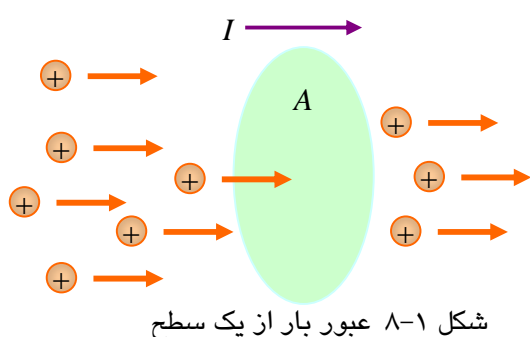


۸ جریان و مقاومت

۸-۱ جریان الکتریکی

جریان الکتریکی شارش بار الکتریکی است. وقتی حامل‌های بار الکتریکی حرکت کنند، جریان الکتریکی تولید می‌شود. حامل‌های بار الکترون و پروتون‌هایی اند که ممکن است آزاد باشند و یا به اجسام بزرگ‌تری مانند اتم و مولکول وابسته باشند. هنگامی که در باره‌ی جریان الکتریکی سخن می‌گوییم، ماهیت حامل‌های بار برای ما مهم نیست، بلکه بارهای خالص که در اثر حرکت آنها جابه‌جا می‌شوند اهمیت دارد. جریان الکتریکی در یک سیم مقدار باری است که در واحد زمان از یک نقطه‌ی معین سیم می‌گذرد.

در شکل (۸-۱) مجموعه‌ای از بارهای الکتریکی دیده می‌شوند که در جهت عمود بر سطح A حرکت می‌کنند. جریان الکتریکی که این بارها تولید می‌کنند با آهنگ گذار آنها از سطح A برابر است. این تعریف جریان الکتریکی است.



شکل ۸-۱ عبور بار از یک سطح

اگر مقدار بار ΔQ در بازه‌ی زمانی Δt از سطحی بگذرد، می‌توانیم برای آنها جریان میانگین I_{avg} تعریف کنیم:

$$I_{avg} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (8-1)$$

در یکاهای SI، جریان الکتریکی با آمپر (A) تعریف می‌شود. یک آمپر برابر یک کولمب بر ثانیه است:

$$1 A = 1 \text{ کولمب/ثانیه} \quad (8-2)$$

جریان‌های الکتریکی بازه‌ی بزرگی را دربر می‌گیرند. آذرخش می‌تواند

جریانی از مرتبه‌ی مگا آمپر تولید کند. در عصب‌های بدن انسان، جریان الکتریکی از مرتبه‌ی نانوآمپر است.

اگر در رابطه‌ی (۸-۱) زمان را به صفر میل دهیم، می‌توانیم جریان لحظه‌ای تعریف کنیم. در حد $\Delta t \rightarrow 0$ خواهیم داشت:

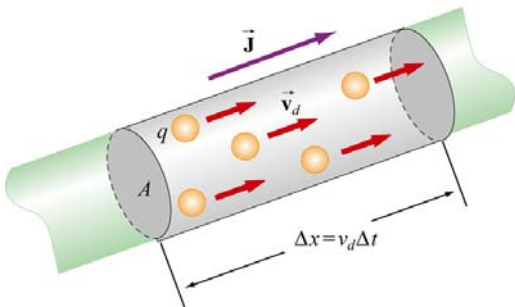
$$I \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (8-3)$$

چون شارش بار جهت دارد، بنابراین، جریان الکتریکی هم کمیت جهت‌دار و در نتیجه، یک کمیت برداری است. در این جا به‌طور ضمنی قرارداد می‌کنیم که جهت شارش بارهای مثبت را جهت جریان بنامیم. در یک سیم، الکترون‌های با بار منفی شارش می‌یابند. بنا به قرارداد بالا، این شارش در جهت خلاف جهت جریان است. به بیان دیگر، بارهای منفی که به‌سوی راست حرکت می‌کنند با بارهای مثبتی که به سوی چپ در حرکت اند، هم‌ارز هستند. نکته در این است که جابه‌جایی بار خالص، با توجه به علامت بارها، مهم است. بارهای منفی که به سوی راست حرکت می‌کنند جریانی به سوی چپ تولید می‌کنند. بارهای مثبت هم که به سوی چپ حرکت می‌کنند، جریانی به سوی چپ تولید می‌کنند.

جریان الکتریکی در رساناها: جامدها (فلز، نیمه‌رساناها) در مایع (الکترولیت‌ها) و در گازهای یونیده شارش می‌یابد اما در نارساناها یا عایق‌ها جریان پیدا نمی‌کند.

۸-۲ چگالی جریان

جریان الکتریکی یک کمیت ماکروسکوپی و حرکت بارهای الکتریکی پدیده‌ی میکروسکوپی است. برای این که این دو دنیای متفاوت را به هم مربوط کنیم، بخشی از یک رسانا را در نظر بگیرید که سطح مقطع آن A است. شکل (۸-۲) را ببینید.

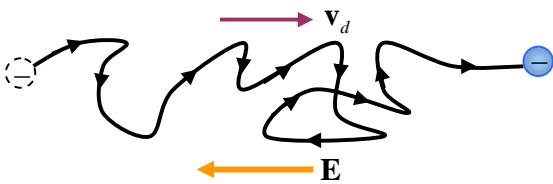


شکل ۸-۲ نمایش میکروسکوپی شارش بارها

در درون این رسانا حامل‌های بار وجود دارند. فرض کنید بار هر حامل q است و تعداد آنها در واحد حجم رسانا n است. بنابراین، در طول Δx این رسانا به اندازه‌ی $\Delta Q = q(n A \Delta x)$ بار وجود دارد. اگر حامل‌های بار با سرعت v_d در رسانا حرکت کنند، در زمان Δt مسافت $\Delta x = v_d \Delta t$ را می‌پیماند. جریان میانگین این بارها از رابطه‌ی (۸-۱) به دست می‌آید. داریم

$$I_{\text{avg}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nq v_d A \quad (8-4)$$

سرعت v_d حامل‌های بار سرعت رانش (یا سرعت سوق)^{*} نامیده می‌شود. از نظر فیزیکی، v_d سرعت میانگین حامل‌های بار در رساناست. برای این که مفهوم آن را بفهمید، رسانایی را در نظر بگیرید که حامل‌های بار آن الکترون‌های آزاد اند. در رسانای منزوی حرکت این الکترون‌ها، مانند حرکت مولکول‌های گاز، کاتوره‌ای است. وقتی بین دو انتهای رسانا اختلاف پتانسیل اعمال بشود (رسانا را مثلاً به باتری وصل کنیم) یک میدان الکتریکی در رسانا به وجود می‌آید و به الکترون‌ها نیروی الکتریکی وارد می‌شود و در رسانا جریان الکتریکی به وجود می‌آید. اما، الکترون‌ها در امتداد رسانا روی یک خط راست حرکت نمی‌کنند، بلکه با اتم‌های رسانا برخورد می‌کنند و جهت سرعتشان تغییر می‌کند. این برخوردهای پی‌درپی سبب می‌شود که مسیر الکترون بسیار پیچیده باشد. الکترون در اثر برخورد با اتم‌ها مقداری انرژی به اتم منتقل می‌کند. انرژی انتقالی به صورت انرژی ارتعاشی اتم و در نتیجه افزایش دمای رسانا ظاهر می‌شود. با وجود این برخوردها، الکترون به آهستگی در امتداد رسانا (در



شکل ۸-۳ حرکت الکترون در رسانا، سرعت رانش

خلاف جهت میدان الکتریکی E) با سرعت میانگینی که سرعت رانش v_d نامیدیم، حرکت می‌کند. شکل (۸-۳) حرکت الکترون را در رسانا نشان می‌دهد. مقدار کاری که میدان الکتریکی بر روی الکترون انجام می‌دهد، بیش از مقدار انرژی میانگین است که در اثر برخوردها الکترون از دست می‌دهد. این فزونی کار میدان الکتریکی به جریانی

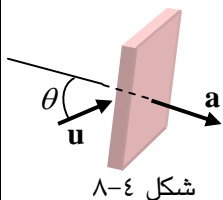
می‌انجامد که در رسانا به وجود می‌آید. سرعت رانش خیلی کوچک‌تر از سرعت میانگین بین دو برخورد پی‌درپی است.

اندازه‌ی جریانی که از واحد سطح می‌گذرد از رابطه‌ی (۸-۴) به دست می‌آید

$$I_A = nqv_d \quad (8-5)$$

است. این رابطه خیلی محدود کننده است، چون فرض کردیم که بارها به طور عمود از سطح می‌گذرند. اما همان‌گونه که از شکل (۸-۲) پیداست، جهت سرعت حامل‌های بار تغییر می‌کنند و در نتیجه، ممکن است جهت آنها بر سطحی که از آن می‌گذرند، عمود نباشد. بنابراین، بهتر است که آن را به گونه‌ی واقعی‌تری بازنویسی کنیم.

نخست، حالت خاصی را در نظر بگیرید که بردار سرعت همه‌ی الکترون‌ها یکسان و برابر \mathbf{u} است. فرض کنید بارها از سطح کوچک \mathbf{a} می‌گذرند. در شکل (۸-۴) یکی از حامل‌های بار نشان داده شده است. بردار سطح \mathbf{a} جهت‌گیری سطح را نشان می‌دهد. تعداد کل بارهایی که در بازه‌ی زمانی Δt به طور عمود از این سطح می‌گذرند عبارت است از



شکل ۸-۴

* drift velocity

$$\Delta Q = q (n \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{x}) = q (n \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \Delta t) \quad (8-6)$$

و در نتیجه، جریان میانگین (یا میانگین آهنگ انتقال بار) که از این سطح می‌گذرد

$$I_a = \frac{q (n \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \Delta t)}{\Delta t} = nq \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \quad (8-7)$$

توجه کنید که ضرب داخلی $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$ مولفه‌ی عمود بر سطح سرعت را برمی‌گزیند.

حال به حالت عمومی‌تری توجه کنید: فرض کنید حامل‌های بار از گروه‌های مختلفی تشکیل شده است. بار q یا سرعت \mathbf{u} و یا هر دو از یک گروه به گروه دیگر فرق می‌کنند. در این صورت، هر گروه سهم خودش را در جریان گذرنده از سطح \mathbf{a} خواهد داشت. اگر هر گروه را با زیرنویس k مشخص کنیم، بار هر یک از حامل‌های k امین گروه q_k و بردار سرعت آن خواهد بود. جریان کل که مجموعه‌ی k گروه تولید می‌کنند، عبارت است از

$$I_a = n_1 q_1 \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1 + n_2 q_2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_2 + \dots = \mathbf{a} \cdot \sum_k n_k q_k \mathbf{u}_k \quad (8-8)$$

جریان گذرنده از واحد سطح را چگالی جریان خواهیم نامید. بنابراین، می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathbf{J} = \sum_k n_k q_k \mathbf{u}_k \quad (8-9)$$

در یکاهای SI واحد چگالی جریان آمپر بر مترمربع A/m^2 یا به طور هم‌ارز $C/m^2 \cdot s$ است.

حال بگذارید فرض کنیم فقط یک نوع حامل بار الکتریکی در وجود دارد. برای روشنی بیشتر فرض کنید، تنها حامل‌های بار الکترون‌ها هستند که با سرعت‌های مختلف حرکت می‌کنند. همان‌طور که گفتیم، در یک رسانا سرعت الکترون‌ها توزیع کاتوره‌ای دارند. همان‌دازه‌ی سرعت آنها و هم جهت‌شان تغییر می‌کند. فرض کنید تعداد الکترون‌ها، با هر سرعتی، در واحد حجم N_e اند. الکترون‌ها را می‌توانیم در گروه‌های زیادی دسته‌بندی کنیم. هر گروه شامل الکترون‌هایی است که اندازه و جهت سرعت‌شان به تقریب یکسان است. سرعت میانگین همه‌ی الکترون‌ها را مثل هر میانگین‌گیری دیگری، از جمع وزنی سرعت‌ها می‌توان حساب کرد. به بیان دیگر، بر روی حاصل ضرب تعداد الکترون‌ها در هر گروه سرعت جمع ببندید و نتیجه را به کل الکترون‌ها تقسیم کنید. به دست می‌آید

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{N_e} \sum_k n_k \mathbf{u}_k \quad (8-10)$$

در اینجا برای نشان دادن میانگین از خط تیره بر روی \mathbf{u} استفاده کردیم تا میانگین جهت را نشان دهیم. از مقایسه‌ی رابطه‌های (8-9) و (8-10) دیده می‌شود که می‌توانیم سهم الکترون‌ها در چگالی جریان را برحسب سرعت میانگین الکترون بنویسیم. با

توجه به این که بار الکترون را $q = -e$ نامیدیم، سهم الکترون‌ها در چگالی جریان به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{J}_e = -e N_e \bar{\mathbf{u}}_e \quad (8-11)$$

$\bar{\mathbf{u}}$ همان سرعت رانش است که پیش‌تر با \mathbf{v}_d نشان دادیم. ما از هر دو نماد استفاده خواهیم کرد.

رابطه‌ی بالا را برحسب چگالی بار الکترون‌ها هم می‌توان نوشت. چون N_e چگالی الکترون‌هاست و بار هر الکترون برابر $-e$ است، پس $\rho_e = -e N_e$ چگالی بار الکترونی در رسانا است. در نتیجه، $\mathbf{J}_e = \rho_e \mathbf{u}_e$ سهم الکترون‌ها در چگالی جریان است. می‌توانیم سرعت رانش \mathbf{v}_d یا $\bar{\mathbf{u}}$ الکترون را در یک رسانا حساب کنیم. به یاد بیاورید که این سرعتی است که الکترون با وجود میدان الکتریکی (یا اختلاف پتانسیل) در رسانا به دست می‌آورد. میدان الکتریکی به الکترون نیروی $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ وارد می‌کند. این نیرو به الکترون شتاب می‌دهد. شتابی که الکترون در اثر آن به دست می‌آورد برابر است با

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{-e\mathbf{E}}{m} \quad (8-12)$$

فرض کنید سرعت یک الکترون درست پس از برخورد با یک یون یا الکترون دیگر، \mathbf{v}_i است. تا برخورد بعدی، الکترون با شتاب \mathbf{a} حرکت می‌کند و درست پیش از برخورد بعدی، سرعتش برابر

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t = \mathbf{v}_i - \frac{e\mathbf{E}}{m_e}t \quad (8-13)$$

می‌شود. در این جا t زمان بین دو برخورد پی‌درپی است. میانگین \mathbf{v}_f در این بازه‌ی زمانی عبارت است از

$$\langle \mathbf{v}_f \rangle = \langle \mathbf{v}_i \rangle - \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \langle t \rangle \quad (8-14)$$

که با سرعت رانش \mathbf{v}_d برابر است. اگر میدان الکتریکی وجود نداشته باشد، سرعت الکترون‌ها کاملاً کاتوره‌ای و در نتیجه $\langle \mathbf{v}_i \rangle = 0$ است. اگر $\tau = \langle t \rangle$ زمان مشخصه‌ی بین دو برخورد پی‌درپی (زمان میانگین پویش آزاد) باشد، آنگاه داریم

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{v}_d = \langle \mathbf{v}_f \rangle = -\frac{e\mathbf{E}}{m_e}\tau \quad (8-15)$$

و چگالی جریان الکتریکی الکترون، رابطه‌ی (8-11) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{J} = -N_e e \mathbf{v}_d = -N_e e \left(-\frac{e\mathbf{E}}{m_e}\tau \right) = \frac{N_e e^2 \tau}{m_e} \mathbf{E} \quad (8-16)$$

توجه کنید که هم برای حامل‌های بار مثبت و هم برای حامل‌های بار منفی، \mathbf{J} و \mathbf{E} هم‌سو اند.

مثال 8-1 سرعت رانش در سیم مسی: از سیم مسی با سطح مقطع $3 \times 10^{-1} \text{ m}^2$ جریان 10 A می‌گذرد. چگالی جرمی مس $8,95 \text{ g/cm}^3$ است. سرعت رانش الکترون‌ها را در این سیم حساب کنید.

حل: از جدول دوره‌ای عناصر دیده می‌شود که وزن اتمی مس $63,5$ گرم در هر مول است. تعداد اتم‌های موجود در هر جرم اتمی یک جسم با عدد آووگادرو، $6,02 \times 10^{23}$ برابر است. چون چگالی جرمی مس را می‌دانیم، می‌توانیم حجمی را که $63,5$ گرم مس اشغال کرده است، به‌دست آوریم

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{63,5 \text{ g}}{8,95 \text{ g/cm}^3} = 7,09 \text{ cm}^3 \quad (8-17)$$

فرض کنید هر اتم یک الکترون آزاد به رسانا می‌دهد. پس تعداد حامل‌های بار (الکترون‌ها) برابر است با

$$\begin{aligned} N_e &= \frac{6,02 \times 10^{23} \text{ electron}}{7,09 \text{ cm}^3} = 8,48 \times 10^{22} \frac{\text{electron}}{\text{cm}^3} \\ &= \left(8,48 \times 10^{22} \frac{\text{electron}}{\text{cm}^3} \right) \left(10^{-1} \frac{\text{cm}^3}{\text{m}^3} \right) = 8,48 \times 10^{28} \frac{\text{electron}}{\text{m}^3} \end{aligned} \quad (8-18)$$

از رابطه‌ی (8-4) به‌دست می‌آید

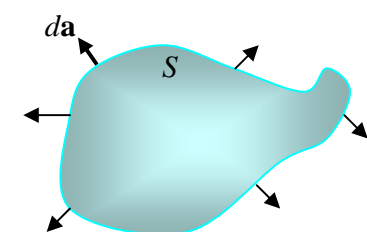
$$v_d = \frac{I}{N_e q A} = \frac{10 \text{ C/s}}{(8,48 \times 10^{28} \text{ electron/m}^3)(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(3 \times 10^{-1} \text{ m}^2)} = 2,46 \times 10^{-4} \text{ m/s} \quad (8-19)$$

۸-۳ جریان پایا و پایستگی بار الکتریکی

در بخش ۸-۲ چگالی جریان را با جریان گذرنده از واحد سطح تعریف کردیم. جریان کل گذرنده از هر سطح S با انتگرال گیری از چگالی جریان بر روی سطح به دست می آید

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (8-20)$$

اگر بردار چگالی جریان \mathbf{J} با زمان تغییر نکند، گوئیم جریان پایا[♦] داریم. جریان های پایا باید از پایستگی بار الکتریکی پیروی کنند. ناحیه ای از فضا را در نظر بگیرید که همانند شکل (۸-۵) مرزهایش سطح بسته ای S است. انتگرال \mathbf{J} بر روی تمامی سطح



شکل ۸-۵ نشت بار از درون سطح S

S آهنگ نشت بار از درون سطح را به دست می دهد. اگر بار الکتریکی به طور دائمی از این سطح با حجم محدود خارج شود یا به درون آن واریز شود، چگالی بار در درون سطح باید بینهایت باشد، مگر این که چشمه ای پیوسته در درون آن بار تولید کند. اما تولید بار چیزی است که هرگز روی نمی دهد. در نتیجه، اگر به راستی توزیع جریانی مستقل از زمان داشته باشیم باید انتگرال سطح \mathbf{J} برای هر سطح بسته ای صفر باشد. این گزاره با بیان این که در هر نقطه ای فضا دیورژانس

\mathbf{J} صفر است، کاملاً هم ارز است. بنابراین، برای هر چگالی جریان پایا می توان نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (8-21)$$

رابطه ای بالا را می توان به چگالی جریان ناپایا تعمیم داد و آن را برای هر چگالی جریان نوشت: فرض کنید چگالی جریان پایا نیست و در نتیجه، به زمان t و مکان (x, y, z) وابسته است. یعنی از نقطه ای در فضا به نقطه ای دیگر و از زمانی به زمان دیگر تغییر می کند. چون $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ آهنگ لحظه ای نشت بار الکتریکی از سطح بسته ای S است، بنابراین، این نشت بار باید به هزینه ی کاسته شدن از مقدار بار موجود در درون سطح بسته ای S صورت بگیرد. بار کل در درون حجم V که سطح S مرزهای آن است، برابر $\int_V \rho d\tau$ است. پس، آهنگ نشت بار با آهنگ کاهش بار کل درون سطح باید برابر باشد. این بدان معنی است که

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau \quad (8-22)$$

علامت منفی در سمت راست رابطه ی (۸-۲۲) به خاطر کاهش بار در درون سطح بسته است. سمت چپ این رابطه را با استفاده از قضیه ی دیورژانس می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau \quad (8-23)$$

رابطه ی بالا برای هر حجمی برقرار است (به بیان دیگر، سطح بسته را سطح خاصی تعریف نکردیم)، از جمله برای سطح بسیار کوچکی حول هر نقطه ای (x, y, z) درست است. این به ما اجازه می دهد تا آنها را از زیر علامت انتگرال خارج کنیم. بنابراین، رابطه ی (۸-۲۳) برای توزیع بار وابسته به زمان به صورت زیر درمی آید

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (8-24)$$

مشتق زمانی چگالی بار را به صورت پارمشتق نوشتیم، چون ρ علاوه بر این که به زمان بستگی دارد، می تواند تابع مکان هم باشد. توجه کنید که اگر وابستگی زمانی وجود نداشته باشد، رابطه ی (۸-۲۴) به معادله ی (۸-۲۱) برای جریان پایا کاهش پیدا

♦ steady current

می‌کند. معادله‌های (۸-۲۳) و (۸-۲۴) بیان پایستگی موضعی بار الکتریکی است و معادله‌ی پیوستگی* نامیده می‌شود. معادله‌ی (۸-۲۳) شکل انتگرالی آن و معادله‌ی (۸-۲۴) شکل دیفرانسیلی آن است.

