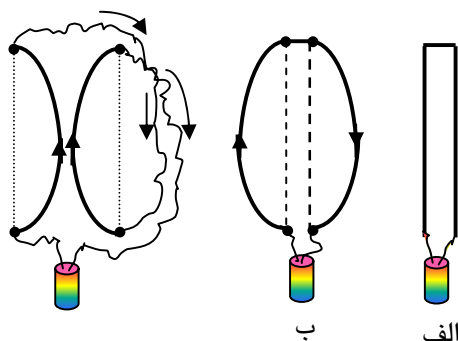


فصل ۹

میدان های مغناطیسی

۱- پیش گفتار

پرسش بنیادی الکترومغناطیس را به یاد بیاورید: مجموعه‌ی بارهای الکتریکی q_1, q_2, q_3, \dots چه میدانی را در نقطه‌ای از فضا تولید می‌کنند؟ این بارها را "بارهای چشمه" نامیدیم و با استفاده از اصل برنشه، نیرویی را که آنها به "بار آزمون" Q وارد می‌کردند، حساب کردیم. تاکنون خود را به وضعیتی محدود کردیم که بارهای چشمه ساکن بودند. اینک می‌خواهیم نیروی بین بارهای در حال حرکت را بررسی کنیم. یعنی محدودیت ساکن بودن بارهای چشمه را برداریم. برای این که احساسی از آنچه را که پیش‌روست به دست بدهم، چیدمان شکل (۹-۱) را در نظر بگیرید: دو سیم موازی با فاصله‌ی اندک، از سقف آویزان اند



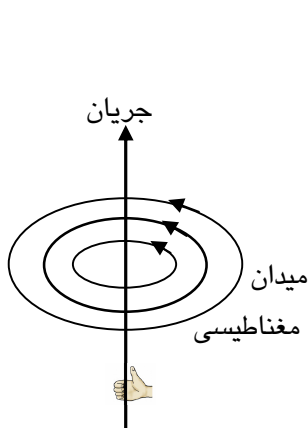
شکل ۹-۱ جریان الکتریکی در دو سیم

(شکل ۹-۱ الف). اگر در این سیم‌ها برابر شکل (۹-۱ ب) جریان الکتریکی برقرار شود، سیم‌های حامل جریان به سمت بیرون خمیده می‌شوند، یعنی دو سیم که جهت جریان در آنها خلاف یکدیگر است، از هم دور می‌شوند. اما اگر جریان در دو سیم هم‌سو باشد (شکل ۹-۱ پ)، دیده می‌شود که سیم‌ها بسوی هم کشیده می‌شوند. این پدیده نیازمند توجیه فیزیکی است. برای توصیف وضعیت شکل (۹-۱ ب) شاید منطقی به نظر برسد که بگوییم در هر دو سیم بارهای هم‌نام حرکت می‌کنند. چون بارهای هم‌نام یکدیگر را می‌رانند، در نتیجه سیم‌های حامل بارهای هم‌نام باید از هم دور شوند. این توصیف به ظاهر

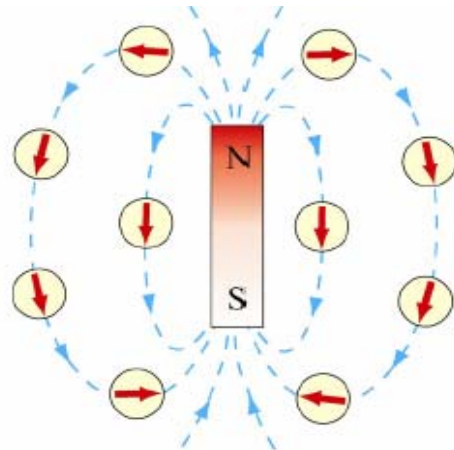
پذیرفتنی است، اما نادرست است. برای این که نادرست بون آن را نشان دهید، چیدمان شکل (۹-۱ پ) را در نظر بگیرید. در این چیدمان شرایط را به گونه‌ای فراهم کردیم که جریان در سیم‌ها هم‌سو باشند. این بار دیده می‌شود که سیم‌ها از هم دور نمی‌شوند، بلکه به یکدیگر نزدیک می‌شوند. سیم‌ها حالا یکدیگر را می‌ربایند. در واقع اگر یک بار آزمون را در بین دو سیم نگه دارید، خواهید دید که به آن نیرو وارد نمی‌شود. یا اگر بین دو سیم یک صفحه‌ی رسانا قرار دهید، تاثیری بر روی نیروهای رانشی و ربایشی بین دو سیم حامل جریان نخواهد داشت. پس، می‌توان نتیجه گرفت که سرشت نیرویی که به رانش و ربایش سیم‌های حامل جریان می‌انجامد از نوع نیروی الکتروستاتیکی نیست. این نخستین رویارویی ما با نیروی مغناطیسی است. آزمایش با دو سیم نشان می‌دهد که سیم‌ها از نظر باری خنثی اند. البته، الکترون‌ها در سیم حرکت می‌کنند و در سیم‌ها جریان الکتریکی وجود دارد، اما تعداد بارهای منفی و مثبت در هر بخش سیم برابرند. در این فصل خواهیم دید که اگر بار الکتریکی چشمه‌ای حرکت کند، افزون بر این که در فضای پیرامونش میدان الکتروستاتیکی E ایجاد می‌کند، میدان دیگری هم تولید می‌کند که میدان مغناطیسی B نام دارد. سیم حامل جریان همانند یک آهن ربا رفتار می‌کند.

هر جسمی که بار الکتریکی داشته باشد، در تمام نقاط فضا میدان الکتریکی E به وجود می‌آورد. یعنی، بار الکتریکی چشمه‌ی میدان الکتریکی است. یک آهن ربا میله‌ای هم میدان مغناطیسی B تولید می‌کند. اگر قطب‌نمایی را به آهن ربا نزدیک کنید، خط‌های میدان مغناطیسی را می‌توانید تشخیص دهید. عقربه‌ی قطب‌نما در راستای خط‌های میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد. این وضعیت در شکل (۹-۲) نشان داده شده است. توجه کنید که آهن ربا میله‌ای دو قطب دارد: قطب شمال (N) و قطب جنوب

(S). میدان‌های مغناطیسی در این قطب‌ها قوی‌تر است. خط‌های میدان مغناطیسی از قطب شمال آغاز می‌شوند و در قطب جنوب پایان می‌گیرند. همین آزمایش را می‌توان با سیم حامل جریان انجام داد. اگر قطب‌نمایی را در نزدیکی سیم حامل جریان قرار دهید، می‌بینید که عقربه‌ی قطب‌نما به سوی سیم و یا در جهت دور شدن از سیم قرار نمی‌گیرد، بلکه در سویی قرار می‌گیرد



شکل ۳-۹ جهت میدان مغناطیسی سیم حامل



شکل ۲-۹ میدان مغناطیسی آهن ربای میله‌ای

که حول سیم می‌چرخد. در واقع اگر سیم را برابر شکل (۳) با دست راست به گونه‌ای بگیرید که انگشت شست در جهت جریان باشد، آنگاه خمش چهار انگشت دیگر در جهت میدان مغناطیسی خواهد بود. یک چنین میدانی چگونه می‌تواند سیم موازی حامل جریان را که در نزدیکی خود قرار دارد از خود براند و یا به سوی خود بکشد؟ به زودی به این پرسش پاسخ خواهیم داد. آزمایشی که وجود میدان مغناطیسی را در اطراف سیم حامل جریان الکتریکی نشان داد، آزمایش هانس کریستین اورستد* بود. او در زمستان ۱۸۲۰-۱۸۱۹ در کلاس درسش سیمی را به باتری وصل کرد و از آن جریان گذراند و سپس سیم را در جهت عمود بر عقربه‌ی قطب‌نما قرار داد. هیچ اتفاقی بر عقربه نیفتاد. پس از پایان درس، سیم حامل جریان را موازی عقربه‌ی قطب‌نما قرار داد. این بار عقربه چرخید. وقتی جهت جریان را وارون کرد، عقربه در سوی مخالف چرخید. با اعلام این خبر، آزمایش‌های زیادی انجام گرفت. طولی نکشید که آمپر، فاراده و دیگران، اثرهای مغناطیسی جریان الکتریکی را توصیف کردند. دوازده سال پس از آزمایش اورستد، فاراده القاء الکترومغناطیسی را کشف کرد. سرانجام، مکسول توانست الکترومغناطیس کلاسیک را به زبان ریاضی فرمول‌بندی کند. هرتز با نمایش امواج الکترومغناطیسی در سال ۱۸۸۸، شکوه این نظریه را نشان داد. ریشه‌های تاریخی نظریه‌ی نسبیت خاص هم در الکترومغناطیس است. در واقع، عنوان مقاله‌ای که اینشتین در سال ۱۹۰۵ به چاپ رساند و نظریه‌ی نسبیت خاص خود را به جهانیان اعلام کرد، "نظریه‌ی نسبیت" نبود. عنوان آن "درباره‌ی الکترودینامیک اجسام متحرک" بود.

بارهای الکتریکی را می‌توان منزوی کرد. به یاد بیاورید که یک بار الکتریکی نقطه‌ای را تک قطبی الکتریکی نامیدیم. اما دو قطب مغناطیسی همیشه به صورت جفت ظاهر می‌شوند. نمی‌توان فقط قطب شمال یا قطب جنوب مغناطیسی داشت. اگر یک آهن‌ربای میله‌ای را همانند شکل (۴-۹) به دو نیم کنید دو آهن‌ربای میله‌ای به وجود می‌آید که هر کدام قطب جنوب و قطب شمال خود را دارند. به بیان دیگر "تک قطبی" مغناطیسی به طور منزوی وجود ندارد. در برخی نظریه‌ها، وجود تک قطبی مغناطیسی پیش

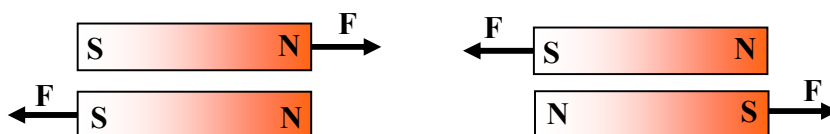
* Hans Christian Oersted

◊ On the Electrodynamics of Moving Bodies

بینی می‌شود و به طور نظری جالب اند، با وجود این، تاکنون کسی نتوانسته است آن را به طور تجربی پیدا کند. اگر دو آهنربای میله‌ای را به هم نزدیک کنید، می‌بینید که قطب‌های هم‌نام یکدیگر را می‌رانند و قطب‌های ناهم‌نام یکدیگر را می‌ربایند. در شکل (۹-۵) این وضعیت‌ها را می‌توانید ببینید.



شکل ۹-۴ قطب مغناطیسی منزوی وجود ندارد



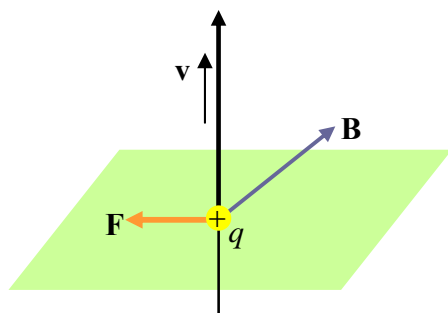
شکل ۹-۵ نیروی ربایشی و رانشی مغناطیسی

۲- تعریف میدان مغناطیسی و قانون نیروی لورنتس

چگونه می‌توان میدان مغناطیسی را تعریف کرد؟ میدان الکتریکی E را به صورت نیرو بر واحد بار الکتریکی نوشتیم

$$E = \frac{F}{q} \quad (9-1)$$

اما، تک قطبی مغناطیسی وجود ندارد که جای بار الکتریکی را بگیرد. بنابراین، میدان مغناطیسی B را باید به گونه‌ی دیگری تعریف کرد. بار الکتریکی q را در نظر بگیرید که برابر شکل (۹-۶) با سرعت v در ناحیه‌ای از فضا حرکت می‌کند. فرض کنید که در این ناحیه میدان مغناطیسی B وجود دارد که جهتش به سوی درون صفحه است. به طور تجربی می‌توان نکات زیر را مشاهده کرد.



شکل ۹-۶ جهت نیروی

۱- اندازه‌ی نیروی مغناطیسی F_B که به بار الکتریکی وارد می‌شود، با مقدار بار q و سرعت v آن متناسب است.

۲- اندازه و جهت F_B به B و v وابسته است.

۳- وقتی که B و v موازی اند، اندازه‌ی F_B صفر می‌شود. وقتی که B با v زاویه‌ی θ می‌سازد جهت F_B به هر دوی B و v عمود و اندازه‌اش با $\sin \theta$ متناسب می‌شود.

۴- وقتی علامت بار q از مثبت به منفی یا برعکس تغییر می‌کند، جهت F_B هم وارون می‌شود.

این مشاهده‌ها را می‌توان در رابطه‌ی (۹-۲) خلاصه و با آن بیان کرد.

$$F_B = q(v \times B) \quad (9-2)$$

رابطه‌ی (۹-۲) را می‌توان تعریف عملی میدان مغناطیسی B در نقطه‌ای از فضا دانست. نیروی مغناطیسی F_B تنها بخشی از نیرویی است که به بار q وارد می‌شود، بخشی که به متحرک بودن آن مربوط است. در این فصل می‌خواهیم ببینیم چرا نیروی

متناسب با سرعت وجود دارد. متناسب بودن این نیرو با v به راستی چشمگیر است. نیروی الکتروستاتیکی $F_e = qE$ که به بار q وارد می‌شود به سرعت بستگی ندارد. اندازه‌ی نیروی مغناطیسی

$$F_B = |q|vB \sin \theta \quad (9-3)$$

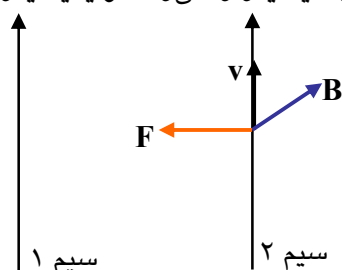
است. توجه کنید که F_B همواره بر v و بر B عمود است.

در یکاهای SI، یکای میدان مغناطیسی تسلا[†] (T) است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$1 \text{ Tesla} = \frac{1 \text{ N}}{\text{C.m/s}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A.m}} \quad (9-4)$$

یکای دیگری که از آن استفاده می‌شود گاوس (G) است. رابطه‌ی بین تسلا و گاوس به صورت $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$ است.

اینک می‌توانیم به پرسشی که در بالا مطرح کردیم، پاسخ دهیم: دو سیم حامل جریان چگونه یکدیگر را می‌رانند و یا یکدیگر را می‌ربایند؟ برابر شکل (9-7) سیم سمت چپ در مکان سیم سمت راست



میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند. جهت این میدان در مکان سیم ۲ به

سوی درون صفحه است. بردار سرعت بارها در سیم ۲ روبه بالا است

و جهت نیرو به سمت چپ است. این همان وضعیتی است که در شکل

(9-1) وجود دارد. اگر جهت بردار سرعت در سیم ۲ رو به پایین

باشد، جهت نیروی F به سمت راست خواهد شد. یعنی دو سیم حامل

جریان یکدیگر را خواهند راند. این وضعیت شکل (9-1) ب) است.

شکل 9-7 نیروی مغناطیسی بین دو سیم حامل

رابطه‌ی (9-2) به درستی این رفتارها را توصیف می‌کند. اگر رابطه‌های (9-1) و (9-2) را با هم ترکیب کنیم قانون نیروی

لورنتس[‡] به دست می‌آید

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \quad (9-5)$$

نیروی لورنتس نیروی کل الکترومغناطیسی است که به بار q وارد می‌شود. رابطه‌ی (9-5) می‌گوید اگر بار الکتریکی q در

ناحیه‌ای از فضا که شامل میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی است، با سرعت v حرکت کند هم نیروی الکتریکی و هم نیروی

مغناطیسی به آن وارد می‌شود. رابطه‌ی (9-5) جمع برداری این دو نیرو است. توجه کنید که اگر سرعت بار q صفر باشد،

اگرچه در میدان مغناطیسی قرار دارد، اما به آن نیروی مغناطیسی وارد نمی‌شود و $F_B = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ می‌شود. در این

صورت به بار q فقط نیروی الکتریکی به آن وارد می‌شود. بار الکتریکی ساکن وجود میدان مغناطیسی را حس نمی‌کند.

توجه کنید که رابطه‌ی (9-5) را ما اثبات نکردیم. مثل قانون کولمب، قانون نیروی لورنتس هم فرض نظریه است و درستی آن را

آزمایش نشان می‌دهد. برای یافتن نیروی لورنتس باید روش محاسبه‌ی میدان مغناطیسی B را بیاموزیم (وقتی که بار الکتریکی

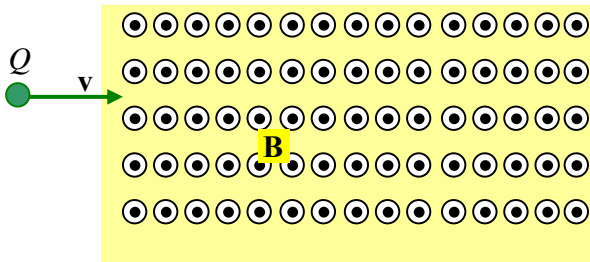
حرکت می‌کند، قاعده‌ی محاسبه‌ی میدان الکتریکی هم پیچیده‌تر می‌شود و در نتیجه میدان E را هم باید حساب کنیم). این

موضوع فصل آینده است. پیش از پرداختن به آن، رفتار ذره‌ی باردار را در میدان مغناطیسی یکنواخت بررسی می‌کنیم.

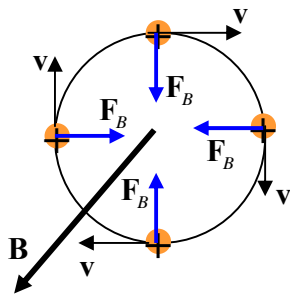
مثال 9-1 در شکل (9-8) ذره‌ای به جرم m و بار Q با سرعت اولیه‌ی v به ناحیه‌ای از فضا با میدان مغناطیسی یکنواخت B

[†] Tesla

[‡] Lorentz force law



شکل ۸-۹ ذره ی باردار در میدان مغناطیسی یکنواخت
 کرد. نیروی مغناطیسی به سوی مرکز دایره است و اندازه ی آن مقدار ثابت $|\mathbf{F}_B| = QvB$ است. این نیرو با نیروی مرکزگرای



شکل ۹-۹ مسیر ذره ی باردار با سرعت
 اولیه ی \mathbf{v} عمود بر میدان یکنواخت \mathbf{B} .

وارد می شود. جهت میدان بر صفحه عمود و به سوی بیرون است. جرم m چه مسیری را در این میدان خواهد پیمود؟
 حل: در هر لحظه نیروی مغناطیسی بر سرعت بار عمود است. این دقیقاً همان نیروی است که برای ایجاد حرکت دایره ای لازم است. در شکل (۹-۹) نیروی وارد به بار مثبت Q در چند نقطه نشان داده شده است. شعاع مسیر را می توان به آسانی حساب

$$F_{\text{cent.}} = m(v^2/R) \quad \text{بنابراین}$$

$$QvB = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow p = QBR \quad (9-6)$$

که در آن p تکانه ی جرم باردار است. رابطه ی (۹-۶) فرمول سیکلوترون است؛ چون حرکت جرم را در سیکلوترون توصیف می کند. سیکلوترون وسیله ای است که با آن به ذره های باردار شتاب می دهند. از رابطه ی (۹-۶) می توان شعاع مسیر، R ، را به دست آورد: $R = mv/QB$. اگر بار Q مثبت باشد، حرکت ساعتگرد و اگر بار ذره منفی باشد، حرکت آن پاد ساعتگرد است. دوره ی T

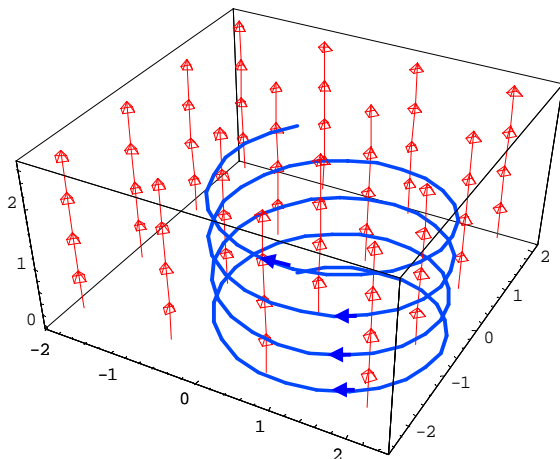
(زمان یک دور چرخش) حرکت عبارت است از

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi mv}{v QB} = \frac{2\pi m}{QB} \quad (9-7)$$

و سرعت زاویه ای یا بسامد سیکلوترون (ω) برابر

$$\omega = 2\pi f = \frac{v}{R} = \frac{QB}{m} \quad (9-8)$$

است. در مثال بالا فرض کردیم ذره در صفحه ای حرکت می کند که بر میدان \mathbf{B} عمود است. اگر ذره با سرعت اولیه ای وارد میدان شود که مولفه ای هم موازی میدان \mathbf{B} داشته باشد، v_{\parallel} ، بنابه رابطه ی (۹-۲) نیروی مغناطیسی تاثیری در این مولفه نخواهد داشت و ذره در مسیری مارپیچ همانند شکل (۹-۱۰) حرکت خواهد کرد.

