۷- میدان‌های الکتروستاتیک در ماده

۷-۱ دی‌الکتریک‌ها

بررسی ما تاکنون از مسئله‌های الکتروستاتیک مانند میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی، انرژی و $\cdots$ به محیط‌هایی محدود بود که در آن ماده وجود نداشت (به جز استفاده از رساناها برای تثبیت سطوح هم‌پتانسیل). ثابت گذردهی فضای تهی، ε_0، با حضور خود در همه‌ی رابطه‌ها، همیشه یادآور سرشت محیط بود. در این فصل می‌خواهیم اثر میدان‌های الکتروستاتیکی را بر ماده و واکنش ماده در برابر میدان‌ها را بررسی کنیم.

ماده گونه‌های مختلف دارد: به صورت مایع، گاز، جامد یا پلاسما در طبیعت وجود دارد. هر یک از این حالت ها هم انواع متفاوت دارد. شیشه، پلاستیک، چوب ... انواع مختلف ماده‌ی جامد نارسانا با ویژگی‌های مخصوص به خود است. آب و انواع روغن‌ها گونه‌هایی از مایع اند.

وقتی مواد مختلف در میدان الکتروستاتیکی قرار می‌گیرند، نسبت به میدان واکنش نشان می‌دهند. رفتار مواد مختلف در میدان الکتریکی متفاوت است. با وجود این، بیشتر موادی که روزانه با آن‌ها سروکار داریم به یکی از دو گروه **رسانا** و **نارسانا** (یا **دی‌الکتریک**) تعلق دارند. دی‌الکتریک واژه‌ی یونانی است و به موادی گفته می‌شود که می‌توان در درون آنها، بدون ایجاد جریان چشمگیری، میدان الکتریکی تولید کرد.

در فصل ٤، وقتی که در باره‌ی رساناها سخن گفتیم، تعریفی از این دو گروه آوردیم و دیدیم که چگونه آنها را دسته‌بندی می‌کنیم. رساناها آن دسته از مواد اند که هر اتم یا مولکول آن یک یا دو الکترون آزاد به محیط می‌دهد. در نتیجه، بارهای "بسیار زیادی" در این مواد وجود دارند که در درون ماده‌ی رسانا آزادانه حرکت می‌کنند. به بیان دیگر این الکترون ها به هیچ اتم یا مولکول خاصی در رسانا وابسته نیستند.

برعکس، در مواد دی‌الکتریک هر بار الکتریکی به یک اتم یا مولکول خاصی وابسته است. انگار که در دام اتم یا مولکول افتاده است و آزادی چندانی برای جابه‌جایی ندارد. حداکثر جابه‌جایی بار در مواد دی‌الکتریک، حرکتی اندک در فضای اتم یا مولکول خودش است. در مقایسه با آزادی حرکت بارها در رسانا، این جابه‌جایی جزیی به تنهایی چندان مهم نیست؛ اما اثرهای دسته جمعی آن‌ها رفتار سرشتی دی‌الکتریک را تعیین می‌کند.

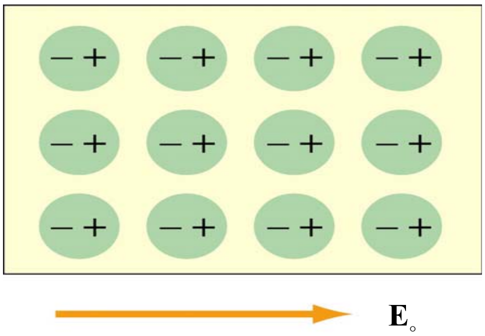
در حدود سال ۱۷۷۰ کاوندیش در آزمایشی دریافت که اگر فضای بین صفحه‌های خازن تخت کاملا با ماده‌ی نا رسانا، مانند شیشه یامقوا، انباشته شود ظرفیت C خازن با ضریب $k > ۱$ افزایش می‌یابد. ضریب k مستقل از شکل و ابعاد خازن است و **ثابت دی‌الکتریک** نامیده می‌شود. فاراده این آزمایش را مستقل از کاوندیش در سال ۱۸۳۷ تکرار کرد و به همان نتیجه رسید.

برای این که رفتار دی‌الکتریک را بفهمیم، باید ساختار اتمی ماده را بیاموزیم. اگرچه ماده‌ی کپه‌ای از نظر بارالکتریکی بی بار است، اما با بررسی جزییات آن دیده می‌شود که از اتم‌های با بارهای مثبت و منفی مساوی ساخته شده است.

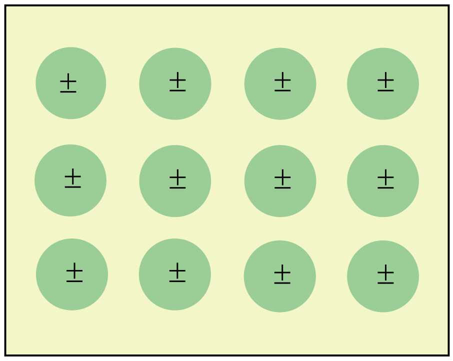
اگر یک اتم یا مولکولی در میدان الکتریکی خارجی قرار گیرد، آرایش بار آن تغییر می‌کند. میدان الکتریکی خارجی، بارهای مثبت و منفی یک اتم را نسبت به هم اندکی جابه‌جا می‌کند. این جابه‌جایی بارها، ماده را **قطبیده**[*] می‌کند. ثابت دی‌الکتریک معیاری برای قطبش ماده‌ی دی‌الکتریک است. کمیتی که قطبش ماده را مستقیم به میدان الکتریکی خارجی مربوط می‌کند، **پذیرفتاری الکتریکی**[†]، χ_e ، ماده است.

[*] polarized
[†] electric susceptibility

برای این که قطبش ماده را بفهمید، مدل ساده‌ای برای اتم تصور کنید که در آن، مرکز بارهای مثبت و مرکز بارهای منفی، در نبود میدان الکتریکی خارجی، برهم منطبق اند (شکل ۱-۷). اگر این اتم یا مولکول در میدان الکتریکی خارجی $\mathbf{E}_{\circ}$ قرار گیرد، مرکز بارهای مثبت در جهت میدان و مرکز بارهای منفی در خلاف جهت میدان $\mathbf{E}_{\circ}$ اندکی جابه‌جا می‌شوند و به‌صورتی در می‌آیند که درشکل (۲-۷) می‌بینید. جدایی مرکز بارهای مثبت و منفی یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی $\mathbf{p}$ به اتم القاء



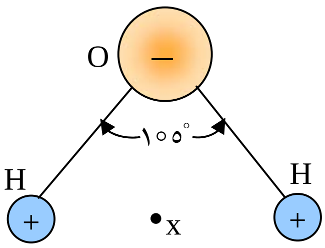
شکل ۲-۷ اتمهای دی‌الکتریک در میدان الکتریکی $\mathbf{E}_{\circ}$



شکل ۱-۷ اتمهای دی‌الکتریک ناقطبیده در نبود میدان الکتریکی خارجی

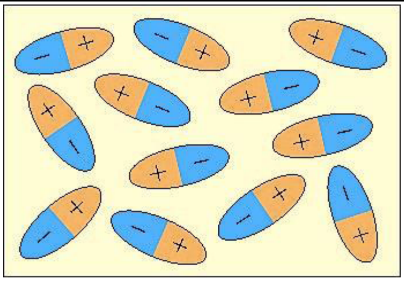
می‌کند.

در برخی مواد، مرکز بارهای مثبت و منفی برهم منطبق نیستند و در نتیجه، مولکول‌های این مواد به طور سرشتی گشتاور دوقطبی دایمی دارند. یک نمونه‌ی آشنا مولکول آب است. هندسه‌ی مولکول آب در شکل (۳-۷) نشان داده شده است، با مراجعه به این شکل می‌بینیم که پیوند بین اتم اکسیژن و اتمهای هیدروژن زاویه‌ی ۱۰۵ درجه می‌سازد. مرکز بارهای منفی، در اتم اکسیژن است و مرکز بارهای مثبت در نقطه‌ی x، وسط خطی که اتمهای هیدروژن را به هم می‌پیوندد، قرار دارد. این ساختار به آب گشتاور دوقطبی بزرگی ($۶,۱\times ۱۰^{-۳۰}\ \mathrm{C\cdot m}$) می‌دهد و آب را حلال بسیار خوبی می‌کند. مولکول‌هایی که گشتاور دوقطبی ذاتی دارند ، **مولکول قطبیده** نامیده می‌شود. در حالت معمولی جهت گیری این مولکول‌ها، همانند شکل (۴-۷) کاتوره‌ای است و میدان الکتریکی آنها یکدیگر را حذف می‌کنند. اما اگر در میدان الکتریکی خارجی $\mathbf{E}_{\circ}$ قرار گیرند، میدان خارجی به هر دوقطبی گشتاوری برابر با $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}_{\circ}$ وارد می‌کند و می‌کوشد آن را در راستای میدان خارجی قرار دهد (نگاه کنید به بخش ۲-۳). جهت‌گیری مولکول‌ها در میدان الکتریکی خارجی در شکل (۵-۷) نشان داده شده است. به خاطر حرکت گرمایی، جهت‌گیری در راستای میدان کامل نیست. با وجود این، جهت‌گیری مولکول‌ها در راستای میدان خارجی، سبب می‌شود که میدان‌های دوقطبی‌ها یکدیگر را تقویت کنند و یک میدان الکتریکی به وجود آورند که در خلاف جهت میدان خارجی است. اندازه‌ی این میدان کوچک‌تر از اندازه‌ی میدان خارجی است.

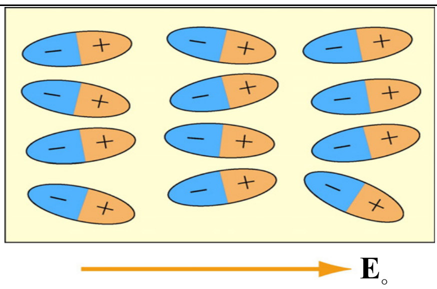


شکل ۳-۷ مولکول آب H_2O

بنابراین، دو نوع ماده‌ی دی‌الکتریک وجود دارد: موادی که مولکول‌هایش دوقطبی ذاتی ندارند و موادی که هر مولکول آن قطبیده است. اما اثر میدان الکتریکی خارجی بر روی هر دو نوع ماده یکی است: آن را قطبیده می‌کند. وقتی ماده‌ی ناقطبیده در میدان خارجی قرار می‌گیرد، میدان خارجی به مولکول‌های ماده دوقطبی القاء می‌کند وگشتاور دوقطبی آنها در راستای میدان خارجی قرار می‌گیرد. اگر ماده قطبیده باشد، میدان خارجی گشتاور دوقطبی مولکول‌های آن را می‌چرخاند ودر جهت میدان قرار می‌دهد. در هر دو حالت، نتیجه یکی است: گشتاوردوقطبی‌های الکتریکی در راستای میدان خارجی قرار می‌گیرند و ماده‌ی



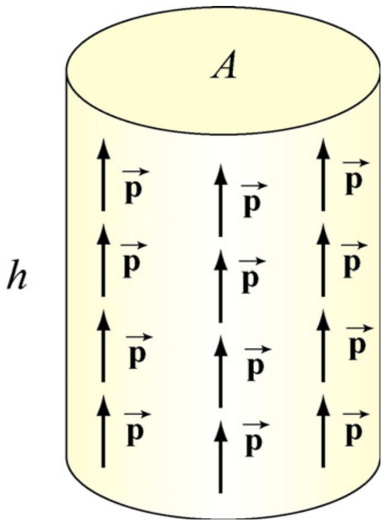
شکل ٧-٤ توزیع کاتوره‌ای گشتاورهای دوقطبی مولکول‌ها



شکل ٧-٥ جهت‌گیری دوقطبی مولکول‌ها در راستای میدان خارجی $\mathbf{E}_\circ$

دی‌الکتریک **قطبیده** می‌شود. دوقطبی‌هایی که به این ترتیب آراسته می‌شوند، میدان الکتریکی خود را، $\mathbf{E}_p$، تولید می‌کنند. مفهوم کلیدی برای فهمیدن مواد دی‌الکتریک، محاسبه‌ی میدان میانگین تعداد زیادی دوقطبی‌های الکتریکی ریزی است که در اثر اعمال میدان خارجی همسو شده اند.