نکته: ما در این بخش از جریان پایا نام بردیم. جریان پایا جریانی است که برای همیشه و با مقدار ثابت از یک نقطه می‌گذرد. بنابراین، اگر تک الکترونی از یک نقطه بگذرد، در آن نقطه جریان به وجود می‌آید، اما این جریان پایا نیست، چون در یک لحظه وجود دارد، اما در لحظه‌ی بعدی دیگر نیست. ❁

۸-۴ رسانایی الکتریکی و قانون اهم

انتقال بار الکتریکی از یک نقطه به مکان دیگر به روش‌های گوناگون روی می‌دهد. در مولد ون دوگراف[◊] این کار با تسمه انجام می‌گیرد. ون دوگراف ماشین مولد الکتروستاتیک است و شامل تسمه‌ی عایقی است که بار سطحی حمل می‌کند و در تماس با الکتروود دیگری بارهایش را به آن منتقل می‌کند. به این ترتیب، جریان الکتریکی تولید می‌شود. قطره‌های باران که در اثر وزن خود سقوط می‌کنند، بخشی از سامانه‌ی جریان الکتریکی زمین اند. اگر دوست دارید، می‌توانید تصور کنید که ارابه‌های کوچک پر از بار الکتریکی را به پشت موچه‌های زیر بسته آید و موچه‌ها با کشیدن ارابه‌ها بار را جابه‌جا می‌کنند و به این ترتیب جریان الکتریکی تولید می‌شود. در این بخش، ما با عامل آشناتری برای جابه‌جایی بار سروکار خواهیم داشت: نیرویی که میدان الکتریکی E به بار وارد می‌کند. میدان الکتریکی E بار مثبت را در یک جهت و بار منفی را در جهت مخالف به حرکت وامی‌دارد. اگر حامل‌های بارهای مثبت یا منفی و یا هر دو حرکت کنند، جریان الکتریکی در جهت میدان E پدید می‌آید. در بسیاری از مواد، چگالی جریان به میدان الکتریکی خارجی E که سبب آن می‌شود، به‌طور خطی بستگی دارد. رابطه‌ی خطی بین میدان E و چگالی جریان J معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شود

$$J = \sigma E \quad (8-25)$$

که در آن σ رسانندگی[†] ماده نام دارد. مقدار آن به ماده‌ی مورد نظر بستگی دارد. در رساناهای فلزی مقدارش بسیار بزرگ است و برای مواد نارسانای خوب مقدارش بسیار ناچیز است. مقدار σ به وضعیت فیزیکی، مانند دما هم بستگی دارد، با این حال، مقدار σ به اندازه‌ی میدان E وابسته نیست. اگر همه چیز را ثابت نگاه‌دارید و شدت میدان را دوبرابر کنید، چگالی جریان دوبرابر می‌شود.

رابطه‌ی (۸-۲۵) قانون (میکروسکوپی) اهم نام دارد. ماده‌ای که از این رابطه پیروی کند، ماده‌ی اهمی خوانده می‌شود و در غیر این صورت، غیر اهمی است. از مقایسه‌ی رابطه‌های (۸-۱۶) و (۸-۲۵) دیده می‌شود که می‌توان رسانندگی را به صورت زیر هم نوشت

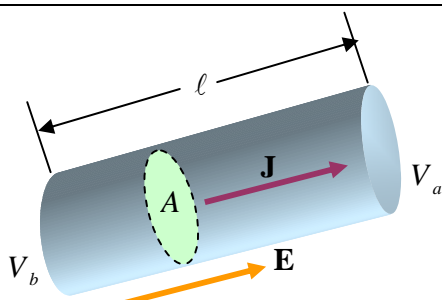
$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e} \quad (8-26)$$

قانون اهم یک قانون تجربی است و یک قضیه‌ی بنیادی نیست که باید همه‌ی مواد از آن پیروی کنند. اگر میدان الکتریکی خیلی قوی باشد، در هر ماده‌ای ممکن است این قانون نقض شود و ماده از خود رفتار غیر اهمی نشان دهد. با این حال، در بازه‌ی بسیار گسترده‌ای و برای مواد زیادی چگالی جریان با میدان الکتریکی متناسب است و این به راستی چشمگیر است.

* continuity equation

◊ Van de Graaff

† conductivity

شکل ۸-۶ رسانای همگن با اختلاف پتانسیل ΔV

برای کاربردهای عملی، بهتر است شکل سودمندتری از قانون اهم به دست بیاوریم. برای این کار بخشی از یک سیم راست به طول ℓ و سطح مقطع A را برابر شکل (۸-۶) در نظر بگیرید. فرض کنید بین دو انتهای اختلاف پتانسیل $\Delta V = V_b - V_a$ اعمال شده است و میدان الکتریکی \mathbf{E} و جریان I در سیم به وجود آمده اند. با فرض یکنواخت بودن میدان \mathbf{E} در سیم، می‌توان نوشت

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E\ell \quad (8-27)$$

پس، چگالی جریان J به صورت زیر درمی‌آید

$$J = \sigma E = \sigma \left(\frac{\Delta V}{\ell} \right) \quad (8-28)$$

از طرفی، چون $J = I/A$ است، اختلاف پتانسیل را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\Delta V = \frac{\ell}{\sigma} J = \left(\frac{\ell}{\sigma A} \right) I = RI \quad (8-29)$$

که در آن R مقاومت رسانا نام دارد و به صورت زیر تعریف شده است.

$$R \equiv \frac{\Delta V}{I} = \frac{\ell}{\sigma A} \quad (8-30)$$

مقاومت R به شکل و اندازه‌ی رسانا و به رسانندگی σ ماده بستگی دارد. رابطه‌ی (۸-۳۰) را به صورت زیر بازنویسی کنید

$$\Delta V = IR \quad (8-31)$$

این رابطه، نسخه‌ی ماکروسکوپی قانون اهم است. یکای R در یکاهای SI اهم (Ω) است. یک اهم عبارت است از

$$1\Omega = \frac{1\text{ V}}{1\text{ A}} \quad (8-32)$$

باز هم، هر ماده‌ای که از رابطه‌ی (۸-۳۰) پیروی کند، اهمی و در غیر این صورت غیر اهمی است. بیشتر فلزها با رسانایی خوب و مقاومت کم، اهمی اند. توجه ما بیشتر به مواد اهمی خواهد بود.

مقاومت ویژه ρ ماده با وارون رسانندگی آن تعریف می‌شود

$$\rho \equiv 1/\sigma = m_e / (n e^2 \tau) \quad (8-33)$$

از این رابطه دیده می‌شود که ρ را می‌توان به مقاومت R ماده مربوط کرد

$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{\Delta V / \ell}{I / A} = \frac{RA}{\ell} \Rightarrow R = \frac{\rho \ell}{A} \quad (8-34)$$

بنابراین، مقاومت یک سیم با طول آن متناسب و با سطح مقطع نسبت عکس دارد. پس، اگر طول سیم دو برابر شود، مقاومتش هم دو برابر می‌شود. اگر سطح مقطع دو برابر شود، مقاومت به نصف کاهش می‌یابد.

نکته‌ی ۱: برای رسیدن به این نتیجه‌ی ساده، از برخی فرض‌های ضمنی استفاده کردیم. به‌جاست که به آنها بپردازیم. نخست

این که فرض کردیم، چگالی جریان در سطح مقطع سیم یکنواخت توزیع شده است. برای این که ببینید چرا باید چنین باشد،

فرض کنید که J در قسمت بالایی سیم بزرگ‌تر از راستای پایینی آن است. در این صورت، میدان الکتریکی هم در سمت بالا

بزرگتر از قسمت پایینی سیم خواهد بود. آنگاه اگر انتگرال خط \mathbf{E} را بین دو انتهای میله حساب کنیم، در یک طرف سیم بزرگتر از طرف دیگرش خواهد شد. و این برای میدان الکتریکی پذیرفتنی نیست.

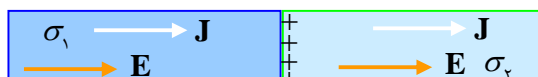
ما هم‌چنین فرض کردیم که جهت و اندازه‌ی \mathbf{J} در امتداد سیم حالت یکنواختی خود را حفظ می‌کند. درستی یا نادرستی این فرض به رساناهای بیرونی بستگی دارد که جریان را به یک انتهای میله منتقل می‌کنند و از انتهای دیگرش آن را به جاهای دیگر می‌برند. به بیان دیگر به اتصالات انتهای بستگی دارد.

فرض سوم این است که میله‌ی ما با ماده‌ی نارسانایی پوشانده شده است. بدون آن حتی نمی‌توانستیم رسانای منزوی و مسیر جریان را تعریف کنیم. توجه کنید که هوا هم یک عایق خوب است. ♣

نکته‌ی ۲: اگر در رسانایی σ مقدار ثابتی باشد، شرط جریان پایا، $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0$ ، به همراه قانون اهم، رابطه‌ی (۸-۲۵)، نشان می‌دهد که $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}$ هم باید صفر باشد. این بدان معنی است که چگالی بار در آن ناحیه صفر است (این را از قانون

گوس، $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$) می‌دانیم. اگر σ از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر رسانا تغییر کند، جریان پایا ممکن است با بارهای ساکن در رسانا همراه باشد. شکل (۸-۷) یک نمونه را نشان می‌دهد. فرض کنید سیمی از دو نوع رسانا با رسانندگی‌های σ_1 و σ_2 ساخته

$$\sigma_1 > \sigma_2$$

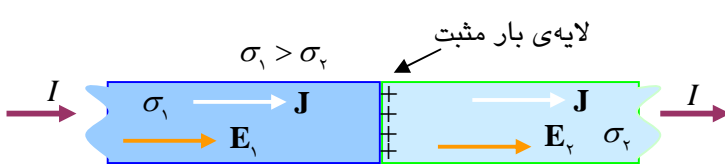


شکل ۸-۷ نمای میله‌ای از دو نوع رسانا

شده است. اگر جریان پایا باشد، \mathbf{J} در دو سوی سطح تماس رساناها باید

یکسان باشد. در غیر این صورت، بار به طور پیوسته در آنجا انباشته خواهد شد. پس، میدان الکتریکی \mathbf{E} باید در دو ناحیه متفاوت و با یک جهش ناگهانی در سطح تماس دو رسانا همراه باشد. از قانون گاوس

می‌دانیم که یک چنین گسستگی در \mathbf{E} به معنی وجود لایه‌ای بار در سطح تماس دو رسانا است. ♣



شکل ۸-۸ بار الکتریکی در پیوندگاه

مثال ۲-۸ بار الکتریکی در پیوندگاه دو سیم: دو قطعه

سیم از دو ماده‌ی متفاوت با رسانندگی‌های σ_1 و σ_2 ($\sigma_2 > \sigma_1$) برابر شکل (۸-۸) به هم وصل شده‌اند. اگر از پیوندگاه این دو سیم جریان I بگذرد، بار الکتریکی کل را در پیوندگاه این دو سیم حساب کنید.

حل: در حالتی که جریان پایا است، مولفه‌ی عمودی چگالی جریان \mathbf{J} باید در هر دو سوی سطح پیوندگاه یکسان باشد. چون

$$J = \sigma E \quad \text{پس داریم } \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \quad \text{و یا}$$

$$E_2 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) E_1 \quad (8-35)$$

بار کل موجود در سطح تماس را q_{in} بنامید. با استفاده از قانون گوس داریم

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = (E_2 - E_1)A = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 - E_1 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0 A} \quad (8-36)$$

با جاگذاری از رابطه‌ی (۸-۳۵) به دست می‌آید

$$q_{in} = \epsilon_0 A E_1 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1 \right) = \epsilon_0 A \sigma_1 E_1 \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right) \quad (8-37)$$

چون جریان برابر $I = JA = (\sigma_1 E_1) A$ است، پس مقدار کل بار در سطح تماس دو سطح عبارت است از

$$q_{in} = \varepsilon_0 I \left(\frac{1}{\sigma_r} - \frac{1}{\sigma_1} \right) \quad (8-28)$$

مقاومت ویژه‌ی مواد با دما، T ، تغییر می‌کند. برای فلزها این تغییر در بازه‌ی بزرگی از T خطی است

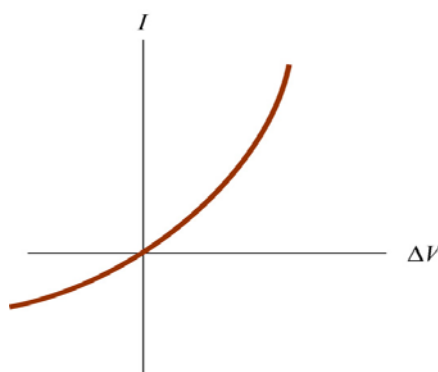
$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (8-29)$$

α ضریب مقاومت دمایی است. در جدول زیر مقدارهای ρ ، σ و α (در دمای 20°C) برای مواد مختلف دیده می‌شود.

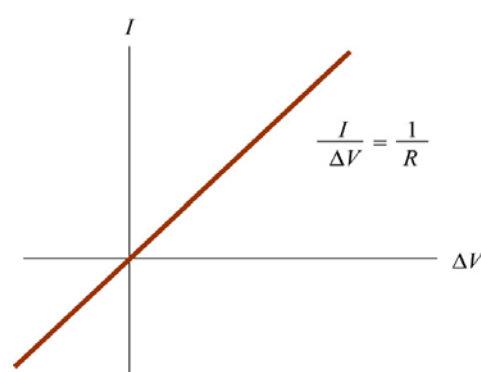
ضریب دمایی α ($^\circ\text{C}$) ⁻¹	رسانش σ ($\Omega \cdot \text{m}$) ⁻¹	مقاومت ویژه ρ ($\Omega \cdot \text{m}$)	ماده
			عناصر
0,0028	$6,29 \times 10^7$	$1,59 \times 10^{-8}$	نقره
0,0029	$5,81 \times 10^7$	$1,72 \times 10^{-8}$	مس
0,0039	$3,55 \times 10^7$	$2,82 \times 10^{-8}$	آلومینیوم
0,0045	$1,8 \times 10^7$	$5,6 \times 10^{-8}$	تنگستن
0,005	$1,0 \times 10^7$	$10,0 \times 10^{-8}$	آهن
0,0039	$1,0 \times 10^7$	$10,6 \times 10^{-8}$	پلاتینیوم
			آلیاژها
0,002	$1,4 \times 10^7$	7×10^{-8}	برنز
0,0004	$0,1 \times 10^7$	150×10^{-8}	نایکروم
			نیم رساناها
-0,0005	$2,9 \times 10^4$	$3,5 \times 10^{-6}$	کربن (گرافیت)
-0,048	2,2	0,46	ژرمنیوم (خالص)
-0,075	$1,6 \times 10^{-3}$	640	سیلیکون (خالص)
			عایق‌ها
	$10^{-14} - 10^{-10}$	$10^{10} - 10^{14}$	شیشه
	$1,33 \times 10^{-18}$	75×10^{16}	کوارتز

همان‌گونه که گفتیم در مواد اهمی، مانند مس، رابطه‌ی بین شدت جریان I و اختلاف پتانسیل ΔV در بازه‌ی بزرگی از اختلاف پتانسیل‌ها، خطی است. در نمودار شکل (8-9) این رفتار نشان داده شده است. شیب خط I برحسب ΔV در ناحیه‌ی خطی، مقدار مقاومت R را به دست می‌دهد. در مواد غیر اهمی، نمودار جریان برحسب اختلاف پتانسیل همانند نمودار شکل (8-10) غیر خطی است. یکی از ابزار معمول نیمه‌رسانا که تابع I نسبت به ΔV غیر خطی است، دوسو کننده یا دیود است و نمودار شکل (8-10) مربوط به آن است. مقاومت موثر این وسیله (که با وارون شیب خم متناسب است) برای جریان در یک سو (در سوی $\Delta V > 0$) اندک و برای جریان‌های در سوی دیگر (در سوی $\Delta V < 0$) بزرگ است. در بیشتر ابزار الکترونیکی مدرن،

مانند ترانزیستورها، رابطه‌ی جریان و اختلاف پتانسیل غیرخطی است.



شکل ۱۰-۸ نمودار I برحسب ΔV در مواد غیراومی



شکل ۹-۸ نمودار I برحسب ΔV در مواد اهمی

گروهی از فلزها و ترکیبها وجود دارند که مقاومتشان در دماهای کمتر از یک دمای خاص، T_c ، به نام دمای بحرانی[†] صفر می‌شود. این مواد ابررسانا نام دارند. مقاومت این مواد در دماهای بالاتر از دمای بحرانی T_c همانند رفتار فلز معمولی است. وقتی دما به T_c و پایین‌تر می‌رسد، مقاومت به طور ناگهانی صفر می‌شود. این رفتار در سال ۱۹۱۱ توسط فیزیک‌دان آلمانی اچ. کمرلینگ اونس* در جیوه کشف شد. جیوه در دمای کمتر از 4.2°K ابررسانا می‌شود.

امروزه، هزاران ابررسانا شناخته شده اند که دمای بحرانی برخی از آنها 23°K (آلیاژی از نایوبیم، آلومینیوم و ژرمانیوم) است. فلزهای معمولی مانند آلومینیوم، روی، سرب و ایندیم خاصیت ابررسانایی دارند. دمای بحرانی T_c نسبت به ترکیب شیمیایی، فشار و ساختار بلوری ماده بستگی دارد. جالب است بدانید که نقره، مس و طلا که رساناهای بسیار خوبی اند، رفتار ابررسانایی از خود نشان نمی‌دهند.

یکی از ویژگی‌های بسیار چشمگیر ابررسانا این است که وقتی جریان الکتریکی در آن برقرار شد، بدون اعمال اختلاف پتانسیل این جریان در ابررسانا پابرجا می‌ماند؛ چون $R = 0$ است. در واقع دیده شده است که بدون اعمال پتانسیل، جریان مانا در ابررساناها برای سال‌ها باقی می‌ماند! ویژگی دیگر ابررساناها این است که در طول گذار از رسانای معمولی به ابررسانایی، میدان مغناطیسی از گوشت آن رانده می‌شود.

یکی از کاربردهای مهم ابررساناها، ساختن آهن‌رباهای ابررساناست. در این آهن‌رباها، شدت میدان مغناطیسی حدود ۱۰ برابر بزرگ‌تر از شدت میدان آهن‌رباهای الکترومگنت معمولی است. اندیشه‌ی استفاده از ابررسانا در خط‌های انتقال نیرو مورد توجه بسیار است. از آهن‌رباهای ابررسانا می‌توان برای انبار کردن انرژی استفاده کرد. ابزار الکترونیکی مدرن ابررسانا از دو لایه‌ی نازک ابررسانا که با لایه‌ی نازک عایق از هم جدا شده می‌شوند، ساخته شده اند. برخی از این ابزار، آهن‌رباسنج (وسیلای برای اندازه‌گیری شدت میدان مغناطیسی)، کلیدهای فوق سریع کامپیوتری و ابزار ریزموج اند.