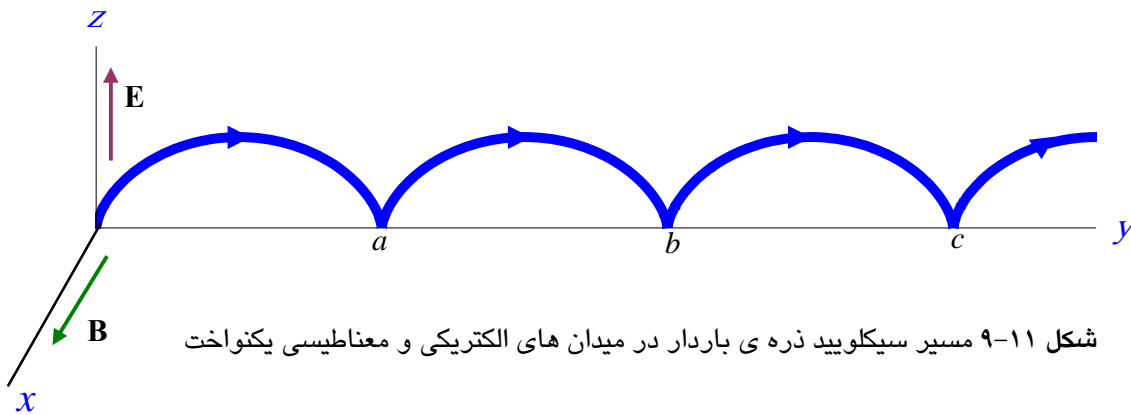


شکل ۱۰-۱ مسیر مارپیچی ذره ی باردار با مولفه ی
 سرعت v_{\parallel} موازی میدان یکنواخت \mathbf{B}

مثال ۲-۹ حرکت سیکلوئیدی: اگر افزون بر میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} ، میدان الکتریکی \mathbf{E} عمود بر میدان مغناطیسی هم به ذره ی باردار اثر کند، مسیر ذره جالب تر می شود. فرض کنید میدان

\mathbf{B} در راستای محور x و میدان \mathbf{E} در جهت محور z باشد. ذره از مبداء مختصات با سرعت اولیه ی صفر رها می شود. مسیر ذره چگونه خواهد بود؟

حل [۱]: نخست، به طور کیفی مسئله را بررسی کنید. ذره در آغاز بدون حرکت و سرعتش صفر است. بنابراین، نیروی مغناطیسی به آن وارد نمی‌شود. اما میدان الکتریکی به ذره‌ی باردار نیرو وارد می‌کند و در جهت محور z به آن شتاب می‌دهد. با سرعت گرفتن ذره، نیروی مغناطیسی به وجود می‌آید و بنا به رابطه‌ی (۹-۲)، ذره‌ی باردار را برابر شکل (۹-۱۱) به سمت راست منحرف می‌کند. هر چه سرعت ذره بیشتر باشد نیروی مغناطیسی \mathbf{F}_B وارد به آن نیز قوی‌تر است. این نیرو ذره را به حرکت دایره‌ای وادار می‌کند و سرانجام آن را به سوی m حور y منحرف می‌کند. در این هنگام ذره در جهت خلاف میدان الکتریکی حرکت می‌کند و در نتیجه، نیروی الکتریکی سرعت ذره را کند می‌کند. با کاهش سرعت، نیروی مغناطیسی کاهش می‌یابد و نیروی الکتریکی چیره می‌شود و ذره را در نقطه‌ی a به سکون وامی‌دارد. این فرایند دوباره از نقطه‌ی a خود را تکرار می‌کند و ذره را به نقطه‌ی b می‌رساند و



اینک به حل مسئله می‌پردازیم. در راستای محور x به ذره نیرویی وارد نمی‌شود. مکان ذره را در هر زمان t می‌توان با بردار $(0, y(t), z(t))$ نشان داد. بردار سرعت ذره عبارت است از $\mathbf{v} = (0, \dot{y}, \dot{z})$. چون $\mathbf{B} = (B, 0, 0)$ است، ضرب برداری $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ را به آسانی می‌توان حساب کرد:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = (B\dot{z})\hat{\mathbf{j}} - (B\dot{y})\hat{\mathbf{k}} \quad (9-9)$$

از قانون دوم نیوتون داریم

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] = Q[(E)\hat{\mathbf{k}} + (B\dot{z})\hat{\mathbf{j}} - (B\dot{y})\hat{\mathbf{k}}] = m\mathbf{a} = m[\dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}] \quad (9-10)$$

یا اگر مولفه‌های $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ را جداگانه بنویسیم داریم

$$QB\dot{z} = m\dot{y} \quad , \quad QE - QB\dot{y} = m\dot{z} \quad (9-11)$$

در رابطه‌ی (۹-۸) بسامد سیکلوترون را با $\omega = QB/m$ تعریف کردیم. معادله‌های حرکت، رابطه‌های (۹-۱۱)، برحسب این کمیت به صورت زیر درمی‌آیند

$$\ddot{y} = \omega\dot{z} \quad , \quad \ddot{z} = \omega\left(\frac{E}{B} - \dot{y}\right) \quad (9-12)$$

[۱] برگرفته از: David J. Griffiths, "Introduction To Electrodynamics", 2nd Ed. Printice Hall, 1989.

این ها معادله‌های دیفرانسیل جفت شده اند. اگر از اولی نسبت به زمان مشتق بگیرید، \ddot{z} را می‌توانید از معادله‌ی دوم حذف کنید. حاصل، اما معادله‌ی دیفرانسیل درجه سه برحسب \ddot{y} و \ddot{z} خواهد شد. پاسخ‌های عمومی به صورت زیر اند

$$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B}t + C_3 \quad (9-13)$$

$$z(t) = C_4 \cos \omega t - C_2 \sin \omega t + C_5$$

چهار ثابت C_i با چهار شرط اولیه $y(0) = z(0) = 0$ و $\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$ تعیین می‌شوند و خواهیم داشت

$$y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin \omega t) \quad , \quad z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos \omega t) \quad (9-14)$$

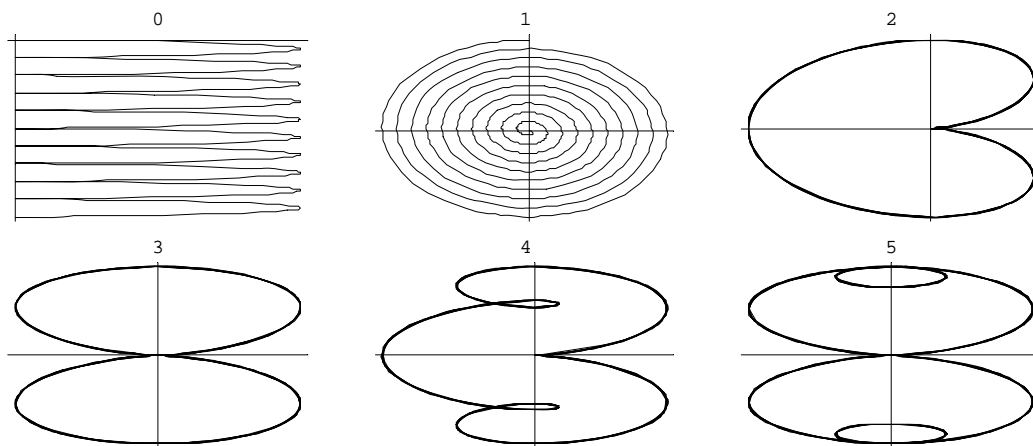
با تعریف $R \equiv E/\omega B$ و با استفاده از $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ می‌توان سینوس و کسینوس‌ها را حذف کرد. معادله‌ی دایره‌ای به شعاع R به دست می‌آید که مرکزش در $(0, R\omega t, R)$ قرار دارد و در راستای محور y با سرعت ثابت $v = \omega R = E/B$ حرکت می‌کند. مسیر حرکت در شکل (9-11) نشان داده شده است.

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2 \quad (9-15)$$

حل کامل این مسئله و جزئیات ریاضی آن در پیوست همین فصل آمده است.

مسئله‌های محاسباتی: ۱- مثال بالا را نگارنده با استفاده از نرم افزار Mathematica حل کرده است. بکشید نتایج بالا را با استفاده از Mathematica یا هر روش دیگری به طور عددی حل کنید.

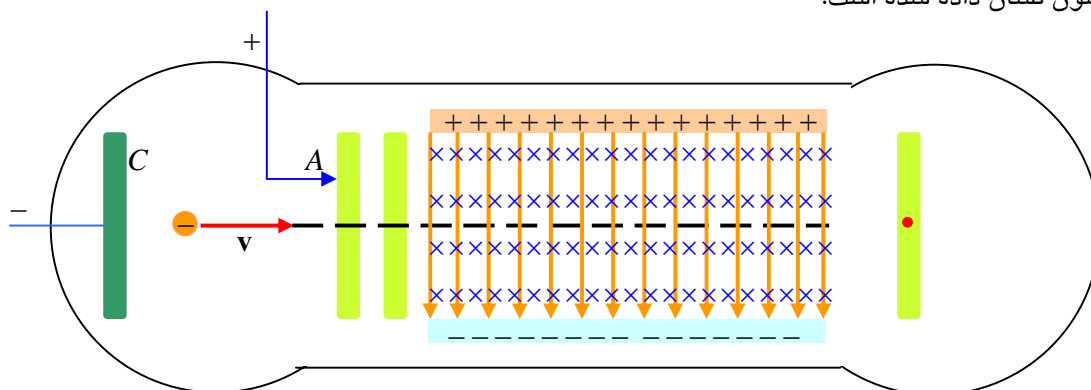
۲- حرکت ذره‌ی باردار در میدان مغناطیسی یکنواخت و میدان الکتریکی وابسته به زمان. ذره‌ای با بار q از حالت سکون از مبدا مختصات رها شده است. میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{k}}$ در راستای محور z و میدان الکتریکی وابسته به زمان $\mathbf{E} = E_0 \cos \omega t \hat{\mathbf{i}}$ در راستای محور x اند. حرکت ذره را بیابید و مسیر آن را برای مقادیر متفاوت پارامترهای $\{\omega, E, B\}$ رسم کنید. گزیده‌ای از مسیرها در شکل (9-12) نشان داده شده است



شکل ۹-۱۲ گزیده‌ای از مسیرهای حرکت ذره‌ی باردار در میدا یکنواخت \mathbf{B} و میدان وابسته به زمان $\mathbf{E}(t)$ برای پارامترهای مختلف.

۳- کاربردهای قانون نیروی لورنتس

سرند سرعت: وقتی ذره بارداری در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی باشد، نیروی کل وارد بر آن با قانون لورنتس، رابطه‌ی (۹-۴)، داده می‌شود. با اعمال هر دو میدان \mathbf{E} و \mathbf{B} می‌توان ذره‌ای را که با سرعت معین حرکت می‌کند از بقیه‌ی ذره‌ها جدا کرد. جی. جی تامسون از این اصل برای اندازه‌گیری نسبت بار به جرم الکترون استفاده کرد. در شکل (۹-۱۳) نمایی از ابزار تامسون نشان داده شده است.

شکل ۹-۱۳ ابزار تامسون برای اندازه‌گیری e/m الکترون

الکترون‌های با جرم m و بار $q = -e$ از کاتد C گسیل می‌شوند. بین کاتد C و آند A اختلاف پتانسیل $V_A - V_C = \Delta V$ وجود دارد که به الکترون شتاب می‌دهد. تغییر انرژی پتانسیل الکترون‌ها برابر است با مقدار کاری که برای شتاب دادن آنها انجام گرفته است: $\Delta U = W = q\Delta V = -e\Delta V$. از پایستگی انرژی می‌دانیم که افزایش انرژی جنبشی الکترون

$$\Delta T = -\Delta U = mv^2/2 \quad \text{است. پس، سرعت الکترون عبارت است از}$$

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} \quad (9-15)$$

این الکترون‌ها وارد ناحیه‌ای می‌شوند که میدان الکتریکی رو به پایین وجود دارد. در این ناحیه، الکترون با بار منفی به سوی بالا منحرف می‌شود. افزون بر میدان الکتریکی، در این ناحیه میدان مغناطیسی به سوی درون صفحه هم وجود دارد و به الکترون نیروی مغناطیسی $\mathbf{F}_B = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ و به سوی پایین وارد می‌کند. پس، به الکترون دو نیرو وارد می‌شود، یکی رو به بالا و دیگری رو به پایین. وقتی اندازه‌ی این دو نیرو برابر باشند، یکدیگر را حذف می‌کنند و الکترون در مسیر راست خط حرکت می‌کند. از رابطه‌ی (۹-۴) دیده می‌شود که دو نیرو یکدیگر را وقتی حذف می‌کنند که داشته باشیم $eE = evB$ یا

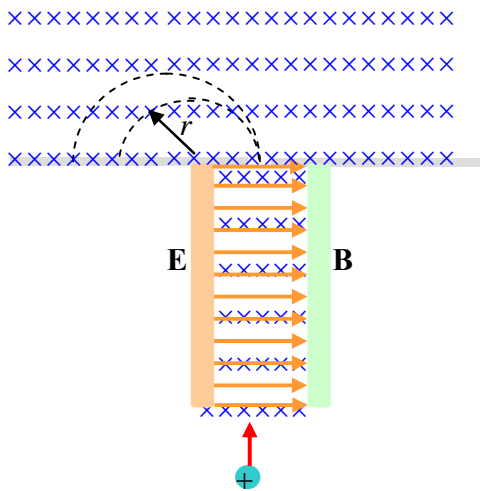
$$v = \frac{E}{B} \quad (9-16)$$

به بیان دیگر، فقط ذره‌های با سرعت $v = E/B$ روی خط راست حرکت خواهند کرد و ذره‌های با سرعت‌های دیگر یا به بالا و یا به پایین منحرف خواهند شد. از ترکیب دو رابطه‌ی (۹-۱۵) و (۹-۱۶) داریم

$$\frac{e}{m} = \frac{E^2}{2(\Delta V)B^2} \quad (9-17)$$

با اندازه‌گیری E ، ΔV و B نسبت بار به جرم الکترون به دست می‌آید. دقیق‌ترین مقدار اندازه‌گیری شده تا به امروز $e/m = 1,70882 \times 10^{-11} \text{ C/Kg}$ است.

طیف سنج جرم: برای اندازه‌گیری جرم اتم روش‌های مختلف وجود دارد. یکی از آنها استفاده از طیف سنج جرم است. شمایی از آن در شکل (۹-۱۴) دیده می‌شود. ذره‌ی با بار $+q$ (یعنی اتم یونیده) نخست از سرند سرعت می‌گذرد. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی سرند سرعت در رابطه‌ی $E = vB$ (رابطه‌ی (۹-۱۶)) صدق می‌کنند. بنابراین، ذره در مسیر راست‌خط حرکت می‌کند و سپس وارد ناحیه‌ای می‌شود که میدان مغناطیسی دیگر B_0 به سوی درون صفحه قرار دارد. در این ناحیه ذره در مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. شعاع دایره برابر است با



شکل ۹-۱۴ شمای طیف سنج جرم

و مغناطیسی سرند سرعت در رابطه‌ی $E = vB$ (رابطه‌ی (۹-۱۶)) صدق می‌کنند. بنابراین، ذره در مسیر راست‌خط حرکت می‌کند و سپس وارد ناحیه‌ای می‌شود که میدان مغناطیسی دیگر B_0 به سوی درون صفحه قرار دارد. در این ناحیه ذره در مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. شعاع دایره برابر است با

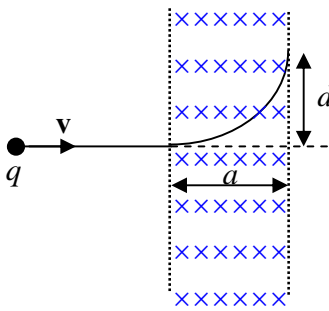
$$r = \frac{mv}{qB_0} \quad (9-18)$$

بنابراین، شعاع مسیر به جرم ذره بستگی دارد. اتم‌های با جرم‌های متفاوت در مسیرهای متفاوت حرکت می‌کنند و سرانجام با صفحه‌ی عکاسی برخورد می‌کنند. چون $v = E/B$ است، پس جرم ذره را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$m = \frac{qB_0 r}{v} = \frac{qB_0 Br}{E} \quad (9-19)$$

میدان‌های B_0 ، B و E شناخته شده‌اند، چون آنها را خودمان آراسته‌ایم. با اندازه‌گیری شعاع r اندازه‌ی جرم هر دسته از اتم‌ها به دست می‌آید.

مثال ۹-۳ ذره‌ی با بار q وارد ناحیه‌ای از فضا می‌شود که میدان مغناطیسی در آنجا یکنواخت B و به سوی درون صفحه است. پهنای این ناحیه a است. ذره برابر شکل (۹-۱۵) در میدان مغناطیسی به اندازه‌ی d از مسیر اصلی خود به بالا منحرف می‌شود. بار ذره مثبت است یا منفی؟ تکانه‌ی ذره را برحسب a ، d ، q و B به دست آورید.



شکل ۹-۱۵ انحراف ذره در میدان

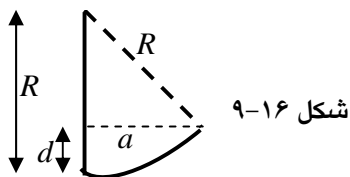
حل: چون جهت $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ رو به بالا است و این همچنین جهت نیروی مغناطیسی است، بنابراین q باید مثبت باشد. نخست شعاع R خم مسیر را برحسب a و d به دست آورید. از شکل (۹-۱۶) دیده می‌شود که

$$2Rd = a^2 + d^2 \quad \text{یا} \quad (R-d)^2 + a^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 2Rd + d^2 + a^2 = R^2$$

و در نتیجه $R = (a^2 + d^2) / 2d$. از فرمول سیکلوترون داریم $p = qBR$ بنابراین،

$$p = qB \left(\frac{a^2 + d^2}{2d} \right)$$

مثال ۹-۴ مسیر ذره‌ی مثال ۹-۲ را با شرایط اولیه زیر بیابید و آن‌ها را رسم کنید. ذره از مبدا با سرعت‌های زیر حرکت می‌کند. (الف): $\mathbf{v}(0) = (E/B) \hat{j}$ ، (ب): $\mathbf{v}(0) = (E/2B) \hat{j}$ و (پ): $\mathbf{v}(0) = (E/B)(\hat{j} + \hat{k})$.
حل: های عمومی با رابطه (۹-۱۲) داده شده‌اند.



شکل ۹-۱۶

$$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{E}{B}t + C_3, \quad z(t) = C_4 \cos \omega t - C_1 \sin \omega t + C_5 \quad (9-20)$$

(الف): از $y(0) = z(0) = 0$ و $\dot{y}(0) = E/B$ و $\dot{z}(0) = 0$ برای به دست آوردن C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 استفاده کنید. داریم

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_3 = 0, \quad \dot{y}(0) = \omega C_2 + \frac{E}{B} = \frac{E}{B} \Rightarrow C_2 = 0 \quad (9-21)$$

$$z(0) = 0 \Rightarrow C_4 + C_5 = 0, \quad \dot{z}(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0, \quad \therefore C_5 = 0$$

بنابراین، داریم

$$y(t) = \frac{E}{B}t; \quad z(t) = 0 \quad (9-22)$$

مسیر، خط راستی در امتداد محور y است و در شکل (9-17) نشان داده شده

است. آیا این پاسخ پذیرفتنی است؟ نیروی مغناطیسی عبارت است از

$$q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -q(E/B)B \hat{\mathbf{k}} = -qE \hat{\mathbf{k}}$$

می‌کند. پس، نیروی برآیند وارد به ذره صفر است. بنابراین، مسیر خط راستی

با سرعت ثابت می‌شود.

(ب): با فرض این که ذره از مبدا شروع به حرکت می‌کند، داریم $C_2 = -C_1$ و $C_3 = -C_5$. پس

$$\dot{z}(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \Rightarrow C_5 = 0$$

$$\dot{y}(0) = \frac{E}{B} \Rightarrow C_1 \omega + \frac{E}{B} = \frac{E}{B} \Rightarrow C_1 = -\frac{E}{\omega B} = -C_5$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{E}{\omega B} \sin \omega t + \frac{E}{B}t; \quad z(t) = -\frac{E}{\omega B} \cos \omega t + \frac{E}{\omega B} \quad (9-23)$$

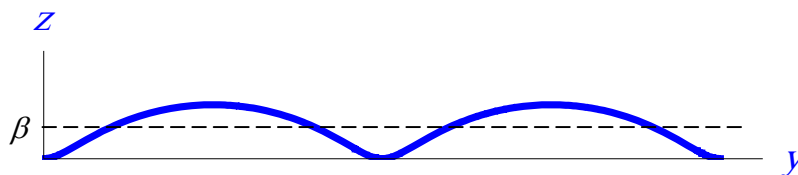
یا

$$y(t) = \frac{E}{\omega B} [\omega t - \sin \omega t]; \quad z(t) = \frac{E}{\omega B} [1 - \cos \omega t] \quad (9-24)$$

با تعریف $\beta \equiv E/2B\omega$ رابطه‌های بالا به صورت زیر درمی‌آیند

$$\begin{cases} y = \beta [\omega t - \sin \omega t] \Rightarrow (y - 2\beta \omega t) = -\beta \sin \omega t \\ z = \beta (1 - \cos \omega t) \Rightarrow (z - \beta) = -\beta \cos \omega t \end{cases} \Rightarrow (y - 2\beta \omega t)^2 + (z - \beta)^2 = \beta^2 \quad (9-25)$$

که دایره‌ای با شعاع β و به مرکز $z_0 = \beta$ و $y_0 = 2\beta \omega t$ است و در شکل (9-18) نشان داده شده است.



شکل 9-18 مسیر ذره (مثال 9-4 ب)

(پ): در این حالت داریم

$$\dot{z}(0) = \dot{y}(0) = \frac{E}{B} \Rightarrow -C_1 \omega = \frac{E}{B} \Rightarrow C_1 = -C_2 = -\frac{E}{\omega B} \quad (9-26)$$

$$C_v \omega + \frac{E}{B} = \frac{E}{B} \Rightarrow C_v = C_\xi = 0 \quad (9-27)$$

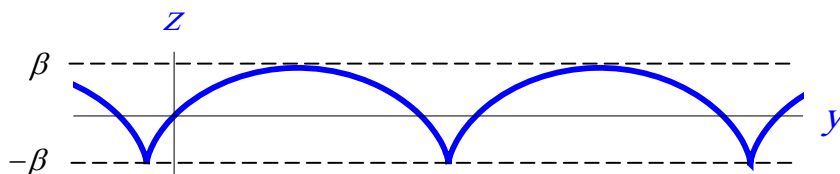
$$\Rightarrow y(t) = -\frac{E}{\omega B} \cos \omega t + \frac{E}{B} t + \frac{E}{\omega B}; \quad z(t) = \frac{E}{\omega B} \sin \omega t \quad (9-27)$$

$$\therefore y(t) = \frac{E}{\omega B} [\omega t - \cos \omega t]; \quad z(t) = \frac{E}{\omega B} \sin \omega t \quad (9-29)$$

و بنابراین، با تعریف $\beta \equiv E/B \omega$ داریم $z = \beta \sin \omega t$; $y - \beta(1 + \omega t) = -\beta \cos \omega t$. با حذف سینوس و کسینوس بین این دو به دست می آید

$$[y - \beta(1 + \omega t)]^2 + z^2 = \beta^2 \quad (9-30)$$

که معادله‌ی دایره‌ای به شعاع β و به مرکز $z_0 = 0$ و $y_0 = \beta(1 + \omega t)$ است. شکل مسیر در شکل (۹-۱۹) دیده می‌شود.



۴- کار نیروی مغناطیسی: یک جنبه‌ی قانون نیروی مغناطیسی، رابطه‌ی (۹-۲)، سزاوار توجه ویژه است: \mathbf{F}_B همواره به \mathbf{v} و به \mathbf{B} عمود است و بنابراین، نمی‌تواند سرعت v (و در نتیجه انرژی جنبشی) ذره را تغییر دهد. نیروی مغناطیسی نمی‌تواند سرعت ذره را کم یا زیاد کند. پس، نیروی مغناطیسی کار انجام نمی‌دهد. اگر بار Q به اندازه‌ی $d\mathbf{l} = \mathbf{v} dt$ جابه‌جا شود، کار انجام یافته عبارت است از

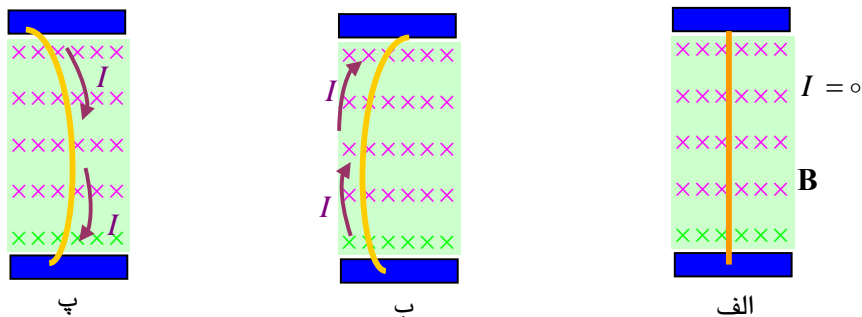
$$dW_B = \mathbf{F}_B \cdot d\mathbf{l} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0 \quad (9-31)$$

همان‌گونه که در مثال‌های بالا دیدیم، نیروی مغناطیسی می‌تواند جهت حرکت ذره را تغییر دهد، اما سرعت آن را تغییر نمی‌دهد. صفر بودن کار نیروی مغناطیسی نتیجه‌ی مستقیم قانون نیروی لورنتس است. در بندرگاه‌ها و جاهای دیگر برای جابه‌جایی بارهای سنگین از جرثقیل‌های مغناطیسی استفاده می‌شود. در این وضعیت‌ها به یقین کار انجام می‌گیرد. اما اگر کار نیروی مغناطیسی صفر است، چه عاملی کار انجام می‌دهد؟ موتور جرثقیل سوخت مصرف می‌کند. و بخشی از سوخت را به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کند تا میدان مغناطیسی ایجاد کند. انرژی الکتریکی (مصرف سوخت) عاملی است که کار انجام می‌دهد. در شتاب دهنده‌های ذرات باریکه‌ی ذره‌های باردار را تا سرعت‌های نزدیک سرعت نور شتاب می‌دهند، ذرات باردار در حلقه‌های بزرگ گردانیده می‌شوند. در این کار از نیروی مغناطیسی برای تغییر جهت حرکت این ذره‌ها استفاده‌ی فراوان می‌شود. این آهن رباها از نوع ابر رسانا هستند و در دماهای بسیار پایین حدود ۲ درجه‌ی کلوین کار می‌کنند. در شتاب دهنده‌ی LHC چندین هزار تا از این آهن رباها به کار رفته است.