فرض کنید یک قطعه ماده‌ی دی‌الکتریک به شکل استوانه‌ای با سطح قاعده‌ی A و ارتفاع h داریم. فرض کنید این قطعه N تا دوقطبی الکتریکی دارد و گشتاور دوقطبی الکتریکی هر یک $\mathbf{p}$ است که به طور یکنواخت در حجم استوانه و در راستای محور آن توزیع شده‌اند؛ شکل (٧-٦) را ببینید. هر دوقطبی الکتریکی میدان الکتریکی مخصوص به خود را دارد. می‌خواهیم در نبود میدان الکتریکی خارجی، میانگین فضایی میدان‌های ناشی از این دوقطبی‌های الکتریکی همسو را حساب کنیم. برای این کار نخست **بردار قطبش** $\mathbf{P}$ را تعریف کنید که گشتاور دوقطبی الکتریکی در واحد حجم ماده است. به بیان دیگر، $\mathbf{P}$ چگالی حجمی گشتاور دوقطبی ماده است.



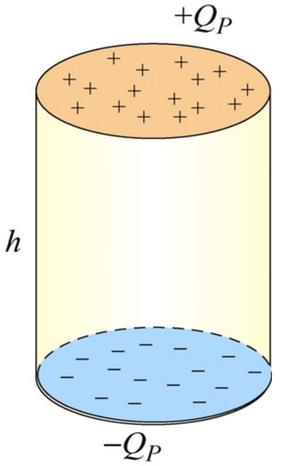
شکل ٧-٦ استوانه با توزیع یکنواخت دوقطبی‌ها

$$\mathbf{P} \equiv \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i \qquad (٧-١)$$

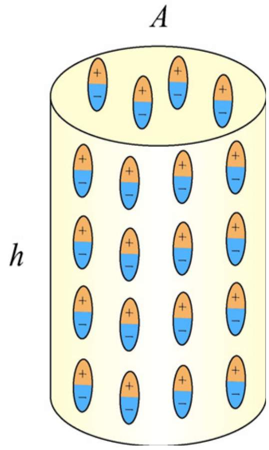
که در آن V حجم ماده‌ی دی‌الکتریک است. بنابراین، در ماده‌ی استوانه‌ای مثال ما که همه‌ی دوقطبی‌ها کاملا همسو و گشتاور دوقطبی‌شان $\mathbf{p}$ است، داریم:

$$P = N_p / Ah \qquad (٧-٢)$$

و جهت $\mathbf{P}$ همسو با گشتاور دوقطبی‌های هم‌راستاست. حالا می‌توان میدان میانگین دوقطبی‌های الکتریکی را حساب کرد. نکته‌ی مهم این است که به هم‌ارزی شکل‌های (٧-٧) و (٧-٨) توجه کنیم. در شکل (٧-٨) همه‌ی بارهای کوچک $\pm$ دوقطبی‌های درون دی‌الکتریک با دو بار $\pm Q_P$ در دو سطح بالا و پایین استوانه جایگزین شده اند. فهمیدن هم‌ارزی این دو شکل ساده است. در فضای درون دی‌الکتریک، بارمثبت یک دوقطبی با بار منفی دو قطبی دیگری که در بالای آن قرار دارد، یکدیگر را حذف می‌کنند. تنها جایی که این حذف شدن اتفاق نمی‌افتد، درسطح بالایی و پایینی استوانه است. چون در سطح بالایی استوانه، دوقطبی دیگری وجود ندارد که قطب منفی‌اش بار مثبت دوقطبی زیرین را حذف کند و در سطح پایینی آن هم دوقطبی که قطب مثبت آن بتواند بار منفی دوقطبی بالا سرش را حذف کند، وجود ندارد. در نتیجه، در سطح بالایی استوانه فقط بارهای مثبت و در سطح



شکل ۷-۸ توزیع بار همارز



شکل ۷-۷ استوانه با توزیع یکنواخت دوقطبی‌ها

زیرین آن بارهای منفی باقی می‌مانند. بنابراین، به طور میانگین، حجم استوانه بی بار به نظر می‌آید. پرسش بعدی این است که چگونه بار Q_P را برحسب کمیت‌های داده شده به‌دست آوریم. اگر به شکل (۷-۸) خوب نگاه کنیم، می‌بینیم که خود این استوانه همانند یک دوقطبی است: بارهای $+Q_P$ و $-Q_P$ به فاصله‌ی h از یکدیگر اند (دستکم، برای h و A کوچک این فرض پذیرفتنی است). پس، ساده‌ترین روش برای یافتن Q_P این است که شرط کنیم که گشتاور دوقطبی این استوانه با جمع گشتاورهای دوقطبی‌های شکل (۷-۷) برابر است:

$$Q_P h = Np \quad \Rightarrow \quad Q_P = \frac{Np}{h} \tag{۷-۳}$$

توجه کنید که در یکاهای SI ، یکای P عبارت است از $(\mathrm{C\cdot m})/\mathrm{m}^3 = \mathrm{C}/\mathrm{m}^2$ که در واقع، یکای چگالی بار سطحی است. در مثال بالا، بردار قطبش $\mathbf{P}$ در راستای محور استوانه و در نتیجه بر سطح قاعده عمود بود. در حالت عمومی‌تر، بردار قطبش $\mathbf{P}$ ممکن است با بردار یکه‌ی عمود برسطح $\hat{\mathbf{n}}$ هم‌راستا نباشد و با آن زاویه‌ی θ بسازد. در این صورت، چگالی بار سطحی σ_P عبارت است از

$$\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = P\cos\theta \tag{۷-۵}$$

بنابراین، یافتن میدان میانگین دوقطبی‌ها ، یا به طور همارز، یافتن میدان حاصل از بارهای Q_P به یافتن میدان الکتریکی خازن تخت با چگالی بار سطحی σ_P کاهش پیدا می‌کند. این میدان را در بخش ۶-۶ و در رابطه‌ی (۶-۵۷) حساب کردیم و اندازه‌ی آن برابر $E_P = \sigma_P/\varepsilon_0 = P/\varepsilon_0$ است. جهت این میدان از سطح با بار مثبت به سوی سطح با بار منفی است و در نتیجه در خلاف جهت بردار قطبش $\mathbf{P}$ است. پس، شکل برداری آن، می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}_P = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \tag{۷-۶}$$

بنابراین، جهت میدان الکتریکی میانگین همه‌ی دوقطبی‌های ریز دی‌الکتریک در خلاف جهت دوقطبی‌هاست. توجه به این نکته مهم است که میدان الکتریکی که در بالا حساب کردیم، میدان میانگین همه‌ی دوقطبی‌هاست. اگر به یک دوقطبی تنها نزدیک شویم، میدان الکتریکی آن متفاوت از آنچه که در بالا به‌دست آوردیم، خواهد بود.

ما فرض کردیم که همه‌ی گشتاورهای دوقطبی‌ها همسو اند. اگر جهت گیری دوقطبی‌ها کاتوره‌ای باشند، قطبش $\mathbf{P}$ در رابطه‌ی (۷-۱) صفر می‌شود و میدان میانگین هم صفر خواهد شد. اگر دوقطبی‌ها به راستای خاصی برتری بدهند و در آن راستا جهت

گیری کنند، آنگاه $\mathbf{P} \neq 0$ و در نتیجه، میدان میانگین هم غیر صفر می‌شود؛ $\mathbf{E}_P \neq 0$.
اگر جسم دی‌الکتریک به گونه‌ای باشد که بارمنفی یک دوقطبی آن با بار مثبت دوقطبی قبلی‌اش برابر نباشد، یا بردار قطبش یکنواخت نباشد و در نقاط مختلف، متفاوت باشد، آنگاه حذف شدن بارها در درون ماده‌ی دی‌الکتریک کامل نخواهد بود و مقداری بار القایی حجمی هم، افزون بر بارهای القایی سطحی وجود خواهد داشت. چگالی این بارهای حجمی القایی برابر

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} \qquad (۷-۷)$$

است. این رابطه از اسمان نیامده است، بخش ۲-۷ به توصیف آن می‌پردازد.

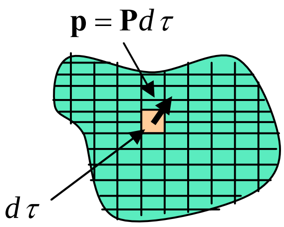
****۲-۷ میدان جسم قطبیده، نمایش پتانسیل و بارهای القایی**

در بخش پیش، یک قطعه دی‌الکتریک قطبیده را در نظر گرفتیم که گشتاورهای دوقطبی آن یکنواخت بود و در جهت خاصی (در راستای محور استوانه و موازی بردار یکه‌ی عمود بر سطح $\hat{\mathbf{n}}$) بودند. در حالت عمومی‌تر، قطعه‌ای دی‌الکتریک را در نظر بگیرید که چگالی گشتاور دوقطبی، $\mathbf{P}$، آن داده شده است. این جسم چه میدان الکتریکی را تولید می‌کند؟ (منظور ما میدانی است که خود قطبش ایجاد می‌کند و نه میدانی که ممکن است قطبش را به‌وجود آورده باشد.) در فصل ۳ پتانسیل یک دوقطبی الکتریکی را حساب کردیم (نگاه کنید به فصل۳، بخش ۴-۳، مثال۹-۳ و رابطه‌ی (۷۲-۳)):

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad (۷-۸)$$

که در آن، $\mathbf{r}$ برداری از دوقطبی تا نقطه‌ای است که پتانسیل در آن نقطه حساب می‌شود.
اگر قطعه‌ی دی‌الکتریک شکل (۹-۷) را به اجزاء بسیار کوچک تقسیم کنیم، به هر جزء حجم $d\tau$ می‌توان یک دوقطبی الکتریکی $\mathbf{p} = \mathbf{P}d\tau$ نسبت داد. بنابراین، پتانسیل الکتریکی کل ناشی از دی‌الکتریک عبارت می‌شود از

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{Vol.}}\frac{(\mathbf{P}d\tau)\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{Vol.}}\frac{\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}d\tau \qquad (۷-۹)$$



شکل ۹-۷ گشتاور دوقطبی جزء حجم $d\tau$

از طرفی می‌دانیم که

$$\nabla_{r'}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad (۷-۱۰)$$

است (توجه کنید که مشتق نسبت به مختصات چشمه (r') گرفته شده است و از این رو، علامت منفی در سمت راست ظاهر نشده است. نگاه کنید به رابطه‌ی (۳۶-۱)).
رابطه‌ی (۹-۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{Vol.}}\mathbf{P}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)d\tau \qquad (۷-۱۱)$$