مثال ۳-۸ مقاومت سیم نایکروم: (الف) مقاومت در واحد طول سیم نایکروم با شعاع قاعده‌ی 0.221 mm را حساب کنید.

(ب) اگر اختلاف پتانسیل دو سر یک متر از این سیم 1° ولت باشد، جریان گذرنده از سیم را به دست آورید.

[†] critical temperature

* H. Kamerlingh Onnes

حل: (الف) سطح مقطع سیم برابر $m^2 = 3,23 \times 10^{-7}$ است. از جدول بالا می‌دانیم که

مقاومت ویژه نایکروم $\Omega = 1,5 \times 10^{-8}$ است. بنابراین، با استفاده از رابطه‌ی (۸-۳۴) داریم

$$\frac{R}{\ell} = \frac{\rho}{A} = \frac{1,5 \times 10^{-8} \Omega}{3,23 \times 10^{-7} m^2} = 4,6 \Omega/m \quad (8-40)$$

(ب): مقاومت یک متر از این سیم $\Omega = 4,6$ است. از قانون اهم داریم

$$I = \frac{V}{R} = \frac{10 V}{4,6 \Omega} = 2,2 A \quad (8-41)$$

توجه کنید که مقاومت سیم نایکروم حدود ۱۰۰ برابر مقاومت سیم مسی است. بنابراین، مقاومت در واحد طول یک سیم مسی با همان شعاع فقط $\Omega = 0,052$ است. پس، برای این که همان جریان $2,2 A$ از یک سیم مسی یک متری با همان شعاع بگذرد، فقط به اختلاف پتانسیل $11 V$ نیاز است. از نایکروم به خاطر مقاومت زیادش و مقاوم بودنش در برابر اکسید شدن در اتو، آب‌گرم‌کن و بخاری برقی استفاده می‌شود.

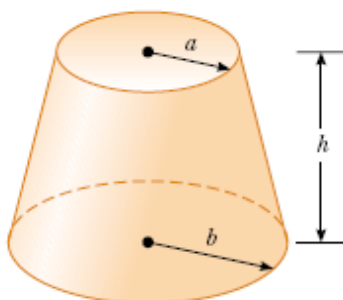
مثال ۴-۸ دماسنج مقاومتی پلاتینیوم: مقاومت یک دماسنج مقاومتی پلاتینیوم در دمای $20^\circ C$ برابر 50Ω است. اگر این دماسنج را در ظرفی از اینیدیم در حال ذوب قرار دهیم، مقاومت آن به $76,8 \Omega$ افزایش پیدا می‌کند. از این داده‌ها استفاده کنید و نقطه‌ی ذوب اینیدیم را به دست آورید. ضریب دمایی پلاتینیوم $(C^\circ)^{-1} = 3,92 \times 10^{-3}$ است.

حل: از رابطه‌ی (۸-۳۵) داریم

$$R = R_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \Rightarrow \Delta T = T - T_0 = \frac{R - R_0}{\alpha R_0}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{76,8 \Omega - 50,0 \Omega}{[3,92 \times 10^{-3} (C^\circ)^{-1}](50,0 \Omega)} = 137 C^\circ \quad (8-42)$$

چون $\Delta T = T - T_0$ و $T_0 = 20^\circ C$ است، پس $T = 157 C^\circ$



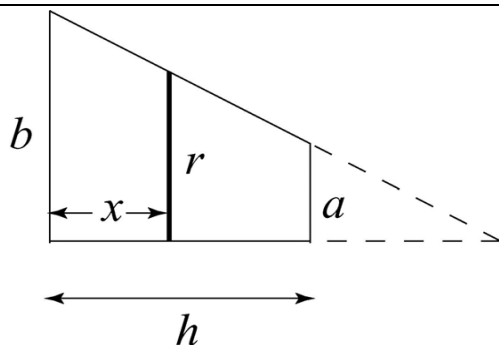
شکل ۱۱-۸ مخروط ناقص

مثال ۵-۸ مقاومت مخروط ناقص: مخروط ناقصی برابر شکل (۱۱-۸) از ماده‌ای با مقاومت ویژه ρ را در نظر بگیرید. ارتفاع این مخروط h و شعاع قاعده‌های آن a و b اند. اگر جریان در سطح مقطع مخروط به طور یکنواخت توزیع شود، مقاومت بین دو انتهای آن را حساب کنید.

حل: در فاصله‌ی x از قاعده‌ی سمت چپ، قرصی به شعاع r در نظر بگیرید. با توجه به شکل (۱۱۲-۸) داریم

$$\frac{b-r}{x} = \frac{b-a}{h} \Rightarrow r = (a-b)\frac{x}{h} + b \quad (8-43)$$

از سوی دیگر $R = \rho \ell / A$ است که در آن ℓ طول رسانا و A سطح مقطع اند. سهم قرصی با ضخامت dx در مقاومت عبارت است از

شکل ۸-۱۲ رابطه‌ی مثلثاتی بین a ، r و b

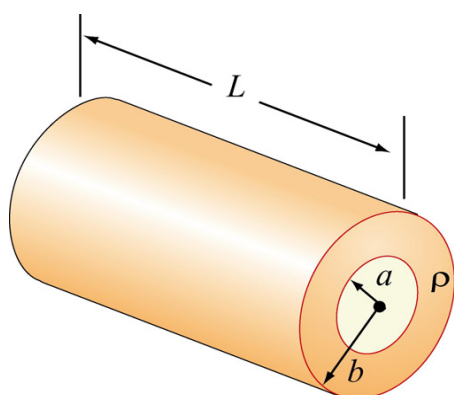
$$dR = \frac{\rho dx}{\pi r^2} = \frac{\rho dx}{\pi [b + (a-b)x/h]^2} \quad (۸-۴۴)$$

اگر از این رابطه انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$R = \int_0^h \frac{\rho dx}{\pi [b + (a-b)x/h]^2} = \frac{\rho h}{\pi ab} \quad (۸-۴۵)$$

برای این انتگرال‌گیری از قاعده‌ی زیر استفاده کردیم

$$\int \frac{du}{(\alpha u + \beta)^2} = -\frac{1}{\alpha(\alpha u + \beta)} \quad (۸-۴۶)$$



شکل ۸-۱۳ پوسته‌ی استوانه‌ای

مثال ۸-۶ مقاومت پوسته‌ی استوانه‌ای: پوسته‌ی استوانه‌ای با شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b و طول L و مقاومت ویژه‌ی ρ را برابر شکل (۸-۱۳) در نظر بگیرید.

(الف): اختلاف پتانسیلی بین دو انتهای آن اعمال می‌شود و جریان الکتریکی به موازات محور استوانه جریان پیدا می‌کند. مقاومت سامانه چیست؟

(ب): اگر اختلاف پتانسیل بین سطح درونی و سطح بیرونی پوسته اعمال شود و جریان الکتریکی در راستای شعاعی و روبه بیرون شارش یابد. مقاومت سامانه در این حالت چیست؟

حل: (الف) در این حالت، سطح مقطع برابر $A = \pi(b^2 - a^2)$ است. بنابراین،

مقاومت عبارت است از

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{\rho L}{\pi(b^2 - a^2)} \quad (۸-۴۷)$$

(ب): استوانه‌ی نازکی با شعاع داخلی آن r و شعاع بیرونی $r + dr$ و طولش L را در نظر بگیرید سهم این استوانه در مقاومت سامانه عبارت است از

$$dR = \frac{\rho d\ell}{A} = \frac{\rho dr}{2\pi r L} \quad (۸-۴۸)$$

که در آن $A = 2\pi r L$ سطح عمود بر جهت جریان است. مقاومت کل با انتگرال‌گیری از این رابطه به دست می‌آید

$$R = \int_a^b \frac{\rho dr}{2\pi r L} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (۸-۴۹)$$

۸-۵ مدار الکتریکی

ابزار الکتریکی معمولاً دو پایانه دارند و سیم‌های حامل جریان را می‌توان به آنها وصل کرد. بارهای الکتریکی در مسیر بین این دو پایانه به درون ابزار و یا از ابزار به بیرون شارش می‌یابند. اگر دو و فقط دو پایانه با سیم به چیزی (مانند باتری) در بیرون آن وصل شود و جریان پایا در آن برقرار شود به طوری که اختلاف پتانسیل در همه جا ثابت بماند، جریان الکتریکی در دو

پایانه باید برابر و در خلاف جهت هم باشد. در این صورت می‌توانیم از جریان I که از ابزار می‌گذرد و اختلاف پتانسیل V بین دو پایانه‌ی آن سخن بگوییم. نسبت V/I به ازای جریان معین، عددی با یکای مقاومت است. اگر همه‌ی قسمت‌های سامانه که جریان از آنها می‌گذرد، از قانون اهم پیروی کنند، این عدد یک مقدار ثابت و مستقل از I خواهد بود. این عدد رفتار الکتریکی ابزار در برابر جریان پایا را بین دو پایانه‌ی آن به طور کامل توصیف می‌کند. به بیان دیگر، به هر وسیله‌ی الکتریکی می‌توان یک عدد، یک مقاومت، نسبت داد و در مدار الکتریکی آن را با نماد مقاومت (www) نشان داد. بنابراین، هر مدار یا شبکه‌ی الکتریکی مجموعه‌ای از این اجزاء است که به یکدیگر وصل اند.

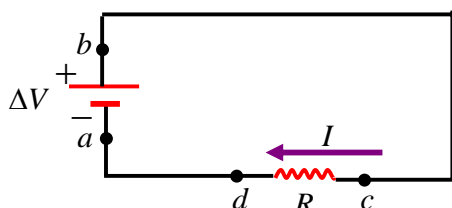
در شبکه‌ای با چندین جزء، مدار همواره می‌توان دو نقطه را به عنوان پایانه برگزید و اجزایی را که در بین این دو پایانه قرار دارند، با یک جزء هم‌ارز (مقاومت معادل) جایگزین کرد. به این ترتیب می‌توان شبکه‌ی پیچیده‌ی بین دو پایانه را به یک مقاومت معادل کاهش داد. اما همواره یک قاعده‌ی بسیار مهم را باید در نظر داشت: فقط اندازه‌گیری جریان مستقیم مجاز است. یعنی جریان و میدان الکتریکی باید مستقل از زمان باشند. در واقع، اگر جریان و میدان الکتریکی (یا اختلاف پتانسیل بین دو پایانه) به زمان بستگی داشته باشند، رفتار جزء مدار ممکن است افزون بر مقاومت آن، به عناصر دیگری هم بستگی داشته باشد. با این حال، مفهوم مدار هم‌ارز (مدار معادل) را می‌توان به مدارهایی که جریان و اختلاف پتانسیل در آنها با زمان تغییر می‌کنند، تعمیم داد. در واقع، بیشترین سودمندی مدار هم‌ارز در این گونه شبکه‌هاست. اما هنوز ما آماده‌ی بررسی آن نیستیم. این موضوعی است که در فصل ۱۴ به آن خواهیم پرداخت.

۸-۳ انرژی و توان الکتریکی

اگر از یک باتری برای برقراری جریان الکتریکی در یک رسانا استفاده کنیم، انرژی شیمیایی باتری به طور پیوسته به انرژی جنبشی الکترون‌ها و انرژی درونی رسانا تبدیل می‌شود و دمای رسانا افزایش می‌یابد.

در هر مدار الکتریکی، انرژی از یک منبع، مانند باتری، به ابزاری که در مدار قرار دارد، مانند لامپ روشنایی یا رادیو، منتقل می‌شود. در اینجا می‌خواهیم آهنگ انتقال این انرژی را حساب کنیم.

مدار ساده‌ی شکل (۷-۱۴) را در نظر بگیرید که از یک باتری و مقاومت R تشکیل شده است. مقاومت R را می‌توانید نماینده‌ی لامپ، رادیو، یا هر ابزار دیگری فرض کنید. سیم‌هایی که باتری و مقاومت را به هم وصل می‌کنند، مقاومت دارند و در نتیجه، بخشی از انرژی به آنها منتقل می‌شود. ما فرض خواهیم کرد که سیم‌های اتصال در مدار مقاومت ندارند و انرژی به آنها منتقل نمی‌شود.



شکل ۸-۱۴ مداری با یک باتری و یک مقاومت

فرض کنید بار مثبت Δq در مدار شکل (۷-۱۴) ساعتگرد می‌گردد و از نقطه‌ی a حرکت می‌کند، از درون باتری می‌گذرد و به نقطه‌ی b می‌رسد. پس از پیمودن مدار و گذار از مقاومت R دوباره به نقطه‌ی a می‌رسد. کل مدار را یک سامانه در نظر بگیرید. اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ی a و b برابر $\Delta V = V_b - V_a > 0$ است. وقتی بار Δq ، با گذار از باتری، از نقطه‌ی

a به نقطه‌ی b می‌رود، انرژی پتانسیل الکتریکی سامانه به اندازه‌ی $\Delta U = (\Delta q)(\Delta V)$ افزایش پیدا می‌کند و به همان اندازه از انرژی شیمیایی باتری کاسته می‌شود. وقتی بار بین نقاط c و d از مقاومت R می‌گذرد در اثر برخورد با اتم‌های مقاومت، انرژی پتانسیل الکتریکی خود را از دست می‌دهد. این انرژی به انرژی ارتعاشی اتم‌های مقاومت تبدیل می‌شود. چون فرض

کردیم که سیم‌های اتصال مقاومت ندارند، به بخش‌های bc و da مدار انرژی منتقل نمی‌شود. هنگامی که بار Δq به نقطه‌ی a می‌رسد، همان مقدار انرژی دارد که در هنگام رهسپار شدن از آن نقطه داشت. نتیجه‌ی نهایی این فرایند انتقال بخشی از انرژی شیمیایی باتری به مقاومت است. این انرژی در مقاومت به‌صورت انرژی درونی (انرژی ارتعاشی اتم‌های آن و در نتیجه، افزایش دما) ظاهر می‌شود. معمولاً مقاومت با هوا تماس دارد و افزایش دما سبب می‌شود که این انرژی به‌صورت گرما به هوا منتقل شود. افزون بر این، مقاومت تابش‌های گرمایی گسیل می‌کند و بخشی از انرژی به این ترتیب از سامانه‌ی ما خارج می‌شود. پس از گذشت مدت زمانی، دمای مقاومت به حالت ترازمندی می‌رسد. از این هنگام به بعد، انرژی دریافتی از باتری با انرژی گرمایی و تابشی مقاومت برابر می‌شود. سامانه با گذار بار Δq از مقاومت انرژی از دست می‌دهد. آهنگ از دست رفتن انرژی در مقاومت برابر است با

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta q}{\Delta t} \right) \Delta V = I \Delta V \quad (8-50)$$

که در آن I جریان در مدار است. وقتی بار از باتری می‌گذرد، سامانه این مقدار انرژی پتانسیل را به هزینه‌ی کاسته شدن از انرژی شیمیایی باتری دوباره به‌دست می‌آورد. بنابراین، با آهنگی که سامانه، در اثر گذار بار از مقاومت، انرژی پتانسیل از دست می‌دهد با آهنگی که سامانه انرژی شیمیایی از باتری می‌گیرد، برابر است. به بیان دیگر، آهنگ از دست دادن انرژی پتانسیل الکتریکی در مقاومت با توانی که باتری فراهم می‌کند، برابر است.

چون $\Delta V = IR$ است، رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$P = I (\Delta V) = I (IR) = I^2 R = (\Delta V)^2 / R \quad (8-51)$$

اگر یکای جریان آمپر، اختلاف پتانسیل برحسب ولت و مقاومت برحسب اهم باشد، در سامانه‌ی یکاهای SI یکای توان برحسب وات (W) است. در رابطه‌ی (8-51) P توانی است که در مقاومت R به صورت گرما تلف می‌شود و گرمای ژول* نامیده می‌شود (اگرچه یکای آن انرژی در واحد زمان یا یکای توان است).

باتری یا هر وسیله‌ای که انرژی الکتریکی فراهم می‌کند، منبع نیروی محرکه نامیده می‌شود. در فصل ۱۴ یک بار دیگر با جزییات بیشتر به قانون اهم خواهیم پرداخت و مفهوم نیروی محرکه را بازگشایی خواهیم کرد.

مثال ۷-۸ توان آب‌گرم کن برقی: یک آب‌گرم کن برقی از سیم نایکروم با مقاومت کل 16Ω تشکیل شده است و به اختلاف پتانسیل ۲۲۰ ولت وصل است. جریان گذرنده از سیم و توان آب‌گرم کن را حساب کنید.

حل: چون $\Delta V = IR$ است، پس داریم

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{220 \text{ V}}{16 \Omega} = 13.8 \text{ A} \quad (8-52)$$

$$P = I^2 R = (13.8 \text{ A})^2 (16 \Omega) = 3.04 \text{ kW} \quad (8-53)$$

مثال ۸-۸ سرعت رانش یون‌های آب دریا: مقاومت ویژه‌ی آب دریا حدود $25 \Omega \cdot \text{cm}$ است. حامل‌های بار یون‌های Na^+ و Cl^- اند. فراوانی هر یک از این یون‌ها 3×10^{20} در هر سانتی‌متر مکعب است. اگر یک لوله‌ی پلاستیکی به طول دو متر را از آب

* Joule heating

دریا پر کنیم و در انتهای لوله دو الکتروود قرار دهیم که به یک باتری ۱۲ ولت وصل اند، میانگین سرعت رانش یون‌ها برحسب cm/s چیست؟

حل: جریان الکتریکی در رسانایی با سطح مقطع A با رابطه‌ی (۸-۴) به صورت $I = e n A v_d$ به سرعت رانش v_d مربوط است که در آن n تعداد بارها در واحد حجم است. بنابراین، قانون اهم را می‌توان به صورت زیر بارنویسی کرد

$$V = IR = (neAv_d) \left(\frac{\rho \ell}{A} \right) = nev_d \rho \ell \Rightarrow v_d = \frac{V}{ne\rho \ell} \quad (8-54)$$

که با جاگذاری مقادیر عددی خواهیم داشت

$$v_d = \frac{12 \text{ V}}{(6 \times 10^{20} / \text{cm}^3)(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(20 \Omega \times \text{cm})(200 \text{ cm})} = 2.5 \times 10^{-6} \frac{\text{V} \cdot \text{cm}}{\text{C} \times \Omega} = 2.5 \times 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad (8-55)$$

توجه کنید که در تبدیل واحدها از رابطه‌ی زیر استفاده کردیم

$$\frac{\text{V}}{\Omega \cdot \text{C}} = \left(\frac{\text{V}}{\Omega} \right) \frac{1}{\text{C}} = \frac{\text{A}}{\text{C}} = \text{s}^{-1} \quad (8-56)$$

مثال ۹-۸ شتاب‌دهنده: یک شتاب‌دهنده‌ی ذرات الکترون‌های با انرژی 40 MeV تولید می‌کند ($1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$). الکترون‌ها به صورت باریکه‌ی پایا و پیوسته تولید نمی‌شوند، بلکه تپ‌هایی با آهنگ 250 در ثانیه تولید می‌شوند. یعنی بین دو تپ پی‌درپی یک فاصله‌ی زمانی 4 میلی ثانیه وجود دارد. هر تپ به مدت 2 نانو ثانیه دوام می‌آورد. الکترون‌های هر تپ

جریان 250 mA تولید می‌کنند. بین دو تپ، جریان وجود

ندارد. شکل (۸-۱۵) را نگاه کنید.

