر روشنی دارند. می‌توان به زبان فارسی معنای این معادله را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(c, t) = \sum \text{Sources} - \sum \text{Sinks}.$$

می‌توان معادله ⓒ را به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} P(c_1,t) \\ P(c_2,t) \\ P(c_3,t) \\ \vdots \\ P(c_N,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & W(c_1,c_2,t) & W(c_1,c_3,t) & W(c_1,c_N,t) \\ W(c_2,c_1,t) & A_{22} & W(c_2,c_3,t) & W(c_2,c_N,t) \\ W(c_3,c_1,t) & \cdots & \cdots & \cdots \\ W(c_4,c_1,t) & \cdots & \cdots & \\ \vdots & & & \\ W(c_N,c_1,t) & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(c_1,t) \\ P(c_2,t) \\ P(c_3,t) \\ \vdots \\ P(c_N,t) \end{bmatrix}$$

که در آن

$$A_{11} = - \sum_{C \neq C_1} W(C, C_1, t)$$

$$A_{22} = - \sum_{c \neq c_2} W(c, c_2, t)$$

با این حساب میتوان معادله ماتریسی فوق را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle c' | P(t) \rangle = - \sum_{c} \langle c' | H | c \rangle \langle c | P(t) \rangle$$

و یا

$$\frac{\partial}{\partial t} | P(t) \rangle = - H | P(t) \rangle$$

که در آن $-H$ نشان دهنده ماتریس مربعی با درایه های $W(c_i, c_j, t)$ است. علامت منفی برای یک منظور خاص بکار برده شده است که بعداً آن را توضیح خواهیم داد.

به دو خاصیت مهم ماتریس H باید توجه کرد:

نخست اینکه: جمع کل درایه های هر ستون H برابر است با صفر، به عبارت دیگر

$$\sum \langle c | H | c' \rangle = 0 \longrightarrow \langle S | H = 0$$

دوم اینکه: هر عنصر قطری H، یک عدد بزرگتر یا مساوی با صفر و هر عنصر غیر قطری آن یک عدد کوچکتر یا مساوی صفر است.

حل کلی معادله $\frac{\partial}{\partial t} | P(t) \rangle = - H | P(t) \rangle$ عبارت است از:

$$| P(t) \rangle = T \exp\{ - \int^{t} H(t') dt' \} | P(0) \rangle$$

که برای فرآیند مارکوف ایستا $(H(t) = H)$ به شکل زیر در می‌آید:

$$| P(t) \rangle = e^{-Ht} | P(0) \rangle.$$

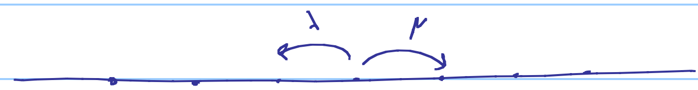
همچنین، ماتریس e^{-H} را در نظر بگیرید و آن را Q نام‌گذاری می‌کنیم. از رابطهٔ $\langle s|H=0$ نتیجه می‌گیریم که $\langle s|Q=\langle s|$. درایه‌های Q نیز مثبت هستند. بنابراین ماتریس e^{-H} یک ماتریس استوکاستیک است که بنابر قضیه‌ای که قبلاً ثابت کردیم، دارای این خاصیت است که اندازه ویژه‌مقدارهای آن همه از ۱ کوچکترند. بنابراین ←

$$H = -\log Q.$$

$$\rightarrow \quad \text{if} \quad Q|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \longrightarrow H|\lambda\rangle = (-\log\lambda)|\lambda\rangle \equiv \mu|\lambda\rangle$$

$$\rightarrow \quad \text{if} \quad |\lambda| \le 1 \longrightarrow \mathrm{Re}(\mu) \ge 0.$$

مثال: ولگشت یک‌بعدی.



ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که با نرخ μ یک قدم به جلو می‌رود و با نرخ λ یک قدم به عقب برمی‌گردد. معنای این حرف این است که در فاصله زمانی بسیار کوتاه dt، این ذره با احتمال μdt یک قدم به جلو می‌رود، با احتمال λdt یک قدم به عقب برمی‌گردد و با احتمال $(1-(\mu+\lambda)dt)$ سر جای خود باقی می‌ماند.

Master Equation:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = \mu\, p(x-1,t) + \lambda\, p(x+1,t) - (\mu+\lambda)\, p(x,t)$$

حرکت متوسط ذره یا $\langle x\rangle$ را حساب می‌کنیم. با توجه به این که

$$\langle X(t)\rangle = \sum_x x\, p(x,t)$$

از معادلهٔ مادر به دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt}\langle X(t)\rangle = \mu \sum_x x\, p(x-1,t) + \lambda \sum_x x\, p(x+1,t) - (\mu+\lambda)\sum_x x\, p(x,t)$$

$$= \mu \sum_x (x-1+1)\, p(x-1,t) + \lambda \sum_x (x+1-1)\, p(x+1,t) - (\mu+\lambda) \sum_x x\, p(x,t)$$

$$= \mu\big(\langle X(t)\rangle + 1\big) + \lambda\big(\langle X(t)\rangle - 1\big) - (\mu+\lambda)\langle X(t)\rangle$$

$$= \mu - \lambda$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\langle X(t)\rangle = \mu - \lambda$$

شرط اولیه را $\langle X(0)\rangle = 0$ گرفتیم. $\longrightarrow$

$$\langle X(t)\rangle = (\mu-\lambda)\, t$$

نهایتاً $\longrightarrow$

این نتیجه مورد انتظار هم هست. حال ممان دوم را به طریق مشابه حساب می‌کنیم. از معادلات بدست می‌آید:

$$\frac{d}{dt}\langle X^2(t)\rangle = \sum_x \mu x^2 p(x-1,t) + \sum_x \lambda x^2 p(x+1) - (\mu+\lambda)\sum_x x^2 p(x,t)$$

$$= \mu \sum_x (x-1+1)^2 p(x-1,t) + \lambda \sum_x (x+1-1)^2 p(x+1,t) - (\mu+\lambda)\sum_x x^2 p(x,t)$$

$$= \mu\big(\langle X^2\rangle + 2\langle X\rangle + 1\big) + \lambda\big(\langle X^2\rangle - 2\langle X\rangle + 1\big) - (\mu+\lambda)\langle X^2\rangle$$

$$= 2(\mu-\lambda)\langle X\rangle + \mu + \lambda$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\langle X^2(t)\rangle = 2(\mu-\lambda)\langle X(t)\rangle + (\mu+\lambda)$$

با توجه به اینکه $\langle X(t)\rangle = (\mu-\lambda)\, t$ این معادله به راحتی حل می‌شود. حل آن به صورت زیر است:

$$\boxed{\langle x^2(t)\rangle = (\mu-\lambda)^2 t^2 + (\mu+\lambda)t}$$

که در آن شرط اولیه $\langle x^2(0)\rangle = 0$ را گرفته‌ایم. ← $(\Delta x)(t) = (\mu+\lambda)t$

که نشان می‌دهد واریانس به صورت خطی با زمان رشد می‌کند.

می‌توان تحول تابع مولد را نیز از معادله‌ی مادر بدست آورد. با توجه به این که $Z(s,t) = \sum_x s^x p(x,t)$

و استفاده از معادله‌ی مادر

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = \mu\, p(x-1,t) + \lambda\, p(x+1,t) - (\mu+\lambda)\, p(x,t)$$

بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(s,t) = \mu \sum_x s^x p(x-1,t) + \lambda \sum_x s^x p(x+1,t) - (\mu+\lambda)\sum_x s^x p(x,t)$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial Z(s,t)}{\partial t} = [\mu s + \lambda s^{-1} - (\mu+\lambda)]\, Z(s,t).$$

$$\rightarrow \quad Z(s,t) = e^{[\mu s + \lambda s^{-1} - (\mu+\lambda)]t}\, Z(s,0).$$