اگر از اتحاد برداری زیر استفاده کنیم

$$\nabla\cdot(f\,\mathbf{A}) = f\,(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla f) \qquad (۷-۱۲)$$

و قرار دهیم $f \to 1/r$ و $\mathbf{A} \to \mathbf{P}$ خواهیم داشت

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{r}\mathbf{P}\right) = \frac{1}{r}(\nabla\cdot\mathbf{P}) + \mathbf{P}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right) = \nabla\cdot\left(\frac{1}{r}\mathbf{P}\right) - \frac{1}{r}(\nabla\cdot\mathbf{P}) \qquad (۷-۱۳)$$

پس، رابطه‌ی (۱۱-۷) به صورت انتگرال دو جمله درمی‌آید:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{Vol.}} \mathbf{P}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)d\tau \;\Rightarrow\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{\text{Vol.}} \nabla\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\mathbf{P}\right)d\tau - \int_{\text{Vol.}} \frac{1}{\mathrm{r}}(\nabla\cdot\mathbf{P})d\tau\right] \qquad (۷-۱٤)$$

هر دو انتگرال سمت راست بر روی حجمی گرفته شده اند که گشتاورهای دوقطبی را دربر دارد، یعنی بر روی حجم قطعه‌ی دی‌الکتریک. اما، با استفاده از قضیه‌ی دیورژانش (نگاه کنید به قضیه‌ی ۲-٤ ، رابطه‌ی (۱۵٤-٤) در پیوست فصل ٤) می‌توان انتگرال اول سمت راست را به انتگرال روی سطح تبدیل کرد (سطحی که مرزهای دی‌الکتریک است). رابطه‌ی (۱٤-۷) به‌صورت زیر در می‌آید

$$V = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\oint_S \frac{۱}{r}\mathbf{P}\cdot d\mathbf{a} - \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\int_{\text{Vol.}} \frac{1}{\mathrm{r}}(\nabla\cdot\mathbf{P})d\tau \qquad (۷-۱۵)$$

جمله‌ی اول سمت راست همانند پتانسیل توزیع بار سطحی است (نگاه کنید به رابطه‌ی (٤۲-۳)) که به جای چگالی بار سطحی اینک $\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ قرار دارد. جمله‌ی دوم هم مانند پتانسیل یک توزیع بار حجمی است که به جای چگالی بار حجمی $\rho(r')$ اینک داریم $\rho(r') \to -\nabla\cdot\mathbf{P}$. پس اگر تعریف کنیم

$$\sigma_P \equiv \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} \qquad (۷-۱٦)$$

$$\rho_P \equiv -\nabla\cdot\mathbf{P} \qquad (۷-۱۷)$$

(که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح است) آنگاه رابطه‌ی (۱۵-۷) به صورت جمع دو جمله درمی‌آید که یکی پتانسیل ناشی از توزیع بار سطحی و دیگری ناشی از یک توزیع بار حجمی است

$$V = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\oint_S \frac{۱}{r}\sigma_P\, da + \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\int_{\text{Vol.}} \frac{1}{\mathrm{r}}\rho_P\, d\tau \qquad (۷-۱۸)$$

این بدان معنی است که پتانسیل الکتریکی یک جسم قطبیده و نیز میدان الکتریکی آن همانند پتانسیل و میدانی است که چگالی بار سطحی $\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ و چگالی بار حجمی $\rho = -\nabla\cdot\mathbf{P}$ تولید می‌کنند. به جای این که از رابطه‌ی پیچیده‌ی (۹-۷) بخواهیم انتگرال بگیریم، می‌توانیم چگالی بارهای σ_P و ρ_P را حساب کنیم ومانند همیشه، میدان آنها را به‌دست آوریم. چگالی بارهای σ_P و ρ_P را چگالی **بارهای القائی** (یا **بارهای پیوندی**)[◊] می‌نامند. روشن است که اگر قطبش $\mathbf{P}$ یکنواخت باشد، چگالی بارهای القایی حجمی، ρ_P، صفر است، اما اگر $\mathbf{P}$ یکنواخت نباشد و در نقاط مختلف دی‌الکتریک متفاوت باشد، $\rho_P \neq \circ$ است.

مثال ۱-۷ کره‌ی دی‌الکتریک با قطبش متغیر: بردار قطبش کره‌ی دی‌الکتریک به شعاع R با $\mathbf{P} = k\,\mathbf{r}$ داده شده است که در آن k مقدار ثابت و $\mathbf{r}$ برداری از مرکز کره است.

(الف): چگالی بارهای القایی σ_P و ρ_P را حساب کنید.

(ب): میدان الکتریکی را در درون و بیرون کره به دست آورید.

حل: **(الف)** ار رابطه‌های (۱۵-۷) و (۱٦-۷) داریم

$$\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{r}} = kR \quad , \quad \rho_P = -\nabla\cdot\mathbf{P} = -\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^۲ kr\right) = -\frac{۱}{r^۲}\left(۳kr^۲\right) = -۳k \qquad (۷-۱۹)$$

◊ induced (or bound) charges

(**ب**): در ناحیه‌ی درون کره ($r < R$) توزیع بار یکنواخت و برابر $\rho = -3k$ است. با استفاده از قانون گوس می‌توان میدان را به‌دست آورد. این همان مسئله‌ای است که در فصل ٤ و در مثال ٣-٤ حل شده است. بنابراین، با توجه به رابطه‌ی (٢٨-٤) داریم

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho r\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{-3k}{3\varepsilon_0} r\,\hat{\mathbf{r}} = -\frac{k}{\varepsilon_0}\mathbf{r} \qquad (7\text{-}20)$$

و میدان در بیرون کره همانند میدانی است که انگار همه‌ی بار در مرکز کره قرار دارد. در اینجا دو نوع توزیع بار الکتریکی وجود دارد: حجمی و سطحی. بنابراین، بارهای القایی حجمی Q_1 و بارهای القایی سطحی Q_2 به ترتیب عبارتند از $Q_1 = (-3k)\left(4\pi R^3/3\right)$ و $Q_2 = (kR)(4\pi R^2)$. پس بار کل القایی و میدان حاصل از آنها برابر است با

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 = (-3k)\left(4\pi R^3/3\right) + (kR)(4\pi R^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = 0 \qquad (7\text{-}21)$$

نکته: جمع کل بارهای القایی همیشه صفر است.♣

پس، اگر بردار قطبش $\mathbf{P}$ در یک ماده‌ی دی‌الکتریک داده شود، می‌توان با استفاده از رابطه‌های (١٦-٧) و (١٧-٧) چگالی بارهای القایی σ_P و ρ_P را حساب کرد و خود ماده را فراموش کرد. با دانستن σ_P و ρ_P میدان با روش همیشگی به‌دست می‌آید.

٧-٣ ماده‌ی دی‌الکتریک در میدان الکتریکی: دی‌الکتریک خطی

در این بخش می‌خواهیم اثر میدان الکتریکی خارجی را روی ماده‌ی دی‌الکتریک بررسی کنیم. نخست فرض کنید، ماده‌ی دی‌الکتریک از اتم یا مولکول‌های با گشتاور دوقطبی الکتریکی دایمی تشکیل شده است. اگر این ماده را به حال خود رها کنیم، گشتاورهای دوقطبی الکتریکی آن هرگز در ماده‌ی دی‌الکتریک به خودی خود هم‌سو نمی‌شوند و در نبود میدان خارجی به خاطر حرکت کاتوره‌ای آنها $\mathbf{P} = 0$ است. بنابراین، میدان الکتریکی میانگین‌شان، $\mathbf{E}_P$، هم صفر است. اما اگر ماده‌ی دی‌الکتریک را در میدان خارجی $\mathbf{E}_0$ قرار دهیم، به هردوقطبی گشتاور $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}_0$ وارد می‌شود. این گشتاور می‌کوشد، دوقطبی را بچرخاند و در راستای میدان $\mathbf{E}_0$ قرار دهد. اثر نهایی، ایجاد قطبش خالص $\mathbf{P}$ موازی با میدان $\mathbf{E}_0$ و در نتیجه، تولید میدان میانگین $\mathbf{E}_P$ است که با $\mathbf{E}_0$ **پادموازی** است. یعنی، میدان میانگین سبب کاهش اندازه‌ی میدان کل $|\mathbf{E}| < |\mathbf{E}_0|$ می‌شود. میدان کل در دی‌الکتریک

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_P = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \qquad (7\text{-}22)$$

است. بیشتر وقت‌ها قطبش $\mathbf{P}$ نه تنها با میدان $\mathbf{E}_0$ هم جهت اند، بلکه به طور خطی با $\mathbf{E}_0$ (و بنابراین با $\mathbf{E}$) متناسب است. این گزاره پذیرفتنی است، چون بدون $\mathbf{E}_0$، قطبش صفر است. پس می‌توان نوشت

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \qquad (7\text{-}23)$$

$\varepsilon_0\chi_e$ ضریب تناسب بین $\mathbf{E}$ و $\mathbf{P}$ است. ثابت χ_e **پذیرفتاری الکتریکی** ماده نام دارد و موادی که از رابطه‌ی (٢٢-٧) پیروی کنند، **دی‌الکتریک خطی** نامیده می‌شوند. از رابطه‌های (٢٢-٧) و (٢٣-٧) داریم

$$\mathbf{E}_0 = (1+\chi_e)\mathbf{E} = \kappa_e \mathbf{E} \qquad (7\text{-}24)$$

که در آن

$$\kappa_e \equiv (1+\chi_e) \qquad (7\text{-}25)$$

ثابت دی‌الکتریک است. چون $\chi_e > 0$ است، ثابت دی‌الکتریک κ_e همیشه بزرگ‌تر از یک است و در نتیجه

$$E = \frac{E_\circ}{\kappa_e} < E_\circ \tag{۷-۲۶}$$

است. بنابراین، اثر ماده‌ی دی‌الکتریک کاستن از شدت میدان الکتریکی است.

رفتار اجسام دی‌الکتریک که مولکول‌های آن قطبیده نیستند نیز به همین صورت است، چون میدان $\mathbf{E}_\circ$ به این مولکول‌ها دوقطبی القاء می‌کند. دوقطبی‌های القایی موازی میدان $\mathbf{E}_\circ$ اند و به قطبش $\mathbf{P}$ می‌انجامند که موازی $\mathbf{E}_\circ$ است و میدان کل را کاهش می‌دهند.

نکته: میدان $\mathbf{E}$ در رابطه‌ی (۷-۲۳) میدان *کل* است. ممکن است بخشی از آن ناشی از بارهای الکتریکی باشد که در دی‌الکتریک قرار می‌دهیم و بخش دیگرش مربوط به قطبش (یا بارهای القایی) باشد. اگر یک قطعه ماده‌ی دی‌الکتریک را در میدان خارجی $\mathbf{E}_\circ$ قرار دهیم، قطبش $\mathbf{P}$ را به طور مستقیم نمی‌توان از رابطه‌ی (۷-۲۳) محاسبه کرد. میدان خارجی ماده را تا حدودی قطبیده می‌کند. این قطبش میدان خودش را تولید می‌کند که به میدان کل افزوده می‌شود و به قطبیدگی بیشتر ماده کمک می‌کند. تغییر قطبش دوباره میدان ایجاد می‌کند که بازهم به میدان کل افزوده می‌شود و به قطبش بیشتر می‌انجامد.... ♣

۷-۴ قانون گوس در محیط دی‌الکتریک

دیدیم که اثر قطبش، تولید بارهای القایی حجمی با چگالی $\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P}$ در گوشت دی‌الکتریک و بارهای سطحی با چگالی $\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ در روی سطح آن است. میدان ناشی از قطبش ماده، میدان همین بارهاست. افزون بر میدان قطبش، یا میدان بارهای القایی، میدان‌های دیگری هم در ماده وجود دارند. هر میدانی را که نتیجه‌ی قطبش نباشد، میدان **بارهای آزاد** خواهیم نامید. بارهای آزاد ممکن است الکترون‌هایی باشند که در سطح رسانا قرار دارد و رسانا با دی‌الکتریک پوشانده شود. یا ممکن است در دی‌الکتریک مقداری بار الکتریکی به‌صورت یون بکاریم که باز هم میدان الکتریکی تولید می‌کند. به بیان دیگر هر باری که ناشی از قطبش نباشد، بار آزاد است. با این پیش گفتار به قانون گوس در محیط دی‌الکتریک می‌پردازیم.