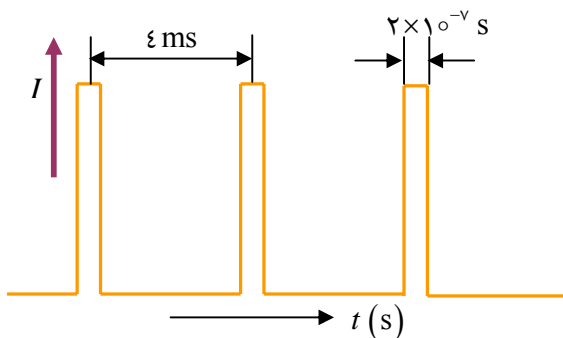
(الف): در هر تپ، چند الکترون وجود دارد؟

(ب): جریان میانگین که شتاب‌دهنده تولید می‌کند، چیست؟

(پ): بیشینه توانی را که باریکه‌ی الکترون منتقل می‌کند، چقدر است؟

(ت): بیشینه میانگین که باریکه‌ی الکترون منتقل می‌کند، چقدر

است؟



شکل ۸-۱۵ جریان برحسب زمان برای باریکه‌ی تپی

حل (الف): از $I = dq/dt$ استفاده کنید. اگر از $dq = Idt$ انتگرال بگیرید، بار کل در هر تپ به دست می‌آید. توجه کنید که در مدت زمانی که تپ وجود دارد، جریان مقدار ثابتی است. بنابراین،

$$Q_{\text{pulse}} = I \int dt = I \Delta t = (250 \times 10^{-3} \text{ A})(200 \times 10^{-9} \text{ s}) = 5 \times 10^{-8} \text{ C} \quad (8-57)$$

اگر این مقدار را به بار یک الکترون تقسیم کنیم، تعداد الکترون‌های هر تپ به دست می‌آید

$$N_e = \frac{5 \times 10^{-8} \text{ C/pulse}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C/electron}} = 3.125 \times 10^{11} \text{ electron/pulse} \quad (8-58)$$

(ب): جریان میانگین $I_{\text{av}} = \Delta q / \Delta t$ است. بازه‌ی زمانی بین تپ‌ها 4 میلی ثانیه و بار هر تپ $5 \times 10^{-8} \text{ C}$ است. در نتیجه،

$$I_{\text{av}} = \frac{5 \times 10^{-8} \text{ C}}{4 \times 10^{-3} \text{ s}} = 12.5 \mu\text{A} \quad (8-59)$$

این تنها ۰,۰۰۵٪ جریان بیشینه‌ی ۲۵۰mA است.

(پ): بنا به تعریف، توان یعنی انرژی در واحد زمان. بنابراین، توان بیشینه مقدار انرژی هر تپ تقسیم بر زمان تداوم تپ است:

$$P_{\text{Max}} = \frac{(3,13 \times 10^{11} \text{ electrons/pulse})(\epsilon_0 \text{ MeV/electron})}{2 \times 10^{-7} \text{ s/pulse}} \times \left(\frac{1,6 \times 10^{-13} \text{ J}}{1 \text{ MeV}} \right) = 1 \times 10^9 \text{ W} = 10 \text{ MW} \quad (8-60)$$

توان را می‌توانستیم مستقیم مستقیم هم حساب کنیم. فرض کنید پیش از شتاب پیدا کردن، انرژی هر الکترون صفر است. بنابراین، هر الکترون باید از یک اختلاف پتانسیل $\epsilon_0 \text{ MV}$ بگذرد تا انرژی اش به $\epsilon_0 \text{ MeV}$ برسد. در نتیجه،

$$P_{\text{max}} = I_{\text{max}} \Delta V = (200 \times 10^{-3} \text{ A})(\epsilon_0 \times 10^6 \text{ V}) = 10 \text{ MW} \quad (8-61)$$

(ت): به جای استفاده از زمان تداوم تپ، از بازه‌ی زمانی بین دو تپ استفاده کنید:

$$P_{\text{av}} = \frac{(3,13 \times 10^{11} \text{ electrons/pulse})(\epsilon_0 \text{ MeV/electron})}{\epsilon_0 \times 10^{-7} \text{ s/pulse}} \times \left(\frac{1,6 \times 10^{-13} \text{ J}}{1 \text{ MeV}} \right) = 500 \text{ W} \quad (8-62)$$

یا اگر خواستید مستقیم آن را حساب کنید، از جریان میانگین که در قسمت (ب) به دست آوردید، استفاده کنید.

$$P_{\text{av}} = I_{\text{av}} \Delta V = (12,5 \times 10^{-1} \text{ A})(\epsilon_0 \times 10^6 \text{ V}) = 500 \text{ W} \quad (8-63)$$

۴-۸ نیروی محرکه‌ی الکتریکی

شارش جریان در مقاومت با هدر رفتن انرژی همراه است. برای این که حامل بار با سرعت میانگین v در مقاومت حرکت کند، نیروی F باید به آن وارد شود. عاملی که نیرو را فراهم می‌کند، با آهنگ $F \cdot v$ کار انجام می‌دهد. اگر این عامل میدان الکتریکی E و حامل‌های بار یون‌های با بار q باشند، $F = qE$ است و آهنگ انجام کار $qE \cdot v$ خواهد بود. بنابراین، برای شارش جریان، مقداری انرژی هزینه می‌شود که سرانجام به صورت گرما ظاهر می‌شود. در رسانش یونی، بین دو برخورد پی‌درپی، یون مقداری انرژی جنبشی و تکانه به دست می‌آورد. یک یا چند برخورد یون سبب می‌شود که جهت تکانه‌ی یون به طور کاتوره‌ای تغییر کند، اما انرژی جنبشی آن را لزوماً به حالت اولیه برنمی‌گرداند. برای این که پس از برخورد انرژی جنبشی یون به حالت اولیه برگردد، یون برخورد کننده باید به مانعی که با آن برخورد می‌کند و منحرف می‌شود، انرژی جنبشی منتقل کند. فرض کنید جرم حامل بار در مقایسه با جرم اتم خنثی که با آن برخورد می‌کند (مانع)، کوچک است. در این صورت، میانگین انرژی جنبشی که به اتم خنثی منتقل می‌شود، اندک است (مانند برخورد توپ پینگ پونگ و توپ بسکتبال). بنابراین، انرژی جنبشی یون (توپ پینگ پونگ) به طور پیوسته افزایش خواهد یافت (توجه کنید که بین دو برخورد، یون حامل بار انرژی جنبشی به دست می‌آورد. در هر برخورد مقدار بسیار اندکی از آن به مانع منتقل می‌شود). سرانجام انرژی جنبشی یون به اندازه‌ی زیاد می‌شود که میانگین انرژی که در یک برخورد از دست می‌دهد با مقدار انرژی که بین دو برخورد به دست می‌آورد، مساوی می‌شود. به این ترتیب، پس از آن که حامل‌های بار "خودسازی" کردند، کار نیروی الکتریکی به صورت انرژی جنبشی کاتوره‌ای (یا گرما) به بقیه‌ی قسمت‌های ماده منتقل می‌شود.

فرض کنید I آمپر جریان پایا در مقاومت R اهم شارش دارد. پس، مقدار I کولمب بار بین اختلاف پتانسیل V ولت جابه‌جا می‌شود. $V = IR$ است. در نتیجه، مقدار کاری که در یک ثانیه انجام می‌گیرد برابر $IV = I^2 R$ ژول است (چون یک کولمب ضربدر یک ولت برابر یک ژول است). یک وات* یکای توان P (آهنگ انجام کار) است و با ولت - آمپر یا ژول بر ثانیه تعریف

* Watt

می‌شود:

$$(۸-۶۴)$$

$$P = I^2 R$$

شارش پایای جریان در مدار به یک چشمه‌ی انرژی نیاز دارد تا میدان الکتریکی را که عامل حرکت حامل‌های بار است، ثابت نگه دارد. تاکنون کوشیدیم با بررسی بخشی از مدار از مفهوم نیروی محرکه‌ی الکتریکی[◊] دوری کنیم و به این ترتیب باتری را در بحث خود وارد نکردیم. در این بخش به برخی از چشمه‌های نیروی محرکه می‌پردازیم.

• **نیروی محرکه‌ی الکتریکی و پیل ولتا:** در مدار با جریان مستقیم، نیروی محرکه نوعی سازوکار است که حامل‌های

بار را در جهت مخالف جهتی که میدان الکتریکی می‌خواهد آن‌ها را به حرکت وا بدارد، جابه‌جا می‌کند. مولد الکتروستاتیک

ون دو گراف نمونه‌ای در مقیاس بزرگ‌تر است. جریان در مقاومت بیرونی

در جهت میدان الکتریکی E شارش دارد و انرژی در مقاومت با

آهنگ IV یا $I^2 R$ به صورت گرما تلف می‌شود. در ستون درونی ماشین

ون دوگراف هم میدان الکتریکی رو به پایین وجود دارد. در این بخش

ماشین بارهای الکتریکی به تسمه‌ی نارسانا سوار می‌شوند و برعکس

میدان روبه بالا حرکت می‌کنند. بارها چنان محکم به تسمه چسبیده‌اند که

میدان الکتریکی رو به پایین نمی‌تواند آن‌ها را به سوی پایین بلغزند (در

این جا نیازی نداریم که به سازوکار سوار کردن بارها بر روی بسمه و

جداکردنشان در بیرون ماشین بپردازیم.) انرژی لازم برای به حرکت

در آوردن تسمه از جای دیگری تامین می‌شود. معمولاً یک موتور الکتریکی

که به برق شهر وصل است، این کار را انجام

می‌دهد. موتور گازویی هم می‌تواند از عهده‌ی آن برآید. ماشین ون دو

گراف اساساً یک باتری است با نیروی محرکه‌ی الکتریکی و پتانسیل V_0

است.

در باتری‌های معمولی، انرژی شیمیایی سبب می‌شود تا حامل‌های بار در

ناحیه از مدار در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت کنند. یعنی، حامل بار

مثبت می‌تواند به مکانی برود که پتانسیل الکتریکی آنجا بیشتر است. این

کار هنگامی شدنی است که حامل بار در یک فرایند شیمیایی شرکت کند و

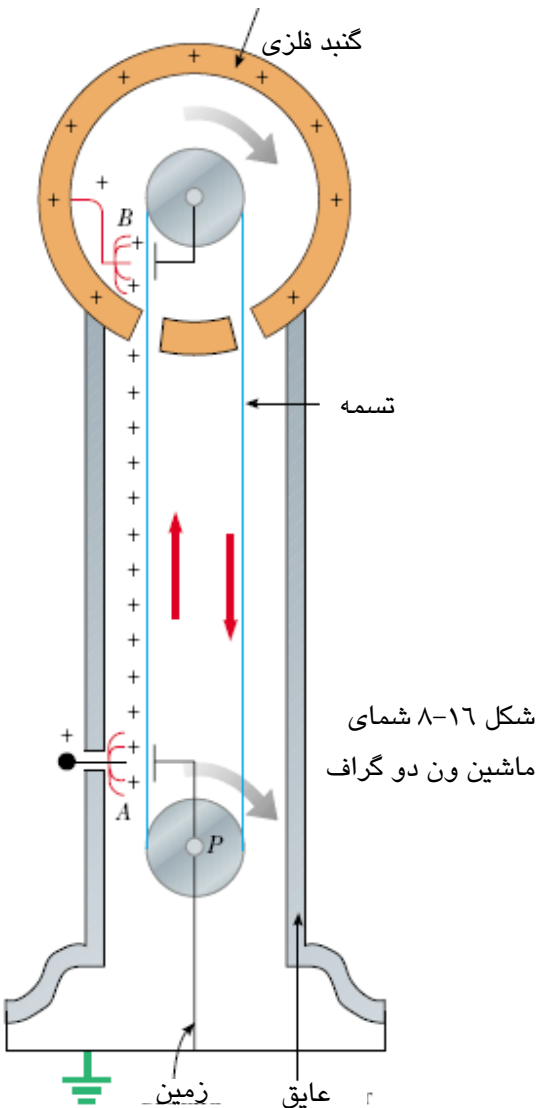
مقدار انرژی که از این فرایند شیمیایی به دست می‌آورد بیشتر از انرژی

لازم برای پیمودن سربالایی پتانسیل الکتریکی باشد.

برای این که ببینیم، چگونه این کار شدنی است، پیل ولتا را بررسی

می‌کنیم. پیل ولتا نام عمومی برای چشمه‌ی نیروی محرکه‌ی شیمیایی

است. در سال‌های ۱۷۸۶ لوییجی گالوانی[†] در آزمایش‌هایی با قورباغه انجام می‌داد، دریافت که وقتی ماشه‌ی مسی را در ستون



[◊] electromotive force

[†] Luigi Galvani

فقرات قورباغه‌ای که از یک میله‌ی فلزی آویزان بود، فرو می‌برد، عضله‌های پای قورباغه منقبض می‌شود. گالوانی مشاهده کرد وقتی با فلزهای نایکسان دیگر هم کار می‌کند، همین اثر پدید می‌آید. او می‌پنداشت که منشاء بار عصب یا عضله‌ی قورباغه است و در نتیجه، آن را "الکتریسیته‌ی حیوانی" نامید.

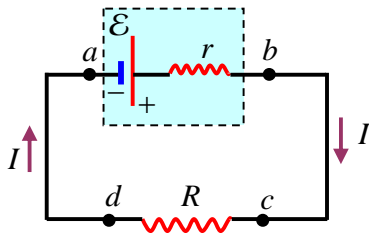
الساندروولتا[♦]، پس از آگاهی از دستاورد گالوانی بر آن شد که آزمایش گالوانی را تکرار و آن را گسترش بدهد. او پیشنهاد کرد که منشاء بار جانور نیست، بلکه تماس بین دو فلز متفاوت مس و آهن است. ولتا در بررسی‌های خود دریافت که وقتی تماس بین دو فلز با یک رسانای نمناک (مانند عضله‌ی قورباغه) صورت بگیرد، اثر چشم‌گیرتری دیده می‌شود. او با جایگزینی پای قورباغه با ماده‌ی آلی این نکته را ثابت کرد. او همچنین ثابت کرد که برخی جفت‌های فلزی اثر چشم‌گیرتری تولید می‌کنند. ولتا فراتر از این رفت و چشمه‌ی الکتریسیته‌ی پیوسته، باتری، را اختراع کرد. نخستین باتری ولتا شامل ستونی از روی و نقره بود. هر لایه با پارچه‌ای که در آب نمک خیس خورده بود، از لایه‌ی دیگر جدا می‌شد. ساختار لایه‌ای، اختلاف پتانسیل پیوسته بین دو انتهای آن فراهم می‌کرد. انتهای نقره بار مثبت داشت و انتهای روی به همان اندازه بار منفی داشت. در عمل، این دستگاه یک تبدیل‌کننده‌ی انرژی بود و انرژی شیمیایی را به انرژی پتانسیل الکتریکی تبدیل می‌کرد. باتری‌های امروزی بسته‌بندی جمع و جورتری اند، اما اساس کارشان همان است. تفاوت پیل‌های ولتایی که در دسترس اند، در ماده‌ی شیمیایی آنهاست. همه‌ی این باتری‌ها ویژگی‌های یکسانی دارند: دو الکترود (میله‌ی فلزی) از دو جنس متفاوت که در مایع یونیزه (الکترولیت) فرو برده شده اند. در باتری اتوموبیل، ماده‌ی شیمیایی سرب-اسید سولفوریک است. اهمیت این پیل در کارکرد برگشت‌پذیر آن است. می‌توان آن را باردار کرد و انرژی در آن انباشت و می‌توان با خالی کردن بار، انرژی را به طریق الکتریکی از آن پس گرفت.

صفحه‌های مثبت پیل سرب-اسید سولفوریک وقتی کاملاً پر است، دی‌اکسید سرب، PbO_2 را به صورت پودر متخلخل نگه می‌دارد و صفحه‌های منفی آن شامل سرب خالص است. بدنه‌ی آن از آلیاژ سرب ساخته می‌شود. همه‌ی صفحه‌های مثبت به یکدیگر و به پایانه‌ی مثبت پیل وصل اند. همچنین، صفحه‌های منفی آن به یکدیگر و به پایانه‌ی منفی وصل اند. صفحه‌های مثبت و منفی با فاصله‌ی اندکی از هم قرار دارند و با الکترولیت اسید سولفوریک پر شده است. اگر پیل به مدار بیرونی وصل نشود، برای همیشه در این شرایط باقی می‌ماند و اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های آن به ۲٫۱ می‌رسد. در این مدار باز، اختلاف پتانسیل در اثر برهم‌کنش شیمیایی اجزاء پیل، به طور اتوماتیک به وجود می‌آید و نیروی محرکه‌ی الکتریکی پیل است. برای نشان دادن آن از نماد \mathcal{E} استفاده خواهیم کرد.

حال پایانه‌های باتری را به مدار بیرونی با مقاومت R وصل کنید. اگر R خیلی کوچک نباشد، اختلاف پتانسیل V بین پایانه‌های باتری اندکی کم‌تر از مقدار \mathcal{E} مدار باز خواهد شد و جریان $I = V/R$ در مدار شارش خواهد کرد. الکترون‌هایی وارد پایانه‌ی مثبت خواهند شد و الکترون‌های دیگری از پایانه‌ی منفی خارج خواهند شد. در هر الکترود، فرایند شیمیایی در جریان است که سرب، دی‌اکسید سرب و اسید سولفوریک را به سولفات سرب و آب تبدیل می‌کند. به‌ازای هر مولکول سولفات سرب که تشکیل می‌شود یک بار e در مدار می‌گردد و مقدار $e\mathcal{E}$ انرژی آزاد می‌شود. از این مقدار انرژی، به اندازه‌ی eV در مقاومت R به گرما تبدیل می‌شود. تفاوت بین \mathcal{E} و V بر اثر مقاومت خود الکترودها به وجود می‌آید که جریان از طریق آنها در درون باتری شارش می‌یابد. مقاومت الکترودها را معمولاً مقاومت درونی می‌نامند و با r یا R_i نشان می‌دهند. نیروی محرکه‌ی \mathcal{E} الکتریکی یک باتری بیشینه ولتاژ ممکن است که باتری می‌تواند بین دو پایانه‌ی خود تولید کند. شما می‌توانید به منبع نیروی محرکه‌ی الکتریکی به صورت یک دمنده‌ی (پمپ) بار ببینید. وقتی بین دو نقطه یک اختلاف پتانسیل الکتریکی

♦ Alessandro Volta

وجود داشته باشد، منبع بارها را در سربالایی پتانسیل پیش می‌راند و آنها را از نقطه‌ی با پتانسیل کم به نقطه‌ی با پتانسیل بالا می‌برد.



شکل ۸-۱۷ مدار با \mathcal{E} و r

در مدار شکل ۸-۱۸ باتری با مستطیل خط‌چین نشان داده شده است. مقاومت داخلی r آن را در بیرون نشان داده ایم تا از روشنی بیشتری برخوردار شود. فرض کنید که با گذشتن از درون باتری از نقطه‌ی a به نقطه‌ی b می‌روید و پتانسیل الکتریکی را در مکان‌های مختلف اندازه می‌گیرید. وقتی از پایانه‌ی منفی باتری به پایانه‌ی مثبت می‌رسید، پتانسیل به اندازه‌ی \mathcal{E} افزایش می‌یابد. اما وقتی از مقاومت درونی r می‌گذرید،

پتانسیل به اندازه‌ی Ir کاهش پیدا می‌کند. جریان در مدار I است. اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های مدار، $\Delta V = V_b - V_a$ ، (فرض کنید سیم‌های اتصال مقاومت ندارند) عبارت است از

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir \quad (8-65)$$

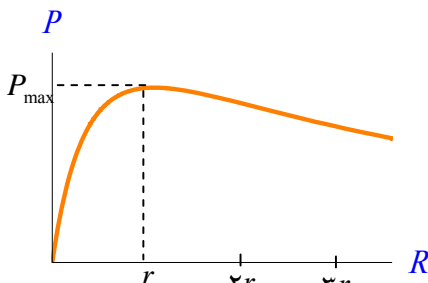
نکته: اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری در این مدار به اندازه‌ی Ir کاهش یافته است. در برخی وضعیت‌ها که جهت جریان در خلاف جهت نیروی محرکه است (یا حرکت شما در خلاف جهت جریان است) اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری به اندازه‌ی Ir افزایش پیدا می‌کند. نمونه‌ای از این وضعیت هنگامی است که باتری را با منبع نیروی محرکه‌ی الکتریکی دیگری باردار (شارژ) کنید. ♣

اختلاف پتانسیل بین دو انتهای مقاومت خارجی R (اختلاف پتانسیل بین نقاط c و d یا بین نقاط a و b که مقاومت R را دربر دارد) برابر $\Delta V = IR$ است. از ترکیب این رابطه با معادله‌ی (۸-۶۵) به دست می‌آید

$$IR = \mathcal{E} - Ir \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (8-66)$$

این معادله نشان می‌دهد که جریان در این مدار ساده به هر دو مقاومت درونی r و مقاومت بیرونی R بستگی دارد. اگر R خیلی بزرگ‌تر از r باشد (که معمولاً چنین است) می‌توان از r چشم‌پوشی کرد. اگر معادله‌ی (۸-۶۶) را در I ضرب کنیم، توان برون داد کل باتری، $I\mathcal{E}$ ، به دست می‌آید (چون $P = IV = I^2R$ است) که در مقاومت خارجی و مقاومت درونی به صورت گرما تلف می‌شود:

$$I\mathcal{E} = I^2R + I^2r \quad (8-67)$$



شکل ۸-۱۸ نمودار توان برحسب R

مثال ۸-۱۰ بیشینه توان: نشان دهید که بیشترین توانی که در مدار شکل (۸-۱۷) به مقاومت بیرونی R منتقل می‌شود، هنگامی است که مقاومت بیرونی R با مقاومت درونی r برابر است.