اگر نقطه‌ی شروع را صفر بگیریم $p(x,0) = \delta_{x,0}$ ، یعنی خواهیم داشت که $Z(s,0) = 1$. در نتیجه ←

$$\boxed{Z(s,t) = e^{[\mu s + \lambda s^{-1} - (\mu+\lambda)]t}}$$

با بسط این تابع برحسب توان‌های مثبت و منفی s می‌توان نتایج اول را بدست آورد. ←

$$Z(s,t) = e^{-(\mu+\lambda)t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\mu)^k}{k!} s^k \, \frac{\sum_{l=0}^{\infty} (t\lambda)^l s^{-l}}{l!}$$

با توجه به $k!$ و $l!$ در مخرج کسرها حدود انتگرال را از $-\infty$ تا ∞ می‌گیریم : $\Leftarrow$

$$Z(s,t) = e^{-(\mu+\lambda)t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\mu^k \lambda^l}{k!\, l!} s^{(k-l)} t^{k+l}$$

let $k-l=x \rightarrow Z(s,t) = e^{-(\mu+\lambda)t} \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\mu^k \lambda^{k-x}}{k!\,(k-x)} s^x t^{k+l}$

$$\rightarrow \quad P(x,t) = e^{-(\mu+\lambda)t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\mu^k \lambda^{k-x}}{k!\,(k-x)!} t^{2k-x}.$$

Example: $P(0,t) = e^{-(\mu+\lambda)t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k \lambda^k}{(k!)^2} t^{2k}$

Optional : $P(x,t)$ can be expressed in terms of modified Bessel functions.

To see this we note that the defining relations of Bessel functions:

(Arfken, chap. 11, Second edition).

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

Bessel function.

expansion of Both sides $\rightarrow$ $J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$

Now let $t \to iu \Rightarrow e^{ix(u+\frac{1}{u})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,(iu)^n$

let $ix = s \to$ $$e^{s(u+\frac{1}{u})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-is)\, i^n\, u^n \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(s)\, u^n$$

or $$e^{s(u+\frac{1}{u})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(s)\, u^n$$ → Modified Bessel functions.

$$I_n(x) = i^n J_n(-ix)$$

$$\to I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

برای آنکه تابع احتمال $p(x,t)$ را برحسب توابع بسل تعریف‌شده بنویسیم، تابع مولد $Z_s(t)$ را بسط دهیم :

$$Z(s,t) = e^{-(\lambda+\mu)t}\, e^{(\mu s + \lambda s^{-1})t}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)t}\, e^{t\sqrt{\mu\lambda}\left[\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\, s + \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\, s^{-1}\right]}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)t} \sum_{x=-\infty}^{\infty} I_x\left(t\sqrt{\mu\lambda}\right)\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\, s\right)^x$$

$$\Rightarrow p(x,t) = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}^{\,x}\, e^{-(\lambda+\mu)t}\, I_x\left(t\sqrt{\mu\lambda}\right)$$

بدین ترتیب تابع احتمال $p(x,t)$ را بصورت فشرده برحسب تابع بسل تعریف‌شده Modified Bessel

بیان می‌کند. در بعضی از موارد این گزارش‌ها را می‌بینید، زیرا رفتارهای توزیع مشهور شناخته شده‌اند و بنابراین پیگیران به یک آنها رفتار تابع احتمال‌ها نیز از جهات متعدد مطالعه کرد.

End of optinal Note.

معادله پخش

$$\frac{\partial}{\partial t} p(n,t) = \mu\, p(n-1,t) + \lambda\, p(n+1,t) - (\mu+\lambda)\, p(n,t). \quad (1)$$

$$n\varepsilon = x \longrightarrow (n+1)\varepsilon = x+\varepsilon \,, \quad (n-1)\varepsilon = x-\varepsilon \qquad \underbrace{p(n,t)}_{\text{احتمال}} = \varepsilon\, \underbrace{p(x,t)}_{\text{چگالی احتمال}}$$