قانون گوس در شکل انتگرالی آن به‌صورت زیر است

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_\circ} q_{\text{enc}} = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho\, d\tau \tag{۷-۲۷}$$

$q_{\mathbf{enc}}$ بار کل است که در درون سطح گوس قرار دارد. قانون گوس در باره‌ی ماهیت بارها حرفی نمی‌زند و این که این بارها القایی اند یا آزاد، سخنی نمی‌گوید. بنابراین، در حالت کلی ρ شامل هر دو نوع بار القایی ρ_P و بارهای آزاد ρ_f است.

$$\rho = \rho_P + \rho_f \tag{۷-۲۸}$$

پس، قانون گوس رابطه‌ی (۷-۲۷) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{۱}{\varepsilon_\circ} q_{\text{enc}} = \frac{۱}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho\, d\tau = \frac{۱}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho_P\, d\tau + \frac{۱}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho_f\, d\tau \tag{۷-۲۹}$$

توجه کنید که در این رابطه، $\mathbf{E}$ میدان **کل** است که بارهای آزاد و قطبش به‌وجود آورده‌اند. اگر به جای ρ_P مقدارش را بر حسب $-\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P}$ قرار دهیم و از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{۱}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho_P\, d\tau + \frac{۱}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho_f\, d\tau = \frac{۱}{\varepsilon_\circ}\int_V \left(-\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P}\right) d\tau + \frac{۱}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho_f\, d\tau = -\frac{۱}{\varepsilon_\circ}\oint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{a} + \frac{۱}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho_f\, d\tau \tag{۷-۳۰}$$

چون سطح انتگرال‌گیری برای هر دو انتگرال یکی است، رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\oint_S \left(\varepsilon_\circ \mathbf{E} + \mathbf{P}\right)\cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho_f\, d\tau = q_{f_{\text{enc}}} \tag{۷-۳۱}$$

توجه کنید که سمت راست فقط شامل کل بارهای آزاد در درون سطح گوس است و از بارهای القایی در آن خبری نیست. کمیت درون پرانتز در انتگرال سمت چپ را با بردار $\mathbf{D}$ نشان می‌دهند و به آن بردار **جابه‌جایی الکتریکی** می‌گویند:

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_\circ \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{۷-۳۲}$$

بنابراین، قانون گوس را می‌توان برحسب $\mathbf{D}$ به‌صورت زیر نوشت

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = q_{f_{\text{enc}}} \tag{۷-۳۳}$$

این رابطه بیان انتگرالی قانون گوس در محیط دی‌الکتریک است. $q_{f_{\text{enc}}}$ بار کل آزاد در حجم V است که سطح گوس مرزهای آن است. رابطه‌ی (۷-۳۳) رابطه‌ی بسیار سودمندی است، چون سمت راست آن فقط بارهای آزاد را دربر دارد و بارهای آزاد بارهایی اند که می‌شناسیم. در مسئله‌ها معمولا چگالی بارهای آزاد ρ_f شناخته شده است، اما بارهای القایی ρ_P را نمی‌دانیم.

برای محیط‌های دی‌الکتریک، رابطه‌ی (۷-۳۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{D} = \varepsilon_\circ \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_\circ \mathbf{E} + \varepsilon_\circ \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_\circ \left(۱ + \chi_e\right) \mathbf{E} \tag{۷-۳۴}$$

پس، می‌بینیم که بردار جابه‌جایی الکتریکی و میدان کل متناسب اند. ضریب تناسب بین آنها

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_\circ \left(1 + \chi_e\right) \tag{۷-۳۵}$$

است. ε **گذردهی**[*] محیط دی‌الکتریک نامیده می‌شود. رابطه‌ی (۷-۳۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{۷-۳۶}$$

بنابراین، به تنها $\mathbf{P}$ با میدان کل $\mathbf{E}$ متناسب است، بلکه $\mathbf{D}$ هم با $\mathbf{E}$ متناسب است. در خلاء چون ماده وجود ندارد که قطبیده شود، پذیرفتاری χ_e صفر و گذردهی همان $\varepsilon_\circ$ است. ثابت دی‌الکتریک را اینک می‌توان برحسب گذردهی تعریف کرد

$$\kappa_e = ۱ + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_\circ} \tag{۷-۳۷}$$

شکل دیفرانسیلی قانون گوس در دی‌الکتریک‌ها را هم می‌توان نوشت. از شکل دیفرانسیلی قانون گوس داریم

$$\varepsilon_\circ \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_P + \rho_f = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P} + \rho_f \tag{۷-۳۸}$$

بار هم توجه کنید که در اینجا $\mathbf{E}$ میدان **کل** است. رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_\circ \mathbf{E} + \mathbf{P}\right) = \rho_f \tag{۷-۳۹}$$

عبارت درون پرانتز بردار جابه‌جایی الکتریکی $\mathbf{D}$ است که در رابطه‌ی (۷-۳۲) تعریف شد. پس، شکل دیفرانسیلی قانون گوس به صورت زیر در می‌آید

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho_f \tag{۷-۴۰}$$

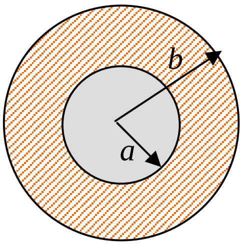
سرانجام، در محیط دی‌الکتریک خطی همگن، می‌توان چکالی بارهای القایی حجمی را هم برحسب بارهای آزاد نوشت

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}\right) = -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \chi_e \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon}\right) = -\frac{\varepsilon_0 \chi_e}{\varepsilon} \left(\nabla \cdot \mathbf{D}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \rho_P = -\left(\frac{\varepsilon_0 \chi_e}{\varepsilon_0 \left(1 + \chi_e\right)}\right) \rho_f = -\left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e}\right) \rho_f \tag{۷-۴۱}$$

[*] permittivity

مثال ۲-۷ کره‌ی فلزی با پوشش دی‌الکتریک: در روی یک کره‌ی فلزی به شعاع a بار Q قرار دارد. کره را برابر شکل (۱۰-۷) تا شعاع b با یک دی‌الکتریک با گذردهی ε می‌پوشانیم. پتانسیل را در مرکز کره نسبت به بینهایت به‌دست آورید. بردار قطبش و مکان و اندازه‌ی بارهای القایی را حساب کنید.



شکل ۱۰-۷ کره‌ی باردار پوشیده با دی‌الکتریک

حل: برای این که پتانسیل را به‌دست آوریم باید میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در همه جا بدانیم. برای این که میدان $\mathbf{E}$ را حساب کنیم، لازم است مکان و اندازه‌ی بارهای القایی را بشناسیم. بارهای القایی را می‌توان از قطبش $\mathbf{P}$ به‌دست آورد. اما در این مسئله $\mathbf{P}$ داده نشده است. چون دی‌الکتریک خطی است، برای این که بتوانیم $\mathbf{P}$ را با استفاده از رابطه‌ی (۲۳-۷) حساب کنیم، به میدان $\mathbf{E}$ نیاز داریم. اگر $\mathbf{E}$ را می‌دانستیم، می‌دانستیم توانستیم پتانسیل را حساب کنیم و نیازی به این همه دردسر نداشتیم. به نظر می‌رسد که در دایره‌ای دور خود می‌گردیم. اما یک تکه آگاهی دیگر در مسئله وجود دارد که هنوز از آن استفاده نکرده‌ایم. آنچه را که می‌دانیم بارهای آزاد Q است و این آگاهی برای یافتن پتانسیل و نیر بارهای القایی و میدان و قطبش کافی است.

از شکل انتگرالی قانون گوس در دی‌الکتریک، رابطه‌ی (۳۳-۷) استفاده کنید. سطح گوسی به شعاع $r > a$ در نظر بگیرید. برای این سطح گوس داریم

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = q_{f_{enc}} = Q \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad ; \qquad r > a \tag{۷-۴۲}$$

توجه کنید که در درون کره‌ی فلزی $\mathbf{E} = \mathbf{P} = \mathbf{D} = 0$ اند. حال که بردار جابه‌جایی الکتریکی $\mathbf{D}$ را حساب کردیم، میدان الکتریکی را با استفاده از رابطه‌ی (۳۶-۷) می‌توان در همه جا به‌دست آورد

$$\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{D} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad a < r < b \\[2mm] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r > b \end{cases} \tag{۷-۴۳}$$

بنابراین، پتانسیل در مرکز کره عبارت است از

$$V = -\int_\infty^0 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_\infty^b \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)dr - \int_b^a \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\right)dr - \int_a^0 (\cdot)\,dr = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_0 b} + \frac{1}{\varepsilon a} - \frac{1}{\varepsilon b}\right) \tag{۷-۴۴}$$

حالا که میدان کل را در دی‌الکتریک به‌دست آوردیم، می‌توانیم بردار قطبش $\mathbf{P}$ را در دی‌الکتریک حساب کنیم. داریم

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_e\mathbf{E} = \frac{\varepsilon_0\chi_e Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{۷-۴۵}$$

و بنابراین، با توجه به این که $\vec{\nabla}\cdot\left(\hat{\mathbf{r}}/r^2\right) = 0$ است (مثال ۵-۱ و رابطه‌ی (۳۸-۱) را ببینید)، به‌دست می‌آید

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P} = -\frac{\varepsilon_0\chi_e Q}{4\pi\varepsilon}\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) = 0 \tag{۷-۴۶}$$

از رابطه‌ی (۴۱-۷) هم این نتیجه،آشکار است؛ چون در دی‌الکتریک بار آزاد وجود ندارد و ρ_f در آنجا صفراست (باهای آزاد به سطح کره‌ی رسانا محدود اند). پوسته‌ی دی‌الکتریک دو سطح دارد؛ یکی سطح داخلی آن با شعاع a و دیگری سطح بیرونی آن با شعاع b . در روی هر دو سطح آن بار سطحی القایی وجود دارند. در روی سطح داخلی، بردار یکه‌ی عمود براین سطح به سوی مرکز کره است، در حالیکه در سطح بیرونی به سوی بیرون از کره است. پس

$$\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_\circ \chi_e Q}{٤\pi\varepsilon b^٢} & \text{(در روی سطح بیرونی)} \quad (٧-٤٧) \\ -\dfrac{\varepsilon_\circ \chi_e Q}{٤\pi\varepsilon a^٢} & \text{(در روی سطح درونی)} \quad (٧-٤٨) \end{cases}$$

این که بارهای القایی در سطح داخلی دی‌الکتریک منفی باشد طبیعی است؛ چون بارهای روی کره‌ی رسانا، بارهای ناهمنام مولکول‌های دی‌الکتریک را به سوی خود می‌کشد. توجه کنید که جمع کل بارهای القایی صفر است:

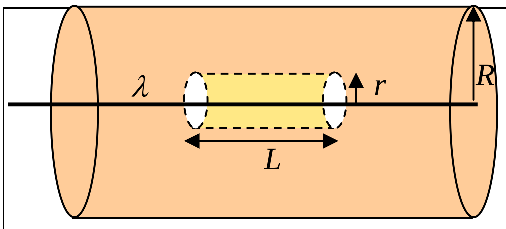
$$Q_{P_{tot}} = \left(\frac{\varepsilon_\circ \chi_e Q}{٤\pi\varepsilon b^٢}\right)\left(٤\pi b^٢\right) + \left(-\frac{\varepsilon_\circ \chi_e Q}{٤\pi\varepsilon a^٢}\right)\left(٤\pi a^٢\right) = \circ \qquad (٧-٤٩)$$

مثال ٣-٧ سیم باردار در درون استوانه: سیم درازی با چگالی بارخطی λ تا شعاع R با ماده‌ی دی‌الکتریک خطی با پذیرفتاری χ_e برابر شکل (٧-١١) پوشانده شده است. بردار جابه‌جایی $\mathbf{D}$ ، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و بردار قطبش $\mathbf{P}$ را به دست آورید.