حل: توانی که به مقاومت خارجی R فرستاده می‌شود برابر I^2R است که در آن I با رابطه‌ی (۸-۶۶) داده شده است. داریم

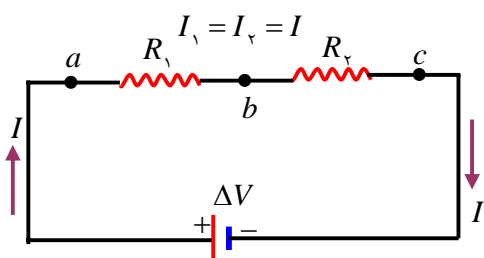
$$P = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2} \quad (8-68)$$

برای یافتن بیشینه‌ی P کافی است از رابطه‌ی بالا نسبت به R مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم. همان‌گونه که از نمودار شکل (۸-۱۸) هم پیداست، بیشینه‌ی توان در $R = r$ است و مقدار آن در $R = r$ برابر $P_{\max} = \mathcal{E}^2 / 4r$ است. وقتی R بزرگ‌تر

از r است، جریان در مدار بسیار اندک می‌شود و در نتیجه، توان $I^2 R$ انتقالی به مقاومت بیرونی هم کوچک است. وقتی R کوچک است، جریان بزرگ است و اتلاف توان در مقاومت داخلی، $I^2 r$ ، چشمگیر است.

۸-۵ شبکه‌های مقاومت

منظور ما از شبکه‌ی مقاومت این است که چندین مقاومت در یک مدار به هم بسته شده باشند. مقاومت‌ها را می‌توان به دو صورت سری و موازی به یکدیگر وصل کرد. شکل (۸-۱۹) دو مقاومت R_1 و R_2 را نشان می‌دهد که به طور سری به هم بسته شده‌اند و در مداری که از آن جریان I می‌گذرد، قرار دارند. در اتصال سری اگر بار Q از مقاومت R_1 به بیرون شارش کند، همان مقدار بار Q باید وارد مقاومت R_2 بشود. در غیر این صورت بار در سیم بین دو مقاومت انباشته خواهد شد. پس، مقدار باری که در هر بازه‌ی زمانی از مقاومت‌های R_1 و R_2 می‌گذرند، باهم برابر‌اند. در نتیجه، جریان گذرنده از هر دو مقاومت R_1 و R_2 که به طور سری به هم بسته شده‌اند، برابر است.



شکل ۸-۱۹ دو مقاومت به طور سری

اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های مجموعه‌ی دو مقاومت (یعنی نقاط a و c)

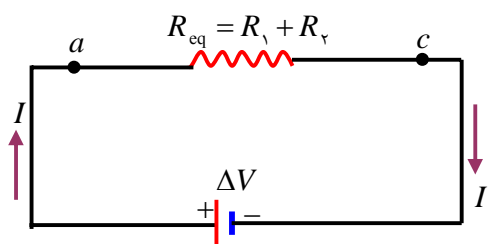
بین مقاومت‌ها تقسیم می‌شود. چون افت پتانسیل بین نقاط a و b برابر IR_1

است و افت پتانسیل بین نقاط b و c برابر IR_2 است، افت پتانسیل بین نقاط a و c برابر

$$\Delta V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \quad (8-69)$$

است. این اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ی a و c هم‌چنین اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری است.

از رابطه‌ی (۸-۶۹) پیداست که اگر به جای دو مقاومت R_1 و R_2 مقاومت دیگری به اندازه‌ی $R_{eq} = R_1 + R_2$ در مدار قرار دهیم،



شکل ۸-۲۰ مقاومت معادل دو مقاومت سری

تغییری در جریان مدار و یا در اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری

به وجود نمی‌آید. مقاومت‌های R_1 و R_2 شبکه‌ی ساده‌ای تشکیل می‌دهند.

نقاط a و c را می‌توان پایانه‌های این شبکه پنداشت. هم‌ارز این شبکه،

یک مقاومت معادل به اندازه‌ی

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (8-70)$$

است. مدار هم‌ارز در شکل (۸-۲۰) نشان داده شده است.

اگر بیش از دو مقاومت به طور سری به هم بسته شده باشند، مقاومت معادل آنها از جمع مقاومت‌ها به دست می‌آید

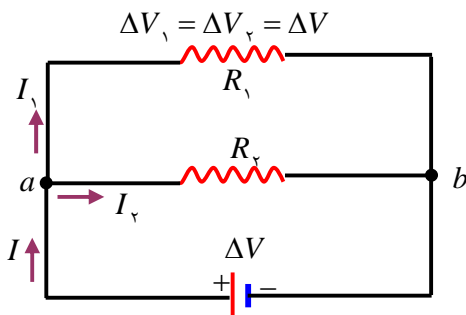
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots = \sum_n R_n \quad (8-71)$$

اگر یک بار دیگر به رابطه‌ی (۸-۶۶) نگاه کنید، می‌بینید که مخرج کسر جمع جبری مقاومت‌های درونی و بیرونی است. این با

سری بودن مقاومت درونی و بیرونی در شکل (۸-۱۷) سازگار است.

حالا وضعیتی را در نظر بگیرید که دو مقاومت به طور موازی به هم بسته شده‌اند. این وضعیت در شکل (۸-۲۱) نشان داده شده است. وقتی بارها به پیوندگاه* در نقطه‌ی a می‌رسند، به دو بخش تقسیم می‌شوند. برخی از مقاومت R_1 می‌گذرند و بقیه

* junction



شکل ۸-۲۱ مدار با دو مقاومت موازی

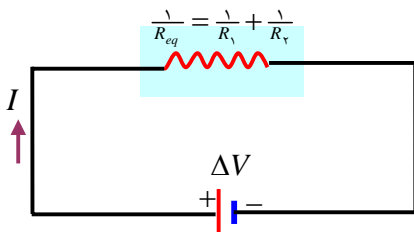
از مقاومت R_2 عبور می‌کنند. پیوندگاه، نقطه‌ای در مدار است که جریان به دو یا چند بخش تقسیم می‌شود. دو یا چند شاخه شدن جریان سبب می‌شود که جریان گذرنده از هر شاخه کمتر از جریانی باشد که باتری را ترک می‌کند. چون بار الکتریکی پایسته است، جریانی که به نقطه‌ی a وارد می‌شود، باید با جریان کل که نقطه‌ی a را ترک می‌کند، برابر باشد. پس:

$$I = I_1 + I_2 \quad (۸-۷۲)$$

I_1 جریانی است که از مقاومت R_1 می‌گذرد و I_2 جریان گذرنده از مقاومت R_2 است. همان‌گونه که از شکل پیداست، هر دو مقاومت به طور مستقیم به سر باتری وصل شده‌اند. بنابراین، وقتی مقاومت‌ها به طور موازی بسته می‌شوند، اختلاف پتانسیل بین دو سر مقاومت‌ها برابر است. به این دلیل، از رابطه‌ی $\Delta V = IR$ داریم

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\Delta V}{R_{eq}} \quad (۸-۷۳)$$

که در آن R_{eq} مقاومتی است که اثرش در مدار با اثر دو مقاومت موازی یکی است، یعنی مقاومت R_{eq} همان جریانی را از باتری می‌کشد که دو مقاومت موازی R_1 و R_2 از باتری می‌کشند. R_{eq} مقاومت معادل مقاومت‌های موازی R_1 و R_2 است. مدار معادل شکل (۸-۲۱) در شکل



شکل ۸-۲۲ مدار معادل دو مقاومت موازی

(۸-۲۲) با یک مقاومت (مقاومت معادل R_{eq}) نشان داده شده است. پس:

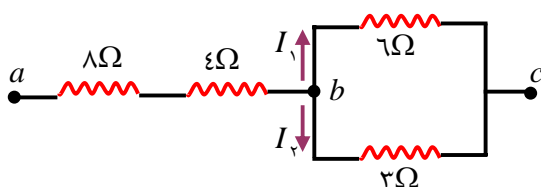
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (۸-۷۴)$$

اگر بیش از دو مقاومت به طور موازی در یک مدار قرار گیرند، رابطه‌ی بالا به صورت زیر تعمیم می‌یابد:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots = \sum_j \frac{1}{R_j} \quad (۸-۷۵)$$

توجه کنید که مقاومت معادل همواره کم‌تر از کوچک‌ترین مقاومت موجود در گروه مقاومت‌های موازی است.

سیم‌کشی خانه‌ها همیشه به گونه‌ای است که ابزار الکتریکی به طور موازی بسته شوند. هر وسیله‌ی الکتریکی مستقل از ابزار دیگر کار می‌کند. به این ترتیب اگر یکی را خاموش کنیم، دیگری روشن باقی می‌ماند. در این گونه اتصال، همه‌ی ابزار الکتریکی در اختلاف پتانسیل یکسان کار می‌کنند.



شکل ۲۳ اتصال ترکیبی مقاومت‌ها

مثال ۸-۱۱ شبکه‌ی ساده چهار مقاومت برابر شکل (۸-۲۳) به هم بسته شده‌اند. مقاومت معادل بین نقاط a و c را بیابید. اگر اختلاف پتانسیل بین نقاط a و c برابر $۴۲V$ باشد، جریان را در هر یک از مقاومت‌ها حساب کنید.

حل: بین نقاط a و b دو مقاومت به‌طور سری بسته شده‌اند. مقاومت معادل آنها $R_{1,eq} = ۸\Omega + \epsilon\Omega = ۱۲\Omega$ است. بین نقاط b و c دو

مقاومت ۶ و ۳ اهمی به طور موازی بسته شده اند. آنها را می توان با مقاومت معادلشان می توانیم جایگزین کنیم. از رابطه ی (۸-۷۴) داریم

$$R_{\gamma,eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(6\Omega)(3\Omega)}{6\Omega + 3\Omega} = 2\Omega \quad (8-76)$$

پس، اینک دو مقاومت $R_{\gamma,eq}$ و $R_{\delta,eq}$ داریم که به طور سری بسته شده اند. مقاومت معادل آنها، مقاومت معادل بین نقاط a و c ، برابر است با

$$R_{eq} = 12\Omega + 2\Omega = 14\Omega \quad (8-77)$$

جریان گذرنده از مقاومت های ۸ و ۴ اهمی یکسان است، چون این دو مقاومت به طور سری بسته شده اند. افزون بر این، همین جریان از مقاومت معادل ۱۴ اهمی با اختلاف پتانسیل ۴۲V خواهد گذشت. پس، با استفاده از $I = \Delta V_{ac} / R_{eq}$ داریم

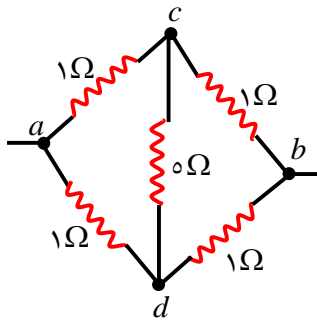
$$I = \frac{\Delta V_{ac}}{R_{eq}} = \frac{42V}{14\Omega} = 3A \quad (8-78)$$

این جریانی است که از مقاومت های ۸ اهمی و ۴ اهمی می گذرد. وقتی این جریان ۳ آمپر به پیوندگاه b می رسد، به دو بخش تقسیم می شود. جریان I_1 از مقاومت ۶ اهمی می گذرد و جریان I_2 از مقاومت ۳ اهمی می گذرد. چون اختلاف پتانسیل بین نقاط c و b هر یک از مقاومت های موازی یکسان است، داریم

$$\Delta V_{bc} = I_1(6\Omega) = I_2(3\Omega) \Rightarrow I_2 = 2I_1 \quad (8-79)$$

با استفاده از این رابطه و این که $I = I_1 + I_2 = 3A$ است، به دست می آید $I_1 = 1A$ و $I_2 = 2A$.

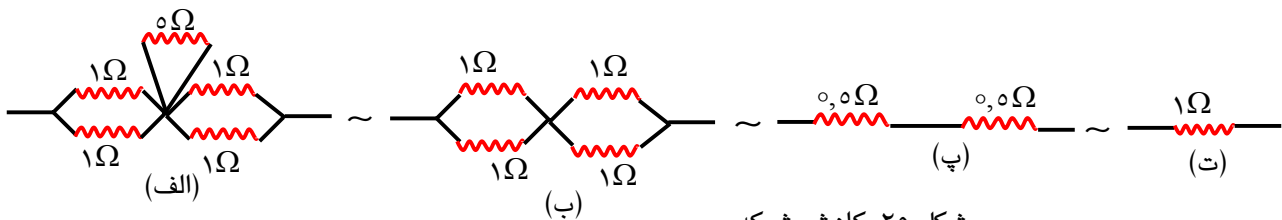
مثال ۸-۱۲ شبکه ی مقاومت مقاومت معادل پنج مقاومت برابر شکل (۸-۲۴) به هم بسته شده اند. مقاومت معادل بین نقاط a و b را بیابید.



شکل ۸-۲۴ شبکه ی مقاومت

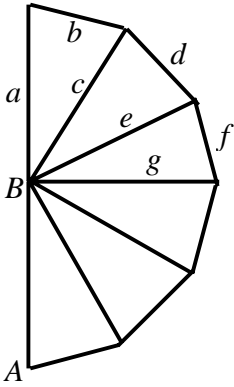
حل: واری این سامانه نشان می دهد که با استفاده از قاعده های اتصال های سری و موازی مقاومت ها نمی توان آن را ساده کرد. برای حل این گونه مسئله ها از تقارن سامانه می توان استفاده کرد. فرض کنید جریانی به پیوندگاه a وارد می شود. چون مدار شکل (۸-۲۴) تقارن دارد (یعنی مقاومت ها در حلقه همگی ۱ Ohm اند)، جریان در شاخه های ac و ad باید برابر باشند. در نتیجه، پتانسیل الکتریکی در نقاط c و d باید برابر باشد. این بدان معنی است که $\Delta V_{cd} = 0$ است و بین نقاط c و d جریان نمی گذرد. پس، بدون این که تاثیری در مدار به وجود بیاید، می توان c و d را به هم وصل کرد (شکل ۸-۲۵ الف) و در نتیجه، می توان

مقاومت ۵ اهمی را از مدار حذف کرد (شکل ۸-۲۵ ب را ببینید). در نتیجه، دو جفت مقاومت یک اهمی باقی می ماند که دو تا دو تا



شکل ۲۵ کاهش شبکه

به طور موازی به یکدیگر وصل اند. مقاومت معادل هر یک از آنها مقاومتی با $0,5\Omega$ است. (شکل ۸-۲۵ پ). در نتیجه، در گام آخر دو مقاومت نیم اهمی داریم که به طور سری به هم وصل اند. مقاومت معادل این دو مقاومت نیم‌اهم، مقاومت ۱ اهمی شکل (۸-۲۵ ت) مقاومت معادل نهایی است.



شکل ۸-۲۶ شبکه‌ی مثلی

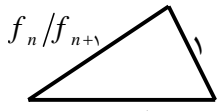
مثال ۸-۱۳ شبکه‌ی مثلی: (الف) در شکل (۸-۲۶) هر پاره‌خط یک مقاومت R است. مقاومت معادل R_{eq} بین نقاط A و B چیست؟

(ب): در حدی که تعداد مثلث‌ها خیلی زیاد باشد، مقاومت معادل را حساب کنید. (راهنمایی: اگر یک مثلث دیگر به سمت چپ A بیفزایید، مقاومت معادل در امتداد خط جدیدی که B را به ضلع سمت چپ این مثلث وصل می‌کند هنوز باید R_{eq} باشد.)

حل: (الف) مقاومت‌های a و b سری بسته شده اند، می‌توانیم آن‌ها را با یک مقاومت $2R$ جایگزین کرد. این مقاومت $2R$ با مقاومت c موازی بسته می‌شود. بنابراین، مثلث اول را می‌توان با یک مقاومت $(2/3)R$ جایگزین کرد. این مقاومت با d به طور سری بسته شده است و معادل آن دو، مقاومتی به اندازه‌ی $(5/3)R$ است. مقاومت $(5/3)R$ با مقاومت e

موازی است. بنابراین دو مثلث اول را می‌توان با یک مقاومت معادل $(5/8)R$ جایگزین کرد که با f سری بسته شده است. اگر این روند را ادامه دهید، سه مثلث بالایی را می‌توانید با یک مقاومت $(13/21)R$ جایگزین کنید. شعاع بعدی با مقاومت $(34/55)R$ جایگزین می‌شود. مثلث پنجم جایگزین مقاومت $(89/144)R$ و سرانجام مثلث آخر با مقاومت $(232/377)R$ معادل است که مقاومت معادل R_{eq} بین نقاط A و B است.

عدهای این کسرها، عدهای آشنای فیبوناچی* اند و با رابطه‌ی برگشتی $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ تعریف می‌شود. 232 و 377 عدهای سیزدهم و چهاردهم فیبوناچی اند.



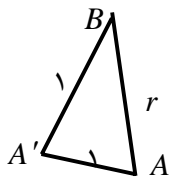
شکل ۸-۲۷ یک مثلث

با استقراء به سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر مقاومت معادل یک مثلث به صورت $(f_n/f_{n+1})R$ باشد، مقاومت معادل در مثلث بعدی برابر $(f_{n+2}/f_{n+3})R$ است. این را می‌توان از شکل (۸-۲۷)

دید. مقاومت پایینی در شکل (۸-۲۷) (ضریب R را ننوشتیم) برابر است با

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + (f_n/f_{n+1})}} = \frac{1}{1 + \frac{f_{n+1}}{f_n + f_{n+1}}} = \frac{1}{1 + \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1} + f_{n+2}} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+3}} \quad (8-80)$$

اگر N مثلث داشته باشیم (در مثال ما $N = 6$ است) مقاومت معادل بین شعاع اول یا شعاع آخر (پاره‌خط AB) برابر $(f_{2n+1}/f_{2n+2})R$ می‌شود.



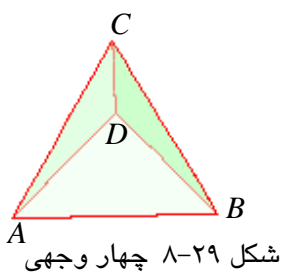
شکل ۸-۲۸ مثلث بعدی

(ب): اگر مقاومت بین BA به مقدار r میل کند، با افزودن یک مثلث دیگر، باید مقاومت معادل هنوز هم به همان مقدار r میل کند. مقاومت معادل بین نقاط B و A' باید برابر (ضریب R را ننوشتیم).

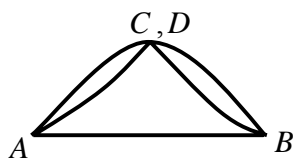
* Fibonacci numbers

$$r = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{r+1}} \Rightarrow r = \frac{r+1}{r+2} \Rightarrow r^2 + r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618 \quad (8-81)$$

باشد. این عدد، نسبت بین دو عدد فیبوناچی پی‌درپی است. حتی برای n های کوچک هم نسبت خیلی به $0,618$ نزدیک است. در مثال بالا که شش مثلث وجود دارد، $233/377$ با مقدار $(-1 + \sqrt{5})/2$ تا پنج رقم اعشار، سازگار است



شکل ۸-۲۹ چهار وجهی



شکل ۸-۳۰ مدار معادل

مثال ۸-۱۴ چهار وجهی با لبه‌های مقاومتی: هر لبه‌ی چهار وجهی شکل (۸-۲۹) یک مقاومت

R است. بنابراین، شامل شش مقاومت R است. مقاومت معادل بین دو راس را بیابید.

(راهنمایی: از تقارن چهار وجهی استفاده کنید.)

حل: فرض کنید راس‌های مورد نظر A و B اند. بنا به تقارن، دو مقاومت دیگر در پتانسیل

یکسان قرار دارند و در نتیجه، از مقاومتی که آنها را به هم وصل می‌کند، جریان نمی‌گذرد.