$$(1) \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = \mu\left\{p(x,t) - \varepsilon\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right\} + \lambda\left\{p(x,t) + \varepsilon\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right\} - (\mu+\lambda)\, p(x,t)$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -(\mu-\lambda)\varepsilon\,\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}(\lambda+\mu)\varepsilon^2\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

$$(\mu-\lambda)\varepsilon = v \,, \quad (\lambda+\mu)\varepsilon^2 = D \longrightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = -v\,\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}D\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}$$

let
$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t'} - v\dfrac{\partial}{\partial x'} \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x'} \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial t'} = \frac{1}{2}D\,\frac{\partial^2 p}{\partial x'^2}$$

let
$$p(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,\tilde{p}(k,t)\,dk \longrightarrow \tilde{p}(k,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\,p(x,t)\,dx.$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\tilde{p}(k,t) = -\frac{1}{2}Dk^2\,\tilde{p}(k,t) \longrightarrow \tilde{p}(k,t) = e^{-\frac{1}{2}Dk^2 t}\,\tilde{p}(k,0)$$

if at $t=0$ $P(x,0)=\delta(x) \longrightarrow \tilde{P}(k,0)=\frac{1}{2\pi} \rightarrow \tilde{P}(k,t)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}Dk^2t}$

$$\rightarrow P(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx-\frac{1}{2}Dk^2t}\,dk = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{Dt}}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{Dt}}$$

$$\rightarrow P(x,t)=\sqrt{\frac{2\pi}{Dt}}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{Dt}}$$

$$\rightarrow P(x,t)=\sqrt{\frac{2\pi}{Dt}}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-Vt)^2}{Dt}}$$

مثال: ولگشت در دو بعد.

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\vec{r},t) = R\, P(\vec{r}-\hat{x},t) + L\, P(\vec{r}+\hat{x},t) + U\, P(\vec{r}-\hat{y},t) + D\, P(\vec{r}+\hat{y},t) - (R+L+U+D)\, P(\vec{r},t)$$

$$Z(u,v,t) = \sum_{x,y} u^x v^y P(\vec{r},t)$$ تابع مولد

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} Z(u,v,t) = \left\{ (Ru + Lu^{-1} + Uv + Dv^{-1}) - (R+L+U+D) \right\} Z(u,v,t)$$

$$\rightarrow Z(u,v,t) = e^{\left[(Ru+Lu^{-1}+Uv+Dv^{-1}) - (R+L+U+D) \right] t}$$

مثال هایی از دنیای یک جهت:

مثال ۱) گروهی از جمعیت مثلاً خرگوش ها را در نظر بگیرید که در یک جزیره زندگی می‌کنند. اگر نرخ زاد و ولد خرگوش ها را با α نشان دهیم و جمعیت خرگوش ها را با x نشان دهیم، و هم چنین اگر از اثر افت و خیز جمعیت و تصادفی بودن آن صرف نظر کنیم، می‌توان یک معادله خیلی ساده برای تغییرات جمعیت خرگوش ها نوشت:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x$$

در نتیجه می‌توان گفت که $x(t)$ متوسط جمعیت خرگوش ها در زمان t است، یعنی $x(t) := \langle X(t) \rangle$

معادله مادر برای رشد جمعیت خرگوش‌ها چیزی شبیه به این است :

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = \alpha (x-1)\, p(x-1,t) - \alpha x\, p(x,t).$$

دقت کنید که این معادله منجر به $\frac{d}{dt}\langle X(t)\rangle = \alpha \langle X(t)\rangle$ می‌شود، حل این معادله
یک رشد نمایی برای جمعیت خرگوش‌ها به دست خواهد داد یعنی:

$$\langle X(t)\rangle = e^{\alpha t} \langle X(0)\rangle$$

که نشان دهندهٔ غیر دقیق بودن این مدل است.
یک مدل دقیق‌تر، توسط معادلهٔ زیر داده می‌شود که

$$\frac{d}{dt} x(t) = \alpha x (N-x)$$

دقت کنید که برای سادگی به جای $\langle X(t)\rangle$، $x(t)$ نوشته‌ایم.
هم چنین به فرآیند میکروسکوپی و تصادفی ای که منجر به این معادله شده است اشاره نکرده‌ایم. این معادله محدودیت‌های محیطی (کمبود غذا، جا، رقابت و ...) را در نظر می‌گیرد و می‌گوید که اگر جمعیت خرگوش‌ها از N بیشتر شود، آنگاه، نرخ رشد جمعیت منفی خواهد بود.