۵- نیروی مغناطیسی وارد به سیم حامل جریان الکتریکی

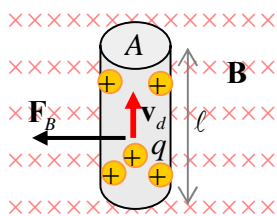
اگر بار الکتریکی در میدان مغناطیسی حرکت کند، به آن نیروی مغناطیسی \mathbf{F}_B وارد می‌شود. جریان الکتریکی در نتیجه‌ی حرکت

مجموعه‌ای بار الکتریکی به وجود می‌آید (این بیان چندان درست نیست. سرعت بارها در سیم بسیار کند است در حالی که جریان در سیم با سرعت نور انتقال پیدا می‌کند. اما برای بحث کنونی ما این مسئله مهم نیست و در آینده چگونگی انتقال سریع جریان را بررسی خواهیم کرد. فعلا می‌پذیریم که جریان در سیم بر اثر جابه‌جایی بار الکتریکی است.) اگر سیم حامل جریان الکتریکی در میدان مغناطیسی قرار گیرد، به سیم حامل جریان نیروی مغناطیسی وارد می‌شود. در شکل (۹-۱) این پدیده را نشان دادیم. اینک دو باره آن را بررسی می‌کنیم و نیروی وارد به طولی از سیم را حساب می‌کنیم. اثر نیروی مغناطیسی بر روی سیم حامل جریان را می‌توان به صورت زیر نشان داد. سیم راست و درازی را برابر شکل (۹-۲۰) از دو قطب مغناطیسی



شکل ۹-۲۰ نیروی مغناطیسی وارد به سیم حامل جریان

آویزان کنید. فرض کنید در ناحیه‌ی بین دو قطب، میدان مغناطیسی به سوی درون صفحه است. اگر از سیم جریان نگذرد (شکل ۹-۲۰ الف) البته به سیم هم نیروی مغناطیسی وارد نمی‌شود. اگر جریان در سیم از پایین به بالا باشد، سیم به سمت چپ خمیده می‌شود (شکل ۹-۲۰ ب) و چنانچه جهت جریان از بالا به پایین باشد (شکل ۹-۲۰ پ) سیم به سمت راست خمیده می‌شود. برای این که نیروی مغناطیسی وارد به سیم را حساب کنیم، قطعه‌ای از سیم به طول ℓ و سطح مقطع A را برابر شکل



(۹-۲۱) در نظر بگیرید. میدان مغناطیسی به سوی درون صفحه است. بارها با سرعت سوق میانگین v_d حرکت می‌کنند. اگر تعداد بارها در واحد حجم را n بنامیم، آنگاه تعداد کل بار موجود در این قطعه سیم $Q_{total} = q(nA\ell)$ است. نیروی مغناطیسی کل وارد به این قطعه سیم عبارت است از

شکل ۹-۲۱ نیروی مغناطیسی وارد به سیم جریان

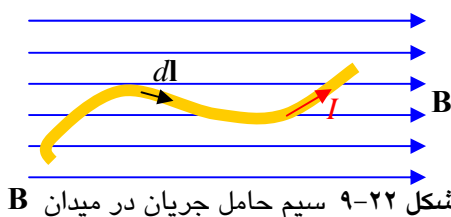
$$\mathbf{F}_B = Q_{total} \mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = qnA\ell(\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}) = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (9-32)$$

در این رابطه $I = nqv_d A$ و \mathbf{l} بردار طول به‌اندازه‌ی ℓ در جهت جریان الکتریکی اند. برای یافتن نیروی مغناطیسی وارد به سیمی با شکل دلخواه، نیروهایی را که به اجزاء سیم وارد می‌شوند با هم جمع می‌کنیم. طول جزء کوچکی از سیم را، همانند شکل (۹-۲۲)، $d\mathbf{l}$ بنامید. نیروی مغناطیسی وارد به این جزء عبارت است از

$$d\mathbf{F}_B = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (9-33)$$

بنابراین، نیروی کل برابر است با

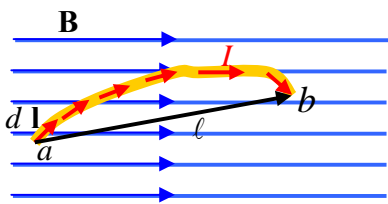
$$\mathbf{F}_B = I \int_a^b (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (9-34)$$



شکل ۹-۲۲ سیم حامل جریان در میدان B

در این انتگرال a و b نقاط انتهایی سیم اند. برای مثال سیم خمیده‌ی شکل (۹-۲۳) را در نظر بگیرید که در میدان مغناطیسی

یکنواخت \mathbf{B} قرار دارد و از آن جریان I می‌گذرد. نیروی مغناطیسی وارد به آن از رابطه‌ی (۹-۳۴) به دست می‌آید و برابر



$$F_B = I \left(\int_a^b d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (9-35)$$

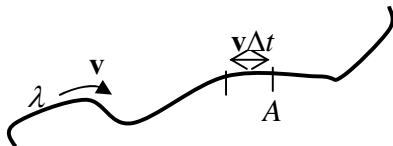
است که در آن \mathbf{l} طول برداری است که از a به سوی b است. اگر سیم حلقه‌ی بسته‌ای با شکل دلخواه تشکیل دهد، مانند شکل (۹-۲۴)، نیروی وارد به حلقه

شکل ۹-۲۳ سیم خمیده حامل جریان I

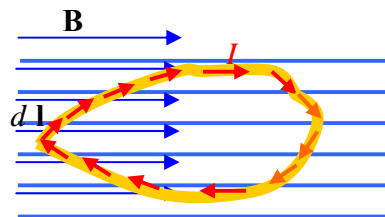
$$\mathbf{F}_B = I \left(\oint d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} \quad (9-36)$$

می‌شود. چون مجموعه‌ی جزء طول‌های $d\mathbf{l}$ یک چند ضلعی بسته می‌سازند، جمع بردارهای متناظرشان صفر می‌شود، یعنی

$$\oint d\mathbf{l} = 0. \text{ بنابراین، نیروی مغناطیسی وارد به حلقه‌ی حامل جریان صفر است: } \mathbf{F}_B = 0.$$



شکل ۹-۲۵ عبور چگالی بار خطی از یک نقطه سیم



شکل ۹-۲۴ حلقه‌ی بسته حامل جریان I در میدان یکنواخت

نکته: تاکنون در این بخش جریان الکتریکی را یک کمیت عددی در نظر گرفتیم. اگر چه این کار معمول است اما درست نیست. چگالی بار خطی λ با سرعت v در سیم حرکت می‌کند، و در آن جریان الکتریکی تولید می‌کند. اندازه‌ی جریان

$$I = \lambda v \quad (9-37)$$

است. چون سرعت یک کمیت برداری است، طبیعی است که بپذیریم، جریان هم یک کمیت برداری است. اندازه‌ی آن در یک سیم با رابطه‌ی (۹-۳۷) داده شده است، اما جهت آن به شکل سیم بستگی دارد. بار موجود در جزء طول $v \Delta t$ سیم شکل (۹-۲۵) برابر $\lambda v \Delta t$ است و در زمان Δt از نقطه‌ی A می‌گذرد. در واقع، جریان در هر نقطه یک بردار است و داریم

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v} \quad (9-38)$$

اما از آن جایی که مسیر جریان را شکل سیم تعیین می‌کند، بیشتر وقت‌ها سرشت برداری جریان به طور روشن نشان داده نمی‌شود. این کوتاهی را ما هم انجام دادیم. اگر بخواهیم آنچه را که گفتیم، درست‌تر بیان کنیم باید نیروی مغناطیسی وارد به طولی از سیم را به جای رابطه‌ی (۹-۳۴) به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{F}_B = \int (\lambda dl)(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) dl \quad (9-39)$$

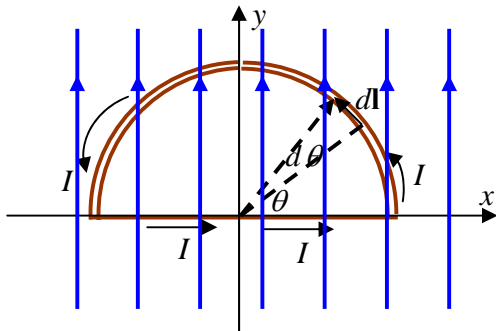
هرگاه \mathbf{I} و $d\mathbf{l}$ هر دو در یک راستا باشند، می‌توان رابطه (۹-۳۹) را به صورت زیر هم نوشت

$$\mathbf{F}_B = \int I (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (9-40)$$

معمولاً اندازه‌ی جریان در طول سیم مقدار ثابتی است. در این صورت می‌توان I را از زیر انتگرال خارج کرد:

$$\mathbf{F}_B = I \int (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (9-41)$$

مثال ۵-۹ نیروی مغناطیسی و نیم حلقه‌ی حامل جریان: نیم حلقه‌ای از یک سیم نیم‌دایره و سیم دیگری که قطر آن است تشکیل شده است و در صفحه‌ی xy قرار دارد. از سیم جریان پادساعتگرد I می‌گذرد. سیم در میدان مغناطیسی یکنواختی



شکل ۹-۲۶ نیم حلقه ی جریان در میدان B

قرار که برابر شکل (۹-۲۶) در راستای $+y$ است. نیروی مغناطیسی که به قسمت نیم‌دایره و قسمت خط راست حلقه وارد می‌شود، کدام اند؟
 حل: میدان مغناطیسی را $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{j}}$ بنامید و نیروهای وارد به قسمت خط راست و نیم‌دایره‌ی سیم را به ترتیب با \mathbf{F}_\parallel و \mathbf{F}_\perp نشان دهید. با استفاده از رابطه‌ی (۹-۳۴) نیروی وارد به قسمت خط راست عبارت است از

$$\mathbf{F}_\parallel = I(\gamma R\hat{\mathbf{i}}) \times (B\hat{\mathbf{j}}) = \gamma IRB \hat{\mathbf{k}} \quad (9-42)$$

که در آن بردار $\hat{\mathbf{k}}$ به سوی بیرون از صفحه است. برای یافتن \mathbf{F}_\perp نخست توجه کنید که جزء طول $d\mathbf{l}$ از نیم‌دایره را می‌توان به صورت

$$d\mathbf{l} = dl \hat{\boldsymbol{\theta}} = R d\theta (-\sin\theta \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \hat{\mathbf{j}})$$

$$d\mathbf{F}_\perp = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = IR d\theta (-\sin\theta \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \hat{\mathbf{j}}) \times (B\hat{\mathbf{j}}) = -IRB \sin\theta d\theta \hat{\mathbf{k}} \quad (9-43)$$

است. پس، دیده می‌شود که $d\mathbf{F}_\perp$ به سوی درون صفحه است. اگر از این رابطه بر روی نیم‌دایره انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\mathbf{F}_\perp = -IBR \hat{\mathbf{k}} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = -\gamma IBR \hat{\mathbf{k}} \quad (9-44)$$

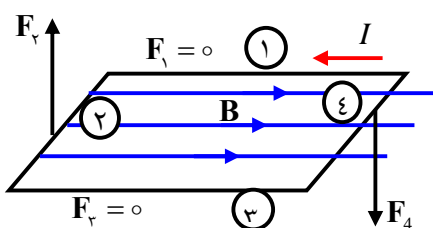
بنابراین، نیروی کل وارد به حلقه‌ی سیم عبارت است از

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\parallel + \mathbf{F}_\perp = (\gamma IRB \hat{\mathbf{k}}) + (-\gamma IRB \hat{\mathbf{k}}) = \mathbf{0} \quad (9-45)$$

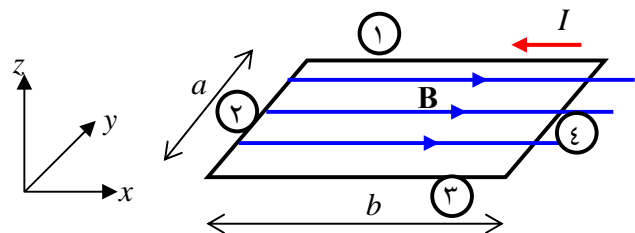
این نتیجه نشان می‌دهد که نیروی مغناطیسی وارد به سیم بسته‌ی حامل جریان صفر است.

۶- گشتاور وارد به حلقه‌ی جریان

شکل (۹-۲۷ الف) وضعیتی را نشان می‌دهد که حلقه‌ی مستطیل‌شکلی در صفحه‌ی xy قرار دارد. از حلقه جریان I می‌گذرد. فرض کنید حلقه در میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{i}}$ (موازی صفحه‌ی حلقه) قرار دارد. روشن است که نیروی مغناطیسی وارد به ضلع‌های ۱ و ۳ صفر است چون بردارهای طول $\mathbf{l}_1 = -b\hat{\mathbf{i}}$ و $\mathbf{l}_3 = b\hat{\mathbf{i}}$ با میدان B موازی اند. بنابراین، $d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ است.



شکل ۹-۲۷ ب: نیروهای وارد بر حلقه‌ی جریان



شکل ۹-۲۷ الف: حلقه ی جریان در میدان B

نیروی مغناطیسی وارد به ضلع‌های ۲ و ۴ غیر صفر و برابر

$$\mathbf{F}_2 = I(-a\hat{\mathbf{j}}) \times (B\hat{\mathbf{i}}) = IaB \hat{\mathbf{k}} \quad , \quad \mathbf{F}_4 = I(a\hat{\mathbf{j}}) \times (B\hat{\mathbf{i}}) = -IaB \hat{\mathbf{k}} \quad (9-46)$$

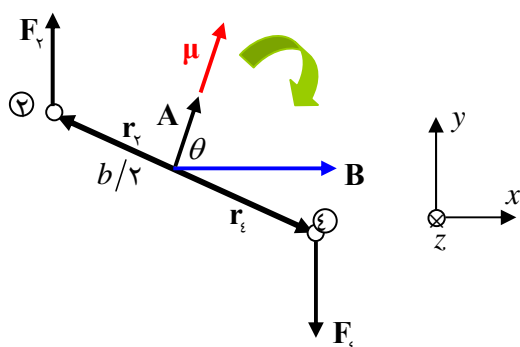
اند. نیروی \mathbf{F}_\perp به سوی بیرون از صفحه و نیروی \mathbf{F}_\parallel به درون صفحه اند. نیروی کل وارد به حلقه، همان گونه که انتظارش را داریم، صفر است

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_\perp + \mathbf{F}_\parallel + \mathbf{F}_\perp + \mathbf{F}_\parallel = \mathbf{0} \quad (9-47)$$

اگرچه نیروی کل وارد به حلقه صفر است اما نیروهای \mathbf{F}_\perp و \mathbf{F}_\parallel گشتاوری ایجاد می‌کنند که حلقه را حول محور y می‌چرخاند (شکل ۹-۲۸ را ببینید). گشتاور این دو نیرو نسبت به مرکز حلقه عبارت است از

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \left(-\frac{b}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{i}}\right) \times \mathbf{F}_\perp + \left(\frac{b}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{i}}\right) \times \mathbf{F}_\parallel = \left(-\frac{b}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{i}}\right) \times (IaB \hat{\mathbf{k}}) + \left(\frac{b}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{i}}\right) \times (-IaB \hat{\mathbf{k}}) \\ &= \left(\frac{IabB}{\sqrt{2}} + \frac{IabB}{\sqrt{2}}\right) \hat{\mathbf{j}} = IabB \hat{\mathbf{j}} = IAB \hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (9-48)$$

که در آن $A \equiv ab$ مساحت حلقه است. علامت مثبت گشتاور نشان می‌دهد که چرخش حلقه حول محور y ، ساعتگرد است.



شکل ۹-۲۸ چرخش حلقه ی مستطیل شکل

اگر بردار سطح $\mathbf{A} \equiv A \hat{\mathbf{n}}$ را معرفی کنیم که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح حلقه است و جهت مثبتش با قاعده‌ی انگشتان دست راست تعریف می‌شود (در مورد مسئله‌ی ما $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}}$ است) آنگاه می‌توان رابطه‌ی (۹-۴۸) را به صورت زیر نوشت:

$$\boldsymbol{\tau} = I \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (9-49)$$

توجه کنید که وقتی گشتاور بیشینه می‌شود که \mathbf{B} موازی صفحه (یا عمود بر \mathbf{A}) باشد. در حالت عمومی‌تر شکل (۹-۲۸) حلقه یا بردار سطح، \mathbf{A} ، با میدان مغناطیسی زاویه‌ی θ می‌سازد. در این حالت بازوی گشتاور را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{r}_2 = \frac{b}{2} (-\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) = -\mathbf{r}_1 \quad (9-50)$$

و گشتاور کل وارد به حلقه را می‌توان به صورت زیر حساب کرد

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{F}_\perp + \mathbf{r}_\parallel \times \mathbf{F}_\parallel = \sqrt{2} \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{F}_\perp = \sqrt{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} (-\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) \times (IaB \hat{\mathbf{k}}) = IabB \sin \theta \hat{\mathbf{j}} = I\mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (9-51)$$

اگر حلقه شامل N دور باشد، اندازه‌ی گشتاور

$$\tau = NIA B \sin \theta \quad (9-52)$$

خواهد شد. کمیت NIA گشتاور دوقطبی مغناطیسی، $\boldsymbol{\mu}$ ، نامیده می‌شود:

$$\boldsymbol{\mu} \equiv NIA \quad (9-53)$$

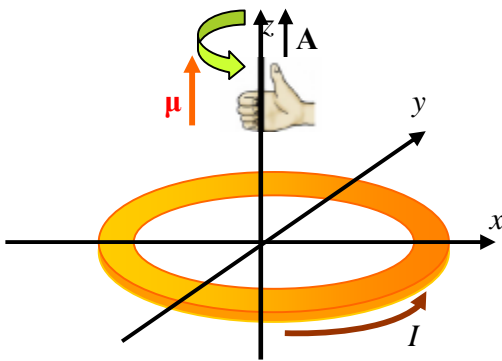
جهت $\boldsymbol{\mu}$ مانند جهت بردار سطح \mathbf{A} (عمود بر سطح حلقه) است و با قاعده‌ی انگشت‌های دست راست، برابر شکل (۲۹) تعیین می‌شود. یکای گشتاور دوقطبی مغناطیسی، $\boldsymbol{\mu}$ ، در دستگاه یکاهای SI آمپر-متر به توان دو ($A \cdot m^2$) است. با توجه به رابطه‌ی

(۹-۵۳) می‌توان گشتاور $\boldsymbol{\mu}$ را که به حلقه‌ی حامل جریان وارد می‌شود، به صورت زیر باز نویسی کرد

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (9-54)$$

رابطه‌ی (۹-۵۴) شبیه گشتاور وارد به دوقطبی الکتریکی \mathbf{p} در میدان الکتریکی \mathbf{E} است و دیدیم که برابر $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ بود.

با توجه به این که انرژی پتانسیل دوقطبی الکتریکی در میدان \mathbf{E} برابر $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ است، رابطه‌ی مشابه‌ای هم برای همتای مغناطیسی آن می‌توان انتظار داشت. این مقدار انرژی است که عامل خارجی هزینه می‌کند تا دوقطبی مغناطیسی را از زاویه‌ی



شکل ۹-۲۹ قاعده‌ی دست راست برای تعیین جهت μ

θ به زاویه‌ی θ بچرخاند. کاری که عامل خارجی رابر

$$W_{\text{Ext}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau d\theta' = \int_{\theta_0}^{\theta} (\mu B \sin \theta') d\theta'$$

$$= \mu B (\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad (9-55)$$

$$= \Delta U = U - U_0$$

است. در اینجا هم $W_{\text{Ext}} = -W_B$ است. W_B کار میدان مغناطیسی است.

با گزینه‌ی $U_0 = 0$ برای $\theta_0 = \pi/2$ ، اگر یک دو قطبی مغناطیسی

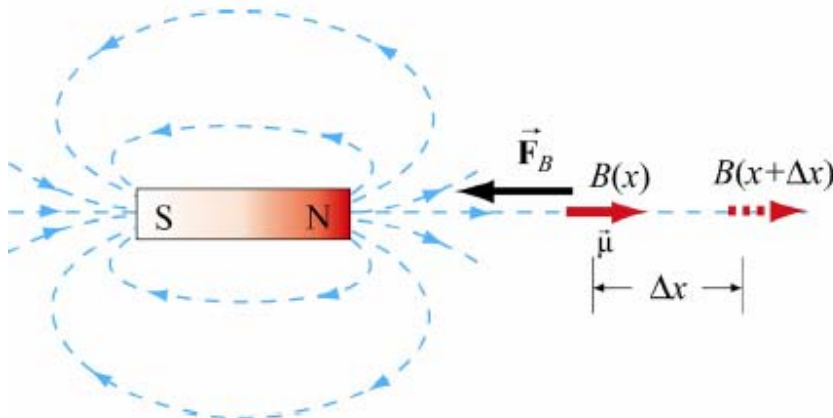
در میدان مغناطیسی خارجی \mathbf{B} قرار گیرد، انرژی پتانسیل آن

$$U = -\mu B \cos \theta = -\mu \cdot \mathbf{B} \quad (9-56)$$

خواهد شد. سامانه هنگامی در ترازمندی پایدار قرار می‌گیرد که μ و \mathbf{B} موازی هم باشند. در این صورت انرژی کمینه خواهد شد: $U_{\text{min}} = -\mu B$. اگر μ و \mathbf{B} پادموازی باشند، انرژی دو قطبی بیشینه مقدار $U_{\text{min}} = +\mu B$ خود را خواهد داشت و سامانه ناپایدار می‌شود.