پس، می‌توانیم راس‌های C و D به هم بچسبانیم مدار معادل همانند شکل (۸-۳۰) می‌شود. در

این شکل، بین نقطه‌ی A و نقطه‌ی C, D دو مقاومت R به طور موازی بسته شده‌اند. به جای

آن دو می‌توان مقاومت معادلشان $R_{eq(A,C-D)} = R/2$ را قرار داد. همین کار را بین نقطه‌های

B و C, D انجام می‌دهیم. این دو مقاومت $(R/2)$ با هم به طور سری بسته شده‌اند.

مقاومت معادل آن دو $R_{eq(A-C,D-B)} = (R/2) + (R/2) = R$ است. این مقاومت R معادل

با مقاومت R که بین نقاط A و B قرار دارد، موازی است. پس، مقاومت معادل بین A و B برابر $R_{eq,A-B} = R/2$ است.

توجه کنید که جمع مقاومت‌های معادل هر شش مقاومت برابر $6(R/2) = 3R$ است.

۸-۶ قانون‌های کرکھوف

در بخش ۸-۵ دیدیم که مدارهای ساده (معمولا با یک چشمه‌ی نیروی محرکه) را می‌توان با استفاده از $\Delta V = IR$ و قاعده‌های

ترکیب سری و موازی مقاومت‌ها به مدار با یک حلقه‌ی جریان کاهش داد و بررسی کرد. بیش‌تر وقت‌ها کاهش یک مدار پیچیده

به یک حلقه شدنی نیست. در این وضعیت‌ها دو اصل ساده که قانون‌های کرکھوف[♦] نامیده می‌شوند، بررسی مدارهای پیچیده

را آسان می‌کنند. این قانون‌ها بیان پایستگی بار الکتریکی و پایستگی انرژی اند. در زیر نخست آنها را بیان می‌کنیم و سپس به

بررسی اندرونی آنها و کاربردشان می‌پردازیم.

قانون نخست کرکھوف: جمع جریان‌هایی که به یک پیوندگاه مدار وارد می‌شود با جمع جریان‌هایی که آن پیوندگاه را ترک

می‌کنند، باید برابر باشد. این قانون را گاهی **قانون پیوندگاه** هم می‌نامند.

$$\sum I_{in} = \sum I_{out} \quad (8-82)$$

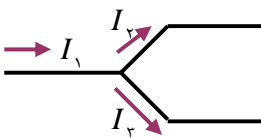
قانون دوم کرکھوف: در هر حلقه‌ی بسته از یک مدار الکتریکی، جمع اختلاف پتانسیل‌های دو سر اجزاء آن حلقه‌ی مدار صفر

است. این قانون را گاهی **قانون حلقه** می‌نامند

[♦] Kirchhoff's rules

$$\sum_{\text{closed loop}} \Delta V = 0 \quad (8-83)$$

همان‌گونه که گفتیم، قانون اول کرکھوف گزاره‌ای برای پایداری بار الکتریکی است. همه‌ی بارهایی که وارد نقطه‌ی معینی از مدار می‌شوند، باید آن نقطه را ترک کنند، چون بارها نمی‌توانند در یک نقطه انباشته شوند. اگر



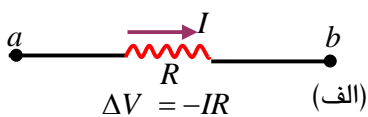
این قاعده را در پیوندگاه شکل (۸-۳۱) به کار ببریم، خواهیم داشت

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (8-84)$$

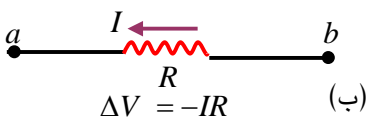
در واقع این شبیه لوله‌کشی آب است. اگر لوله‌ها نشتی نداشته باشد، مقدار آبی که به نقطه‌ی انشعاب می‌رسد، باید از آن نقطه به بیرون شارش کند؛ چون آب در هیچ جای لوله انباشته نمی‌شود. آهنگ درون‌شاری با آهنگ کل برون‌شاری از شاخه‌های انشعاب باید برابر باشد.

قانون دوم کرکھوف از پایداری انرژی نتیجه می‌شود. تجسم کنید که بار q را در یک حلقه‌ی مدار می‌گردانید. وقتی بار به نقطه‌ی آغاز خود برمی‌گردد، سامانه‌ی بار-مدار باید همان مقدار انرژی داشته باشد که بیش از گرداندن بار در مدار، داشت. بار در هنگام گذار از برخی اجزاء مدار ممکن است انرژی به دست بیاورد و در گذار از برخی اجزاء دیگر انرژی از دست بدهد. جمع انرژی‌هایی که به دست می‌آورد باید با جمع انرژی‌هایی که از دست می‌دهد برابر باشد. هر گاه بار q از یک افت پتانسیل ($-IR$) بین دو سر مقاومت می‌گذرد، یا در جهت خلاف نیروی محرکه حرکت می‌کند، انرژی پتانسیل آن کاهش می‌یابد. اگر بار از پایانه‌ی منفی باتری وارد و به پایانه‌ی مثبت آن برود، انرژی پتانسیل بار افزایش پیدا می‌کند.

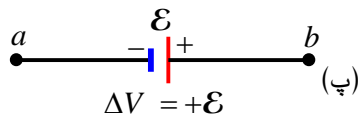
در عمل، به جای این که از تغییر انرژی پتانسیل بار سخن بگوییم، از پتانسیل الکتریکی در به کار بردن قانون دوم کرکھوف استفاده می‌کنیم. تصور کنید که در مداری از نقطه‌ی a به نقطه‌ی b می‌روید. ممکن است از یک سر مقاومت و یا باتری وارد و از سر دیگر مقاومت و پایانه‌ی دیگر باتری خارج شوید. چهار قرارداد زیر را ناگزیرید همواره رعایت کنید (می‌توانید از مجموعه‌ی قراردادهای دیگری استفاده کنید. اما همواره باید یک و فقط یک مجموعه‌ی قراردادها را به کار ببرید). در هر یک از شکل‌های زیر حرکت شما از نقطه‌ی a به نقطه‌ی b است



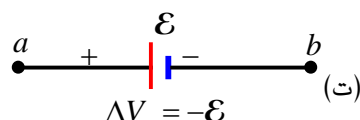
۱. چون بار الکتریکی در مقاومت از انتهای با پتانسیل بیشتر به انتهای با پتانسیل کمتر آن حرکت می‌کند، اگر جهت حرکت شما در مقاومت با جهت جریان در آن مقاومت هم‌سو باشد، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $-IR$ است (شکل ۸-۳۲ الف).



۲. اگر حرکت در مقاومت در خلاف جهت جریان در مقاومت باشد، اختلاف پتانسیل دوسر مقاومت برابر $+IR$ است (شکل ۸-۳۲ ب).

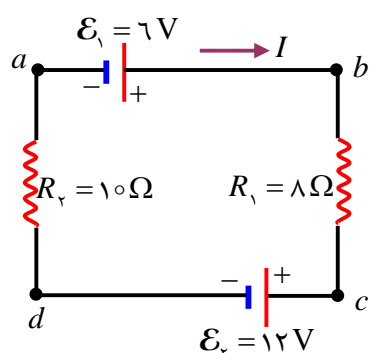


۳. اگر در جهت نیروی محرکه (از پایانه‌ی منفی وارد و از پایانه‌ی مثبت خارج شوید) از یک باتری بگذرید، اختلاف پتانسیل (با فرض این که مقاومت درونی باتری صفر است) برابر $+ε$ است. وقتی در این جهت از باتری بگذریم، نیروی محرکه‌ی باتری سبب افزایش پتانسیل الکتریکی می‌شود. (شکل ۸-۳۲ پ).



۴. اگر در خلاف جهت نیروی محرکه (از پایانه‌ی مثبت وارد و از پایانه‌ی منفی خارج شوید) از یک باتری بگذرید، اختلاف پتانسیل (اگر مقاومت درونی باتری صفر باشد) برابر $-ε$ است. وقتی در این جهت از باتری بگذریم، نیروی محرکه‌ی باتری سبب کاهش پتانسیل الکتریکی می‌شود. (شکل ۸-۳۲ ت).

شکل ۸-۳۲ قراردادهای اجزاء مدار



شکل ۸-۲۳ مدار تک حلقه

مثال ۸-۱۵ مدار تک حلقه: در مدار شکل (۸-۲۳) دو مقاومت و دو باتری وجود دارد. از مقاومت درونی باتری‌ها چشم‌پوشی کنید.

(الف): جریان مدار را حساب کنید

(ب): چه مقدار توان در هر مقاومت تلف شده است؟ توان تولیدی باتری ۱۲ ولت چقدر است؟

حل (الف): برای حل این مسئله، به قانون‌های کرکهوف نیازی نیست، با این حال از آنها استفاده می‌کنیم و کاربردشان را بیاموزیم. در مدار تک حلقه پیوندگاه وجود ندارد؛ پس، جریان در همه‌جای مدار یکسان است. فرض کنید جهت جریان ساعتگرد است. از نقطه‌ی a آغاز کنید و ساعتگرد حلقه را ببیمایید. در مسیر از a به b از پایانه‌ی منفی

باتری به پایانه‌ی مثبت آن می‌رویم. در نتیجه، اختلاف پتانسیل $+E_1$ است. در مسیر $b \rightarrow c$ از یک مقاومت می‌گذریم. جهت حرکت با جهت جریان هم‌سو است و اختلاف پتانسیل برابر $-IR_1$ است. در مسیر $c \rightarrow d$ از پایانه‌ی مثبت باتری وارد و از پایانه‌ی منفی آن خارج می‌شویم. در اینجا اختلاف پتانسیل برابر $-E_2$ است. سرانجام، در مسیر $d \rightarrow a$ مقاومت R_2 را هم‌سو با جهت جریان می‌پیماییم که به معنی اختلاف پتانسیل برابر $-IR_2$ است. با استفاده از قانون دوم کرکهوف داریم

$$\sum \Delta V = 0 \Rightarrow E_1 - IR_1 - E_2 - IR_2 = 0 \Rightarrow I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = -0,23 \text{ A} \quad (8-85)$$

علامت منفی در پاسخ بالا برای جریان نشان می‌دهد که جهت جریان برخلاف جهتی است که فرض کردیم. علت این که در مخرج کسر بالا مقاومت‌ها باهم جمع شده‌اند، این است که آنها به طور سری در مدار قرار دارند. نیروهای محرکه در صورت کسر از هم کم شده‌اند، چون قطبایی آنها متفاوت است.

(ب): توان مصرفی در مقاومت با $P = I^2 R$ حساب می‌شود. بنابراین

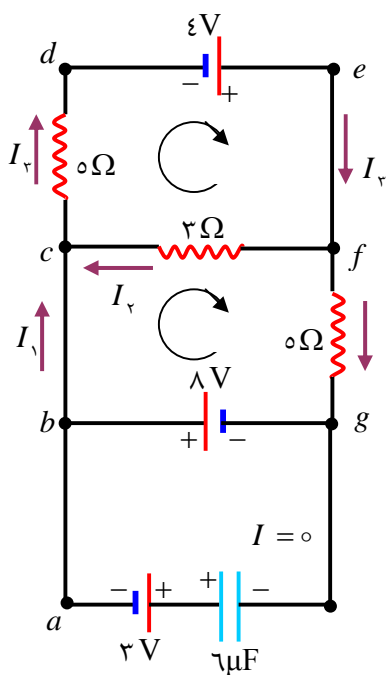
$$P_1 = I^2 R_1 = (0,23 \text{ A})^2 (8 \Omega) = 0,87 \text{ W}, \quad P_2 = I^2 R_2 = (0,23 \text{ A})^2 (10 \Omega) = 1,1 \text{ W} \quad (8-86)$$

بنابراین، توان کل که به مقاومت‌ها منتقل شده است $P_1 + P_2 = 2 \text{ W}$ است. توان باتری ۱۲ ولت برابر $P = I E_2 = 4 \text{ W}$ است. نیمی از این توان به مقاومت‌ها منتقل شده است و نیم دیگر به باتری ۶ ولتی منتقل شده است که توسط باتری ۱۲ ولتی در حال شارژ شدن است. اگر مقاومت‌های درونی باتری‌ها را هم در نظر می‌گرفتیم، بخشی از توان باتری ۱۲ ولتی در آنها از بین می‌رفت.

نکته: اگر قطبایی باتری ۱۲ ولتی وارون می‌شد، علامت E_2 در معادله‌ی (۸-۸۵) عوض می‌شد و جریان ۱A در مدار شارش پیدا می‌کرد. ♣

مثال ۸-۱۶ مدار با چند حلقه: (الف) در مدار شکل (۸-۳۴) و در شرایط پایا، جریان‌های I_1 ، I_2 و I_3 را به دست آورید. (ب): بار خازن را حساب کنید.

حل: پیش از هر چیز توجه کنید که چون خازن پر است (شرایط پایا)، جریانی از آن نمی‌گذرد. در نتیجه، در مسیر $ghab$ بین نقاط g و b جریان وجود ندارد. بنابراین، وقتی بارهای مربوط به جریان I_1 به نقطه‌ی g می‌رسند، همگی با گذشتن از باتری



شکل ۷-۳۴ مدار با چند حلقه

۸ ولتی به سوی نقطه‌ی b می‌روند. پس، $I_{gb} = I_1$ است. جریان‌ها را همانند شکل نمادگذاری کنید و قانون اول کرکھوف را در پیوندگاه c به کار ببرید. به دست می‌آید

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (8-87)$$

حالا از قانون دوم کرکھوف در حلقه‌های $defcd$ و $cfgbc$ استفاده کنید. حرکت خود را ساعتگرد برگزینید. داریم

$$defcd \quad \varepsilon V - (2\Omega)I_2 - (5\Omega)I_3 = 0 \quad (8-88)$$

$$cfgbc \quad (2\Omega)I_2 - (5\Omega)I_1 + 8V = 0 \quad (8-89)$$

از معادله‌ی (۸-۸۷) داریم $I_1 = I_3 - I_2$ ، آن را در معادله‌ی (۸-۸۹) جایگزین کنید. به دست می‌آید

$$(8\Omega)I_2 - (5\Omega)I_3 + 8V = 0 \quad (8-90)$$

اگر معادله‌ی (۸-۹۰) را از معادله‌ی (۸-۸۸) کم کنیم، I_3 حذف می‌شود و خواهیم داشت

$$I_2 = -\frac{\varepsilon V}{11\Omega} = -0,364A \quad (8-91)$$

چون I_2 منفی است، نتیجه می‌گیریم که جهت I_2 در مقاومت ۳ اهمی از c به f است.

با وجود این تفسیر از جهت جریان I_2 ، در دنباله‌ی مسئله باید از همین مقدار منفی استفاده کنیم، چون معادله‌های ما بر اساس گزینه‌ی اولیه‌ی جهت‌های نوشته شده اند.

با استفاده از $I_2 = -0,364A$ در معادله‌های (۸-۸۷) و (۸-۸۹) به دست می‌آید

$$I_1 = 1,38A \quad , \quad I_3 = 1,02A \quad (8-91)$$

(ب): می‌توانیم قانون دوم کرکھوف را در حلقه‌ی $bghab$ (یا هر حلقه‌ی دیگری که شامل خازن است) به کار ببریم و اختلاف پتانسیل دو سر خازن، ΔV_{cap} ، را حساب کنیم. ما از این اختلاف پتانسیل در معادله‌ی حلقه استفاده می‌کنیم اما از هیچ قراردادی برای علامت آن استفاده نمی‌کنیم، چون بار روی خازن فقط به اندازه‌ی اختلاف پتانسیل بستگی دارد. اگر در حلقه‌ی $bghab$ ساعتگرد حرکت کنیم خواهیم داشت

$$-8V + \Delta V_{cap} - 3V = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta V_{cap} = 11V \quad (8-92)$$

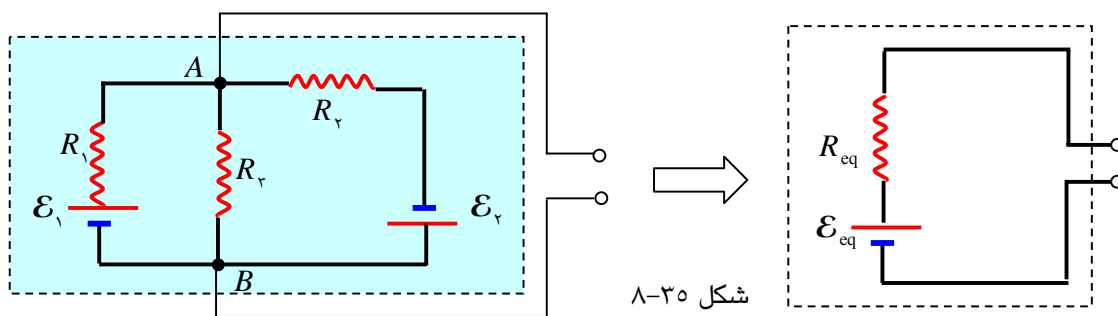
چون $Q = C\Delta V$ است، پس بار روی خازن برابر است با

$$Q = (6\mu F)(11V) = 66\mu C \quad (8-93)$$

۸-۷ قضیه‌ی تونین

فرض کنید شبکه‌ای مانند مدار شکل (۸-۳۵) بخشی از یک مدار بزرگتر است و در دو پیوندگاه به آن وصل است. فرض کنید سیم‌ها را به دو پیوندگاه A و B وصل کردیم و بقیه‌ی مدار شکل (۸-۳۵ الف) را در یک "جعبه‌ی سیاه" قرار دادیم. این دو سیم تنها پایانه‌های جعبه‌ی سیاه است که دیده می‌شوند. شکل (۸-۳۵) را نگاه کنید. جعبه‌ی سیاه با زمینه‌ی خاکستری نشان

داده شده است.) بنا به قضیه‌ی عمومی تونین*، وقتی دو پایانه‌ی جعبه‌ی سیاه به مدار دیگری متصل می‌کند، رفتارش کاملاً هم‌ارز یک چشمه‌ی ولتاژ \mathcal{E}_{eq} با مقاومت درونی R_{eq} است. این قضیه در هر شبکه‌ی هر اندازه پیچیده‌ی شامل مقاومت و منبع‌های نیروی محرکه درست است. مقدارهای R_{eq} و \mathcal{E}_{eq} را بسادگی می‌توان به دست آورد. اختلاف پتانسیل بین دو پایانه‌ی سیم‌ها در هنگامی است که چیزی در بیرون جعبه‌ی سیاه به این دو پایانه وصل نباشد. \mathcal{E}_{eq} در مثال شکل (۸-۳۵) اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_p است. برای یافتن آن باید جریان گذرنده از مقاومت R_p را حساب کنیم. این کار با استفاده از قانون‌های کرکھوف به سادگی شدنی است. R_{eq} مقاومتی است که اگر همه‌ی نیروهای محرکه‌ی درون جعبه صفر باشند، بین دو پایانه‌ی جعبه اندازه‌گیری می‌شود. در مثال ما، مقدار آن از سه مقاومت R_1 و R_2 و R_3 که موازی بسته شده اند به دست می‌آید. یعنی برابر $R_1 R_2 R_3 / (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)$ است.