حل معادله:

$$\frac{dx}{x(N-x)} = \alpha\, dt \rightarrow dx\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{N-x}\right] = N\alpha\, dt$$

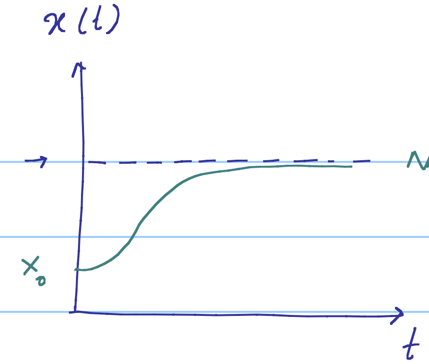
$$\rightarrow \ln x - \ln(N-x) = N\alpha t + c \rightarrow \frac{x}{N-x} = k e^{N\alpha t}$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{kN e^{N\alpha t}}{1 + k e^{N\alpha t}}$$

شرایط اولیه

$$\frac{x_0}{N-x_0} = k$$

$$\rightarrow \boxed{x(t) = \frac{N x_0}{x_0 + (N - x_0)\, e^{-N\alpha t}}} \rightarrow$$



بنابراین در لحظات اولیه که جمعیت خرگوش‌ها با جمعیت آستانه N خیلی تفاوت دارد، محدودیت منابع طبیعی وجود ندارد، رشد خرگوش‌ها نمایی است، ولی با افزایش جمعیت، اثرات محدود بودن منابع طبیعی آشکار می‌شود و سرانجام جمعیت در N اشباع می‌شود.

Alfred J Lotka (1925), Vitto Volterra (1926). مدل Lotka - Volterra.

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x).$$

x = تعداد متوسط خرگوش‌ها

y = تعداد متوسط گرگ‌ها.

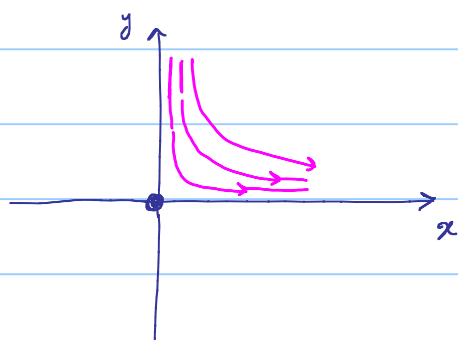
fixed points: ① $(x,y)=0$ ② $y = \frac{\alpha}{\beta}$, $x = \frac{\gamma}{\delta}$

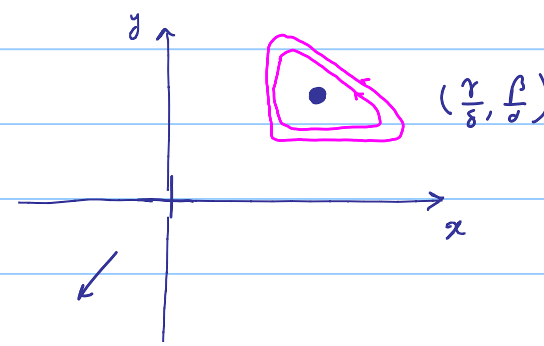
linear analysis: for $(x,y)=0 \longrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x, \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y \end{cases} \longrightarrow$ Saddle point.