حل: قانون گوس در دی‌الکتریک را برای سطح گوسی به شکل استوانه‌ی به طول L وشعاع r به کار ببرید

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = D\left(٢\pi rL\right) = \lambda L \;\Rightarrow\; \mathbf{D} = \frac{\lambda}{٢\pi r}\hat{\mathbf{r}} \qquad (٧-٥٠)$$

توجه کنید که این رابطه هم در درون دی‌الکتریک و هم در بیرون آن درست است. در ناحیه‌ی بیرون ، یعنی $(r > R)$ ، قطبش صفر است؛



شکل ٧-١١ سیم باردار در دی‌الکتریک

چون در آنجا دی‌الکتریک وجود ندارد. پس برای $r > R$ داریم

$$\mathbf{P} = \circ, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_\circ} = \frac{\lambda}{٢\pi\varepsilon_\circ r}\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad r > R \qquad (٧-٥١)$$

و برای درون دی‌الکتریک

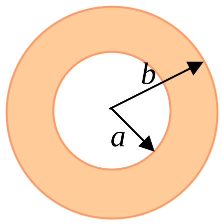
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{\lambda}{٢\pi\varepsilon r}\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad r < R \qquad (٧-٥٢)$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_\circ \chi_e \mathbf{E} = \frac{\varepsilon_\circ \chi_e \lambda}{٢\pi\varepsilon r}\hat{\mathbf{r}} = \frac{\chi_e \lambda}{٢\pi(١+\chi_e)r}\hat{\mathbf{r}} \qquad (٧-٥٣)$$

مثال ٤-٧ پوسته‌ی دی‌الکتریک کروی ضخیم: بردار قطبش پوسته‌ی کروی دی‌الکتریک شکل (٧-١٢) با شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b با $\mathbf{P} = k\left(\hat{\mathbf{r}}/r\right)$ داده شده استکه در آن k مقدار ثابتی است و r فاصله از مرکز کره است. میدان الکتریکی را در هر سه ناحیه‌ی $r < a$ ، $a < r < b$ و $r > b$ به دو روش زیر حساب کنید

(الف): مکان و اندازه‌ی بارهای القایی را به‌دست آورید. میدانی که این بارها را ایجاد می‌کنند حساب کنید.

(ب): از قانون گوس برای دی‌الکتریک، رابطه‌ی (٧-٣٣) نخست بردار $\mathbf{D}$ را به‌دست آورید و سپس $\mathbf{E}$ را حساب کنید. توجه کنید که روش دوم کوتاه‌تر است و کاری با بارهای القایی ندارد.



شکل ٧-١٢ پوسته‌ی دی‌الکتریک

حل: **(الف)** توجه کنید که در مسئله بار آزاد وجود ندارد. چگالی بارهای القایی عبارت اند از

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P} = -\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^۲\frac{k}{r}\right) = -\frac{۱}{r^۲}(k) = -\frac{k}{r^۲} \qquad (۷-۵۴)$$

$$\sigma_b = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \begin{cases}\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{r}} = k/b & \forall r = b\\ -\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{r}} = -k/a & \forall r = a\end{cases} \qquad (۷-۵۵)$$

حال که چگالی بارهای القایی را یافتیم، می‌توانیم وجود دی‌الکتریک را فراموش کنیم. با استفاده از قانون گوس داریم

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\,\mathbf{a} = \frac{۱}{\varepsilon_\circ}q_{\text{enc}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q_{\text{enc}}}{r^۲}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۷-۵۶)$$

در ناحیه‌ی $r < a$ بار وجود ندارد: $q_{\text{enc}} = \circ$ و در نتیجه، $\mathbf{E} = \circ$ است.در ناحیه‌ی $a < r < b$ داریم

$$q_{\text{enc}} = \left(-\frac{k}{a}\right)\left(۴\pi a^۲\right) + \int_a^r\left(-\frac{k}{r'^۲}\right)\left(۴\pi r'^۲\right)dr' = -۴\pi ka - ۴\pi k\,(r-a) = -۴\pi kr \qquad (۷-۵۷)$$

بنابراین، میدان الکتریکی در این ناحیه عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q_{\text{enc}}}{r^۲}\hat{\mathbf{r}} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{(-۴\pi kr)}{r^۲}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{k}{\varepsilon_\circ r}\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad a < r < b \qquad (۷-۵۸)$$

و سر انجام در ناحیه‌ی $r > b$ میدان الکتریکی $\mathbf{E} = \circ$ است؛ چون سطح گوسی به شعاع $r > b$ همه‌ی بارهای القایی را در بردارد (بارهای القایی حجمی، سطحی در روی سطح داخلی و بیرونی دی‌الکتریک) و جمع کل بارهای القایی همواره صفر است.

بگذارید یک بار دیگر این را نشان دهیم: بار القایی در سطح داخلی و سطح بیرونی دی‌الکتریک عبارت اند از

$$Q_a = (-k/a)\left(۴\pi a^۲\right) = -۴\pi ka \qquad (۷-۵۹)$$

$$Q_b = (k/b)\left(۴\pi b^۲\right) = ۴\pi kb \qquad (۷-۶۰)$$

و بار القایی حجمی برابر است با

$$Q_V = \int_a^b\left(-\frac{k}{r'^۲}\right)\left(۴\pi r'^۲\right)dr' = -۴\pi k\,(b-a) \qquad (۷-۶۱)$$

بنابراین،

$$Q_{\text{tot}} = Q_a + Q_b + Q_V = \left(-۴k\,\pi a\right) + \left(۴k\,\pi b\right) - ۴k\,\pi(b-a) = \circ \qquad (۷-۶۲)$$

(ب): چون در مسئله بار آزاد وجود ندارد، از رابطه‌ی (۷-۳۳) برای هر سه ناحیه داریم

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = q_{f_{\text{enc}}} = \circ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \circ \quad \forall r \qquad (۷-۶۳)$$

از طرفی، می‌دانیم که

$$\mathbf{D} = \varepsilon_\circ\mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_\circ} \qquad (۷-۶۴)$$

است. در ناحیه‌های $r < a$ و $r > b$ قطبش $\mathbf{P} = \circ$ است؛ چون در این دو ناحیه دی‌الکتریک وجود ندارد. در ناحیه‌ی $a < r < b$ بنابه رابطه‌ی (۷-۶۴) میدان عبارت است از

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_\circ} = -\frac{k}{\varepsilon_\circ r}\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad a < r < b \qquad (۷-۶۵)$$

❊ **مثال ۵–۷ کره‌ی دی‌الکتریک با بار q در مرکز**: در مرکز یک کره‌ی دی‌الکتریک به شعاع R و پذیرفتاری χ_e بار نقطه‌ای q قرار دارد. میدان الکتریکی، بردار قطبش و بارهای القایی را در نقطه‌ی $r < R$ به‌دست آورید. بار القایی سطحی کل را به‌دست آورید. بارهای منفی القایی جبران کننده‌ی این بار سطحی در کجا قرار دارند؟

حل: از رابطه‌ی (۳۳–۷) داریم

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = q_{f_{\text{enc}}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{7-66}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ(1+\chi_e)}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{7-67}$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_\circ \chi_e \mathbf{E} = \frac{q\,\chi_e}{4\pi(1+\chi_e)}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{7-68}$$

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P} = -\frac{q\,\chi_e}{4\pi(1+\chi_e)}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) = -q\,\frac{\chi_e}{(1+\chi_e)}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{r}) \tag{7-69}$$

$$\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \frac{q\,\chi_e}{4\pi(1+\chi_e)R^2} \quad \Rightarrow \quad Q_R = \sigma_P\left(4\pi R^2\right) = \frac{q\,\chi_e}{(1+\chi_e)} \tag{7-70}$$

(در مورد تابع دلتای دیراک نگاه کنید به رابطه‌ی (۹۱–۴)). بارهای منفی باید در مرکز کره باشند تا بار کل القایی سطحی را جبران کنند و جمع کل بارهای القایی صفر شود. می‌توان آن را حساب کرد

$$\int \rho_P d\tau = -\frac{q\,\chi_e}{(1+\chi_e)}\int \boldsymbol{\delta}(\mathbf{r})dr = -\frac{q\,\chi_e}{(1+\chi_e)} \tag{7-71}$$

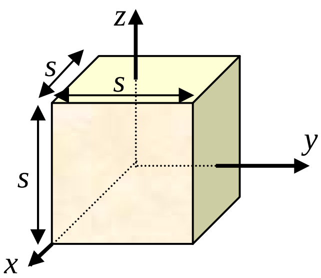
مثال ۶–۷ دی‌الکتریک قطبیده‌ی مکعبی: مرکز مکعبی از جنس دی‌الکتریک و به ضلع s در مبداء مختصات قرار دارد. بردار قطبش آن به‌صورت $\mathbf{P} = k\,\mathbf{r}$ است (k مقدار ثابتی است). بارهای القایی را بیابید و نشان دهید که جمع آنها صفر است.

حل:

$$\mathbf{P} = k\,\mathbf{r} = k\,(x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}) \quad \Rightarrow \quad \rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P} = -k\,(1+1+1) = -3k \tag{7-72}$$

بنابراین، بارالقایی حجمی عبارت است از

$$Q_V = \rho_P\left(s^3\right) = -3ks^3 \tag{7-73}$$



شکل ۱۳–۷ مکعب دی‌الکتریک

بارهای القایی سطحی از $\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ به‌دست می‌آیند. از شکل (۱۳–۷) پیداست که سطح بالایی مکعب در $z = s/2$ است. در آنجا $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}}$ است. پس، در روی این سطح داریم: $\sigma_P = k\,(s/2)$. در سطح زیرین $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{k}}$ است و این سطح در $z = -s/2$ است. پس، در روی این سطح هم چگالی بار سطحی القایی $\sigma_P = -k\,(-s/2) = k\,(s/2)$ است. به همین ترتیب، دیده می‌شود که در روی هر شش سطح چگالی بار $\sigma_P = k\,(s/2)$ اند.