۹-۷ دو قطبی مغناطیسی در میدان نایکنواخت

در بخش ۹-۶ دیدیم که اگر حلقه‌ی حامل جریان (دو قطبی مغناطیسی) در میدان مغناطیسی یکنواخت باشد، به آن نیروی مغناطیسی وارد نمی‌شود. اگر میدان نایکنواخت باشد چه پیش می‌آید؟ در این صورت نیروی مغناطیسی وارد به دو قطبی صفر



شکل ۹-۳۰ دو قطبی مغناطیسی در مجاورت آهن‌ربای میله‌ای

نخواهد شد. وضعیتی همانند شکل (۹-۳۰) را در نظر بگیرید که دو قطبی کوچک μ در راستای محور آهن‌ربای میله‌ای قرار دارد. میدان مغناطیسی آهن‌ربا در فضا نایکنواخت است و بنابراین، نیروی خالص غیر صفر به دو قطبی وارد می‌شود. برای حرکت دادن دو قطبی به سمت راست، به نیروی خارجی \mathbf{F}_{ext} نیاز است. اندازه‌ی این نیروی خارجی را می‌توان به صورت زیر حساب کرد. فرض کنید دو قطبی به اندازه‌ی Δx به سوی راست جابه‌جا شود. در این صورت با توجه به رابطه‌ی (۹-۵۶) می‌توان نوشت

$$F_{ext} \Delta x = W_{ext} = \Delta U = -\mu B(x + \Delta x) + \mu B(x) = -\mu [B(x + \Delta x) - B(x)] \quad (9-57)$$

برای Δx کوچک نیروی F_{ext} را می‌توان از

$$F_{ext} = -\mu \frac{[B(x + \Delta x) - B(x)]}{\Delta x} = -\mu \frac{dB}{dx} \quad (9-58)$$

به‌دست آورد. مقدار بالا کمیتی مثبت است؛ چون $dB/dx < 0$ است (یعنی میدان مغناطیسی با افزایش x کاهش می‌یابد). این دقیقاً نیرویی است که به نیروی ربایشی آهن‌ربا چیره می‌شود. پس داریم

$$F_B = \mu \frac{dB}{dx} = \frac{d}{dx} (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \quad (9-59)$$

در حالت کلی، نیروی مغناطیسی که از سوی میدان مغناطیسی نایکناخت \mathbf{B} به دو قطبی $\boldsymbol{\mu}$ وارد می‌شود برابر

$$\mathbf{F}_B = \nabla (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \quad (9-60)$$

است.

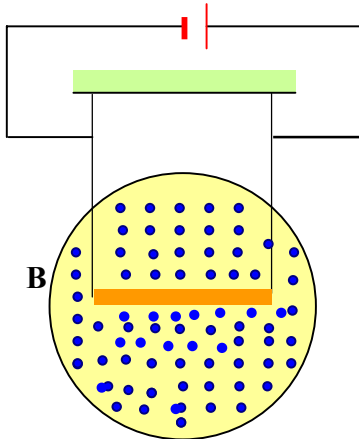
مثال ۹-۶ جهت جریان در میله: میله‌ی رسانایی با چگالی جرم $\lambda \text{ kg/m}$ با دو سیم از سقف آویزان است و برابر شکل (۳۱-۹) در میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} قرار دارد. جهت میدان \mathbf{B} بر صفحه عمود و به سوی بیرون از آن است. برای این که کشش در سیم‌ها صفر باشد، جهت جریان در میله چگونه باید باشد؟

حل: برای این که کشش در سیم‌ها صفر باشد، نیروی مغناطیسی $\mathbf{F}_B = I \mathbf{l} \times \mathbf{B}$ که به میله وارد می‌شود باید نیروی گرانش رو به پایین $\mathbf{F}_g = -mg \hat{\mathbf{k}}$ را خنثی کند. برای این که \mathbf{F}_B در راستای $+z$ باشد، باید $\mathbf{l} = -l \hat{\mathbf{j}}$ باشد؛ یعنی جهت جریان باید به سمت چپ باشد. بنابراین

$$\mathbf{F}_B = I \mathbf{l} \times \mathbf{B} = I (-l \hat{\mathbf{j}}) \times (B \hat{\mathbf{i}}) = -IlB (\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}) = +I l B \hat{\mathbf{k}} \quad (9-61)$$

اندازه‌ی جریان را می‌توان از $I l B = mg$ به‌دست آورد.

$$I = \frac{mg}{l B} = \frac{\lambda g}{B} \quad (9-62)$$



شکل ۳۱-۹ میله آویزان در میدان یکنواخت

مثال ۹-۷ ذره‌ی A با بار q و جرم m_A و ذره‌ی B با بار $2q$ و جرم m_B با اختلاف پتانسیل ΔV از حالت سکون شتاب داده می‌شوند و سپس به وسیله‌ی میدان مغناطیسی یکنواختی در مسیر نیم‌دایره منحرف می‌شوند. شعاع مسیر ذره‌ها به ترتیب R و $2R$ اند. میدان مغناطیسی بر سرعت ذره‌ها عمود است. نسبت جرم ذره‌ها را بیابید.

حل: ذره‌ها در اثر شتاب انرژی جنبشی به‌دست می‌آورند. مقدار این انرژی جنبشی و بنابراین، سرعت ذره‌ها عبارت است از

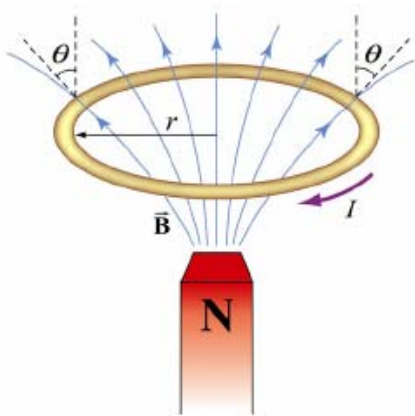
$$\frac{1}{2} m v^2 = q \Delta V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q \Delta V}{m}} \quad (9-63)$$

نیروی مغناطیسی وارد به ذره‌ها شعاعی و درون سو است و نیروی مرکزگرا را به وجود می‌آورد. در نتیجه، ذره‌ها در مسیرهای نیم دایره حرکت می‌کنند. داریم

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{2q \Delta V} = \frac{1}{B} \sqrt{2m \Delta V} \quad (9-64)$$

که نشان می‌دهد r با $(m/q)^{1/2}$ متناسب است. نسبت جرم‌ها عبارت است از

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{(m_A/q_A)^{1/2}}{(m_B/q_B)^{1/2}} \Rightarrow \frac{R}{rR} = \frac{(m_A/q_A)^{1/2}}{(m_B/q_B)^{1/2}} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{\lambda} \quad (9-65)$$



شکل ۹-۳۲ حلقه‌ی حامل جریان در میدان مغناطیسی آهن ربا

مثال ۸-۹ حلقه در میدان \mathbf{B} : از حلقه‌ی دایره‌ای به شعاع r جریان ساعتگرد I می‌گذرد. آهنربای میله‌ای برابر شکل (۹-۳۲) در زیر حلقه و در راستای محور تقارن آن قرار دارد. میدان مغناطیسی در محل حلقه با خط عمود زاویه‌ی θ می‌سازد. به حلقه چه نیروی مغناطیسی وارد می‌شود؟

حل: نیروی مغناطیسی وارد به جزء کوچک $I d\mathbf{l}$ از حلقه‌ی حامل جریان عبارت است از $d\mathbf{F}_B = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ که در آن \mathbf{B} میدان مغناطیسی آهن ربا است. اگر برابر شکل (۹-۳۳) از مختصات استوانه‌ای $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z})$ استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$d\mathbf{F}_B = I (-dl \hat{\phi}) \times (B \sin \theta \hat{r} + B \cos \theta \hat{z}) \quad (9-66)$$

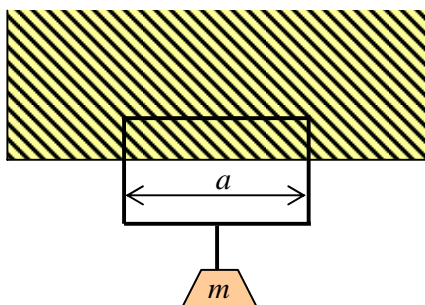
$$= (IB dl) \sin \theta \hat{z} - (IB dl) \cos \theta \hat{r}$$

به خاطر وجود تقارن محوری، مولفه‌های شعاعی نیرو حذف می‌شوند و تنها مولفه‌ی z باقی می‌ماند. بنابراین، نیروی کل وارد به حلقه به صورت زیر درمی‌آید

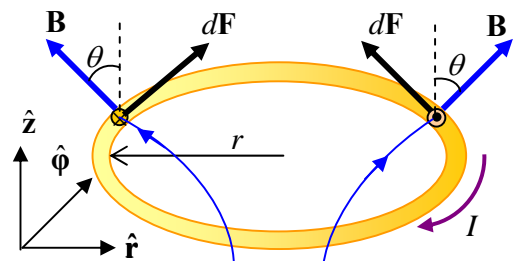
$$\mathbf{F}_B = (IB \sin \theta) \hat{z} \oint dl = (2\pi r IB \sin \theta) \hat{z} \quad (9-67)$$

نیرو در جهت $+z$ و بنابراین ربایشی است.

مثال ۹-۹ حلقه‌ی معلق [۲]: جرم m از حلقه‌ی مستطیل شکلی آویزان است. برابر شکل (۹-۳۴) یک بخش حلقه در میدان یکنواخت \mathbf{B} قرار دارد. جهت میدان به سوی درون صفحه است و به قسمت هاشورخورده‌ی فضا محدود است. به ازای چه جریانی در حلقه، نیروی مغناطیسی رو به بالا نیروی گرانش رو به پایین را حذف می‌کند؟



شکل ۹-۳۴ حلقه در میدان



شکل ۹-۳۳ نیروی مغناطیسی وارد به حلقه‌ی

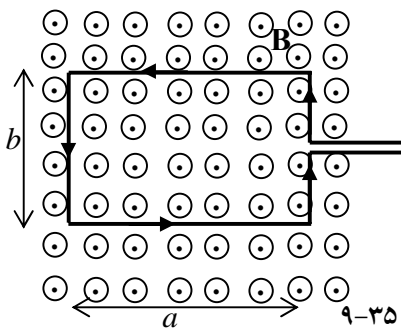
حل: برای این که در سیم‌های افقی $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$ به سوی بالا باشد، جریان در حلقه باید ساعتگرد باشد. این را می‌توان با قاعده‌ی انگشتان دست راست فهمید. بنابراین، $F_B = IBa$ است که در آن a طول مستطیل است. نیروی مغناطیسی در دو سیم عمودی حلقه یکدیگر را حذف می‌کنند. برای این که نیروی مغناطیسی F_B نیروی گرانش را حذف کند، باید داشته باشیم

$$IBa = mg \Rightarrow I = \frac{mg}{Ba} \quad (9-68)$$

توجه کنید که اگر جریان در حلقه بیش از این مقدار باشد، نیروی مغناطیسی بر نیروی گرانش چیره می‌شود و حلقه را به بالا می‌کشد. وقتی همه‌ی حلقه در میدان مغناطیسی قرار گیرد، نیروی مغناطیسی که به سیم‌های افقی پایین و بالا وارد می‌شوند، باهم برابر و در جهت عکس هم می‌شوند. در نتیجه، نیروی مغناطیسی برآیند صفر می‌شود و حلقه در اثر نیروی گرانش سقوط می‌کند. با خارج شدن سیم افقی پایینی از میدان مغناطیسی، نیروی مغناطیسی وارد به سیم افقی بالا، حلقه را به بالا می‌کشد و در نتیجه، حلقه حرکتی نوسانی در امتداد عمودی پیدا می‌کند.

مثال ۹-۱۰ از حلقه‌ی مستطیل به طول a و به عرض b جریان I می‌گذرد. حلقه برابر شکل (۹-۳۵) در میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} قرار دارد. میدان \mathbf{B} بر صفحه‌ی حلقه عمود و جهت آن بیرون از صفحه است. گشتاور وارد به حلقه را به دست آورید.

حل ۱- نیروهای لورنتس وارد به هر ضلع حلقه را در نظر بگیرید. نیرویی که به سیم سمت چپ وارد می‌شود IbB است. جهت آن به سوی چپ است. به سیم سمت راست هم نیروی IbB وارد می‌شود. جهت آن به سوی راست است. نیروی وارد به سیم



شکل ۹-۳۵

بالایی IaB و رو به بالاست، در حالی که نیروی وارد به سیم پایین IaB و رو به پایین است. مجموع این نیروها، گشتاوری به حلقه وارد نمی‌کنند.

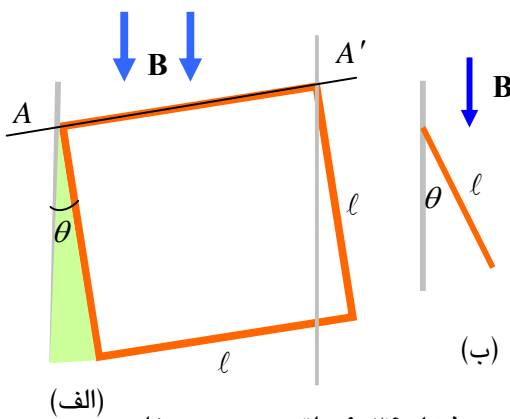
حل ۲- جهت گشتاور مغناطیسی $\boldsymbol{\mu}$ حلقه بر صفحه‌ی حلقه عمود است. میدان \mathbf{B} هم بر این صفحه عمود است. بنابراین داریم: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$

مثال ۹-۱۱ حلقه‌ی سیم مربع شکل به ضلع l برابر شکل (۹-۳۶) در میدان مغناطیسی یکنواختی به شدت B قرار دارد. جهت میدان قائم و رو به پایین

است. از حلقه جریان I می‌گذرد. حلقه حول ضلع افقی (AA') می‌تواند بچرخد. (الف): اندازه‌ی گشتاور دوقطبی وارد به این حلقه را برحسب کمیت‌های داده شده حساب کنید.

(ب): برای این که حلقه در فضا معلق باشد جهت جریان در سیم چگونه باید باشد (اگر از بالا به حلقه نگاه کنید، آیا جهت جریان باید ساعتگرد باشد یا پادساعتگرد)؟

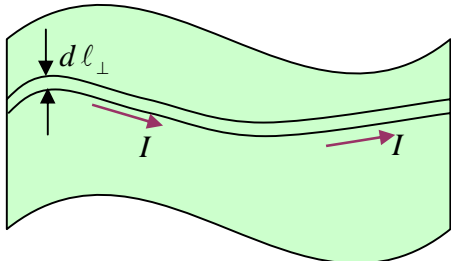
حل: (الف) می‌دانیم که گشتاور $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ است و گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه $\boldsymbol{\mu} = IA = I \ell^2 \mathbf{n}$ است. \mathbf{n} بردار یکه‌ی عمود بر سطح حلقه است. بنابراین، داریم: $\tau = \mu B \sin(90^\circ - \theta) = I \ell^2 B \cos \theta$



شکل ۹-۳۶ حلقه‌ی مربع چرخان

(ب): نیروی وزن میله رو به پایین است. نیروی مغناطیسی که به ضلع پایینی حلقه وارد می‌شود، باید رو به بالا باشد. در نتیجه، اگر از بالا به حلقه نگاه کنیم جریان باید ساعتگرد باشد.

۹-۸ چگالی جریان



شکل ۹-۳۷ چگالی جریان سطحی

۸-۱ چگالی جریان سطحی: در رابطه‌ی (۹-۳۸) جریان گذرنده از یک سیم را با $\mathbf{I} \equiv \lambda \mathbf{v}$ تعریف کردیم که در آن λ چگالی بار خطی موجود در سیم است. اگر بار الکتریکی به جای حرکت در یک سیم، در روی سطح جریان یابد، برای توصیف آن از چگالی جریان سطحی، \mathbf{k} ، استفاده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

در روی سطح "روبان" باریکی با پهنای بسیار اندک $d\ell_{\perp}$ را برابر شکل (۹-۳۷) به موازات جریان الکتریکی در نظر بگیرید. اگر جریان در این روبان $d\mathbf{I}$ باشد، چگالی جریان سطحی عبارت است از

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{I}}{d\ell_{\perp}} \quad (9-69)$$

به بیان دیگر، \mathbf{K} جریان در واحد طول عمود بر شارش جریان است. اگر چگالی بارهای متحرک سطحی σ باشد و طول روبان d را فرض کنیم، مقدار بار موجود در روبان $dq = \sigma d\ell_{\perp}(d)$ است. اگر سرعت حرکت این بارها \mathbf{v} باشد، آنگاه داریم $d\mathbf{I} = dq/dt = \sigma d\ell_{\perp}(\mathbf{v}dt)/dt = \sigma d\ell_{\perp} \mathbf{v}$ و در نتیجه

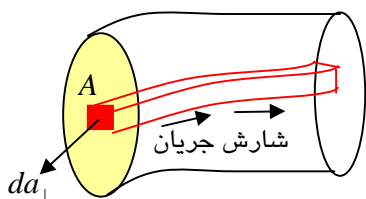
$$\mathbf{K} = \frac{(\sigma d\ell_{\perp})\mathbf{v}}{d\ell_{\perp}} = \sigma \mathbf{v} \quad (9-70)$$

در حالت عمومی، هم σ و هم \mathbf{v} از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر در روی سطح، می‌توانند تغییر کنند. در نتیجه، \mathbf{K} نیز ممکن است در نقاط مختلف سطح متفاوت باشد. اگر جریان سطحی در میدان مغناطیسی قرار گیرد به آن نیروی مغناطیسی وارد خواهد شد. این نیرو از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{F}_B = \int (\sigma da)(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \int (\mathbf{K} \times \mathbf{B}) da \quad (9-71)$$

نکته: همان‌گونه که خواهیم دید، میدان مغناطیسی \mathbf{B} در گذار از یک جریان سطحی ناپیوسته است. درست مثل میدان الکتریکی \mathbf{E} که در گذار از یک سطح باردار گسسته است. بنابراین، هنگام استفاده از رابطه‌ی (۹-۷۱) باید هوشیار بود و از میدان میانگین استفاده کرد. ♣

۸-۲ چگالی جریان حجمی: اگر شارش بار در فضای سه بعدی انجام گیرد، آن را با چگالی جریان حجمی \mathbf{J} نشان می‌دهیم. با توجه به شکل (۹-۳۸) می‌توان \mathbf{J} را تعریف کرد. فرض کنید جریان \mathbf{I} از سطح مقطع A می‌گذرد و در حجم لوله‌ای با شکل دلخواه توزیع می‌شود. لوله‌ای با سطح مقطع بسیار کوچک da_{\perp} را در نظر بگیرید که برابر شکل (۹-۳۸) به موازات شارش جریان قرار دارد. اگر جریان درون این لوله $d\mathbf{I}$ باشد، آنگاه چگالی جریان حجمی عبارت است از



شکل ۹-۳۸ چگالی جریان حجمی

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{I}}{da_{\perp}} \quad (9-72)$$

به بیان دیگر، J جریان در واحد سطح عمود بر شارش بار است. اگر چگالی بارهای متحرک درون لوله ρ و سرعت بارها \mathbf{v} باشد، بار موجود در لوله‌ای به طول d برابر $dq = \rho da_{\perp} d = \rho da_{\perp} (\mathbf{v} dt)$ و $d\mathbf{I} = dq/dt = \rho da_{\perp} \mathbf{v} dt/dt = \rho da_{\perp} \mathbf{v}$ اند:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (9-73)$$

پس، نیروی مغناطیسی وارد به جریان حجمی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_B = \int (\rho d\tau)(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \int (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d\tau \quad (9-74)$$

مثال ۱۲- در هر یک از حالت‌های زیر چگالی جریان \mathbf{J} را حساب کنید.

(الف): جریان کل I در راستای محور $+z$ در سیم درازی با سطح مقطع دایره‌ای به شعاع a برقرار است. جریان به طور یکنواخت در سیم توزیع شده است.

(ب): جریان کل I در راستای محور $+z$ در سیم درازی با سطح مقطع دایره‌ای به شعاع a برقرار است. جریان با وارون فاصله‌ی r از محور سیم متناسب است.

(پ): استوانه‌ی دراز نارسانایی به شعاع R و با چگالی بار ρ_0 که با سرعت $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{z}}$ حرکت می‌کند. محور استوانه در راستای محور z است.

(ت): قرصی به شعاع a و ضخامت h با چگالی بار ρ_0 که در صفحه‌ی xy قرار دارد و با سرعت زاویه‌ای $\omega \hat{\mathbf{z}}$ می‌چرخد.

(ج): کره‌ای به شعاع a با بار کل Q که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است. کره در میدا مختصات قرار دارد و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور z می‌چرخد.

حل: (الف) جریان در سیم به طور یکنواخت توزیع شده است. بنابراین در درون سیم چگالی جریان یکنواخت (و در بیرون صفر) است. داریم

$$I = |\mathbf{J}| \pi a^2 \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{cases} \frac{I}{\pi a^2} \hat{\mathbf{z}}; & r < a \\ 0; & r > a \end{cases} \quad (9-75)$$

(ب): این بار جریان در درون سیم، با فاصله از محور سیم متناسب است (و در بیرون سیم صفر

است). بنابراین، $J = \alpha/r$ است. با توجه به شکل (۹-۳۹) داریم

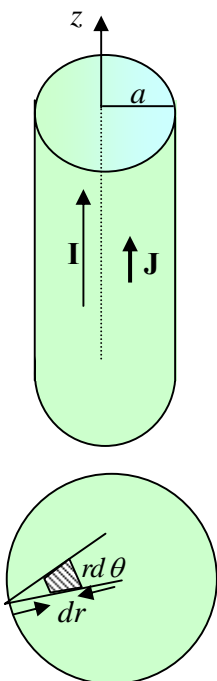
$$I = \int \mathbf{J} da_{\perp} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\alpha}{r} r dr d\theta = 2\pi \alpha a \Rightarrow \alpha = I/2\pi a \quad (9-76)$$

و بنابراین

$$\mathbf{J} = \begin{cases} \frac{I}{2\pi ar} \hat{\mathbf{z}}; & r < a \\ 0; & r > a \end{cases} \quad (9-77)$$

(پ): چگالی جریان حاصل ضرب چگالی بار و سرعت آن است. پس

$$\mathbf{J} = \begin{cases} \rho_0 \mathbf{v} = \rho_0 v \hat{\mathbf{z}}; & r < R \\ 0; & r > R \end{cases} \quad (9-78)$$



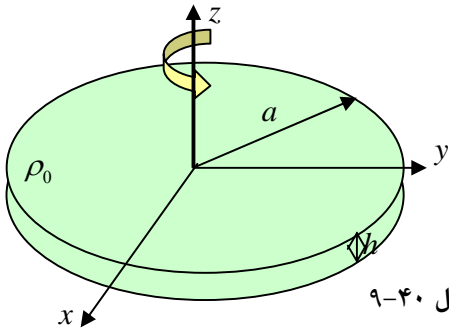
شکل ۹-۳۹

(ت): هنوز هم چگالی جریان حاصل ضرب چگالی بار و سرعت است. این جا، البته، سرعت به مکان بستگی دارد و برای

محاسبه‌ی آن به یاد بیاورید که $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. بنابراین، می‌بینیم که v در راستای z مولفه‌ای ندارد. به بیان دیگر، سرعت مستقل از z است. پس، آنچه که باقی می‌ماند عبارت است از

$$\mathbf{J} = \rho_0 \mathbf{v} = \begin{cases} \rho_0 \omega r \hat{\phi} & ; r < R, -h/2 < z < h/2 \\ 0 & ; r > R \end{cases} \quad (9-79)$$

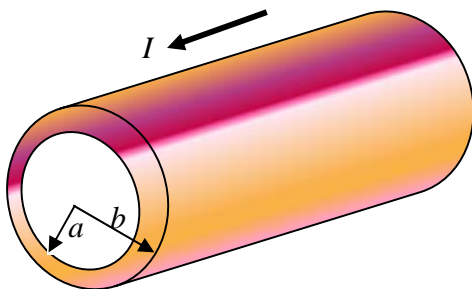
(ج): این وضعیت همانند حالت (ت) است. در راستای محور z سرعت مولفه ندارد؛ چون $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (x\hat{x} + y\hat{y})$ است. اگر این رابطه را برحسب متغیرهای کروی بنویسیم خواهیم داشت $\mathbf{v} = r \sin \theta \hat{\phi}$ و بنابراین،



شکل ۹-۴۰

$$\mathbf{J} = \rho_0 \mathbf{v} = \frac{\omega Q}{\epsilon \pi a^2} \mathbf{v} = \begin{cases} \frac{\omega Q}{\epsilon \pi a^2} \sin \theta \hat{\phi} & ; r < a \\ 0 & ; r > a \end{cases} \quad (9-80)$$

مثال ۹-۱۳ جریانی در سطح پوسته‌ی استوانه‌ای: شکل (۹-۴۱) پوسته‌ی استوانه‌ای رسانایی را نشان می‌دهد که شعاع داخلی آن a و شعاع بیرونی اش b است. جریانی I به طور نایکناخت بر روی سطح مقطع پوسته توزیع شده است و با دور شدن از سطح بیرونی به طور نمایی افت پیدا می‌کند. به بیان دیگر، چگالی جریانی در پوسته به صورت $J = J_0 e^{-(r^2-b^2)/\delta^2}$ است. کمیت



شکل ۹-۴۱ چگالی جریانی متغیر در پوسته‌ی استوانه‌ای رسانا

δ مقدار ثابتی است که "زرفای پوست" نام دارد و در مقایسه با ضخامت $(b-a)$ پوسته بسیار کوچک است. ثابت J_0 را حساب کنید. حل: کافی است از چگالی جریانی انتگرال بگیریم و آن را مساوی جریانی I قرار دهیم. داریم

$$I = \int J da_{\perp} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=a}^b J_0 e^{-(r^2-b^2)/\delta^2} r dr d\theta = 2\pi \int_{r=a}^b J_0 e^{-(r^2-b^2)/\delta^2} r dr \quad (9-81)$$

با تغییر متغیر $u = (r^2 - b^2)/\delta^2 \Rightarrow du = 2rdr/\delta^2$ داریم

$$I = J_0 \pi \delta^2 \int_{u=(a^2-b^2)/\delta^2}^0 e^u du = J_0 \pi \delta^2 e^u \Big|_{u=(a^2-b^2)/\delta^2}^0 = J_0 \pi \delta^2 \left(1 - e^{-\frac{(a^2-b^2)}{\delta^2}} \right) \approx J_0 \pi \delta^2 \Rightarrow J_0 = \frac{I}{\pi \delta^2} \quad (9-82)$$

در مثال های بالا دیدیم که جریانی گذرنده از سطح S را می‌توان به صورت زیر نوشت

* skin depth

$$I = \int J da_{\perp} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (9-83)$$

ضرب داخلی $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ مولفه‌ی مناسب $d\mathbf{a}$ را برمی‌گزیند. به بیان دیگر،

$$\mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = da \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J} = da \times (\text{چگالی جریان}) =$$

(مقدار بار که در واحد زمان از سطح da به بیرون نشت می‌کند) =

به ویژه، با توجه به قضیه‌ی دیورژانس، می‌توان دید که بارکل که در واحد زمان از حجم V خارج می‌شود (حجمی که سطح S آن را دربر دارد) عبارت است از

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau \quad (9-84)$$

بنابراین $\int (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau$ آهنگ برون شاری بار از حجم V است.