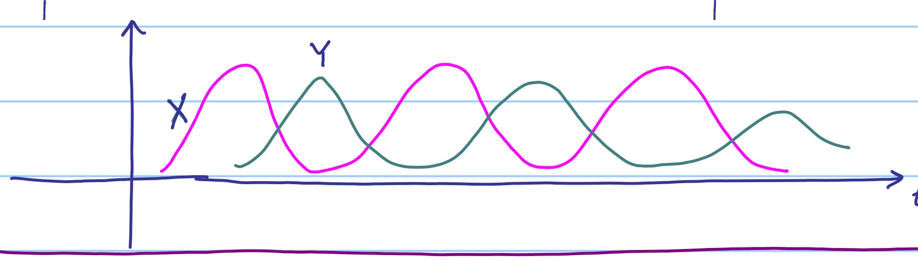
for $(x,y) = (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}) \longrightarrow \quad x = \frac{\gamma}{\delta} + X, \quad y = \frac{\alpha}{\beta} + Y$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \left(\dfrac{\gamma}{\delta}+X\right)\left(\alpha-\beta\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+Y\right)\right) \\[2ex] \dfrac{dY}{dt} = -\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+Y\right)\left(\gamma-\delta\left(\dfrac{\gamma}{\delta}+X\right)\right) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} \simeq -\dfrac{\beta\gamma}{\delta}Y \\[2ex] \dfrac{dY}{dt} \simeq \dfrac{\alpha}{\beta}\delta X \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow \lambda^2 + \alpha\gamma = 0 \longrightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$$







مثال: فرآیند خطی زاد و ولد

یک نمونه از جمعیت (مثلاً جمعیتی از باکتری‌ها) را در نظر می‌گیریم. برای این جمعیت می‌توان یک معادله مادر برای تغییرات جمعیت نوشت: قرار می‌دهیم:

احتمال اینکه در زمان t، یک باکتری به جمعیت n تایی باکتری‌ها در فاصله زمانی dt اضافه شود. $= b(n,t)\,dt$

$d(n,t)\,dt =$ " " " از " " " " " " dt بمیرد

احتمال تولد بیش از یک باکتری نیز در فاصله زمانی dt صفر است. در نتیجه برای این جمعیت از باکتری‌ها، معادله مادر زیر را داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(n,t) = b(n-1,t)\,P(n-1,t) + d(n+1,t)\,P(n+1,t) - \big(b(n,t)+d(n,t)\big)\,P(n,t)$$

در فرآیند خطی زاد و ولد، $b(n,t)$ و $d(n,t)$ با n رابطه خطی دارند به این صورت که:

$$b(n,t) = \beta n \quad , \quad d(n,t) = \gamma n$$

در نتیجه معادله مادر به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(n,t) = \beta(n-1)\,P(n-1,t) + \gamma(n+1)\,P(n+1,t) - (\beta+\gamma)\,n\,P(n,t)$$

برای حل این معادله، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم: بنا بر تعریف ← $Z(s,t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{sn} p(n,t)$

که در آن $P(n,t) = 0$ $\forall n < 0$.

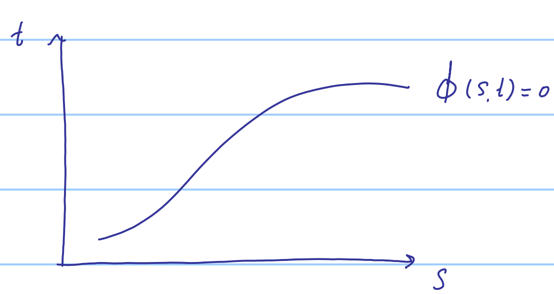
معادله‌ی ما → $$\frac{\partial}{\partial t} Z(s,t) = \beta \sum_n e^{sn} (n-1) P(n-1,t) + \gamma \sum_n e^{sn} (n+1) P(n+1,t) - (\beta+\gamma) \sum_n n e^{sn} p(n,t).$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial Z(s,t)}{\partial t} = \beta e^{s} \sum_n e^{sn} n\, p(n,t) + \gamma e^{-s} \sum_n e^{sn} n\, p(n,t) - (\beta+\gamma) \sum_n n e^{sn} p(n,t) \qquad *$$

but $\sum_n e^{sn} n\, p(n,t) = \frac{\partial}{\partial s} Z(s,t)$. so → equation (*) takes the form:

$$\boxed{\frac{\partial Z(s,t)}{\partial t} = \left[\beta e^{s} + \gamma e^{-s} - (\beta+\gamma)\right] \frac{\partial Z(s,t)}{\partial s}.} \qquad **$$