درنتیجه، بار کل القایی سطحی برابر است با

$$Q_S = 6\left(k\,\frac{s}{2}\right)s^2 = 3k\,s^3 \tag{7-74}$$

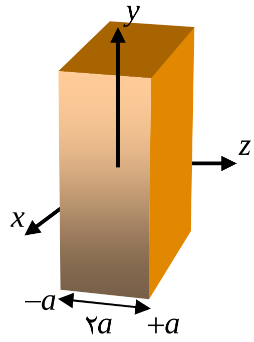
پس: $Q_V + Q_S = ۰$ است.

مثال ۷–۷ صفحه‌ی دی‌الکتریک گسترده: برش دی‌الکتریک به ضخامت $۲a$ در صفحه‌ی zy را در نظر بگیرید. این برش در صفحه‌های xy و xz تا بینهایت ادامه دارد ، شکل (۷–۱٤) . قطبش دی‌الکتریک $\mathbf{P} = \alpha\,\hat{\mathbf{k}}$ است (α مقدار ثابتی است.)

(الف): چگالی بارهای قطبشی حجمی ρ_P و سطحی σ_P را بیابید.

(ب): میدان‌های $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ را در همه جا به دست آورید.

(پ): پتانسیل الکتروستاتیکی را در همه جا حساب کنید.



شکل ۷–۱٤ صفحه‌ی دی‌الکتریک ضخیم

حل: **(الف)** چون بردار قطبش یکنواخت و ثابت است، بنابراین در حجم دی الکتریک

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P} = ۰ \qquad (۷–۷۵)$$

است. البته در بیرون آن $\rho_P = ۰$ است. چگالی بار سطحی در $z = -a$ و $z = -a$ برابر

$$\sigma_P\big|_{z=-a} = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \left(\alpha\,\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(-\hat{\mathbf{k}}\right) = -\alpha \qquad (۷–۷٦)$$

$$\sigma_P\big|_{z=+a} = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \left(\alpha\,\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}\right) = +\alpha \qquad (۷–۷۷)$$

اند.

(ب): چون $\rho_f = ۰$ است، از قانون گوس نتیجه می‌شود که

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = \rho_f = ۰ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = ۰ \qquad (۷–۷۸)$$

از رابطه‌ی (۷–۳۲) داریم

$$\mathbf{D} = \varepsilon_۰\mathbf{E} + \mathbf{P} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\mathbf{P}/\varepsilon_۰ \qquad (۷–۷۹)$$

در نتیجه:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} ۰ & ; \quad |z| > a \\ -\dfrac{\alpha}{\varepsilon_۰}\hat{\mathbf{k}} & ; \quad |z| < a \end{cases} \qquad (۷–۸۰)$$

(پ): فرض کنید در $z = ۰$ پتانسیل $V = ۰$ است. چون $E_z = -\partial V/\partial z$ ، پس:

$$V = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\varepsilon_۰}a & ; \quad z > a \\ \dfrac{\alpha}{\varepsilon_۰}z & ; \quad |z| \le a \\ -\dfrac{\alpha}{\varepsilon_۰}a & ; \quad z < -a \end{cases} \qquad (۷–۸۱)$$

مثال ۷–۸ استوانه‌ی رسانا در درون دی‌الکتریک: استوانه‌ی بسیار دراز رسانا به شعاع قاعده‌ی a و چگالی بار در واحد طول λ برابر شکل (۷–۱۵) در درون محیط دی‌الکتریک خطی با گذردهی ε قرار دارد. میدان الکتریکی را در فاصله‌ی $r > a$ از محور استوانه به‌دست آورید.

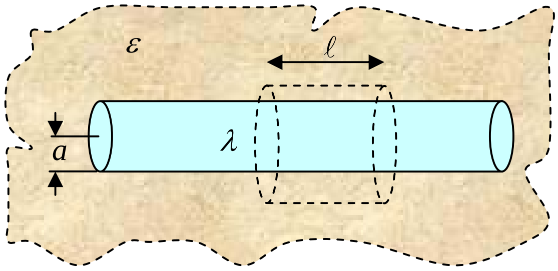
حل: سطح گوسی به شکل استوانه هم‌محور با رسانا به طول ℓ در نظر بگیرید. داریم

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = q_{f_{\text{enc}}} \Rightarrow D\left(۲\pi r\ell = \lambda\ell\right) \qquad (۷-۸۲)$$

بنابراین، به‌دست می‌آید

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r}\hat{\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad r > a} \qquad (۷-۸۳)$$

روشن است که در درون استوانه‌ی رسانا $\mathbf{D} = \mathbf{E} = \mathbf{P} = 0$ اند.

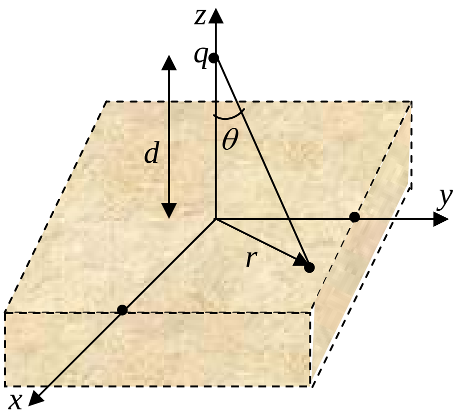


شکل ۱۵-۷ استوانه‌ی رسانا در محیط دی‌الکتریک

مثال ۹-۷ بار نقطه‌ای و دی‌الکتریک [۱]: فرض کنید تمام ناحیه‌ی $z<۰$ همانند شکل (۱۶-۷) با ماده‌ی دی‌الکتریک یکنواخت خطی با پذیرفتاری χ_e پُر شده است. بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی $z=d$ از مبداء مختصات و در بالای سطح دی‌الکتریک قرار دارد. چگالی بار سطحی القایی را در روی دی‌الکتریک در $z=۰$ به‌دست آورید. بار القایی کل را حساب کنید.

حل: بار q در پیرامون خود میدان الکتریکی ایجاد می‌کند. بنابراین، دی‌الکتریک در این میدان خارجی قرار دارد. میدان الکتریکی می‌کوشد دی‌الکتریک را قطبیده کند. پس، علامت بارهای القایی سطحی در روی سطح دی‌الکتریک، در $z=۰$، مخالف علامت بار q است. در نتیجه، نیروی وارد به بار q ربایشی است.(توجه کنید که با توجه به رابطه‌ی (۴۱-۷) در درون دی‌الکتریک بار القایی حجمی وجود ندارد؛ چون در دی‌الکترک بار آزاد وجود ندارد.) چگالی بار القایی سطحی در صفحه‌ی $z=۰$ چیست؟ با استفاده از رابطه‌های (۱۶-۷) و (۲۳-۷) داریم:

$$\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{k} = (\varepsilon_\circ\chi_e\mathbf{E})\cdot\mathbf{k} = \varepsilon_\circ\chi_e E_z \qquad (۷-۸۴)$$



شکل ۱۶-۷ بار در بالای ناحیه‌ی دی‌الکتریک

E_z مولفه‌ی z میدان **کل** درست در زیر سطح بالایی دی‌الکتریک (یعنی در زیر سطح $z=۰$) است. بخشی از این میدان را بارهای القایی سطحی در $z=۰$ و بخش دیگرش را بار q به وجود آورده است. هر دو بخش را می‌توان به سادگی حساب کرد. میدان بارهای القایی سطحی، میدان یک سطح باردار گسترده است. بنابراین،برابر $-\sigma_P/2\varepsilon_\circ$ و در راستای محور z است. مولفه‌ی z میدانی را که بار q در روی سطح $z=۰$ تولید می‌کند، از قانون کولمب به‌دست می‌آید:

$$-\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{\left(r^۲+d^۲\right)}\cos\theta = -\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{\left(r^۲+d^۲\right)}\frac{d}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۱/۲}} = -\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{qd}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}} \qquad (۷-۸۵)$$

در اینجا، $r=\sqrt{x^۲+y^۲}$ است. بنابراین، بار القایی سطحی عبارت است از

$$\sigma_P = \varepsilon_\circ\chi_e E_z = \varepsilon_\circ\chi_e\left[-\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{qd}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}} - \frac{\sigma_P}{۲\varepsilon_\circ}\right] \qquad (۷-۸۶)$$

---

[۱] برگرفته از David J.Griffiths, "Introduction To Electrodynamics" ,2nd ed. ,Printice Hall,1989.

از حل این معادله σ_P به‌دست می‌آید:

$$\sigma_P = -\frac{۱}{۲\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)\frac{qd}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}} \tag{۷-۸۷}$$

با انتگرال‌گیری از σ_P در صفحه‌ی xy در مختصات کارتزی $da = dx\,dy$ می‌توان بار القایی کل را به‌دست آورد. اما اگر از مختصات قطبی استفاده کنیم، انتگرال‌گیری اندکی آسان‌تر می‌شود. در مختصات قطبی داریم $da = r\,dr\,d\theta$ است. بنابراین

$$q_P = \int \sigma_P\,da = -\frac{۱}{۲\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)qd\int\frac{r\,dr\,d\theta}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}$$

$$= -\frac{۱}{۲\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)qd\,(۲\pi)\int\frac{r\,dr}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}} \tag{۷-۸۸}$$

با تغییر متغیر $r^۲+d^۲=u$ و $۲r\,dr=du$ و حدود انتگرال گیری $r=\circ:\to u=d^۲$ و $r=\infty:\to u=\infty$ داریم

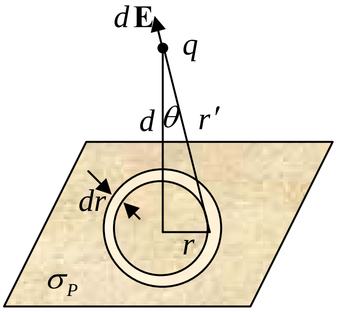
$$q_P = -\frac{۱}{۲\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)qd\,(۲\pi)\int_\circ^\infty\frac{r\,dr}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}} = -\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)qd\left(\frac{۱}{۲}\right)\int_{d^۲}^{\infty}u^{-۳/۲}du$$

$$= -\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)qd\left(\frac{۱}{۲}\right)\left[-۲u^{-۱/۲}\right]_{d^۲}^{\infty} = \left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)qd\left[\circ-\frac{۱}{d}\right] \quad\Rightarrow\quad q_P = -\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)q \tag{۷-۸۹}$$

برای این که نیروی وارد به بار q را حساب کنیم، نخست باید میدان الکتریکی σ_P را در مکان بار q به‌دست آوریم. این کار با با استفاده از قانون کولمب شدنی است. برابر شکل (۷-۱۷) حلقه‌ی دایره‌ای به شعاع r و به ضخامت dr را بعنوان جزء بار در نظر بگیرید. رو.شن است که میدان حلقه به خاطر تقارن، فقط مولفه‌ی z دارد. بنابراین،

$$dE_z = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\frac{\sigma_P\left(۲\pi r\,dr\right)}{r'^۲}\cos\theta = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\frac{\sigma_P\left(۲\pi r\,dr\right)}{r'^۲}\frac{d}{r'} \tag{۷-۹۰}$$

که در آن $r'^۲ = r^۲+d^۲$. اگر از این رابطه انتگرال بگیریم، میدان کل در مکان بار q به دست می‌آید