چون بار الکتریکی پایسته است، مقدار باری که از سطح به بیرون نشت می‌کند، با کاهش بار در درون حجم باید برابر باشد:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = -\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau \quad (9-85)$$

علامت منها به این معنی است که برون شاری بار، سبب کاهش بار در درون حجم V می‌شود. چون رابطه‌ی (9-85) برای هر حجمی درست است، نتیجه می‌گیریم که

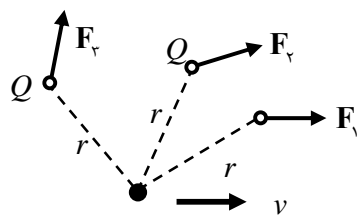
$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (9-86)$$

رابطه‌ی (9-86) معادله‌ی پیوستگی است؛ رابطه‌های (9-85) و (9-86) به ترتیب شکل‌های انتگرالی و دیفرانسیلی قانون

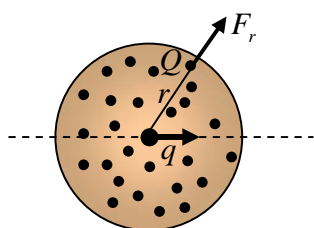
پایستگی بار الکتریکی‌اند. دقیق‌ترین گواه تجربی برای پایستگی بار، پایداری الکترون است. علت این که الکترون ذره‌ی پایدار است این است که پایستگی بار از واپاشی آن جلوگیری می‌کند. ذرات فقط به ذره‌های سبک‌تر از خودشان می‌توانند واپاشیده شوند. ذره‌های سبک‌تر از الکترون عبارتند از نوترینو، فوتون و گراویتون. اما این ذره‌ها بار الکتریکی ندارند. اگر الکترون به این ذره‌ها واپاشیده شود، بار الکتریکی الکترون ناپدید می‌شود. بنابراین، پایستگی بار به پایداری الکترون می‌انجامد. پس، اگر نقض پایستگی بار الکتریکی ممکن بود، فرایند (فوتون) + (نوترینو) \rightarrow (الکترون) هم شدنی می‌بود. اما یک چنین فرایندی هرگز دیده نشده است.

9-9 اندازه‌گیری بار متحرک

شاید این بخش را می‌بایست در آغاز همین فصل می‌گنجانیدیم. پرسشی که در این بخش می‌خواهیم بررسی کنیم این است که چگونه می‌توان بار الکتریکی ذره‌ی متحرک را اندازه گرفت؟ اندازه‌ی بار الکتریکی را فقط با بررسی اثرهای آن می‌توان به دست آورد. مقدار بار ساکن q را می‌توان با اندازه‌گیری نیرویی که به باز آزمون Q در فاصله‌ی معین وارد می‌کند، به دست آورد. این اندازه‌گیری بر اساس قانون کولمب شدنی است. اگر باری را که می‌خواهیم اندازه بگیریم، حرکت کند، در فضا جهت معینی پدید می‌آید که جهت لحظه‌ای حرکت است. ممکن است که نیروی وارد به بار آزمون Q نه تنها به فاصله‌ی Q از بار متحرک، به جهت حرکت بار q هم بستگی داشته باشد. در این صورت، نیروهای متفاوتی را بر روی بار آزمون مشاهده خواهیم کرد. اگر این نیروهای متفاوت را در قانون کولمب قرار دهیم، برای بار Q مقادیرهای گوناگون به دست خواهیم آورد. از این گذشته، حالا دیگر نمی‌توان اطمینان داشت که جهت نیرو در راستای \mathbf{r} است. ممکن است جهت نیرویی که بار متحرک q به بار آزمون Q



شکل ۹-۴۲ نیروی بار متحرک بر بار آزمون



شکل ۹-۴۳

وارد می‌کند همانند شکل (۹-۴۲) باشد.

برای این که امکان این وضعیت را در نظر بگیریم، q را می‌توان با میانگین گیری از نیروها در همه‌ی جهتها، تعریف کرد. فرض کنید بارهای آزمون کوچک اند و بر روی سطح کره‌ای به شعاع r قرار دارند (شکل ۹-۴۳). در لحظه‌ای که بار متحرک از مرکز کره می‌گذرد، مولفه‌ی شعاعی نیرو را بر روی هر یک از بارهای آزمون اندازه می‌گیریم. مقدار میانگین این نیروها را در محاسبه‌ی بار q به کار می‌بریم. اما این کاری است که در زمان t برای محاسبه‌ی انتگرال سطح میدان الکتریکی بر روی کره انجام می‌دهیم: در اینجا بارهای آزمون در حال سکون اند و بنا به تعریف، نیرو در واحد بار Q ، میدان الکتریکی را در آن نقطه به دست می‌دهد. این روش برای تعیین مقدار بار متحرک به قانون گاوس نزدیک‌تر از قانون کولمب است (توجه کنید که این تنها راه ممکن نیست، می‌توانستیم بار آزمون را در مسیر بار

متحرک و در پیشاپیش آن بگذاریم. بارهایی که این‌گونه تعریف می‌شوند، ویژگی‌های ساده‌ای نخواهند داشت که مورد نظر ماست). تعریف مقدار بار ذره‌ی متحرک به روش بالا را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

مقدار بار الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا عبارت است از انتگرال سطح میدان الکتریکی \mathbf{E} بر روی سطح S که آن ناحیه را دربر دارد. سطح S در چارچوب خاص F ثابت است. میدان الکتریکی \mathbf{E} در هر نقطه‌ی (x, y, z) و در زمان t با اندازه‌گیری نیروی وارد بر بار آزمون (که در چارچوب F در حال سکون است) در چارچوب F تعیین می‌شود. انتگرال سطح باید در زمان معین t تعیین بشود. این بدان معنی است که اندازه‌ی میدان باید در همه‌ی نقاط روی سطح S به طور هم‌زمان اندازه‌گیری شود. انتگرال سطح بر روی S و در زمان t را با

$$\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (9-87)$$

تعریف کنید. به این ترتیب می‌توانیم مقدار بار الکتریکی در درون S را با حاصل ضرب این انتگرال در ϵ_0 تعریف کنیم

$$q = \epsilon_0 \int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (9-88)$$

البته مقدار بار نباید به شکل و اندازه‌ی سطح S بستگی داشته باشد. برای بار ساکن، تعریف (۹-۸۸) بیان قانون گاوس است و به شکل و اندازه‌ی سطح S هم بستگی ندارد. اما از کجا بدانیم که برای بار متحرک هم این چنین است؟ خوش‌بختانه برای بار متحرک هم مقدار q مستقل از شکل و اندازه‌ی سطح S است. می‌توانیم آن را به عنوان یک واقعیت تجربی بپذیریم. این ویژگی بنیادی میدان الکتریکی بار متحرک، اجازه می‌دهد که مقدار بار را با رابطه‌ی (۹-۸۸) تعریف کنیم. به بیان دیگر، قانون گاوس برای میدان بارهای متحرک هم درست است: شار گذرنده از دو سطح که بارهای متحرک را دربردارند، اگر هم‌زمان اندازه‌گیری شوند، یکسان است.

در گزاره‌ی بالا مفهوم ناوردایی بار الکتریکی نهفته است. حرکت تاثیری در مقدار بار الکتریکی ندارد. اگر اندازه‌ی بار الکتریکی با حرکت تغییر می‌کرد، اتم‌ها و مولکول‌ها نمی‌توانستند از نظر باری خنثی باشند. گواه تجربی بی‌بروبرگردی وجود دارد و نشان می‌دهد که بار الکتریکی کل یک سامانه در اثر حرکت حامل‌های بار آن، تغییر نمی‌کند. این واقعیت بسیار چشم‌گیری است و ما چنان به آن خو گرفته‌ایم که فراموش می‌کنیم به اهمیت بنیادی آن بیندیشیم. ما در فصل ۱ از بی بار بودن مولکول

هیدروژن نام بردیم و نتیجه گرفتیم که اندازه‌ی بار الکتریکی پروتون و الکترون برابر است. اینک اتم هلیوم را در نظر بگیرید. اتم هلیوم دو پروتون و دو الکترون دارد. اینها همان بارهایی هستند که مولکول هیدروژن را می‌سازند. حرکت الکترون‌ها و پروتون‌ها در هلیوم بسیار متفاوت از وضعیت آنها در مولکول هیدروژن است. به ویژه پروتون‌ها که در مولکول هیدروژن در فاصله‌ی 0.7 \AA آنگستروم از هم به اهستگی دور هم می‌گردیدند، اینک در هسته‌ی اتم هلیوم پیوند محکمی دارند و با انرژی جنبشی حدود یک میلیون الکترون ولت حرکت می‌کنند. اگر حرکت تأثیری در مقدار بار الکتریکی می‌داشت، بار الکتریکی پروتون‌ها و الکترون‌های اتم هلیوم دقیقاً همانند مولکول هیدروژن یکدیگر را حذف نمی‌کردند. دقت تعیین بی‌باری اتم هلیوم به همان دقتی است که برای مولکول هیدروژن به دست آمده است.

گواه دیگری را طیف نوری ایزوتوپ‌های یک عنصر به دست می‌دهد. جرم هسته‌ی ایزوتوپ‌ها متفاوت است اما بار هسته‌ی آنها برابر است. حرکت پروتون‌ها در دو هسته‌ی ایزوتوپ متفاوت است، اما طیف نوری ایزوتوپ‌های متفاوت یک عنصر نشانی از اختلاف بار هسته‌ها نیست.

جرم این ویژگی ناوردایی* را ندارد. می‌دانیم که انرژی یک ذره بر اثر حرکت با ضریب

$$\frac{1}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} \quad (9-89)$$

تغییر می‌کند. اگر اجزاء سازنده‌ی یک ذره مرکب حرکت کنند، افزایش انرژی آنها به صورت افزایش جرم ذره‌ی مرکب ظاهر می‌شود (اگر چه جرم اجزاء سازنده‌ی ذره تغییر نمی‌کند). این وضعیت هرگز در مورد بار دیده نشده است. جرم‌نگاری دوترون یونیزه (با دو پروتون، دو نوترون و یک الکترون) و هلیوم یونیزه (باز هم با دو پروتون، دو نوترون و یک الکترون) به روشنی اختلاف جرم آنها را نشان می‌دهد. این دو عنصر ساختار کاملاً متفاوت دارند، اجزاء سازنده‌ی آنها در درونشان با سرعت‌های کاملاً متفاوت درهم می‌ولند. اختلاف انرژی آنها در تفاوت جرمی قابل اندازه‌گیری ظاهر می‌شود، اما با دقت بسیار زیادی، اختلاف قابل اندازه‌گیری در بار دو یون دیده نمی‌شود.

ناوردایی بار اهمیت ویژه‌ای به کوانتتش بار[◇] می‌دهد. مقدار بار الکتریکی همه‌ی ذره‌های بنیادی باردار از یک نوع، برابر اند. مقدار بار همه‌ی الکترون‌ها برابر اند. حالا می‌بینیم که این برابری دقیق نه تنها برای بارهایی برقرار است که نسبت به هم ساکن اند، بلکه برای هر حالت حرکت نسبی آنها هم برقرار است.

آزمایش‌هایی که در بالا توصیف کردیم، به همراه آزمایش‌های بسیار دیگر نشان می‌دهند که مقدار انتگرال سطح قانون گاوس،

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}, \text{ فقط به تعداد و انواع بارهای موجود در درون سطح } S \text{ بستگی دارد و مستقل از نوع حرکت این بارهاست. بنا به}$$

اصل نسبیت، اگر این گزاره در یک چارچوب لخت درست باشد، باید در هر چارچوب لخت دیگر هم درست باشد. پس، اگر F' چارچوب دیگری باشد که نسبت به چارچوب F حرکت می‌کند و S' سطح بسته‌ای در F' باشد که در زمان t' همان مقدار بار را دربر دارد که سطح S در زمان t دارد، باید داشته باشیم

$$\int_{S(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S'(t')} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{a}' \quad (9-90)$$

میدان \mathbf{E}' البته در چارچوب F' اندازه‌گیری می‌شود، یعنی \mathbf{E}' با نیرویی که به بار آزمون ساکن در F' وارد می‌شود، سنجیده می‌شود. تمایز بین t و t' را نباید فراموش کرد. می‌دانیم که دو رویداد هم‌زمان در چارچوب F لازم نیست که در چارچوب F'

* charge invariance

◇ charge quantization

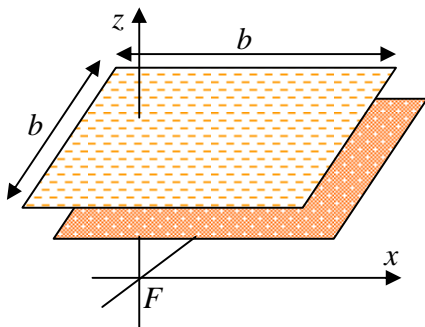
همزمان باشند. هر یک از انتگرال‌های سطح در رابطه‌ی (۹-۹۰) باید در یک لحظه در چارچوب خودشان محاسبه شوند. اگر بارها در مرز S یا S' باشند، باید دقت کرد و مطمئن بود که در زمان t مقدار بار موجود در درون S همان مقداری است که در زمان t' در درون سطح S' است.

رابطه‌ی (۹-۹۰) گزاره‌ای برای ناوردایی نسبیتی بار الکتریکی است. سطح گاوس را می‌توانیم در هر چارچوب لختی برگزینیم؛ انتگرال سطح به عددی می‌انجامد که مستقل از چارچوب است و در هر چارچوبی همان مقدار را خواهد داشت.

نکته: ناوردایی بار با پایستگی بار فرق دارد. پایستگی بار را در بخش ۸-۹ با رابطه‌ی (۹-۸۶) بیان کردیم. پایستگی بار به این معنی است که اگر سطح بسته‌ای شامل مقداری بار را در یک چارچوب در نظر بگیریم و هیچ ذره‌ی بارداری از مرزهای این سطح نگذرد، بار کل درون سطح ثابت باقی می‌ماند. ناوردایی بار به این معنی است که اگر به این مقدار بار از چارچوب‌های مختلف نگاه کنیم، همواره یک مقدار برای آن به دست خواهیم آورد. انرژی هم پایسته است، اما کمیت ناوردای نسبیتی نیست. بار هم پایسته است و هم ناوردای نسبیتی است. در واژگان نسبیت، انرژی یک مولفه‌ی یک چارچوب است، اما بار یک کمیت اسکالر، یک عدد، نسبت به تبدیل‌های لورنتس است. پیامدهای این واقعیت فراوان است و سرشت میدان بارهای متحرک را کاملاً تعیین می‌کند. ♣

۹-۱۰ میدان الکتریکی در چارچوب‌های متفاوت

اگر بار الکتریکی تحت تبدیل‌های لورنتس پایسته بماند، میدان الکتریکی \mathbf{E} باید به شکل خاصی تبدیل بشود. تبدیل میدان به این معنی است که اگر ناظری در چارچوب F میدان الکتریکی را در زمان t و در مکان (x, y, z) اندازه بگیرد و مقداری برای آن به دست بیاورد، ناظر دیگری در چارچوب F' چه مقداری را برای \mathbf{E} در همان مکان و زمان به دست خواهد آورد؟ برای گروه خاصی از میدان‌ها می‌توانیم پاسخ این پرسش را در سامانه‌های ساده با استفاده از قانون گاوس بیابیم.



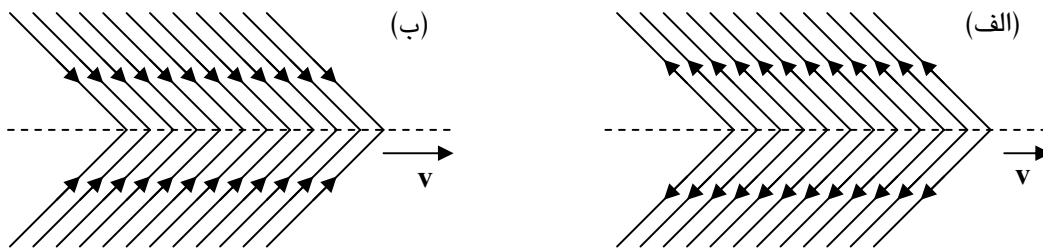
فرض کنید دو صفحه‌ی باردار با چگالی بار سطحی $+\sigma$ و $-\sigma$ در چارچوب F در حال سکون اند. صفحه‌ها را مربع‌های با ضلع b در نظر بگیرید و فرض کنید که جدایی آنها در مقایسه با ابعادشان بسیار کوچک است. آنها در شکل (۹-۴۴) نشان داده شده اند. صفحه‌های باردار در صفحه‌ی xy اند. در چارچوب F ، میدان الکتریکی در فضای بین این دو صفحه σ/ϵ_0 است. حالا ناظر F' را در نظر بگیرید که با سرعت v به سوی چپ حرکت می‌کند و به صفحه‌های باردار نزدیک می‌شود. برای این ناظر، صفحه‌های "مربع" دیگر به شکل مربع نخواهد بود. بعد x' آنها کوچک شد و از

شکل ۹-۴۴ دو صفحه‌ی باردار ساکن در F

b به $b\sqrt{1-\beta^2}$ کاهش خواهد یافت. $\beta \equiv v/c$ است. بار کل ناورداست و ناظر F' همان مقدار بار بر روی صفحه‌ها خواهد دید که ناظر ساکن F می‌بیند. پس، چگالی بار که ناظر F' اندازه می‌گیرد، بزرگ‌تر از چگالی بار σ است که ناظر F بر روی صفحه‌ها می‌بیند. در واقع، در چارچوب F' چگالی بار $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ برابر چگالی باری است که ناظر F اندازه می‌گیرد. اگر همه‌ی دانش ما در باره‌ی میدان بار متحرک در رابطه‌ی (۹-۹۰) گنجانده شده باشد، در باره‌ی میدان الکتریکی که ناظر F' اندازه می‌گیرد چه می‌توانیم بگوییم؟

با اطمینان می‌توانیم بگوییم که میدان الکتریکی در بیرون صفحه‌ها صفر است و در فضای بین صفحه‌ها (دست‌کم برای حالتی

که صفحه‌ها تا بینهایت گسترده اند) یکنواخت است. میدان یک صفحه‌ی بینهایت گسترده نمی‌تواند به فاصله تا صفحه و مکان در امتداد صفحه بستگی داشته باشد، چون در این سامانه چیزی وجود ندارد که مکان را در روی صفحه متمایز کند. همه‌ی نقاط صفحه‌ی بینهایت گسترده هم‌ارز اند. تنها چیزی که فعلاً می‌دانیم این است که خط‌های میدان یک صفحه‌ی باردار متحرک با بار مثبت شاید همانند شکل (۹-۴۵ الف) باشد. میدان یک صفحه‌ی تنها با بار منفی مانند شکل (۹-۴۵ ب) باشد. برنهی میدان‌های این دو، هنوز هم در بیرون صفحه‌ها صفر و در فضای بینشان یکنواخت خواهد بود

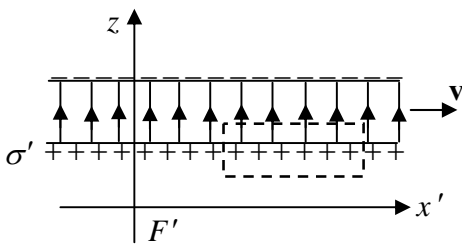


شکل ۹-۴۵ خط‌های میدان صفحه‌ی متحرک با بار مثبت (سمت راست) و صفحه‌ی با بار منفی (چپ)

در واقع، میدان رویه‌ی باردار متحرک برعکس خط‌های میدان فرضی در شکل بالا، در صفحه‌ی خودش بر رویه عمود است. این را به زودی نشان خواهیم داد.