(الف): جعبه‌ی سیاه و اندرونه‌ی

(ب): مدار هم‌ارز تونین برای جعبه‌ی

اگر ندانیم که در درون جعبه چه چیزی وجود دارد، چه کنیم؟ در این صورت R_{eq} و \mathcal{E}_{eq} را با دو اندازه‌گیری می‌توانیم به طور تجربی تعیین کنیم. ولتاژ مدار باز را با یک ولت‌سنج که جریان خیلی اندک از آن می‌گذرد، اندازه بگیرید. این \mathcal{E}_{eq} را به دست می‌دهد. حالا پایانه‌های جعبه را با یک آمپرسنجی که مقاومتش اندک است به هم وصل کنید. با این کار جریان مدار کوتاه I_{sc} را اندازه می‌گیرید. در نتیجه،

$$R_{eq} = \frac{\mathcal{E}_{eq}}{I_{sc}} \quad (8-94)$$

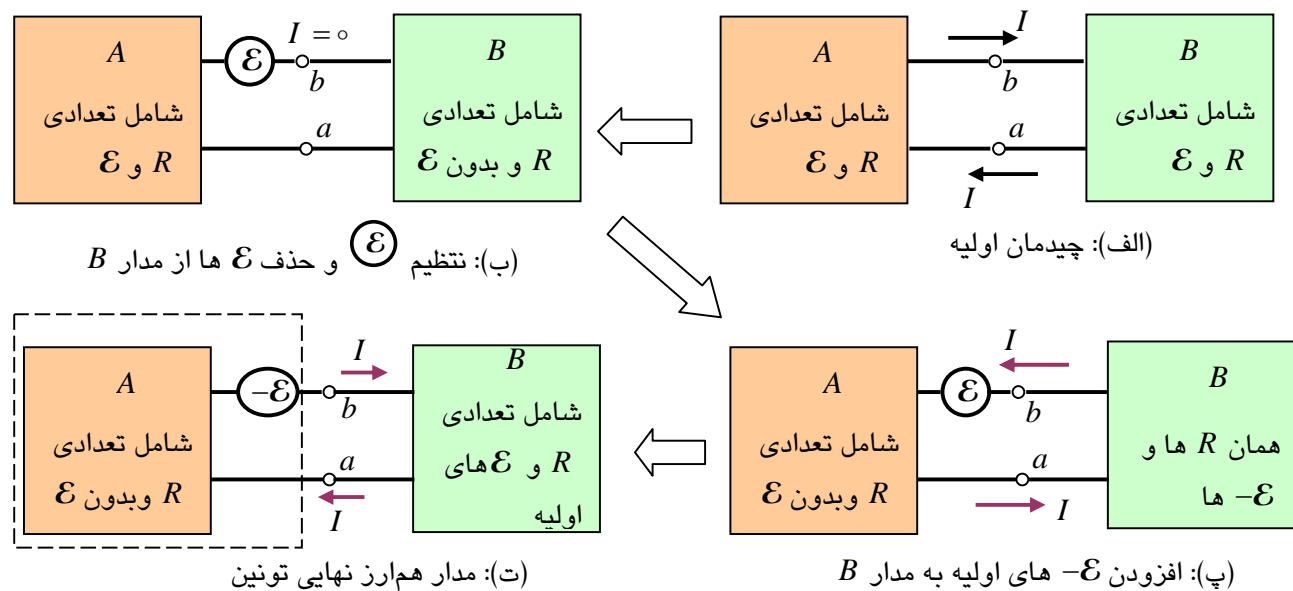
هنگام بررسی مدارهای پیچیده، بهتر است بخش دو پایانه را همانند شکل (۸-۳۵) ب) با \mathcal{E}_{eq} و R_{eq} هم‌ارز جایگزین کنیم.

* **قضیه‌ی تونین و اثبات آن:** مدار دلخواه A را در نظر بگیرید. مدار دلخواه B به طور سری به پایانه‌های خروجی مدار A وصل است. ثابت کنید تا جایی که به مدار B مربوط است، مدار A مانند یک نیروی محرکه‌ی \mathcal{E}_{eq} (که برابر است با اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های مدار A وقتی چیزی به آنها وصل نیست) و یک مقاومت R_{eq} (برابر مقاومتی که اگر نیروهای محرکه‌ی درونی مدار A همگی صفر می‌بودند، بین پایانه‌های A اندازه‌گیری می‌شد) که به طور سری بسته شده اند، رفتار می‌کند. توجه کنید که این نتیجه مستقل از جزئیات مدار B است.

اثبات: در شکل (۸-۳۶) الف) مدار کامل دیده می‌شود. جریانی را که از سیم‌های افقی می‌گذرد، I بنامید. اثبات قضیه سه گام دارد. این سه گام در شکل (۸-۳۶) ب) نشان داده شده است و در زیر آن را توضیح می‌دهیم.

*Thevenin's theorem

گام نخست این است که همه‌ی نیروهای محرکه‌ی درونی B را حذف کنیم (به طور هم‌ارز، منهای همه‌ی نیروهای محرکه را به آن بیفزاییم) و برابر شکل (۸-۳۶ ب) یک نیروی محرکه‌ی \mathcal{E} به مدار بیفزاییم و آن را تنظیم کنیم تا جریان در سیم‌های افقی صفر شود. حال که جریان صفر است و در مدار B نیروی محرکه‌ی درونی وجود ندارد، اختلاف پتانسیل بین پایه‌های a و b



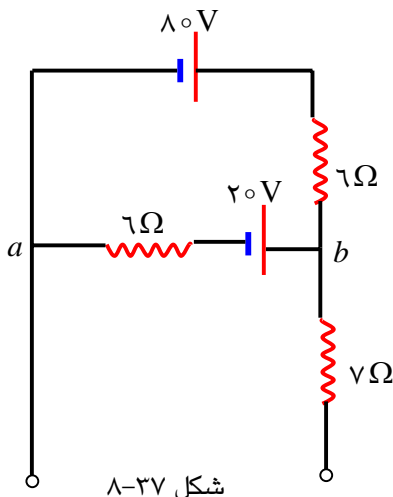
شکل ۸-۳۶ یافتن مدار تونین معادل

مدار A (بنا به تعریف) اختلاف پتانسیل مدار باز، V_A^{open} است. بنابراین، نیروی محرکه‌ی \mathcal{E} که به مدار افزودیم باید برابر $-V_A^{open}$ باشد؛ چون جریان صفر است.

گام دوم: در شکل (۸-۳۶ پ) همه‌ی چشمه‌های نیروی محرکه‌ی درونی مدار A را حذف کنید (یا به طور هم‌ارز، منهای آنها را به مدار A اضافه کنید). افزون بر این، به مدار B منهای نیروهای محرکه‌ی اولیه را اضافه کنید. حالا نیروهای محرکه‌ی درونی A صفر است و نیروهای محرکه‌ی درونی B برابر منهای نیروهای محرکه‌ی درونی اولیه‌ی آن است. در این گام، منهای نیروهای محرکه‌ی اولیه را به هر دو مدار افزودیم. اثر این کار این است که به جریان I اولیه مقدار $-I$ را افزودیم. پیش از آنکه این گام را برداریم، چون جریان صفر بود، حالا جریان $-I$ شده است. همان‌گونه که در شکل می‌بینید، اینک جهت جریان وارون شده است.

گام سوم: در این گام علامت همه‌ی نیروهای محرکه را عوض کنید (در B ، در A و نیز علامت نیروی محرکه‌ای را که به مدار افزودیم). به مداری می‌رسیم که در شکل (۸-۳۶ ت) می‌بینید. مدار B و جریان‌ها درست همان‌هایی اند که در آغاز بودند. نتیجه می‌گیریم که از دید مدار B ، مدار A با منبع نیروی محرکه‌ی $\mathcal{E}_{eq} = -V_A^{open}$ که به طور سری به R_{eq} بسته شده است، هم‌ارز است. R_{eq} با نادیده گرفتن همه‌ی چشمه‌های نیروی محرکه‌ی درونی مدار A به دست آمده است. اثبات قضیه همین است. در اثبات بالا از خطی بودن استفاده شد. بگذارید آن را روشن‌تر بگویم. می‌دانیم که اگر یک \mathcal{E} را به مداری مانند A که شامل تعداد دلخواه نیروی محرکه و مقاومت است، وصل کنیم جریان گذرنده از A باید به صورت $I = a\mathcal{E} + b$ باشد. این معنی خطی بودن است و a و b ثابت‌هایی اند که مقدارشان به ساختار درونی A بستگی دارد. خطی بودن نتیجه‌ی این واقعیت است

که همه‌ی معادله‌های حلقه خطی اند. بنابراین، وقتی معادله‌های حلقه‌ی قانون کیرکھوف را حل می‌کنیم و جریان را به دست می‌آوریم، باید شکل بالا را داشته باشند. این رابطه را می‌توان به صورت $\mathcal{E} + b/a = I/a$ بازنویسی کرد. در این شکل، نشان می‌دهد که مدار A با یک نیروی محرکه‌ی b/a و یک مقاومت I/a هم‌ارز است. بنابراین، تنها با خطی بودن، می‌دانیم که باید برای مدار یک \mathcal{E}_{eq} و یک R_{eq} یگانه وجود داشته باشد.



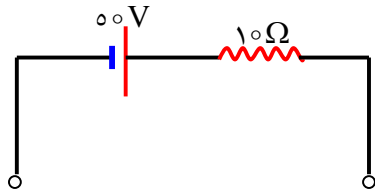
شکل ۸-۳۷

مثال ۸-۱۷ مدار هم‌ارز تونین: مدار هم‌ارز تونین را برای مدار شکل (۸-۳۷) چیست؟ اگر یک مقاومت 10Ω به پایانه‌های آن وصل بشود، چه جریانی از آن خواهد گذشت؟ حل: یافتن R_{eq} آسان است. نیروهای محرکه را نادیده بگیرید (یعنی آنها را مساوی صفر قرار دهید). چیزی که باقی می‌ماند دو مقاومت 6 اهمی موازی است که با یک مقاومت 7 اهمی به طور سری بسته شده است. مقاومت معادل دو مقاومت 6 اهمی یک مقاومت 3 اهمی است. این مقاومت 3 اهمی با مقاومت 7 اهمی سری است. بنابراین، $R_{eq} = 3\Omega + 7\Omega = 10\Omega$ است.

برای یافتن \mathcal{E}_{eq} توجه کنید که در مدار باز، از مقاومت 7 اهمی جریان نمی‌گذرد. در نتیجه، ولتاژ مدار باز با ولتاژ بین نقاط a و b یکسان است. فقط در حلقه جریان وجود دارد. بنا به قانون کیرکھوف داریم (جهت جریان را ساعتگرد فرض کنید)

$$10V - (6\Omega)I - 20V - (6\Omega)I = 0 \Rightarrow I = 5A \quad (8-95)$$

اندازه‌ی افت پتانسیل بین a و b برابر $V_b - V_a = 20V + (6\Omega)(5A) = 50V$ است. (می‌توانستیم از شاخه‌ی بالایی حلقه هم این مقدار را به دست بیاوریم: $(-6\Omega)(5A) + 10V = 50V$) بنابراین، $\mathcal{E}_{eq} = 50V$ است. بنابراین، مدار هم‌ارز تونین همانند شکل (۸-۳۸) است.



شکل ۸-۳۸ مدار هم‌ارز تونین

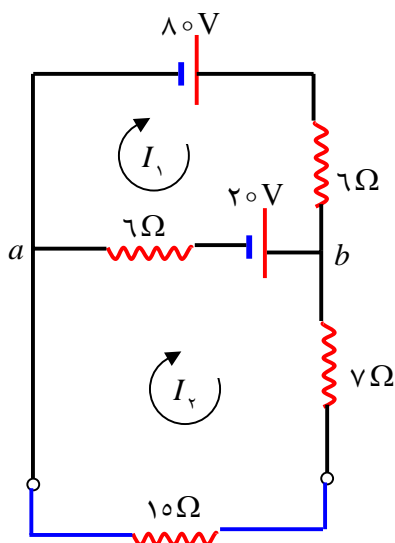
اگر یک مقاومت 10 اهمی را به پایانه‌های مدار اصلی وصل کنیم، می‌توانیم از مدار هم‌ارز تونین استفاده کنیم و جریان گذرنده از مقاومت 10 اهمی را به دست آوریم (شکل ۸-۳۹). از مدار شکل (۸-۳۹) پیدا است که جریان گذرنده از مقاومت 10 اهمی عبارت است از

$$\frac{50V}{(10\Omega + 10\Omega)} = 2A \quad (8-96)$$

اگر باور نمی‌کنید که وقتی پایانه‌های مدار اصلی را به مقاومت 10 اهمی وصل می‌کنید، همان جریان از مقاومت 10 اهمی می‌گذرد که از مدار هم‌ارز تونین به دست آوردید، می‌توانید درستی پاسختان را با استفاده از قانون‌های کیرکھوف در مدار اصلی بیازمایید. بگذارید همین کار را در اینجا انجام دهیم. اگر یک مقاومت 10 اهمی به پایانه‌های مدار اصلی وصل کنید، مدارتان یک مدار دو حلقه‌ای، همانند مداری شکل (۸-۴۰) خواهد شد. فرض کنید چرخش جریان‌ها در دو حلقه همانند شکل (۸-۴۰) است. از این شکل داریم

$$10V - (6\Omega)I_1 - 20V - (6\Omega)(I_1 - I_2) = 0 \quad (8-97)$$

$$20V - (7\Omega)I_2 - (10\Omega)I_2 - (6\Omega)(I_1 - I_2) = 0 \quad (8-98)$$



شکل ۸-۴۰

از حل این دو معادله خواهیم داشت $I_2 = 2A$ که همان پاسخی است که با مدار هم‌ارز تونین به دست آمد. همچنین $I_1 = 6A$ است. این جریان در مدار اولیه هم وجود داشت، اما در مدار هم‌ارز تونین بی‌معنی است. توجه کنید که ولتاژ بین پایانه‌ها در مدار بسته $30V = (2A)(15\Omega)$ است. همچنین افت اختلاف پتانسیل از b به a برابر $44V$ است (هر سه مسیر ممکن بین a و b همین مقدار را به دست می‌دهد. آن را بیازمایید). هیچ یک از این دو پتانسیل $44V$ و $30V$ (که به گزینه‌ی مقاومت بیرونی بستگی دارد) با پتانسیل مدار باز $50V$ (که به گزینه‌ی مقاومت بیرونی بستگی ندارد) برابر نیست.

۸-۷ مدار RC

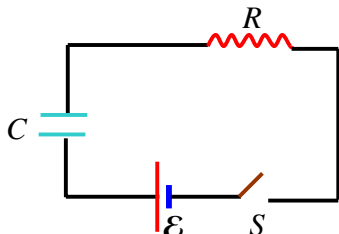
در مدارهایی که تاکنون بررسی کردیم، جریان مستقیم در مدار مقدار ثابتی بود. مدارهای جریان مستقیم که در آنها افزون بر مقاومت و باتری، خازن هم وجود

دارد، اگر چه جهت جریان عوض نمی‌شود، اما مقدار آن ممکن است با زمان تغییر کند. فرض کنید خازنی را باردار کردیم و در پتانسیل V_0 قرار دارد. اگر آن را به مداری با مقاومت R وصل کنیم، بار خازن خالی می‌شود و پتانسیل دو سر خازن به صفر میل می‌کند و این به نوبه‌ی خود جریان را در مدار کاهش می‌دهد. همچنین، اگر یک خازن بی‌بار را در مدار قرار دهیم، شارش بار آغاز می‌شود و در مدار جریان به وجود می‌آید و خازن باردار می‌شود. در مدت زمانی که بار بر روی خازن انباشته می‌شود، بارها از شکاف بین صفحه‌های خازن نمی‌گذرند، چون شکاف بین صفحه‌ها همانند یک مدار باز است. بارها بین هر صفحه و سیم‌های رابط آن، بر اثر میدان الکتریکی که باتری در سیم‌ها فراهم می‌کند، انتقال پیدا می‌کند تا این که خازن کاملاً باردار بشود. با باردار شدن خازن، اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن افزایش پیدا می‌کند. بیشینه مقدار بار در صفحه‌های خازن به ولتاژ باتری بستگی دارد. وقتی بار خازن به بیشینه مقدار خود رسید، جریان در مدار صفر می‌شود، چون اختلاف پتانسیل دو سر خازن با اختلاف پتانسیل باتری برابر می‌شود.

مدارهایی که شامل مقاومت و خازن اند، مدار RC نامیده می‌شوند. در این بخش به بررسی این گونه مدارها می‌پردازیم.

نکته: هر جا که در بخش‌ها و فصل‌های پیشین در باره‌ی خازن سخن گفتیم، فرض کردیم وضعیت در حالت پایا است. یعنی در شاخه‌ای از مدار که شامل خازن بود، جریان وجود نداشت. در این بخش وضعیت‌هایی را بررسی می‌کنیم که سامانه هنوز به حالت پایا نرسیده است. در این حالت‌ها بارها حرکت می‌کنند و در سیم‌هایی که به خازن‌ها وصل اند جریان وجود دارد. ♣

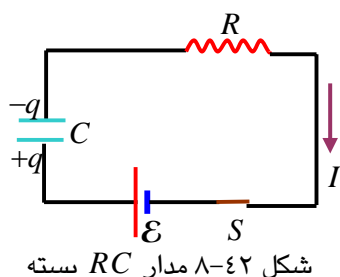
• باردار کردن خازن: نخست مدار ساده‌ی شکل (۸-۴۱) را در نظر بگیرید که



شکل ۸-۴۱ مدار RC ساده

از یک باتری با نیروی محرکه‌ی الکتریکی \mathcal{E} ، از یک مقاومت R ، یک خازن C و یک کلید S تشکیل شده است. فرض کنید خازن در آغاز خالی است. در زمان $t = 0$ کلید مدار را می‌بندیم. روشن است که خازن باردار خواهد شد و جریان در مدار شارش خواهد کرد. در شکل (۸-۴۲) این وضعیت نشان داده شده است.

برای بررسی این مدار قانون دوم کرکھوف را به کار ببرید. فرض کنید مدار را ساعتگرد می‌پیمایید. اگر بار لحظه‌ای خازن q باشد، داریم



$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR = 0 \quad (8-99)$$

در اینجا برای \mathcal{E} و R قراردادهایی را به کار بردیم که در بخش ۶-۸ پذیرفتیم. در مورد خازن، توجه کنید که ما از صفحه‌ی با بار مثبت به سوی صفحه‌ی با بار منفی می‌رویم. این بدان معنی است که پتانسیل کاهش می‌یابد. به این دلیل برای اختلاف پتانسیل دو سر خازن از علامت منفی استفاده کردیم. همچنین توجه کنید که بار q خازن و نیز جریان I مقدارهای لحظه‌ای اند و با زمان تغییر می‌کنند (تا با پر شدن خازن به حالت پایا برسند).