شکل ۷-۱۷ جزء بار

$$dE_z = \frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\frac{\sigma_P\left(۲\pi r\,dr\right)}{r'^۲}\frac{d}{r'} = \frac{۲\pi}{٤\pi\varepsilon_\circ}\left[-\frac{۱}{۲\pi}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)\frac{qd}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\right]\frac{d\ \ r\,dr}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}$$

$$= -\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)qd^۲\frac{rdr}{\left(r^۲+d^۲\right)^۳} \tag{۷-۹۱}$$

$$\Rightarrow E_z = \int dE_z = -\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)qd^۲\int_\circ^\infty\frac{rdr}{\left(r^۲+d^۲\right)^۳} \tag{۷-۹۲}$$

دوباره از تغییر متغیر $r^۲+d^۲=u$ و $۲r\,dr=du$ استفاده کنید. خواهیم داشت

$$E_z = -\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)qd^{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)\int_{d^{۲}}^{\infty}\frac{du}{u^{۳}} = -\frac{۱}{۸\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)qd^{۲}\left(-\frac{۱}{۲u^{۲}}\right)\Bigg|_{d^{۲}}^{\infty}$$

$$= -\frac{۱}{۸\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)qd^{۲}\left[\circ+\frac{۱}{۲d^{٤}}\right] = -\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)\frac{q}{٤d^{۲}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{E} = -\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)\frac{q}{٤d^{۲}}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۷-۹۳)$$

و سرانجام، نیروی وارد بر بار q عبارت است از

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{\chi_e}{\chi_e+۲}\right)\frac{q^{۲}}{٤d^{۲}}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۷-۹٤)$$

مثال ۱۰-۷ دنیای انباشته با نوع دی‌الکتریک: فرض کنید که در مثال ۹-۷ ناحیه‌ی $z > \circ$ هم با ماده‌ی دی‌الکتریک دیگری به پذیرفتاری χ'_e پر شده باشد و بار q به فاصله‌ی d از سطح تماس دو دی‌الکتریک در درون آن قرار داشته باشد. بارهای القایی سطحی را در روی هر دو دی‌الکتریک به‌دست آورید.

حل: در این مثال چهار گونه بار وجود دارد: (۱) بار q ، (۲) بارهای القایی که پیرامون بار q به‌وجود آمده اند، ρ_P. این‌ها بارهای القایی حجمی در دی‌الکتریک بالایی است. (۳) بار القایی سطحی σ_P در رویه‌ی بالایی دی‌الکتریک زیرین و (٤) بار القایی سطحی σ'_P در سطح پایینی دی‌الکتریک بالایی.

با توجه به رابطه‌ی (٤۱-۷) چگالی بارهای القایی حجمی، بارهای (۲) ، در دی‌الکتریک بالایی عبارت است از

$$\rho_P = -\left(\frac{\chi'_e}{1+\chi'_e}\right)\rho_f \quad\Rightarrow\quad q_P = -\left(\frac{\chi'_e}{1+\chi'_e}\right)q \qquad (۷-۹٥)$$

توجه کنید که چون بار آزاد در دی الکتریک بالایی فقط بار q است که در مکان $(\circ,\circ,d)$ است، بار القایی کل هم در این نقطه قرار دارد. پس، بار کل (نقطه‌ای) در $(\circ,\circ,d)$ عبارت است از

$$q_{\text{tot}} = q + q_P = q - \left(\frac{\chi'_e}{۱+\chi'_e}\right)q = \frac{q}{۱+\chi'_e} = \frac{q}{\kappa'_e} \qquad (۷-۹٦)$$

همانند مثال ۹-۷ ، چگالی بارهای القایی سطحی در روی سطح بالایی دی الکتریک پایینی از $\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = +P_z = \varepsilon_\circ\chi_e E_z$ به‌دست می‌آید

$$\sigma_P = \varepsilon_\circ\chi_e\left[-\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\circ}\frac{qd/\kappa'_e}{\left(r^{۲}+d^{۲}\right)^{۳/۲}} - \frac{\sigma_P}{۲\varepsilon_\circ} - \frac{\sigma'_P}{۲\varepsilon_\circ}\right] \qquad (۷-۹۷)$$

جمله‌ی سوم در داخل قلاب میدان بارهای القایی سطحی دی‌الکتریک بالایی است. هم چنین برای چگالی بارهای القایی سطحی در روی سطح زیرین دی‌الکتریک بالایی با توجه به $\sigma'_P = \mathbf{P}'\cdot\hat{\mathbf{n}} = -P'_z = -\varepsilon_\circ\chi'_e E_z$ داریم

$$\sigma'_P = \varepsilon_\circ\chi'_e\left[\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_\cdot}\frac{qd/\kappa'_e}{\left(r^{۲}+d^{۲}\right)^{۳/۲}} - \frac{\sigma_P}{۲\varepsilon_\circ} - \frac{\sigma'_P}{۲\varepsilon_\circ}\right] \qquad (۷-۹۸)$$

رابطه‌های (۹۷-۷) و (۹۸-۷) را به ترتیب به χ_e و χ'_e تقسیم کنید و سپس از یکدیگر کم کنید

$$\frac{\sigma'_P}{\chi'_e}-\frac{\sigma_P}{\chi_e}=\frac{۱}{۲\pi}\frac{qd/\kappa'_e}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}} \quad \Rightarrow \quad \sigma'_P=\chi'_e\left[\frac{\sigma_P}{\chi_e}+\frac{۱}{۲\pi}\frac{qd/\kappa'_e}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\right] \tag{۷-۹۹}$$

که اگر در رابطه‌ی (۹۷-۷) قرار دهیم و برحسب σ_P حل کنیم، خواهیم داشت

$$\sigma_P=-\frac{۱}{٤\pi}\frac{qd/\kappa'}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\chi_e\left(۱+\chi'_e\right)-\frac{\sigma_P}{۲}\left(\chi_e+\chi'_e\right) \tag{۷-۱۰۰}$$

چون $\kappa'_e=۱+\chi'_e$ ، بنابراین داریم

$$\sigma_P=-\frac{۱}{٤\pi}\frac{qd}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\frac{\chi_e}{\left[۱+\frac{۱}{۲}\left(\chi_e+\chi'_e\right)\right]} \tag{۷-۱۰۱}$$

که اگر در (۹۹-۷) قرار دهیم، σ'_P به صورت زیر به دست می‌آید

$$\sigma'_P=\chi'_e\left\{-\frac{۱}{٤\pi}\frac{qd}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\frac{۱}{\left[۱+\frac{۱}{۲}\left(\chi_e+\chi'_e\right)\right]}+\frac{۱}{۲\pi}\frac{qd/\kappa'}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma'_P=\frac{۱}{٤\pi}\frac{qd}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\frac{\left(\kappa\chi'_e/\kappa'\right)}{\left[۱+\frac{۱}{۲}\left(\chi_e+\chi'_e\right)\right]} \tag{۷-۱۰۲}$$

چگالی بار کل القایی در سطح تماس دو دی‌الکتریک برابر است با

$$\sigma_P^{\text{total}}=\sigma_P+\sigma'_P=\frac{۱}{٤\pi}\frac{qd}{\left(r^۲+d^۲\right)^{۳/۲}}\frac{\left(\chi'_e-\chi_e\right)}{\kappa'_e\left[۱+\frac{۱}{۲}\left(\chi'_e+\chi_e\right)\right]} \tag{۷-۱۰۳}$$

که اگر $\chi'_e=\chi_e$ باشد، صفر می‌شود و باید هم این چنین باشد. با توجه به رابطه‌ی (۸۹-۷) بار کل القایی عبارت است از

$$q_P^{\text{total}}=\frac{\left(\chi'_e-\chi_e\right)}{۲\kappa'_e\left[۱+\frac{۱}{۲}\left(\chi'_e+\chi_e\right)\right]}=\frac{\kappa'_e-\kappa_e}{\kappa'_e+\kappa_e}\frac{q}{\kappa'_e} \tag{۷-۱۰٤}$$

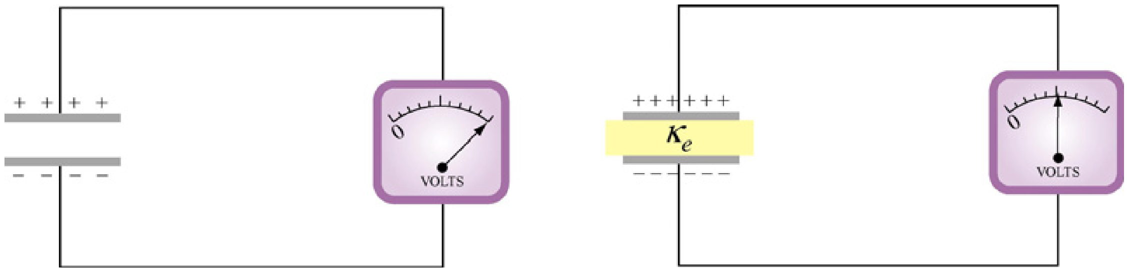
۵-۷ خازن با دی‌الکتریک

اگر در ناحیه‌ای از فضا میدان الکتریکی $\mathbf{E}_۰$ وجود داشته باشد و در این ناحیه ماده‌ی دی‌الکتریک قرار گیرد، بنا به رابطه‌ی (۲٦-۷) میدان در دی‌الکتریک و در نتیجه، در فضا کاهش پیدا می‌کند. در این بخش این پدیده را در رابطه با خازن بررسی می‌کنیم.

۱-۵-۷ خازن گسسته از باتری

خازنی با ظرفیت $C_۰$ را برابر شکل (۱۸-۷) به دو سر باتری با اختلاف پتانسیل $|\Delta V_۰|$ وصل کنید. با این کار خازن باردار می‌شود. مقدار بار خازن برابر $Q_۰=C_۰|\Delta V_۰|$ است . حال باتری را از خازن جدا کنید. خازن هنوز هم بار ثابت $Q_۰$ خواهد

داشت. اینک اگر یک قطعه دی‌الکتریک با ثابت κ_e به فضای بین صفحه‌های خازن وارد کنیم، به تجربه دیده می‌شود که اختلاف



شکل ۱۸-۷ قرار دادن دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن در حالی که بار خازن ثابت است.

پتانسیل صفحه‌های خازن با ضریب κ_e کاهش پیدا می‌کند و به مقدار

$$|\Delta V| = |\Delta V_\circ| / \kappa_e \tag{۷-۱۰۵}$$

می‌رسد. این بدان معنی است که ظرفیت خازن هم تغییر می‌کند و به مقدار زیر تبدیل می‌شود

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q_\circ}{|\Delta V_\circ|/\kappa_e} = \kappa_e C_\circ \tag{۷-۱۰۶}$$

پس، ظرفیت خازن κ_e برابر می‌شود. میدان الکتریکی حالا در فضای بین صفحه‌های خازن برابر است با

$$E = \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{|\Delta V_\circ|/\kappa_e}{d} = \frac{1}{\kappa_e}\left(\frac{|\Delta V_\circ|}{d}\right) = \frac{E_\circ}{\kappa_e} \tag{۷-۱۰۷}$$

که در آن d فاصله‌ی بین صفحه‌های خازن و $E_\circ$ میدان الکتریکی خازن در نبود دی‌الکتریک اند. پس، در حضور دی‌الکتریک، میدان با ضریب κ_e کاهش پیدا می‌کند.