حال باید این معادله را حل کنیم. این معادله را می‌توانیم به روش مشخصه‌ها (Methods of characteristics) حل کنیم. در این روش، به دنبال منحنی‌هایی در صفحه‌ی (s,t) هستیم که تابع $Z(s,t)$ در آن‌ها مقدار ثابتی داشته باشد. مسلم است که پیدا کردن این منحنی‌ها اطلاعات با ارزشی را درباره‌ی تابع $Z(s,t)$ در اختیار ما قرار می‌دهد.



شکل رو به رو یک چنین منحنی‌ای را نشان می‌دهد که معادله‌ی آن را با $\phi(s,t)=0$ نشان داده‌ایم. هرگاه روی این منحنی حرکت کنیم، می‌بایست dZ برابر با صفر باشد. بنابراین روی این منحنی داریم:

$$dZ \equiv \frac{\partial Z}{\partial s} ds + \frac{\partial Z}{\partial t} dt = 0$$

با استفاده از ** $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\frac{\partial Z}{\partial s} ds + K(s) \frac{\partial Z}{\partial s} dt = 0$

که در آن

$K(s) = [\beta e^{s} + \gamma e^{-s} - (\beta + \gamma)]$. بنابراین $\leftarrow$

$$\frac{\partial Z}{\partial s} [ds + K(s) dt] = 0$$

در این صورت رابطه $ds + K(s) dt = 0$ برقرار است. پس

$\phi(s,t) = 0$ چیزی نیست جز حل معادله $ds + K(s) dt = 0$. معادله اخیر را به راحتی می‌توان حل کرد.

$$dt = -\frac{ds}{K(s)} = \frac{-ds}{\beta e^{s} + \gamma e^{-s} - (\beta + \gamma)}$$

$$\rightarrow t = -\int \frac{ds}{\beta e^{s} + \gamma e^{-s} - (\beta + \gamma)} + \text{Const} \qquad \text{let} \quad e^{s} = u.$$

$$\rightarrow t = -\int \frac{du}{\beta u^{2} - (\beta + \gamma) u + \gamma} = -\frac{1}{\beta - \gamma} \int \frac{du}{u-1} - \frac{du}{u - \frac{\gamma}{\beta}}$$

$$\rightarrow t = \frac{1}{\beta - \gamma} \ln \left| \frac{u - \gamma/\beta}{u - 1} \right| + c$$

این معادله، نشان دهنده یک دسته منحنی است که در آن Z مقدار ثابتی به خود می‌گیرد. پارامتر c در هر منحنی مقدار ثابتی است. پس $Z(s,t)$ تنها تابعی از پارامتر c است. بنابراین باید c را برحسب s و t بدست بیاوریم. $\leftarrow$

$$c = t - \frac{1}{\beta - \gamma} \ln \left| \frac{u - \gamma/\beta}{u - 1} \right| \rightarrow e^{c} = \frac{e^{t}}{\left| \frac{u - \gamma/\beta}{u - 1} \right|^{\frac{1}{\beta - \gamma}}}$$

$$\rightarrow \quad Z(s,t) = f\left[e^{(\beta-\gamma)t} \left| \frac{e^s - 1}{e^s - \frac{\gamma}{\beta}} \right| \right]$$