اگر قانون گاوس را برای سطحی که در چارچوب ساکن است، به کار ببریم (شکل ۹-۴۶ را ببینید) خواهیم داشت

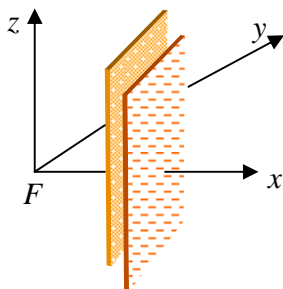
$$E'_z = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} E_z \Rightarrow E'_z = \gamma E_z \quad (9-91)$$



شکل ۹-۴۶ سطح گاوس ساکن در F'

اینک وضعیت دیگری را در نظر بگیرید که صفحه‌های باردار همانند شکل (۹-۴۷) بر محور x عمود اند. میدان این صفحه‌ها از دید ناظر ساکن F برابر σ/ϵ_0 و در جهت محور x است. در این وضعیت، ناظر F' هم چگالی بار صفحه‌ها را σ می‌بیند. صفحه‌ها منقبض نشده اند، فقط فاصله‌ی بین صفحه‌ها انقباض یافته است. اما فاصله‌ی بین صفحه‌ها در تعیین میدان بین آنها نقشی ندارد. اگر قانون گاوس را به جعبه‌ای که در چارچوب ساکن است، به کار ببریم، می‌بینیم که این بار

$$E'_x = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_x \quad (9-92)$$



شکل ۹-۴۷ صفحه‌های باردار متحرک

است. این همه برای آرایش ساده‌ی بارها درست است. اما آیا نتیجه‌ی این بررسی فقط در این مورد ساده برقرار است یا این که عمومیت دارد؟ پاسخ این پرسش در ژرفای معنی میدان/نهفته است. اگر قرار است میدان الکتریکی \mathbf{E} در یک نقطه‌ی فضا-زمان معنی یگانه داشته باشد، نمود \mathbf{E} در چارچوب

دیگری نمی‌تواند به سرشت چشمه‌ی تولید کننده‌ی میدان \mathbf{E} بستگی داشته باشد. به بیان دیگر، وقتی ناظر F میدان را در همسایگی خود و در زمان معینی اندازه گرفت، تنها با استفاده از این اندازه‌گیری، باید بتواند پیش‌بینی کند که میدان در همان همسایگی و در همان زمان در چارچوب دیگری چگونه خواهد بود. اگر این چنین نمی‌بود، میدان هم مفهومی بهبوده می‌شد.

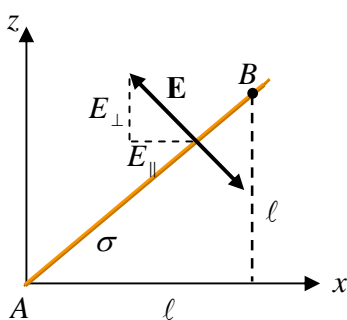
همین که نظریه‌ی میدان با تجربه هم‌خوانی دارد، گواه درستی گزاره‌ی بالاست.

اینک می‌توانیم نتیجه‌گیری‌های رابطه‌های (۹-۹۱) و (۹-۹۲) را که برای حالت خاص صفحه‌های باردار موازی به‌دست آوردیم، برای هر توزیع باری که نسبت به چارچوب F در حال سکون است، تعمیم دهیم. اگر ناظری در چارچوب F میدان E_z را در جهت z اندازه بگیرد، ناظری در چارچوب F' میدان را در همان نقطه‌ی فضا-زمان با $E'_z = \gamma E_z$ گزارش خواهد کرد. یعنی عددی به دست خواهد آورد که با ضریب γ بزرگ‌تر از عددی است که ناظر F از اندازه‌گیری E_z به‌دست می‌دهد. از سوی دیگر، اگر اندازه‌گیری F از میدان در راستای x (راستای حرکت F' نسبت به F) به E_x بیانجامد، ناظر F' هم مقدار E'_x را که برای میدان در راستای x گزارش می‌کند که با E_x برابر است. روشن است که جهت‌های y و z هم‌ارزند، یعنی هر دو بر نسبت به سرعت v عرضی اند (بر سرعت عمود اند) و هر چیزی که در باره‌ی E'_z گفته شد، برای E'_y هم درست است. جهت میدان E در چارچوب F هر چه باشد، می‌توان آن را برنهی میدان‌ها در جهت‌های x ، y و z پنداشت و از تبدیل هر یک از آنها بردار میدان E' را در چارچوب F' پیش‌بینی کرد.

بگذارید گفتار بالا را به زبانی بازگوییم که برای حرکت در هر جهتی مناسب باشد: بارهای ساکن در چارچوب F اند، چشمه‌ی میدان E اند. فرض کنید چارچوب F' نسبت به چارچوب F با سرعت v حرکت می‌کند. در نقطه‌ای دلخواه در F میدان E را به دو مولفه‌ی طولی $E_{||}$ و عرضی E_{\perp} تجزیه کنید. مولفه‌ی طولی میدان، $E_{||}$ ، موازی v و مولفه‌ی عرضی، E_{\perp} ، آن بر v عمود است. در همان نقطه‌ی فضا-زمان و در چارچوب F' ، میدان E' را به دو مولفه‌ی $E'_{||}$ موازی با v و E'_{\perp} عمود بر v تجزیه کنید. برای بارهایی که در چارچوب F ساکن هستند، داریم

$$E'_{||} = E_{||} \quad , \quad E'_{\perp} = \gamma E_{\perp} \quad (9-93)$$

نتیجه‌ی بالا فقط برای بارهایی درست است که در چارچوب F ساکن اند. در فصل ۱۰ خواهیم دید که اگر بارها در چارچوب F حرکت کنند، پیش‌بینی میدان الکتریکی در چارچوب F' به آگاهی در باره‌ی دو میدان، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی، نیاز دارد. با این حال، نتیجه‌ای را که در این بخش یافتیم، سودمند است. اگر چارچوب لختی یافتیم که بارها در آن چارچوب ساکن اند، می‌توانیم از آن استفاده کنیم و میدان بار نقطه‌ای را که با سرعت ثابت حرکت می‌کند، به‌دست آوریم.

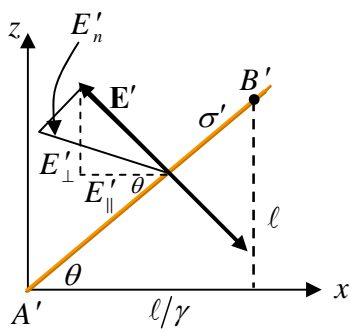


شکل ۹-۴۸ صفحه‌ی باردار در F

مثال ۹-۱۴ صفحه‌ی کج: صفحه‌ی باردار با چگالی بار یکنواخت σ در چارچوب F ساکن است. صفحه‌ی باردار نسبت به صفحه‌های xy و yz زاویه‌ی 45° دارد (شکل ۹-۴۸) را ببینید). میدان الکتریکی این صفحه‌ی باردار ساکن بر خود صفحه باردار عمود است. در چارچوب F' که نسبت به چارچوب F با سرعت $v = 0.6c$ در جهت محور x حرکت می‌کند، این چیدمان چگونه توصیف می‌شود؟ یعنی بار سطحی σ' و جهت و اندازه‌ی میدان الکتریکی را در F' به‌دست آورید. مولفه‌ی عمود بر صفحه‌ی باردار میدان را در F' حساب کنید و درستی قانون گاوس را بیازمایید.

حل: وضعیت در چارچوب F' در شکل (۹-۴۹) نشان داده شده است. نخست چگالی

بار سطحی σ' را حساب می‌کنیم. ضریب γ متناظر با $v = 0.6c$ برابر $\gamma = 5/4$ است. در نتیجه، وقتی از چارچوب F به F' می‌رویم، فاصله‌های طولی با ضریب $4/5$ کاهش می‌یابند. پس، فاصله‌ی بین نقاط A' و B' در چارچوب F' کوتاه‌تر از فاصله‌ی فاصله‌ی بین نقاط A و B در F است. بنابراین، با طول l در شکل (۹-۴۸) فاصله‌ی بین A و B برابر $\sqrt{2}l$ است، در



شکل ۹-۴۸ صفحه‌ی باردار F'

حالی که فاصله‌ی بین نقاط A' و B' در چارچوب F' برابر $\sqrt{1+(\epsilon/0)^2} \ell$ است. چون بار ناورداست، همان مقدار بار بین A' و B' وجود دارد که بین A و B است. بنابراین،

$$\sigma' \sqrt{1+(\epsilon/0)^2} = \sigma \sqrt{2} \Rightarrow \sigma' = (1,1043) \sigma \quad (9-94)$$

حالا میدان E' را حساب می‌کنیم. اندازه‌ی میدان E در چارچوب F برابر $\sigma/2\epsilon_0$ است. جهت آن با محورهای زاویه‌ی 45° می‌سازد. شکل (۹-۴۷) را ببینید. معادله‌های (۹-۹۳)

مولفه‌ی میدان را در چارچوب F' به دست می‌دهند. داریم

$$E'_\parallel = E_\parallel = E/\sqrt{2} \quad ; \quad E'_\perp = \gamma E_\perp = \lambda E/\sqrt{2} \quad (9-95)$$

E' در شکل (۹-۴۸) نشان داده شده است. اندازه‌ی آن $E' = (E/\sqrt{2}) \sqrt{1+(0/\epsilon)^2} = (1,1319)E$ است. زاویه‌ی آن رو به بالاست و شیب خط میدان $E'_\perp/E'_\parallel = \gamma$ است. صفحه‌ی باردار هم به سوی بالا زاویه پیدا کرده است و شیب آن $\ell/(\ell/\gamma) = \gamma$ شده است. بنابراین، زاویه‌ی θ در شکل (۹-۴۸) برابر $\tan^{-1} \gamma = 51,34^\circ$ است. این بدان معنی است که E' با صفحه‌ی باردار زاویه‌ی 2θ می‌سازد. به بیان دیگر، E' نسبت به خط عمود بر صفحه‌ی باردار $12,68^\circ \approx 90^\circ - 2\theta$ دارد. مولفه‌ی عمود بر صفحه‌ی میدان E' عبارت است از

$$E'_n = E' \cos 12,68^\circ = (1,1319E) \cos 12,68^\circ = (1,1043)E \quad (9-96)$$

می‌بینیم که مقدار E'_n/E با مقدار σ'/σ برابر است. چون $E = \sigma/2\epsilon_0$ است، هر دو طرف این رابطه را می‌توان در $1,1043$ ضرب کرد و گفت $E'_n = \sigma'/2\epsilon_0$ است. یعنی، هنوز هم قانون گاوس برقرار است. در چارچوب F' میدان مولفه‌ای هم موازی صفحه‌ی باردار دارد (این یکی در چارچوب F وجود نداشت)، اما تاثیری در شار گذرنده از سطح گاوس ندارد. می‌توانید با حل مسئله بر حسب γ نشان دهید که هم‌خوانی عددها تصادفی نیست. (نگاه کنید به مسئله‌ی)

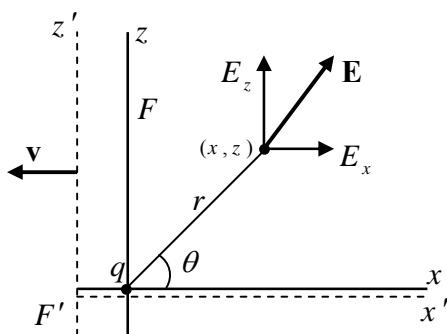
۹-۱۱ میدان ذره‌ی باردار نقطه‌ای که با سرعت ثابت حرکت می‌کند

بار نقطه‌ای q در مرکز چارچوب F در حال سکون است. اندازه‌ی

میدان الکتریکی E آن در هر نقطه برابر $q/4\pi\epsilon_0 r^2$ و جهت میدان شعاعی و به سوی بیرون است. در شکل (۹-۴۹) مولفه‌های میدان در صفحه‌ی xz دیده می‌شوند و در نقطه‌ی (x, z) برابر

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{3/2}} \quad (9-97)$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{3/2}} \quad (9-98)$$



شکل ۹-۴۹ میدان الکتریکی بار نقطه‌ای ساکن در F

حالا چارچوب F' را در نظر بگیرید که نسبت به چارچوب F با سرعت v در جهت $-\hat{x}$ حرکت می‌کند. فرض کنید مبدأ این دو چارچوب در زمان $t = 0$ برهم منطبق بوده‌اند (این فرض فقط برای سادگی است). پدیده‌ی انطباق دو مبدأ را رویداد A بنامید. پس، مختصات رویداد A در چارچوب F عبارت است از $(x_A, y_A, z_A, t_A) = (0, 0, 0, 0)$ و در چارچوب F' به صورت

(x, y, z, t) آن را F چارچوب است که در چارچوب F' $(x'_A, y'_A, z'_A, t'_A) = (0, 0, 0, 0)$ است. رویداد B مکان فضا-زمان نقطه‌ی دیگری است که در چارچوب F' (x', y', z', t') خواهیم نامید.

اگر چارچوب F' با سرعت v در راستای \hat{x} نسبت به چارچوب F حرکت کند، تبدیل‌های لورنتس بین مختصات این دو چارچوب به قرار زیر است

$$x' = \gamma x - \gamma \beta ct, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma t - \frac{\gamma \beta x}{c} \quad (9-99)$$

در مثال ما چارچوب F' در جهت $-\hat{x}$ با سرعت v نسبت به چارچوب F حرکت می‌کند. برای یافتن ارتباط بین مختصات یک رویداد در این چارچوب، می‌توان دو کار انجام داد. یا باید علامت β را عوض کنیم و یا در رابطه‌ی (9-99) جای کمیت‌های پرایم‌دار را عوض کنیم. چون می‌خواهیم x و z را برحسب x' و z' بنویسیم، گزینه‌ی دوم را برمی‌گزینیم. داریم

$$x = \gamma x' - \gamma \beta ct', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma t' - \frac{\gamma \beta x'}{c} \quad (9-100)$$

در چارچوب F' مولفه‌های x و z میدان با رابطه‌های (9-91) و (9-92) داده شده‌اند. همین مولفه‌ها در چارچوب F با رابطه‌های (9-97) و (9-98) داده شده‌اند. اگر این دو معادله را با استفاده از تبدیل‌های (9-100) در چارچوب F' بنویسیم، خواهیم داشت

$$E'_x = \frac{q(\gamma x')}{\epsilon \pi \epsilon_0 \left[(\gamma x')^2 + z'^2 \right]^{3/2}} = E_x, \quad E'_z = \frac{\gamma(qz')}{\epsilon \pi \epsilon_0 \left[(\gamma x')^2 + z'^2 \right]^{3/2}} = \gamma E_z \quad (9-101)$$

توجه کنید که $E'_z/E'_x = z'/x'$ است و نشان می‌دهد که زاویه‌ی بردار E' با محور x' ، با زاویه‌ای که بردار شعاعی \mathbf{r}' با محور x' می‌سازد، برابر است. بنابراین، جهت بردار E' برون‌سو و در راستای خطی است که از مکان لحظه‌ای بار q رسم می‌شود. اندکی درنگ کنید و بر این نتیجه‌گیری بیندیشید: اگر بار q در زمان t' (زمانی است که در چارچوب پرایم‌دار اندازه گرفته می‌شود، فرض کنید t' درست ساعت ۱۲ ظهر در چارچوب F' است) از مبدا مختصات چارچوب F' بگذرد، هر ناظری در هر نقطه‌ی چارچوب F' خواهد گفت که میدان الکتریکی در ساعت ۱۲ ظهر در پیرامون او در راستای شعاعی نسبت به مبدا مختصات است. آیا این به معنی آن است که اطلاعات آنی انتقال پیدا می‌کند؟ چگونه ممکن است ناظری که ۱۰ کیلومتر دورتر از بار است، می‌داند که در آن لحظه بار q در کجا قرار دارد؟ البته این گونه نیست و چنین برداشتی هم نادرست است. توجه کنید که بار q با سرعت یکنواخت در حرکت دائمی بوده است و با برنامه‌ای از پیش تعیین شده می‌بایست در ساعت ۱۲ ظهر از مبدا می‌گذشت. این آگاهی پیشاپیش وجود داشت. اگر مایلید در قالب علت و معلول بیندیشید، در اینجا تاریخچه‌ی گذشته‌ی ذره است که میدان مشاهده شده را تعیین می‌کند. اگر برنامه‌ی حرکت بار از پیش تعیین شده نباشد (مثلاً ذره حرکت کند و سپس بایستد و دوبار حرکت کند)، چه پیش می‌آید؟

شدت میدان الکتریکی در چارچوب F' را می‌توان از $E'_x + E'_z = E'^x$ به دست آورد

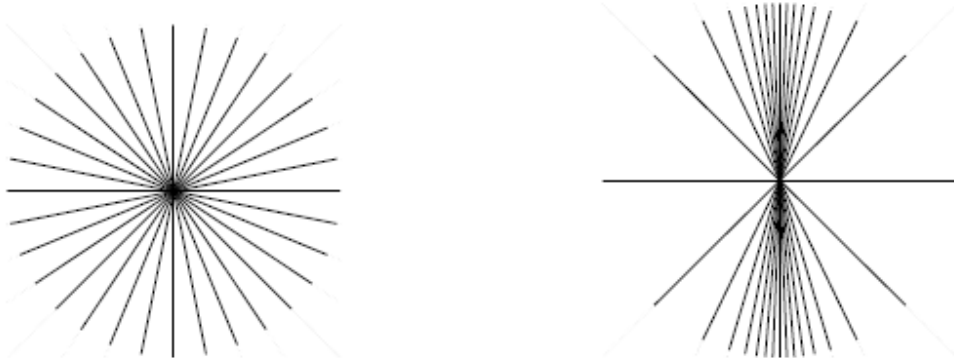
$$\begin{aligned} E'^x = E'_x + E'_z &= \frac{\gamma^2 q^2 (x'^x + z'^z)}{(\epsilon \pi \epsilon_0)^2 \left[(\gamma x')^2 + z'^2 \right]^2} + \frac{q^2 (x'^x + z'^z)}{(\epsilon \pi \epsilon_0)^2 \gamma^2 \left[x'^x + z'^z - \beta^x z'^z \right]^2} \\ &= \frac{q^2 (1 - \beta^2)^2}{(\epsilon \pi \epsilon_0)^2 (x'^x + z'^z)^2 \left(1 - \frac{\beta^x z'^z}{x'^x + z'^z} \right)^2} \end{aligned} \quad (9-102)$$

فاصله‌ی بار q در لحظه‌ای که از مبداء مختصات می‌گذرد تا نقطه‌ی (x', z') را $r' = (x'^2 + z'^2)^{1/2}$ بنامید. زاویه‌ی بین این بردار شعاعی و بردار سرعت بار q را با θ' نشان دهید. توجه کنید که بار q در چارچوب F' در جهت مثبت x' حرکت می‌کند. چون $z' = r' \sin \theta'$ است، شدت میدان را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E' = \frac{q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} \quad (9-103)$$

نه مبداء مختصات و نه صفحه‌ی $x'z'$ برتری خاصی نسبت به مبداء دیگر که بر روی محور x' است یا صفحه‌ی دیگری که یک بعد آن را محور x' تشکیل می‌دهد، ندارد. بنابراین، به طور کلی می‌توان گفت که میدان الکتریکی بار الکتریکی که در حرکت یکنواخت است، در هر لحظه‌ی زمانی در راستای شعاعی از مکان لحظه‌ای بار است. اندازه‌ی این میدان با رابطه‌ی (۹-۱۰۳) داده شده است. θ' زاویه‌ی بین جهت حرکت بار و بردار شعاعی از مکان لحظه‌ای بار تا نقطه‌ای است که میدان در آنجا مشاهده می‌شود.

در سرعت‌های کم ($\beta^2 \ll 1$)، اندازه‌ی میدان به $E' \approx q/r'^2$ کاهش می‌یابد و به تقریب برای همه‌ی زمان‌ها یکسان است. این میدانی است که بار نقطه‌ای q ساکن در چارچوب F' تولید می‌کند. اگر β^2 کوچک نباشد، شدت میدان در فاصله‌ی a از بار، در راستای عمود بر حرکت بار، قوی‌تر از شدت میدان در راستای حرکت می‌شود. در شکل (۹-۵۰) این وضعیت را برای باری که در راستای x' با $\beta = 0.5$ حرکت می‌کند، نشان داده‌ایم. شدت میدان را با چگالی خط‌های میدان نشان داده‌ایم. برای مقایسه، در سمت چپ این شکل خط‌های میدان یک بار ساکن هم نشان داده شده است. همان‌گونه که از شکل پیداست، خط‌های میدان در



شکل ۹-۵۰ مقایسه‌ی خط‌های میدان بار ساکن و باری که با سرعت $\beta = 0.5$ به سمت راست در حال حرکت است.

راستای حرکت بار ضعیف‌تر از خط‌های میدان بار ساکن است، اما خط‌های میدان بار متحرک در راستای عمود بر جهت حرکت قوی‌تر از خط‌های میدان بار ساکن است. این مشاهده با رابطه‌ی (۹-۱۰۳) سازگار است. برای نمونه، به‌ازای $\theta' = 0$ داریم

$$E' = \frac{q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r'^2} (1 - \beta^2) = \frac{1}{\gamma^2} \frac{q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r'^2} < \frac{q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r'^2} \quad (9-104)$$

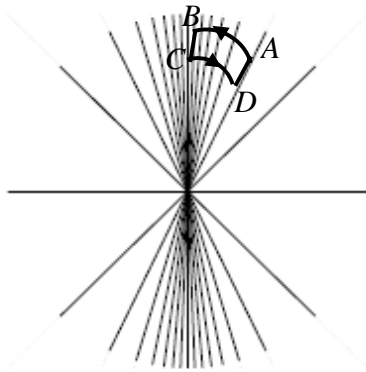
و به‌ازای $\theta' = \pi/2$ به‌دست می‌آید

$$E' = \frac{q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r'^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \frac{q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r'^2} > \frac{q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r'^2} \quad (9-105)$$

میدان الکتریکی بار متحرک بسیار چشمگیر است. این میدان، تقارن کروی ندارد، چون در چارچوب F' همه‌ی جهت‌ها هم‌ارز نیستند، بلکه جهت حرکت بار متمایز است و تقارن کروی را شکانده است. با این حال، میدان نسبت به صفحه‌ای که بر جهت

حرکت بار عمود است و از بار می‌گذرد، تقارن دارد. این جمله‌ی آخری کافی است که نشان دهیم میدان صفحه‌ی باردار است که در صفحه‌ی خودش حرکت می‌کند، در جهت عمود بر صفحه است.

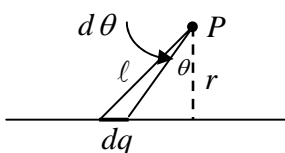
سرانجام، اگر باریکه‌ی پیوسته‌ای از بارهای متحرک با چگالی بار خطی λ داشته باشیم، میدان الکتریکی چگونه خواهد بود؟ از قانون گاوس می‌دانیم که میدان به صورت $\lambda/\sqrt{2}\pi\epsilon_0 r$ است. تا جایی که به میدان الکتریکی مربوط است، مهم نیست که بارها حرکت طولی دارند یا نه. اما چندان روشن نیست که جمع میدان‌های (نامتقارن کروی شکل (۹-۵۰)) تک بارها به ازای هر مقدار β برابر $\lambda/\sqrt{2}\pi\epsilon_0 r$ است. در مثال زیر درستی آن را نشان می‌دهیم.



شکل ۹-۵۱ میدان الکتریکی بار متحرک

همچنین توجه کنید که هیچ نوع توزیع بار ساکنی نمی‌تواند میدانی همانند شکل (۹-۵۱) تولید کند. در این میدان انتگرال خط E' بر روی مسیر بسته صفر نیست. برای مثال، مسیر بسته‌ی $ABCD$ را در نظر بگیرید، میدان الکتریکی بر بخش‌های دایره‌ای این مسیر عمود است و سهمی در انتگرال $\oint E' \cdot ds$ ندارند. میدان در بخش شعاعی در امتداد BC قوی‌تر از راستای AD است و در نتیجه، $\oint E' \cdot ds \neq 0$ است. اما نباید فراموش کرد که E' میدان الکتروستاتیک نیست. بنابراین، نباید هم انتظار داشت که $\oint E' \cdot ds$ صفر باشد. میدان E' در هر نقطه‌ی واقع در چارچوب F' در اثر حرکت بار چشمه، با زمان تغییر می‌کند.