از معادله‌ی (۸-۹۹) می‌توان جریان اولیه‌ی مدار و بیشینه بار خازن را به دست آورد. در لحظه‌ای که کلید بسته شد ($t = 0$) بار موجود در خازن صفر بود. بنابراین، معادله‌ی (۸-۹۹) نشان می‌دهد که به ازای $q = 0$ جریان اولیه

$$I_0 = \mathcal{E}/R \quad (\text{جریان در زمان } t = 0) \quad (8-100)$$

است. در این هنگام اختلاف پتانسیل دو سر باتری به تقریب با اخلاف پتانسیل دو سر خازن یکی است. پس از گذشت زمان درازی، بار خازن به مقدار بیشینه‌ی خود، Q ، می‌رسد و خازن پر می‌شود و جریان در مدار به صفر فرو افت می‌کند. حالا اختلاف پتانسیل دو سر باتری به خازن داده شده است. اگر این شرایط را در معادله‌ی (۸-۹۹) جایگزین کنیم (یعنی $I \rightarrow 0$ و $Q \rightarrow q$)، خواهیم داشت

$$Q = C\mathcal{E} \quad (\text{بار بیشینه}) \quad (8-101)$$

برای این که وابستگی زمانی بار و جریان را بیابیم، باید معادله‌ی (۸-۹۹) را حل کنیم. اما این فقط یک معادله با دو متغیر q و I است. بنابراین، باید یکی از متغیرها را حذف کنیم. این کار به سادگی شدنی است، کافی است از $I \equiv dq/dt$ استفاده کنیم. در این صورت معادله‌ی (۸-۹۹) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - \frac{q}{RC} = \frac{dq}{dt} \quad (8-102)$$

این یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول است. از حل آن q و وابستگی آن به زمان به دست می‌آید. معادله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{dq}{dt} = \frac{C\mathcal{E} - q}{RC} \Rightarrow \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC} dt \quad (8-103)$$

اگر از دو طرف این معادله انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt' \Rightarrow \ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC} \quad (8-104)$$

یا خواهیم داشت

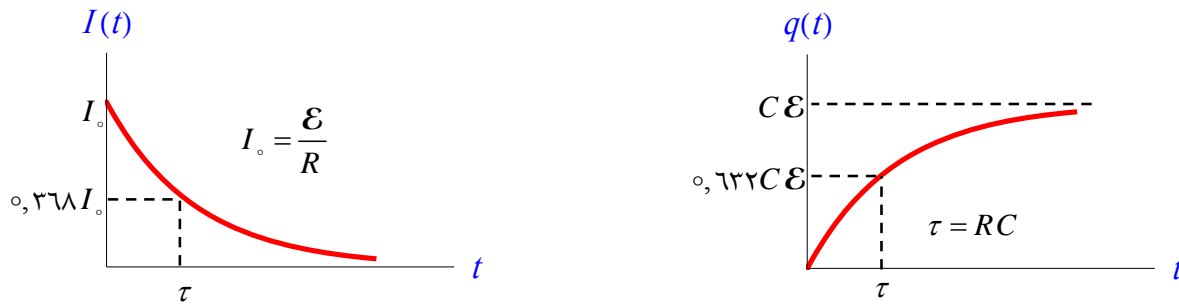
$$q(t) - C\mathcal{E} = -C\mathcal{E}e^{-t/RC} \Rightarrow q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q(1 - e^{-t/RC}) \quad (8-105)$$

اگر از این معادله نسبت به زمان مشتق بگیریم، رابطه‌ای برای جریان الکتریکی می‌توانیم به دست آوریم

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \quad (8-106)$$

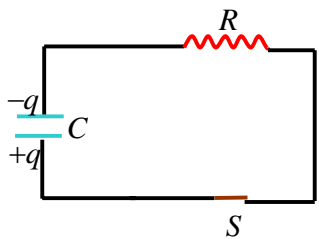
نمودارهای بار خازن و جریان مدار برحسب زمان در شکل (۸-۴۳) نشان داده شده‌اند. توجه کنید که در زمان $t = 0$ بار برابر

صفر است و با $t \rightarrow \infty$ به بیشینه مقدار خود، $Q = C\mathcal{E}$ میل می‌کند. جریان در زمان $t = 0$ بیشینه مقدار خود $I_0 = \mathcal{E}/R$ را دارد و با $t \rightarrow \infty$ به طور نمایی فروافت می‌کند و به صفر می‌گراید. کمیت RC که در معادله‌های (۸-۱۰۵) و (۸-۱۰۶) ظاهر شده است، ثابت زمانی، τ ، مدار نامیده می‌شود. این کمیت بعد زمان دارد و نماینده‌ی بازه‌ی زمانی است که در آن بازه جریان به $1/e$ مقدار اولیه‌ی I_0 کاهش می‌یابد. به بیان دیگر، در بازه‌ی زمان τ جریان برابر $I_0 e^{-1} = 0,368 I_0$ می‌شود. همچنین در زمان τ بار خازن از صفر به مقدار $C\mathcal{E}(1 - e^{-1}) = 0,632 C\mathcal{E}$ افزایش می‌یابد



شکل ۸-۴۳ (راست): رفتار بار خازن برحسب زمان. (چپ): رفتار جریان مدار برحسب زمان

خالی کردن خازن: حالا مدار شکل (۸-۴۴) را در نظر بگیرید که شامل خازنی با بار اولیه‌ی Q ، یک مقاومت و یک کلید است هنگامی که کلید باز است، اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن Q/C و بین دو سر



شکل ۸-۴۴ مدار RC

مقاومت صفر است (چون $I = 0$ است). وقتی که در زمان $t = 0$ کلید مدار بسته می‌شود، بار خازن شروع به خالی شدن می‌کند و جریان در مقاومت شارش می‌یابد. در زمان t پس از بستن کلید، جریان در مدار برابر I و بار خازن q می‌شود. مدار شکل (۸-۴۴) همان مدار شکل (۸-۴۲) است. تفاوت آنها در این است که حالا باتری وجود ندارد. با استفاده از قانون دوم کرکھوف داریم

$$-\frac{q}{C} - IR = 0 \quad (8-107)$$

اگر از جایگزینی $I = dq/dt$ استفاده کنیم، رابطه‌ی بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$-R \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q \quad (8-108)$$

با استفاده از این واقعیت که در زمان $t = 0$ ، $q = Q$ است، می‌توانیم از دو طرف رابطه‌ی بالا انتگرال بگیریم. به دست می‌آید:

$$\int_Q^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt' \Rightarrow \ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow q(t) = Qe^{-t/RC} \quad (8-109)$$

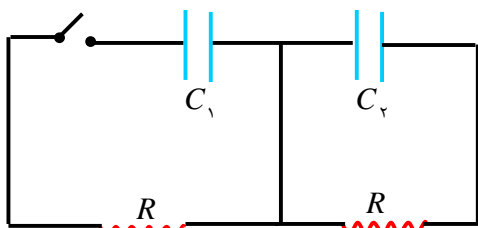
با مشتق‌گیری نسبت به زمان از این رابطه، جریان را برحسب تابعی از زمان به دست می‌دهد:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Qe^{-t/RC}) = -\frac{Q}{RC} e^{-t/RC} \quad (8-110)$$

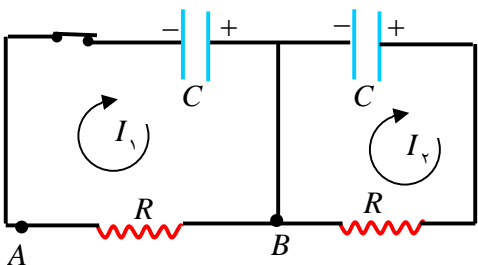
که در آن $I_0 = Q/RC$ جریان اولیه (در زمان $t = 0$) درست پس از بستن کلید است. علامت منفی درست نشان می‌دهد که با خالی شدن خازن، جریان در مدار کاهش می‌یابد (همچنین می‌بینیم که جهت جریان در مدار خالی شدن برخلاف جهت جریان در مدار باردار کردن خازن است). توجه کنید که هر دوی بار روی خازن و جریان با زمان به طور نمایی کاهش پیدا

می‌کنند. آهنگ این کاهش با ثابت زمانی مدار، $\tau = RC$ ، شناسایی می‌شود.

مثال ۱۸-۸ خازن‌های پر و خالی: در مدار شکل (۸-۴۵) بار اولیه‌ی خازن C_1 برابر $Q_1(t=0) = Q_0$ و بار اولیه‌ی خازن C_2



شکل ۸-۴۵ خازن‌های پر و خالی



شکل ۸-۴۶ خازن‌های پر و خالی

برابر $Q_2(t=0) = 0$ است. کلید در زمان $t = 0$ بسته می‌شود. بارهای $Q_i(t)$ و $Q_2(t)$ را به دست آورید و انرژی تلف شده در مقاومت سمت چپ را حساب کنید. فرض کنید $C_1 = C_2 = C$ است.

حل: فرض کنید جریان در حلقه‌ها همانند شکل (۸-۴۶) است. هم‌چنین صفحه‌های مثبت و منفی خازن‌ها را نشان داده‌ایم. حالا دو معادله برای دو حلقه‌ی مدار بنویسید. توجه کنید که تنها عضوهای مدار که می‌توانند نیروی محرکه‌ی

الکتریکی فراهم کند، خازن‌ها هستند. پتانسیل هر خازن $V_i = Q_i(t)/C_i$ است. داریم

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_1}{C} = I_1 R \quad (\text{حلقه‌ی سمت چپ}) \quad (8-111)$$

$$\frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_2}{C} = I_2 R \quad (\text{حلقه‌ی سمت چپ}) \quad (8-112)$$

به یاد بیاورید که $I = -dQ/dt$ است و چون هر دو معادله یکسان اند، کافی

فقط یکی از آنها را حل کنیم. با جداسازی متغیرها داریم

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C} = -R \frac{dQ}{dt} &\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} dt \Rightarrow -\int_0^t \frac{dt}{RC} = \int_{Q(0)}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} \Rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln \left[\frac{Q(t)}{Q(0)} \right] \\ &\Rightarrow Q_i(t) = Q_i(0) e^{-t/RC} \end{aligned} \quad (8-113)$$

حالا با جایگزینی مقدارهای اولیه به دست می‌آید

$$Q_1(t) = Q_0 e^{-t/RC}, \quad Q_2(t) = 0 \quad (8-114)$$

چون $Q_2(t)$ برای همه‌ی زمان‌ها صفر است، هرگز باری بر روی خازن سمت راست وجود نخواهد داشت. در نتیجه، جریان هم در حلقه‌ی سمت راست صفر است: $I_2 = 0$. بگذارید این وضعیت را توضیح بدهم: جریان در حلقه‌ی چپ بر اثر نشت بار از صفحه‌ی مثبت خازن C_1 به وجود می‌آید. این جریان باید به صفحه‌ی منفی خازن C_1 برسد. برای رسیدن به صفحه‌ی منفی C_1 مسیری را برمی‌گزیند که کم‌ترین مقاومت را دارد. در مدار ما مسیر با کم‌ترین مقاومت حلقه‌ی سمت چپ است. چون $I_2 = 0$ است، اساساً می‌توانیم حلقه‌ی سمت راست را نادیده بگیریم. در این صورت تابع نمایی کاهش ما معنی پیدا می‌کند. توجه کنید که سریع‌ترین فروافت با R و C کوچک‌تر همراه است.

محاسبه‌ی اتلاف انرژی را به دو روش انجام می‌دهیم.

حل ۱: پس از گذشت زمان درازی بار خازن C_1 کاملاً خالی خواهد شد و در مدار هیچ انرژی ذخیره نخواهد شد. همه‌ی انرژی اولیه که در خازن انباشته شده بود بایستی در مقاومت سمت چپ تلف شده باشد. بنابراین، با توجه به پایستگی انرژی، مقدار

انرژی که بین زمان‌های $t = 0$ و $t = \infty$ در مقاومت سمت چپ تلف شده است، همان مقداری است که نخست در خازن C_1 وجود داشت و برابر $U_i = Q_0^2/2C$ است.

حل ۲: می‌توانیم توانی را که در مقاومت تولید شده است به‌دست آوریم و سپس بر روی آن انتگرال بگیریم و انرژی اتلافی را حساب کنیم:

$$P = I_v R = I_v V_{AB} = \frac{V_{AB}^2}{R} \quad (۸-۱۱۵)$$

که در آن V_{AB} اختلاف پتانسیل بین نقطه‌ی A و B در شکل (۸-۴۶) یا اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت است. با استفاده از $I_v = -dQ_v/dt$ و معادله‌ی (۸-۱۱۴) داریم

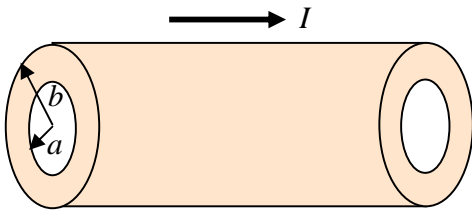
$$I_v = -\frac{dQ_v}{dt} = -\frac{d}{dt}(Q_0 e^{-t/RC}) = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} \Rightarrow P = I_v R = \frac{Q_0^2}{RC^2} e^{-2t/RC} \quad (۸-۱۱۶)$$

$$P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow W = \int dW = \int P dt = \int_0^{\infty} \frac{Q_0^2}{RC^2} e^{-2t/RC} dt \quad (۸-۱۱۷)$$

$$\Rightarrow W = -\frac{Q_0^2}{2C} e^{-2t/RC} \Bigg|_0^{\infty} = \frac{Q_0^2}{2C} \quad (۸-۱۱۸)$$

که همان پاسخ حل ۱ است.

مسئله‌ها



شکل ۸-۴۷ جریان در پوسته‌ی استوانه‌ای

۸-۱ پوسته‌ی استوانه‌ای کلفتی از یک رسانا را برابر شکل (۸-۴۷) در نظر بگیرید. شعاع درونی پوسته a و شعاع بیرونی آن b است. جریان I به طور نایکنواخت در سطح قاعده‌ی پوسته توزیع شده است. چگالی جریان با فاصله از سطح بیرونی پوسته به طور نمایی $J_0 e^{-(r^2-b^2)/\delta^2}$ کاهش می‌یابد. ثابت δ "ژرفای پوست" نام دارد و بسیار کوچک‌تر از ضخامت $(b-a)$ پوسته است. ثابت J_0 را بیابید.

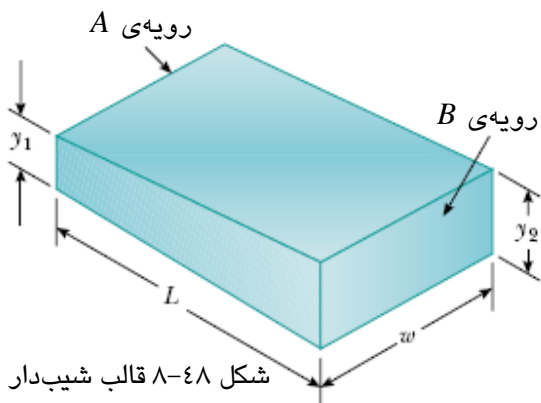
۸-۲ میله‌ی گرم شیشه‌ای: دو انتهای میله‌ی شیشه‌ای به طول $L = 2 \text{ cm}$ و قطر $d = 0.5 \text{ cm}$ با ماده‌ی رسانایی با رسانش بینهایت اندود شده است. این میله بخشی از یک مدار است. میله‌ی شیشه‌ای را با مشعلی گرم می‌کنیم تا به اندازه‌ی از خود جریان الکتریکی عبور دهد که لامپی روشن شود. رسانایی میله‌ی گرم با فاصله‌ی x از وسط آن به صورت $\sigma(x) = \sigma_0 L^x/x^x$ تغییر می‌کند و $\sigma_0 = 4 \times 10^{-2} (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ است.

(الف): مقاومت میله را حساب کنید. پاسخ را به طور نمادی بنویسید و مقدار عددی آن را تعیین کنید.

(ب): اگر اختلاف پتانسیل ΔV بین دو انتهای میله برقرار شود، چگالی جریان $\mathbf{J}(x)$ را بیابید. میدان الکتریکی $\mathbf{E}(x)$ حالت مانا را حساب کنید.

۸-۳ رابطه‌ی بین ظرفیت و مقاومت خازن: رسانندگی ماده‌ی دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن تخت معمولاً غیر صفر σ است. فرض کنید مساحت هر صفحه‌ی خازن A و فاصله‌ی بین آن‌ها d است. ثابت دی‌الکتریک ماده‌ی بین صفحه‌ها را κ بنامید. نشان دهید که بین مقاومت R دی‌الکتریک و ظرفیت C خازن رابطه‌ی $RC = \kappa \epsilon_0 / \sigma$ وجود دارد.

۸-۴ جسم شیب‌دار: از ماده‌ای با مقاومت ویژه‌ی ρ قالب شیب‌داری برابر شکل (۸-۴۸) ساختیم. ارتفاع یک انتهای آن y_1 و انتهای دیگری y_2 است. طول و پهنای این قالب به ترتیب، L و w است. مقاومت بین رویه‌های A و B آن را بیابید. پاسخ‌تان باید برحسب کمیت‌های داده شده‌ی مسئله باشد.



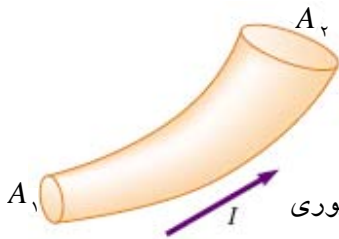
شکل ۸-۴۸ قالب شیب‌دار

۸-۵ سیم راست: سیم راستی به طول L و به قطر d روی محور x قرار دارد. سیم از ماده‌ای ساخته شده است که از قانون اهم پیروی می‌کند. مقاومت ویژه‌ی سیم ρ است. یک انتهای سیم که در $x = 0$ است، در پتانسیل V است. انتهای دیگر آن در پتانسیل صفر

است. کمیت‌های زیر را برحسب L, d, ρ, V و ثابت‌های فیزیکی به دست آورید:

- (الف): میدان الکتریکی در سیم.
- (ب): مقاومت سیم.
- (پ): جریان الکتریکی در سیم.
- (ت): چگالی جریان در سیم.
- (ج): نشان دهید که $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$ است.

۸-۶ رسانای شنیپوری: شکل (۸-۴۹) بخشی از یک رسانای با قطر متغیر را نشان می‌دهد. جریان I از رسانا می‌گذرد. شعاع مقطع کوچک A_1 برابر a است.



شکل ۸-۴۹ رسانای شیپوری

(الف): چگالی جریان گذرنده از مقطع A_1 را حساب کنید.

(ب): چگالی جریان گذرنده از مقطع A_2 اندازه گیری شده است و برابر یک چهارم مقداری است که از مقطع A_1 می گذرد، شعاع b را حساب کنید.

۸-۷ یک رابطه‌ی واقعی تر: وقتی یک سیم راست را گرم کنید،

بنا به رابطه‌ی (۸-۳۹) مقاومت آن با $R = R_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$ داده می شود که در آن α ضریب مقاومت گرمایی است و $R_0 = \rho_0 l_0 / A_0$ است

(الف): رابطه‌ی واقعی تر وقتی به دست می آید که علاوه بر تغییر طول سیم، تغییر سطح مقطع آن را هم در نظر بگیریم. نشان دهید که این رابطه به صورت زیر است:

$$R = \frac{R_0 [1 + \alpha(T - T_0)] [1 + \beta(T - T_0)]}{[1 + \gamma\beta(T - T_0)]} \quad (8-64)$$

که در آن β ضریب انبساط طولی است.

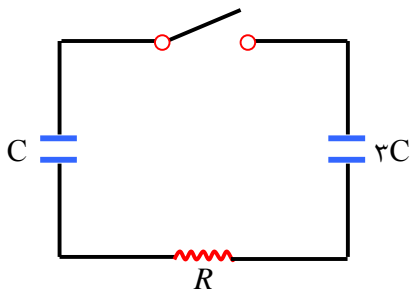
(ب): دو نتیجه را برای سیم مسی به طول ۲m و شعاع ۰,۱۰۰mm که از دمای $20^\circ C$ به دمای $100^\circ C$ گرم می شود، مقایسه کنید. ضریب انبساط طولی مس $\beta = 17,0 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$ است.

۸-۸ مقاومت کروی: فضای بین دو پوسته‌ی کروی از ماده‌ای با مقاومت ویژه‌ی ρ انباشته شده است. شعاع درونی این ماده r_1 و شعاع بیرونی آن r_2 است ($r_2 \gg r_1$). مقاومت بین پوسته‌ها را حساب کنید.

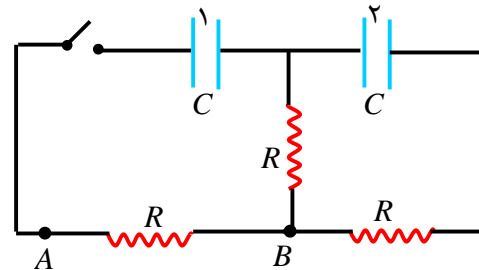
۸-۹ مکعب مقاومتی: مکعبی را در نظر بگیرید که هر لبه‌اش یک مقاومت R_0 دارد. در هر گوشه‌ی مکعب یک انتهای مقاومت‌ها به هم لحیم شده اند. مقاومت معادل را در هر یک از سه حالت زیر حساب کنید (الف): مقاومت معادل بین دو گوشه‌ای که در دو انتهای قطر مکعب اند.

(ب): مقاومت معادل بین دو گوشه‌ی یک رویه‌ی مکعب که در دو انتهای قطر آن رویه اند
(پ): مقاومت معادل بین دو گوشه‌ی همسایه

۸-۱۰ بار خازن‌ها: در مدار شکل (۸-۵۰) خازن ۱ و خازن ۲ را با بارهای اولیه‌ی $Q_1(t=0) = Q_0$ و خازن ۲ با بار اولیه‌ی $Q_2(t=0) = 0$ در مدار قرار می دهیم. در زمان $t = 0$ کلید مدار بسته می شود. $Q_1(t), Q_2(t)$ را حساب کنید.



شکل ۸-۵۱ دو خازن و مقاومت



شکل ۸-۵۰ خازن‌های پر و خالی

۸-۱۱ مدار با خازن و مقاومت: مدار شکل (۸-۵۱) شامل خازنی با ظرفیت $3C$ و یک مقاومت است. کلید مدار را باز نگه می داریم و خازن دیگری با ظرفیت C را که بار Q بر روی آن وجود دارد، در مدار قرار می دهیم و سپس کلید را می بندیم.

(الف): اختلاف پتانسیل نهایی بین صفحه‌های خازن را برحسب Q و C بیابید.

(ب): بار هر یک از خازن‌ها را بیابید.

(پ): انرژی نهایی که در هر یک از خازن‌ها انباشته شده است.

(ت): انرژی درونی که در مقاومت ظاهر می‌شود، چقدر است؟

More problems to be added