بنابراین Z تابعی از این ترکیب خاص از متغیر s و t است. برای بدست آوردن فرم تابع f به شرایط اولیه رجوع می‌کنیم. اگر در لحظه
صفر جمعیت باکتری‌ها برابر با N نفر باشد. در این صورت داریم:

$$P(n,0) = \delta_{n,N} \rightarrow Z(s,0) = e^{sN} \rightarrow$$

$$f\left[\left| \frac{e^s - 1}{e^s - \frac{\gamma}{\beta}} \right| \right] = e^{sN} \qquad \text{let } y = \left| \frac{e^s - 1}{e^s - \frac{\gamma}{\beta}} \right|$$

$$\text{then} \rightarrow \quad y = \left(\frac{e^s - 1}{e^s - \frac{\gamma}{\beta}} \right) \rightarrow e^s = \frac{1 - \frac{\gamma}{\beta} y}{1 - y} \rightarrow f(y) = \left(\frac{1 - \frac{\gamma}{\beta} y}{1 - y} \right)^N$$

بنابراین فرم تابع f بدست آمد. و از این جا می‌توانیم تابع $Z(s,t)$ را بدست آوریم.

$$\rightarrow \quad Z(s,t) = \left[\frac{1 - \frac{\gamma}{\beta} y}{1 - y} \right]^N \quad \text{where} \quad y = e^{(\beta-\gamma)t} \frac{e^s - 1}{e^s - \frac{\gamma}{\beta}}$$

با توجه به $z = e^s$ فرم نهایی تابع مولد به صورت زیر خواهد بود.

$$Z(z,t) = \left[\frac{\gamma(z-1)\, e^{(\beta-\gamma)t} - \beta z + \gamma}{\beta(z-1)\, e^{(\beta-\gamma)t} - \beta z + \gamma} \right]^N$$

از این رابطه می‌توان متوسط جمعیت باکتری‌ها را برحسب زمان پیدا کرد.

$$\langle N(t) \rangle = \left(\frac{\partial Z}{\partial z} \right)_{z=1}$$

$$\rightarrow \quad \langle N(t)\rangle = N e^{(\beta-\gamma)t}$$

همچنین

$$\langle N^2(t)\rangle - \langle N(t)\rangle^2 = N\left(\frac{\gamma+\beta}{\gamma-\beta}\right) e^{(\beta-\gamma)t}\left(1-e^{(\beta-\gamma)t}\right)$$

$$\text{if} \quad \beta=\gamma \longrightarrow \quad \langle N(t)\rangle = N \;, \quad \langle N^2(t)\rangle - \langle N(t)\rangle^2 = 2N\beta t .$$

یک نمونه دیگر از فرآیندهای زاد و ولد در واکنش های شیمیایی است که با چنین فرمالیزمی در بالا توضیح دادیم قابل حل است. به عنوان مثال واکنش زیر را در نظر بگیرید:

$$A + X \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} A + Y .$$

منظور از k_1 , k_2 نرخ های واکنش است به این معنا که وقتی یک مولکول A به یک مولکول X برخورد می‌کند با احتمال $k_2 dt$ در زمان dt ، مولکول X تبدیل به مولکول Y می‌شود. همین تعبیر برای k_1 نیز به کار می‌رود.
دقت کنید که تعداد مولکول های A ثابت است ولی تعداد مولکول های X , Y تغییر می‌کند.

$P(n_x,n_y,t) =$ احتمال اینکه در زمان t ، تا n_x مولکول X و تا n_y مولکول Y داشته باشیم.

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n_x,n_y,t) = k_2\, n_A (n_y+1) P(n_x-1,n_y+1,t) + k_1\, n_A (n_x+1) P(n_x+1,n_y-1,t) - k_1\, n_A n_x P(n_x,n_y,t) - k_2\, n_A n_y P(n_x,n_y,t).$$

$$\text{but since} \quad n_x+n_y = \text{Const} = n \longrightarrow \quad P(n_x,n_y,t) = P(n_x,n-n_x,t) = f(n_x,t)$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} f(n_x, t) = k_2 n_A (n+1-n_x) f(n_x-1, t) + k_2 n_A (n_x+1) f(n_x+1, t)$$
$$- k_1 n_A n_x f(n_x, t) - k_2 n_A (n-n_x) f(n_x, t).$$

در تمرین ۴ روابط بین یکی لذا ما خواسته‌ایم که این معادله را به طور دقیق حل کنید.