مثال ۹-۱۵ میدان E بارهای متحرک: باریکه‌ی پیوسته‌ای از بارهای نقطه‌ای در امتداد محور x با سرعت v حرکت می‌کنند. باریکه از $-\infty$ تا $+\infty$ ادامه دارد. فرض کنید در چارچوب آزمایشگاه، چگالی بار در واحد طول λ است. با استفاده از سطح گاوس استوانه‌ای می‌دانیم که در فاصله‌ی r از محور x میدان برابر $E = \lambda/\sqrt{2}\pi\epsilon_0 r$ است. با استفاده از معادله‌ی (۹-۱۰۳) این نتیجه را دوباره به دست آورید و بر روی همه‌ی بارهای متحرک از آن انتگرال بگیرید.



شکل ۹-۵۲ میدان بار متحرک

حل: برای این که میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P حساب کنیم، بار جزیی dq را همانند شکل (۹-۵۲) در نظر بگیرید. زاویه‌ی θ در اینجا، متمم زاویه‌ی θ در شکل (۹-۴۹) است. پس، میدان جزء بار dq در نقطه‌ی P عبارت است از

$$dE = \frac{dq}{\epsilon\pi\epsilon_0 \ell^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \quad (9-106)$$

که در آن $\ell = r/\cos \theta$ است. طول بخش کوچک شامل dq برابر $d(r \tan \theta) = r d\theta/\cos^2 \theta$ است. در نتیجه، بار $dq = \lambda(r d\theta/\cos^2 \theta)$ بنا به تقارن، فقط مولفه‌ی عمود بر باریکه‌ی میدان صفر است. پس

$$E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dq}{\epsilon\pi\epsilon_0 \ell^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \cos \theta = \frac{\lambda}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda(r d\theta/\cos^2 \theta)}{(r/\cos \theta)^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \cos \theta$$

$$= \frac{\lambda(1-\beta^2)}{\epsilon\pi\epsilon_0 r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{(1-\beta^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \quad (9-107)$$

پاسخ این انتگرال (از یک کامپیوتر یا از جدول انتگرال‌ها استفاده کنید) به صورت زیر است

$$\frac{\lambda(1-\beta^2)}{\epsilon\pi\epsilon_0 r} \frac{\sin\theta}{(1-\beta^2)\sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta}} \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\lambda(1-\beta^2)}{\epsilon\pi\epsilon_0 r} \frac{2}{(1-\beta^2)} = \frac{\lambda}{\epsilon\pi\epsilon_0 r} \quad (9-108)$$

۹-۱۲ نیرویی که بر بار آزمون متحرک وارد می‌شود

با استفاده از معادله‌ی (۹-۱۰۳) می‌توان نیروی وارد به بار ساکن را در میدان یک بار متحرک حساب کرد. به بار آزمونی که که در میدان بار دیگری حرکت می‌کند، چه نیرویی وارد می‌شود؟

نخست، حالتی را در نظر بگیرید که بار تولید کننده‌ی میدان (بار چشمه) ساکن است و بار آزمون در این میدان حرکت می‌کند. در فصل ۲ به این وضعیت اشاره شد. در آنجا گفتیم که اگر بار آزمون q در میدان بار ساکن قرار گیرد، به آن نیروی $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ وارد می‌شود. وجود میدان الکتریکی در مکان بار آزمون مستقل از خود بار آزمون است. در الکتروستاتیک، فقط لازم است که بارهای چشمه ساکن باشند. قانون نیروی $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ برای بار آزمون ساکن یا متحرک یکسان است. می‌خواهیم درستی این گزاره را نشان دهیم. بار آزمون ممکن است الکترونی باشد که بین صفحه‌های باردار اسیلوسکوپ حرکت می‌کند یا ذره‌ی آلفا باشد که در میدان کولمبی هسته‌ی اتم حرکت می‌کند. در هر دو حالت، همواره می‌توان چارچوبی را یافت که در آن چارچوب چشمه‌ی تولید کننده‌ی میدان در حال سکون است. ما این چارچوب را چارچوب آزمایشگاه خواهیم نامید. فرض کنید در چارچوب آزمایشگاه در زمان t و در مکان (x, y, z) ذره‌ای با بار q در میدان الکتروستاتیک با سرعت \mathbf{v} حرکت می‌کند. چه نیرویی به این بار وارد می‌شود؟

نیرو آهنگ تغییر تکانه است. بنابراین، پرسش ما به راستی یافتن آهنگ تغییر تکانه‌ی ذره، dp/dt در زمان t و در مکان (x, y, z) در چارچوب آزمایشگاه F است. بگذارید این وضعیت را از چارچوبی بررسی کنیم که در زمان مورد نظر با ذره حرکت می‌کند. این چارچوب را F' بنامید. ذره در چارچوب F' در حال سکون است. بار دیگری که میدان را به وجود آورده است، در چارچوب F' در حال حرکت است. این وضعیتی است که می‌دانیم چگونه با آن کنار بیاییم. مقدار بار q در چارچوب F' همان است که در چارچوب F است؛ چون بار الکتریکی ناورد است. نیروی وارد به بار ساکن q در F' برابر $q\mathbf{E}'$ است. \mathbf{E}' میدانی است که در چارچوب F' دیده می‌شود (در این چارچوب، میدان را بار متحرک تولید کرده است). از رابطه‌های (۹-۹۳) می‌دانیم که چگونه می‌توان \mathbf{E}' را با دانستن \mathbf{E} حساب کرد. پس، با دانستن \mathbf{E} می‌توانیم آهنگ تغییر تکانه‌ی ذره را در چارچوب F' به دست آورد. بیان هم‌ارز برای مسئله‌ی ما این است که هنگام رفتن از یک چارچوب لخت به چارچوب لخت دیگر، آهنگ تغییر تکانه چگونه تبدیل می‌شود؟

جزئیات پاسخ به این پرسش در پیوست مربوط به نسبیت این کتاب آمده است. در راستای موازی حرکت نسبی دو چارچوب، مولفه‌ی نیرو در چارچوب متحرک با مولفه‌ی نیرو در چارچوب ساکن ذره یکسان است. مولفه‌ی نیرو در راستای عمود بر سرعت نسبی دو چارچوب، در چارچوب متحرک همواره با ضریب $1/\gamma$ کوچک‌تر از مقدار آن در چارچوب سکون ذره است. اگر از نمادهای \parallel و \perp به ترتیب، برای موازی سرعت نسبی بودن و عمود بر سرعت نسبی بودن دو چارچوب F و F' استفاده کنیم، گفتار بالا را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt'}, \quad \frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_{\perp}}{dt'} \quad (9-109)$$

توجه کنید که در این رابطه‌ها بین کمیت‌های دو چارچوب F و F' تقارن وجود ندارد. چارچوب سکون ذره (که در اینجا

چارچوب F' است) چارچوب خاصی است و اندازه‌ی مولفه‌ی عرضی نیرو بزرگتر از مقدار آن در چارچوب متحرک F است. معادله‌های (۹-۱۰۹) قانون‌های تبدیل مولفه‌های نیروست. با این قانون‌ها و قانون‌های تبدیل میدان الکتریکی \mathbf{E} در معادله‌های (۹-۹۳)، اینک می‌توانیم به ذره‌ی باردار برگردیم که در میدان الکتریکی \mathbf{E} حرکت می‌کند.

نخست مولفه‌ی E_{\parallel} (مولفه‌ی میدان که با جهت لحظه‌ای حرکت ذره‌ی باردار موازی است) میدان \mathbf{E} را در نظر بگیرید. آن را به چارچوبی مانند F' ببرید که در آن لحظه به همراه ذره حرکت می‌کند. در این چارچوب (که چارچوب سکون ذره است) مولفه‌ی طولی میدان الکتریکی، E'_{\parallel} است و بنا به رابطه‌ی (۹-۹۳)، $E'_{\parallel} = E_{\parallel}$ است. پس، نیروی dp'_{\parallel}/dt' عبارت است از

$$\frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = qE'_{\parallel} = qE_{\parallel} \quad (9-110)$$

ناظری که در چارچوب F مولفه‌ی طولی نیرو را اندازه می‌گیری، آهنگ تغییر تکانه، dp_{\parallel}/dt ، را به دست می‌آورد. بر اساس رابطه‌ی (۹-۱۰۹)، $dp_{\parallel}/dt = dp'_{\parallel}/dt'$ است. بنابراین، در چارچوب F مقدار اندازه‌گیری شده‌ی مولفه‌ی طولی نیرو برابر

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} \Rightarrow \frac{dp_{\parallel}}{dt} = qE_{\parallel} \quad (9-111)$$

است. نکته در این است که با گذشت زمان، ذره در چارچوب F' در حال سکون باقی نمی‌ماند، بلکه بر اثر میدان \mathbf{E}' شتاب پیدا خواهد کرد و سرعت \mathbf{v}' (سرعت ذره در چارچوب لخت لحظه‌ای) به تدریج افزایش پیدا می‌کند. با این حال، چون شتابی که ذره پیدا می‌کند، شتاب لحظه‌ای است، فقط مقدارهای جزئی v' حضور دارند و شرایط محدود کننده‌ی رابطه‌های (۹-۱۰۹) برآورده می‌شوند.

حالا مولفه‌ی E_{\perp} (مولفه‌ی عرضی میدان در چارچوب F) را در نظر بگیرید. قاعده‌ی تبدیل آن بین دو چارچوب، $E'_{\perp} = \gamma E_{\perp}$ است. بنابراین، داریم

$$\frac{dp'_{\perp}}{dt'} = qE'_{\perp} = q\gamma E_{\perp} \quad (9-112)$$

حال اگر این نیرو را به چارچوب F ببریم، γ حذف می‌شود و خواهیم داشت

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_{\perp}}{dt'} = \frac{1}{\gamma} (q\gamma E_{\perp}) \Rightarrow \frac{dp_{\perp}}{dt} = qE_{\perp} \quad (9-113)$$

دو معادله‌ی (۹-۱۱۱) و (۹-۱۱۳) پیام ساده‌ای دارند: نیروی وارد به ذره‌ی باردار که در چارچوب F و در میدان \mathbf{E} در آن چارچوب، حرکت می‌کند، $q\mathbf{E}$ است و به سرعت ذره بستگی ندارد.

این نتیجه‌گیری باید برای شما آشنا باشد. پیش‌تر، در فصل ۲ گفته بودیم که نیروی وارد به بار آزمون در حال حرکت $q\mathbf{E}$ است. اینک آن را ثابت کردیم. می‌توانیم از آن به عنوان یک واقعیت تجربی نام ببریم. درستی این نتیجه‌گیری برای الکترون تا سرعت‌های خیلی نزدیک به سرعت نور (تا حد $\gamma = 10^5$) آزموده شده است. از این دیدگاه، این قانون بسیار چشمگیر است و نتیجه‌ی مستقیم ناوردایی بار الکتریکی است.

مثال ۹-۱۶ الکترون در اسیلوسکوپ: میدان الکتریکی بین صفحه‌های یک اسیلوسکوپ (خازن تخت) در چارچوب آزمایشگاه E است. الکترونی با سرعت v و موازی با صفحه‌های اسیلوسکوپ به این ناحیه وارد می‌شود. اگر طول صفحه‌ها l باشد، هنگام خروج الکترون از صفحه‌های اسیلوسکوپ، تکانه‌ی عرضی و انحراف عرضی الکترون چقدر اند؟ این مسئله را نخست در چارچوب آزمایشگاه حل کنید و سپس در چارچوب لختی آن را حل کنید که چارچوب الکترون در هنگام وارد شدن به ناحیه‌ی

بین صفحه‌های اسیلوسکوپ (خازن تخت) است. می‌توانید فرض کنید که حرکت عرضی الکترون غیر نسبییتی است.

حل: در چارچوب آزمایشگاه F : جهت حرکت اولیه‌ی الکترون را راستای x برگزینید. در چارچوب آزمایشگاه F مولفه‌ی x

تکانه $p_x = \gamma m v_x$ است که در آن $\gamma = 1/\sqrt{1-v_x^2/c^2}$ است. چون در راستای x نیرویی وجود ندارد، تکانه‌ی p_x تغییر نمی‌کند. مدت زمانی را که الکترون در بین صفحه‌ها سپری می‌کند $t = \ell/v_x$ است. اندازه‌ی نیروی عرضی مقدار ثابت eE است و با آهنگ تغییر تکانه‌ی عرضی برابر است. بنابراین، تکانه‌ی عرضی نهایی الکترون عبارت است از

$$p_y = (eE)t = \frac{eE\ell}{v_x} \quad (9-114)$$

چون $p_y = \gamma m v_y$ است، در هنگام خروج الکترون از فضای بین صفحه‌ها، سرعت عرضی آن عبارت است از

$$v_y = \frac{p_y}{\gamma m} = \frac{eE\ell}{\gamma m v_x} \quad (9-115)$$

(توجه کنید که γ با سرعت کل ذره حساب می‌شود که در اینجا اساساً v_x است. برای محاسبه‌ی γ نباید از v_y استفاده کنید.)

چون نیروی عرضی مقدار ثابتی است و ما فرض می‌کنیم که سرعت عرضی نانسبییتی است، شتاب عرضی هم مقدار ثابتی است. پس، سرعت عرضی میانگین نصف مقداری است که در رابطه‌ی (9-115) برای v_y به دست آوردیم: $\bar{v}_y = eE\ell/2\gamma m v_x$. مسافت عرضی که ذره می‌پیماید، عبارت است از

$$y = \bar{v}_y t = \frac{eE\ell}{2\gamma m v_x} \frac{\ell}{v_x} = \frac{eE\ell^2}{2\gamma m v_x^2} \quad (9-116)$$

در چارچوب سکون اولیه‌ی الکترون، F' : اگرچه الکترون به تدریج در راستای عرضی از این چارچوب شتاب خواهد یافت، ما

هنوز آن را چارچوب الکترون خواهیم نامید. در این چارچوب صفحه‌های اسیلوسکوپ با سرعت v_x به سوی چپ حرکت می‌کنند و طول صفحه‌ها انقباض یافته و برابر ℓ/γ است. پس، زمانی را که الکترون بین صفحه‌ها سپری می‌کند (در واقع این زمانی است که طول می‌کشد تا صفحه‌ها از بالا و از زیر الکترون بگذرند) برابر است با

$$t' = \frac{\ell/\gamma}{v_x} = \frac{t}{\gamma} \quad (9-117)$$

میدان الکتریکی در این چارچوب γ برابر میدان در چارچوب آزمایشگاه است. بنابراین، $E' = \gamma E$ است. پس، تکانه‌ی عرضی که الکترون به دست می‌آورد

$$p'_y = eE't' = e(\gamma E) \frac{t}{\gamma} = eEt = \frac{eE\ell}{v_x} \quad (9-118)$$

است. این مقدار با نتیجه‌ای که در چارچوب آزمایشگاه یافتیم یکی است. این گونه هم باید باشد، چون تبدیل لورنتس در راستای x نباید تاثیری بر تکانه‌ی عرضی داشته باشد.

در چارچوب F' الکترون نانسبییتی است، بنابراین، $v'_y = p'_y/m = eE\ell/mv_x$ است (توجه کنید که این مقدار γ برابر سرعت نهایی v_y در چارچوب آزمایشگاه است). پس، سرعت عرضی میانگین $\bar{v}'_y = v'_y/2 = eE\ell/2mv_x$ است. در نتیجه، فاصله‌ی عرضی کل

$$y' = \bar{v}'_y t' = \frac{eE\ell}{2mv_x} \frac{\ell}{\gamma v_x} = \frac{eE\ell^2}{2\gamma m v_x^2} \quad (9-119)$$

است و با مقدار y در چارچوب آزمایشگاه یکسان است. انتظار این یافته را داشتیم، چون تبدیل لورنتس در راستای افقی

تأثیری بر فاصله‌های عرضی ندارد.

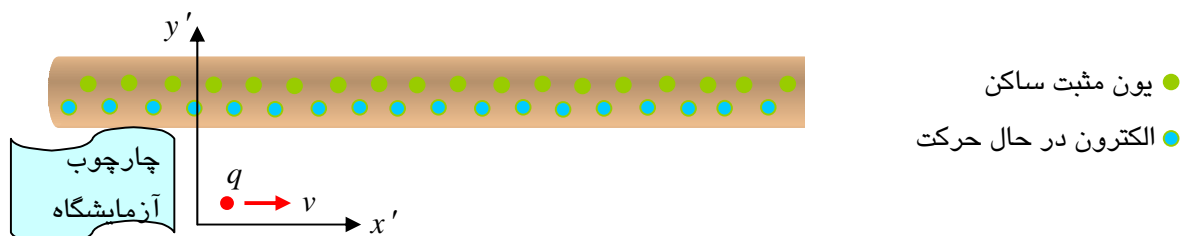
اگر می‌خواستید از رابطه‌ی سینماتیک $y = at^2/2$ در هر دو چارچوب استفاده کنید، باز هم به نتیجه‌ی $y' = y$ می‌رسیدید؛ چون در چارچوب F' الکترون زمان t' با ضریب γ کوتاه‌تر از زمان در چارچوب آزمایشگاه است، اما شتاب با ضریب γ^2 بزرگ‌تر است.

۹-۱۳ برهم‌کنش بین دو ذره‌ی در حال حرکت

وقتی بار الکتریکی حرکت می‌کند، ممکن است به آن نیروی وابسته به سرعت وارد بشود. نیروی وابسته به سرعت به میدان مغناطیسی مربوط است. چشمه‌ی میدان مغناطیسی جریان‌های الکتریکی اند، یعنی بارهای دیگری که در حال حرکت اند. آزمایش اورستد نشان داد که جریان‌های الکتریکی بر آهنرباها تأثیر می‌گذارند، اما در زمان اورستد سرشت مغناطیس کاملاً ناشناخته بود. آمپر و دیگران برهم‌کنش جریان‌های الکتریکی را بررسی کردند. یک نمونه‌ی برهم‌کنش بین جریان‌های الکتریکی ربایش بین دو سیم حامل جریان‌های هم‌سو است که در آغاز همین فصل به آن پرداختیم. آمپر با بررسی مواد مغناطیسی به این نتیجه رسید که مواد مغناطیسی شامل جریان‌های چرخشی دایمی اند. با پیشنهاد آمپر می‌توان انحراف عقربه‌ی مغناطیسی را در همسایگی سیم حامل جریان به صورت برهم‌کنش بین جریان گذرنده از سیم و جریان‌های میکروسکوپیکی دائمی عقربه توصیف کرد.

برهم‌کنش مغناطیسی جریان‌های الکتریکی را می‌توان نتیجه‌ی مستقیم قانون کولمب دانست. اگر اصول نسبیت درست باشند و بار الکتریکی ناوردا باشد و قانون کولمب برقرار باشد، اثرهایی که آنها را "مغناطیسی" می‌نامیم باید رخ بدهند. در این بخش می‌خوایم همین گزاره را نشان دهیم. با بررسی برهم‌کنش الکتریکی بین دو بار متحرک این اثرها ظاهر خواهند شد. این پدیده را با یک سامانه‌ی ساده نشان خواهیم داد.

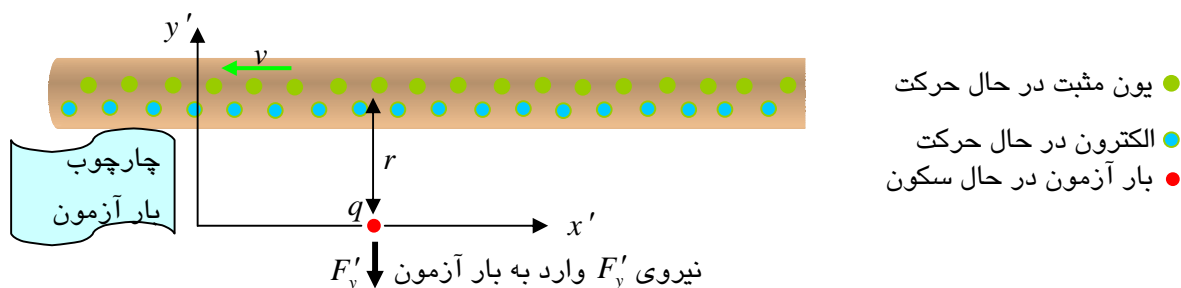
در چارچوب آزمایشگاه با مختصات فضایی x, y, z یک سیم مسی بینهایت درازی را در نظر بگیرید. یون‌های مثبت در سیم ساکن اند و الکترون‌های با بار منفی با سرعت v به سوی راست حرکت می‌کنند. در شکل (۹-۵۳) ما یون‌ها و الکترون‌ها را به صورت توزیع خطی نشان داده‌ایم. اندازه‌ی چگالی بار خطی یون‌های مثبت و الکترون‌های منفی را C/m بنامید. بنابراین، در هر طول l سیم و در هر زمان تعداد پروتون‌ها و الکترون‌های سیم برابرند و بار خالص سیم صفر است. اگر سطح گاوسی به شکل استوانه‌ی هم‌محور با سیم در نظر بگیریم، قانون گاوس می‌گوید که شاری از آن نمی‌گذرد، چون بار کل محصور در درون سطح گاوس صفر است. پس، میدان الکتریکی در همه‌ی نقاط بیرون سیم باید صفر باشد. به بار آزمونی که در همسایگی این سیم در حال سکون است، نیرویی وارد نمی‌شود.



شکل ۹-۵۳ یون‌ها و الکترون‌های سیم مسی در چارچوب آزمایشگاه. در این چارچوب سرعت بار آزمون v است.

فرض کنید در چارچوب آزمایشگاه بار آزمون q ساکن نیست، بلکه در جهت محور x با سرعت v حرکت می‌کند. حالا وضعیت

را در چارچوب F' با محورهای x', y' در نظر بگیرید که به همراه بار آزمون حرکت می‌کند. در این چارچوب، بار آزمون در حال سکون است، اما سیم مسی به دو دلیل دگرگون شده است: یون‌های مثبت در این چارچوب نزدیک به هم به نظر می‌رسند و الکترون‌ها دورتر از یکدیگر اند. این دگرگونی در سیم به این دلیل پدید می‌آید که چارچوب آزمایشگاه (که یون‌های در آن ساکن بودند) حالا با سرعت v حرکت می‌کند و فاصله‌ی بین یون‌ها در چارچوب بار آزمون با ضریب $1/\gamma$ یا $\sqrt{1-v^2/c^2}$ انقباض پیدا می‌کند. بنابراین، چگالی بارهای مثبت در این چارچوب افزایش می‌یابد و به مقدار $\gamma\lambda_0$ می‌رسد. محاسبه‌ی چگالی بارهای الکترون اندکی طولانی‌تر است، چون الکترون‌ها در چارچوب آزمایشگاه با سرعت v_0 در حرکت بودند و در نتیجه، چگالی خطی آنها در چارچوب آزمایشگاه (که $-\lambda_0$) است به سبب انقباض لورنتس، پیشاپیش افزایش پیدا کرده است. در چارچوب خود الکترون‌ها چگالی بارهای منفی می‌بایستی $-\lambda_0/\gamma_0$ می‌بود (γ_0 ضریب لورنتس مربوط به v_0 است). برای این که چگالی بارهای منفی را در چارچوب همراه بار آزمون حساب کنیم، حالا باید سرعت الکترون‌ها (v'_0) را در



شکل ۹-۵۴ یون‌ها و الکترون‌های سیم مسی در چارچوب بار آزمون. در این چارچوب بار آزمون ساکن است، اما یون‌های مثبت با سرعت v به سوی چپ حرکت می‌کنند و سرعت الکترون‌ها v'_0 است.

چارچوب همراه بار آزمون به دست بیاوریم. برای این کار باید سرعت‌های $-v$ و v_0 را با استفاده از قاعده‌ی جمع سرعت‌های نسبیتی جمع کنیم (پیوست نسبیت را در پایان کتاب ببینید). با نام‌گذاری‌های $\beta'_0 = v'_0/c$ و $\beta_0 = v_0/c$ و $\beta = v/c$ داریم

$$\beta'_0 = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta\beta_0} \quad (9-120)$$

ضریب لورنتس متناظر با این سرعت $-\gamma'_0$ را با اندک محاسبه می‌توانید از رابطه‌ی (۹-۱۲۰) حساب کنید. مقدار آن

$$\gamma'_0 \equiv (1 - \beta_0'^2)^{-1/2} = \gamma_0 (1 - \beta\beta_0) \quad (9-121)$$

است. وقتی چگالی بار الکترون‌ها را از چارچوب بار آزمون اندازه می‌گیریم، چگالی بار، نسبت به چارچوب سکون خود الکترون، با این ضریب افزایش پیدا می‌کند. چگالی بار خطی در چارچوب بار آزمون از دو بخش تشکیل شده است: چگالی بار یون‌های مثبت و چگالی بار الکترون‌های منفی. این دو در چارچوب آزمایشگاه از نظر اندازه برابر بودند، اما حالا هر یک به گونه‌ی متفاوتی تغییر کرده است. اگر چگالی بار کل را در چارچوب بار آزمون λ' بنامیم، خواهیم داشت

$$\lambda' = \gamma\lambda_0 - \frac{\lambda_0}{\gamma_0} \gamma_0 (1 - \beta\beta_0) = \lambda\beta\beta_0\lambda_0 \quad (9-122)$$

γ ضریب گذار به چارچوب بار آزمون است. λ_0 چگالی بارهای مثبت در چارچوب سکون یون‌ها (چارچوب آزمایشگاه) است. $-\lambda_0/\gamma_0$ چگالی بارهای منفی در چارچوب سکون الکترون‌هاست (توجه کنید که چارچوب آزمایشگاه، چارچوب سکون الکترون نیست، در این چارچوب الکترون با سرعت v_0 حرکت می‌کند). $(1 - \beta\beta_0) \equiv \gamma'_0$ ضریب لورنتس برای بردن چگالی بار الکترون به چارچوب بار آزمون است.

می‌بینیم که چگالی بار کل سیم (در چارچوب بار آزمون) مثبت است. بنابراین، قانون گاوس می‌گوید این سیم بینهایت دراز در پیرامون خود میدان الکتریکی شعاعی E'_r تولید می‌کند (از دید چارچوب بار آزمون). اندازه‌ی میدان عبارت است از

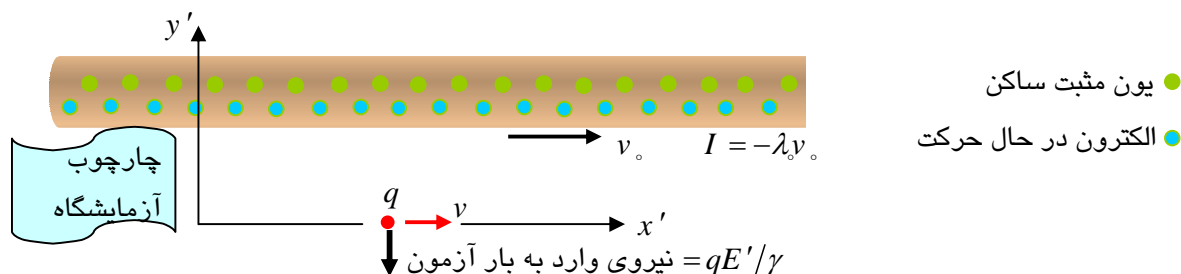
$$E'_r = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r'} = \frac{\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r'} \quad (9-122)$$

جهت این میدان در مکان بار آزمون q به سوی $-y'$ است. شکل (9-54) را ببینید. بنابراین، به بار آزمون نیروی

$$F'_y = qE'_y = -\frac{q\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r'} \quad (9-124)$$

وارد خواهد شد.

حالا برگردیم به چارچوب آزمایشگاه. این وضعیت در شکل (9-55) نشان داده شده است. اندازه‌ی نیروی وارد به بار آزمون q در این چارچوب چقدر است؟ اگر اندازه‌ی آن در چارچوب سکون بار آزمون qE'_y باشد، بنا به رابطه‌ی (9-109) آزمایشگر ساکن در چارچوب آزمایشگاه مقدار اندازه‌گیری خود را با ضریب $1/\gamma$ کوچکتر گزارش خواهد کرد. چون $r' = r$ است، در



شکل 9-55 یون‌ها و الکترون‌های سیم مسی در چارچوب آزمایشگاه. در این چارچوب سرعت بار آزمون v است. یون‌ها در حال سکون و الکترون‌ها با سرعت v_0 حرکت می‌کنند و جریان $I = -\lambda_0 v_0$ تولید می‌کنند.

نیرویی که در چارچوب آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود و بر بار آزمون در حال حرکت وارد می‌شود، عبارت است از

$$F_y = \frac{F'_y}{\gamma} = -\frac{q\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (9-125)$$

اما $-\lambda_0 v_0$ یا $-\lambda_0 \beta_0 c$ جریان کل است در سیم است که در چارچوب آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود، چون مقدار باری است که در واحد زمان از هر نقطه‌ی سیم شارش می‌کند. نتیجه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$F_y = \frac{qv_x I}{2\pi\epsilon_0 rc^2} \quad (9-126)$$

این نیرو در جهت $-\hat{y}$ است. پس، در چارچوب آزمایشگاه به بار آزمون متحرک، نیرویی در راستای y وارد می‌شود. این نیرو با جریان موجود در سیم و سرعت بار آزمون در راستای x متناسب است. چون در چارچوب آزمایشگاه میدان الکتریکی \mathbf{E} صفر است، این نیرو را میدان مغناطیسی \mathbf{B} به وجود می‌آورد. با استفاده از قانون نیروی لورنتس، میدان مغناطیسی \mathbf{B} متناظر با نیروی وارد به بار آزمون بالا را می‌توان حساب کرد

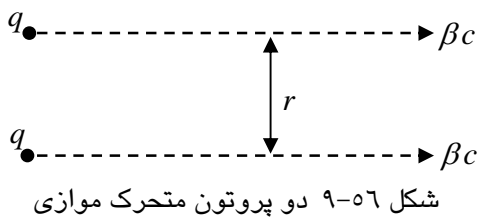
با توجه به شکل (9-53)، بار آزمون q در چارچوب آزمایشگاه در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. بنابراین، $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ است. اندازه‌ی نیروی وارد به بار آزمون را در رابطه‌ی (9-126) حساب کردیم؛ جهت آن در راستای $-\hat{y}$ است. پس،

$$\mathbf{F} = -\frac{qvI}{2\pi\epsilon_0 rc^2} \hat{\mathbf{y}} \quad (9-127)$$

چون میدان الکتریکی \mathbf{E} صفر است، از برابری رابطه‌ی (۹-۱۲۷) با قانون نیروی لورنتس به دست می‌آید

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\frac{qvI}{2\pi\epsilon_0 r c^2} \hat{\mathbf{y}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{B} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 r c^2} \hat{\mathbf{z}}} \quad (9-128)$$

مثال ۹-۱۷ نیروی بین دو پروتون در حال حرکت: دو پروتون به فاصله‌ی r از یکدیگر موازی هم حرکت می‌کنند. سرعت هر دو



در چارچوب آزمایشگاه βc است. شکل (۹-۵۶) را ببینید. بنا به رابطه‌ی (۹-۱۰۳) در مکان لحظه‌ای یک پروتون، میدان الکتریکی پروتون دیگر (در چارچوب آزمایشگاه) $\gamma e / \epsilon\pi\epsilon_0 r^2$ است (e بار الکتریکی پروتون است). اما نیرویی که در چارچوب آزمایشگاه به پروتون وارد می‌شود، برابر $\gamma e^2 / \epsilon\pi\epsilon_0 r^2$ نیست. درستی این گزاره را نشان دهید. برای این کار،

نخست نیروی وارد به پروتون را در چارچوب سکون آن حساب کنید و سپس نتیجه را به چارچوب آزمایشگاه ببرید. نشان دهید که اگر یک میدان مغناطیسی با اندازه‌ی β/c برابر میدان الکتریکی وجود داشته باشد، می‌توان تناقض بالا را توضیح داد. حل: در چارچوب سکون پروتون‌ها نیروی رانشی بین آنها $e^2 / \epsilon\pi\epsilon_0 r^2$ است. بنابراین، در چارچوب آزمایشگاه نیرو برابر $(\gamma/\gamma)(e^2 / \epsilon\pi\epsilon_0 r^2)$ است. به یاد بیاورید که نیرو همیشه در چارچوب سکون ذره بزرگتر است. این نیروی کل صحیح در چارچوب آزمایشگاه است. اما نیروی الکتریکی رانشی $e\mathbf{E}$ در چارچوب آزمایشگاه $\gamma e^2 / \epsilon\pi\epsilon_0 r^2$ است، چون رابطه‌ی (۹-۱۰۳) می‌گوید، میدان الکتریکی بار متحرک در راستای عرضی در چارچوب آزمایشگاه، γ برابر بزرگتر از میدانی است که در چارچوب سکون ذره اندازه‌گیری می‌شود (در چارچوب سکون ذره میدان در همه‌ی جهت‌ها یکسان و برابر $e / \epsilon\pi\epsilon_0 r^2$ است). بنابراین، به نظر می‌رسد که باید نیروی ربایشی دیگری وجود داشته باشد که بخشی از نیروی رانشی $\gamma e^2 / \epsilon\pi\epsilon_0 r^2$ را حذف می‌کند و آن را به مقدار $(\gamma/\gamma)(e^2 / \epsilon\pi\epsilon_0 r^2)$ کاهش می‌دهد. اندازه‌ی این نیروی ربایشی باید (با استفاده از $\gamma^2 = 1 - \beta^2$) برابر

$$\frac{\gamma e^2}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{e^2}{\gamma\epsilon\pi\epsilon_0 r^2} = \gamma \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{e^2}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^2} = \gamma\beta^2 \frac{e^2}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^2} = e(\beta c) \left(\frac{\beta}{c} \frac{\gamma e}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^2}\right) \quad (9-129)$$

باشد. دلیل این که نیرو را به صورت بالا نوشتیم این است که بتوانیم آن را همانند نیروی مغناطیسی $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ توصیف کنیم. اگر اندازه‌ی میدان مغناطیسی \mathbf{B} را $(\beta/c)(\gamma e / \epsilon\pi\epsilon_0 r^2)$ بنامیم، می‌بینیم که اندازه‌ی آن β/c برابر مقدار میدان الکتریکی در چارچوب آزمایشگاه است. اگر میدان مغناطیسی در مکان پروتون بالایی (پایینی) به سوی بیرون از صفحه (به سوی صفحه) باشد، جهت بردار حاصل از ضرب برداری $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ربایشی بودن نیروی آن را به درستی نشان می‌دهد. هر پروتون در مکان پروتون دیگر یک میدان مغناطیسی به وجود می‌آورد. واقعیت این که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی با ضریب β/c به یکدیگر مربوط اند، با تبدیل‌های لورنتس سازگار است.

نکته‌ی ۱: میدان الکتریکی عرضی یک بار الکتریکی متحرک در چارچوب سکون بار با ضریب γ کوچکتر از همان میدان در چارچوب آزمایشگاه یا در هر چارچوب است. نیروی عرضی که به یک بار وارد می‌شود، در چارچوب سکون بار γ برابر همان نیرو در چارچوب آزمایشگاه یا در هر چارچوب دیگر است.

نکته ۲: شاید بگویید که یکی از پروتون‌ها در میدان \mathbf{B} پروتون دیگر "حرکت نمی‌کند"، چون میدان \mathbf{B} پروتون دیگر به همراه و "در کنار پروتون اولی حرکت می‌کند" و در نتیجه، پروتون نسبت به میدان \mathbf{B} پیرامون خود در حال سکون است. این برداشت نادرست است. در قانون نیروی لورنتس $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ که تعریف بنیادی میدان \mathbf{B} است، میدان مغناطیسی در مکان بار q در یک لحظه‌ی زمانی است و هر دوی مکان و زمان در همان چارچوبی اندازه‌گیری می‌شوند که نیروی وارد به q اندازه‌گیری می‌شود. در آن لحظه، چشمه‌ی میدان چگار می‌کند، بی‌ربط است.

پيوست: حل كامل مثال ۹-۲

مثال ۹-۲: ذره‌ای با بار q در مبداء مختصات در حال سکون است. میدان‌های الکتریکی $\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{z}}$ و مغناطیسی $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$ همه جای فضا را انباشته اند. ذره از مبداء مختصات رها می‌شود، مسیر آن را بیابید.

حل: به طور کیفی انتظار داریم مسیر ذره چه ویژگی‌هایی داشته باشد؟ ذره از سکون حرکتش را آغاز می‌کند. بنابراین، در آغاز فقط میدان الکتریکی به ذره نیرو وارد می‌کند و در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ به آن شتاب می‌دهد. وقتی ذره سرعتی غیر صفر به دست می‌آورد، میدان مغناطیسی سبب می‌شود که مسیر ذره به سوی $\hat{\mathbf{y}}$ منحرف بشود. با افزایش سرعت ذره، انحراف آن هم بر اثر نیروی مغناطیسی افزایش پیدا می‌کند تا این که جهتش به سوی $-\hat{\mathbf{z}}$ برگردد. در این حالت، میدان الکتریکی با حرکت آن مخالفت کند و از سرعت آن می‌کاهد. در نتیجه، از انحراف ذره هم کاسته می‌شود. سرانجام ذره به حالت سکون درمی‌آید، اثر میدان مغناطیسی از بین می‌رود و دوباره میدان الکتریکی در راستای $\hat{\mathbf{z}}$ به آن شتاب می‌دهد و مسیر دوباره خود را تکرار می‌کند. بنابراین، می‌توان انتظار داشت که مسیر ویزگی دوره‌ای از خود نشان بدهد. هم‌چنین می‌دانیم که مکان ذره در راستای محور x هیچ‌گاه تغییر نخواهد کرد: $x(t) = \dot{x}(t) = \ddot{x}(t) = 0$. حالا بگذارید به طور کمی مسئله را حل کنیم.

نقطه‌ی آغاز ما $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = m\mathbf{a}$ است. مکان ذره را $\mathbf{r}(t) = (0, y(t), z(t))$ بنامید. بردارهای سرعت و شتاب آن عبارتند از

$$\mathbf{v}(t) = (0, \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \quad (1)$$

$$\mathbf{a}(t) = (0, \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) \quad (2)$$

وابستگی زمانی را به طور صریح نخواهیم نوشت تا معادله‌ها شکل جمع و جورتری داشته باشند. داریم

$$\mathbf{F} = q(0, 0, E) + q(0, \dot{y}, \dot{z}) \times (B, 0, 0) = m(0, \ddot{y}, \ddot{z}) \Rightarrow qB\dot{z}\hat{\mathbf{y}} + (qE - qB\dot{y})\hat{\mathbf{z}} = m\ddot{y}\hat{\mathbf{y}} + m\ddot{z}\hat{\mathbf{z}} \quad (3)$$

تنها راهی که این رابطه برقرار باشد این است که جمله‌های $\hat{\mathbf{y}}$ در دو طرف معادله با هم برابر باشند و جمله‌های $\hat{\mathbf{z}}$ هم به طور

جداگانه در دو طرف معادله‌ی بالا برابر باشند. بنابراین، باید داشته باشیم

$$qB\dot{z} = m\ddot{y} \quad (4)$$

$$qE - qB\dot{y} = m\ddot{z} \quad (5)$$

برای حل این جفت معادله‌های دیفرانسیل، از معادله‌ی (۵) نسبت به زمان مشتق بگیرید و نتیجه را در معادله‌ی (۴) برای \ddot{y} جایگزین کنید. به دست می‌آید

$$\frac{d}{dt}(4): -qB\ddot{y} = m\ddot{\dot{z}} \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{m\ddot{\dot{z}}}{qB} \Rightarrow (4) \Rightarrow qB\dot{z} = m\left(-\frac{m\ddot{\dot{z}}}{qB}\right) \quad (6)$$

پاسخ آزمونی به صورت $z = Ae^{\beta t}$ برگزینید. اگر بتوانیم β را چنان بیابیم که در معادله‌ی دیفرانسیل (۶) صدق کند، نشان

داده‌ایم که $z = Ae^{\beta t}$ پاسخ معادله است. پاسخ آزمون را در معادله‌ی (۶) جایگزین کنید. به دست می‌آید

$$\frac{d}{dt}Ae^{\beta t} + \frac{qB}{m}\frac{d}{dt}Ae^{\beta t} = 0 \Rightarrow Ae^{\beta t}\left(\beta + \frac{qB}{m}\right) = 0 \Rightarrow \beta = 0, \beta = \pm i\frac{qB}{m} \quad (7)$$

سه پاسخ برای β به دست آمد. بنابراین، عمومی‌ترین پاسخ معادله‌ی (۷) عبارت است از

$$z(t) = Be^{iqBt/m} + Ce^{-iqBt/m} + De^{0t} \quad (8)$$

از قاعده‌ی اولر $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ استفاده کنید و $Be^{iqBt/m} + Ce^{-iqBt/m}$ را به شکل زیباتری بنویسید:

$$Be^{iqBt/m} + Ce^{-iqBt/m} = B \cos(qBt/m) + iB \sin(qBt/m) + C \cos(-qBt/m) + i \sin(-qBt/m) \quad (9)$$

چون $\cos(-x) = \cos(x)$ و $\sin(-x) = -\sin(x)$ اند، معادله‌ی (۹) را می‌توانیم به صورت زیر دریاوریم

$$(B + C) \cos(qBt/m) + i(B - C) \sin(qBt/m) \quad (10)$$

اگر $B + C \equiv C_1$ و $i(B - C) \equiv C_2$ بنامیم، آنگاه معادله‌ی (۸) به صورت زیر درمی‌آید

$$z(t) = C_1 \cos(qBt/m) + C_2 \sin(qBt/m) + D \quad (11)$$

حالا بگذارید $y(t)$ را حساب بکنیم. از معادله‌های (۵) و (۱۱) داریم

$$qE - qBy = m\dot{z} \Rightarrow E - By = -\frac{qB^2}{m} \left[C_1 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \right] \quad (12)$$

از دو طرف این رابطه نسبت به زمان انتگرال بگیرد:

$$\int y dt = \int \left\{ \frac{qB}{m} \left[C_1 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \right] + \frac{E}{B} \right\} dt$$

$$\Rightarrow y(t) = C_1 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - C_2 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{E}{B}t + C_3 \quad (13)$$

سرانجام، از شرط‌های اولیه‌ی $y(0) = 0$ ، $z(0) = 0$ ، $y'(0) = 0$ و $z'(0) = 0$ استفاده کنید و مقدارهای ثابت C_1 ، C_2 ، C_3 و D را به دست آورید:

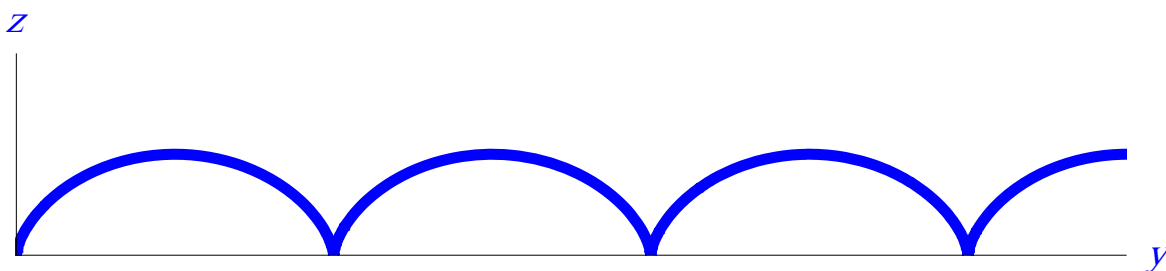
$$y(0) = 0 \Rightarrow C_3 = C_2 \quad ; \quad z(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -D$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{mE}{qB^2} \quad ; \quad z'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (14)$$

و در نتیجه،

$$\mathbf{r}(t) = \left(0, \frac{E}{B}t - \frac{mE}{qB^2} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right), \frac{mE}{qB^2} \left[1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \right] \right) \quad (15)$$

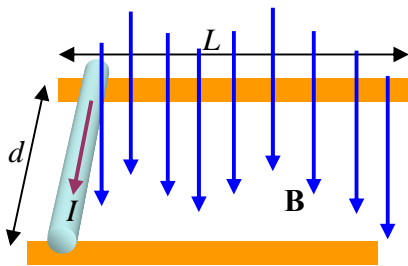
نمودار مسیر در شکل (۹-۵۷) رسم شده است.



شکل ۹-۵۹ مسیر سیکلوئیدی بار در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی

مسئله‌ها

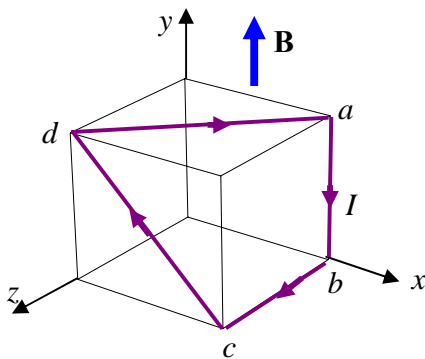
۹-۱ مسير مارپیچ: ذره‌ای با بار q و جرم سکون m با سرعت v در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ حرکت می‌کند. فرض کنید در آغاز حرکت، بردار سرعت v یک مولفه در جهت عمود بر میدان \mathbf{B} و یک مولفه‌ی موازی با میدان \mathbf{B} دارد. نشان دهید که ذره در روی یک مارپیچ حرکت می‌کند. در مدت یک دور چرخش بر روی مارپیچ، ذره چه مسافتی را در امتداد محور مارپیچ می‌پیماید؟



شکل ۹-۶۰ میله‌ی غلتنده

۹-۲ میله‌ی غلتنده: میله‌ای به جرم m و به شعاع R روی دو ریل موازی قرار دارد. میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} بر میله و ریل‌ها عمود است. فاصله‌ی ریل‌ها از یکدیگر d و طولشان L است. از میله جریان I می‌گذرد. جهت جریان در شکل (۹-۶۰) نشان داده شده است، می‌گذرد. میله بدون لغزش بر روی ریل‌ها می‌غلتد. اگر میله از حالت سکون شروع به غلتیدن بکند، سرعت آن را در هنگام ترک ریل‌ها به دست آورید.

۹-۳ سیم دور مکعب: مکعبی به ضلع a را در نظر بگیرید. چهار سیم راست ab ، bc ، cd و da یک حلقه‌ی بسته می‌سازند. جریان I در جهتی که در شکل (۹-۶۱) دیده می‌شود در حلقه شارش می‌کند. جهت \hat{y} یک میدان مغناطیسی یکنواخت \mathbf{B} در وجود دارد. اندازه و جهت نیروی مغناطیسی که به هر یک از سیم‌های ab ، bc ، cd و da وارد می‌شود چیست؟



شکل ۹-۶۱ سیم دور مکعب

MORE PROBLEMS TO BE ADDED