۲-۵-۷ خازن متصل به باتری

آزمایش بالا را تکرار کنید، اما این بار، باتری را متصل به خازن نگه دارید و قطعه‌ی دی‌الکتریک را در فضای بین صفحه‌های خازن قرار دهید. بنابراین، در حالی که دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن قرار می‌گیرد، اختلاف پتانسیل صفحه‌های خازن، $|\Delta V_\circ|$، ثابت می‌ماند؛ شکل (۱۹-۷). به طور تجربی (و نخستین بار توسط فاراده) دیده می‌شود که بار روی صفحه‌های خازن κ_e برابر می‌شود. خواهیم داشت

$$Q = \kappa_e Q_\circ \tag{۷-۱۰۸}$$

شکل ۱۹-۷ قرار دادن دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن در پتانسیل ثابت

ظرفیت خازن تغییر می‌کند و برابر

$$C = \frac{Q}{|\Delta V_\circ|} = \frac{\kappa_e Q_\circ}{|\Delta V_\circ|} = \kappa_e C_\circ \tag{۷-۱۰۹}$$

می‌شود. این همان نتیجه‌ای است که در حالت اول، رابطه‌ی (۷-۱۰۶)، به‌دست آوردیم. علت این که در این حالت بار خازن افزایش می‌یابد، این است که دی‌الکتریک قطبیده می‌شود و در نتیجه، مقداری بار منفی در سطح بالایی و به همان مقدار بار مثبت در سطح پایین دی‌الکتریک القاء می‌شود. این بارهای القایی، مقداری از بارهای $Q_{\circ}$ خازن را خنثی می‌کنند. چون اختلاف پتانسیل ثابت است، باتری ناگزیر است مقداربیشتری بار به صفحه‌های خازن بفرستد.

این آموزه را به گونه‌ی دیگری هم می‌توان دید. به یاد بیاورید که در حالت عمومی $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ است. این را در رابطه‌ی (۷-۳۶) به‌دست آوردیم. اگر در فضای بین صفحه‌های خازن دی‌الکتریک وجود نداشته باشد، میدان برابر $\mathbf{E}_{\circ}$ و $\varepsilon=\varepsilon_{\circ}$ و $\mathbf{D}=\varepsilon_{\circ}\mathbf{E}_{\circ}$ اند. اما اگر فضای بین صفحه‌های خازن با دی‌الکتریک انباشته شود، آنگاه خواهیم داشت

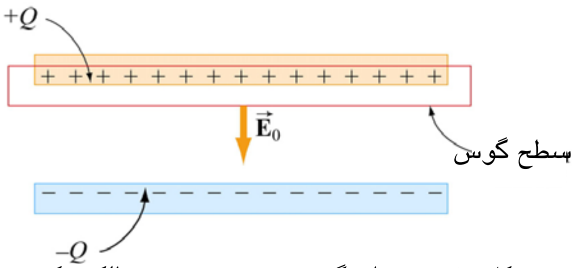
$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon}=\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_{\circ}\kappa_e}=\frac{1}{\kappa_e}\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_{\circ}}=\frac{1}{\kappa_e}\mathbf{E}_{\circ} \qquad (۷-۱۱۰)$$

یعنی، میدان الکتریکی در حضور دی‌الکتریک κ_e برابر کاهش پیدا می‌کند و در نتیجه، اختلاف پتانسیل هم با همین نسبت کاهش پیدا می‌کند. رابطه‌ی زیر این را نشان می‌دهد.

$$|\Delta V|=Ed=\frac{1}{\kappa_e}E_0 d=\frac{1}{\kappa_e}|\Delta V_0| \qquad (۷-۱۱۱)$$

برای این که بارهای القایی در دی‌الکتریک داخل خازن را حساب کنیم، خازن تخت شکل (۷-۲۰) را بدون دی‌الکتریک در نظر بگیرید. در این حالت میدان الکتریکی در فضای بین صفحه‌ها $\mathbf{E}_{\circ}$ است و با استفاده از قانون گوس می‌توان آن را حساب کرد

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\mathbf{E}_{\circ}A=\frac{Q}{\varepsilon_{\circ}} \;\Rightarrow\; E_{\circ}=\frac{\sigma}{\varepsilon_{\circ}} \qquad (۷-۱۱۲)$$



شکل ۷-۲۰ سطح گوس بدون وجود دی‌الکتریک

وقتی همانند شکل (۷-۲۱) دی‌الکتریک در فضای بین صفحه‌ها قرار می‌گیرد، بار القایی Q_P با علامت مخالف در روی سطوح آن به وجود می‌آید و بار خالص در درون سطح گوس $Q-Q_P$ می‌شود. حال، قانون گوس به صورت زیر درمی‌آید:

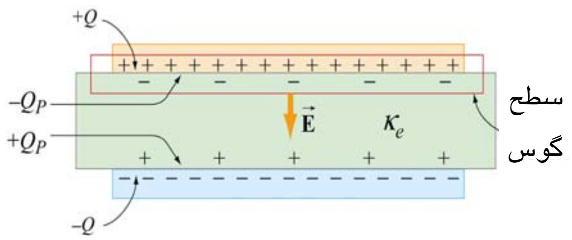
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=EA=\frac{Q-Q_P}{\varepsilon_{\circ}} \Rightarrow E=\frac{Q-Q_P}{\varepsilon_{\circ}A} \qquad (۷-۱۱۳)$$

اما ، در بالا دیدیم که اثر دی‌الکتریک این است که اندازه‌ی میدان الکتریکی اولیه‌ی $\mathbf{E}_{\circ}$ را با ضریب κ_e کاهش می‌دهد. پس، می‌توان نوشت

$$E=\frac{E_{\circ}}{\kappa_e}=\frac{Q}{\kappa_e\varepsilon_{\circ}A}=\frac{Q-Q_P}{\varepsilon_{\circ}A} \qquad (۷-۱۱٤)$$

از این رابطه می‌توان بار القایی Q_P را به دست آورد

$$Q_P=Q\left(1-\frac{1}{\kappa_e}\right) \qquad (۷-۱۱۵)$$



شکل ۷-۲۱ سطح گوس در حضور دی‌الکتریک

حال اگر در رابطه‌ی (۷-۱۱۳) به جای Q_P از رابطه‌ی (۷-۱۱۵) قرار دهیم، قانون گوس به‌صورت زیر درمی‌آید.

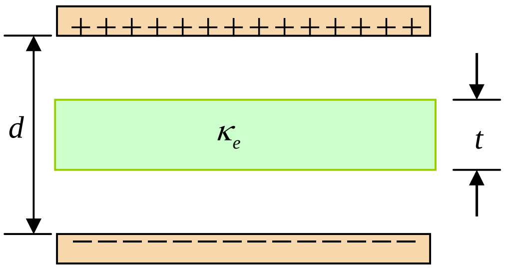
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=\frac{Q}{\kappa_e\varepsilon_{\circ}}=\frac{Q}{\varepsilon_{\circ}(1+\chi_e)}=\frac{Q}{\varepsilon} \qquad (۷-۱۱۷)$$

یا ، می توان نوشت

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = Q \qquad (۷-۱۱۸)$$

که در آن، $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}=\varepsilon_\circ\kappa_e\mathbf{E}=\varepsilon_\circ\left(1+\chi_e\right)\mathbf{E}$ است. در اینجا، البته، Q بارهای آزاد اند که از باتری به خازن منتقل شده‌اند. ما دوباره رابطه‌ی (۷-۳۳) را به‌دست آوردیم.

مثال ۱۱-۷ خازن نیمه‌پر: همانند شکل (۷-۲۲) یک قطعه دی‌الکتریک به ضخامت t ، مساحت A و ثابت دی‌الکتریک κ_e را در فضای بین صفحه‌های خازن تختی به مساحت A، بار Q و فاصله‌ی بین صفحه های d قرار می‌دهیم. دی‌الکتریک لزوما در وسط صفحه‌ها قرار ندارد. ظرفیت سامانه را حساب کنید.

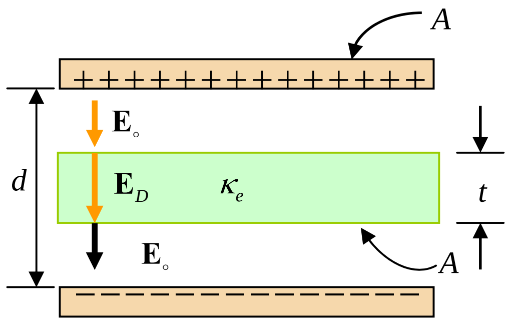


شکل ۷-۲۲ خازن تخت و دی‌الکتریک

حل: برای این که ظرفیت C را حساب کنیم، نخست اختلاف پتانسیل ΔV را به‌دست می‌آوریم. دیدیم که اگر دی‌الکتریک وجود نداشته باشد، میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن $E_\circ=Q/\varepsilon_\circ A$ است. هم‌چنین دیدیم که با وجود دی‌الکتریک میدان الکتریکی برابر $E_D=E_0/\kappa_e$ می‌شود که در شکل (۷-۲۳)می‌توان دید. اختلاف پتانسیل را می‌توان با انتگرال‌گیری از میدان الکتریکی در راستای خط راستی از صفحه‌ی بالا تا صفحه‌ی پایین حساب کرد:

$$\begin{aligned}\Delta V &= -\int_{+}^{-} E\, d\ell = -\Delta V_\circ - \Delta V_D = E_0\left(d-t\right)-E_D t = -\frac{Q}{A\varepsilon_\circ}\left(d-t\right)-\frac{Q}{A\varepsilon_\circ\kappa_e}t \\ &= -\frac{Q}{A\varepsilon_\circ}\left[d-t\left(1-\frac{1}{\kappa_e}\right)\right]\end{aligned} \qquad (۷-۱۱۹)$$

که در آن $\Delta V_D=E_D t$ اختلاف پتانسیل بین دو سطح دی‌الکتریک است و E_D میدان الکتریکی در درون آن است. از این جا نتیجه می‌شود که



شکل ۷-۲۳ خازن نیمه‌پر با دی‌الکتریک

$$C=\frac{Q}{\left|\Delta V\right|}=\frac{\varepsilon_0 A}{d-\left(1-1/\kappa_e\right)t} \qquad (۷-۱۲۰)$$

بررسی چند حالت حدی سودمند است.

(الف): وقتی که ضخامت دی‌الکتریک به صفر میل کند: $t\to\circ$. در این صورت به‌دست می‌آید $C=\varepsilon_\circ A/d=C_\circ$ که مقدار مورد انتظار برای خازن بدون دی‌الکتریک است.

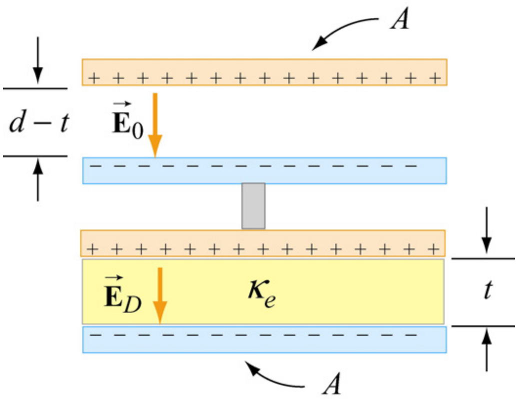
(ب): $\kappa_e\to ۱$: در این حالت هم بازهم داریم $C=\varepsilon_\circ A/d=C_\circ$ این حالت هم متناظر با وضعیتی است که دی‌الکتریک وجود ندارد.

(پ): سرانجام این که $t\to d$ باشد، یعنی تمام فضای بین صفحه‌های خازن با دی‌الکتریک پر شده باشد. در این صورت از رابطه‌ی (۷-۱۲۰) خواهیم داشت $C\to\kappa_e\varepsilon_\circ A/d=\kappa_e C_\circ$. همچنین توجه کنید که این آرایه با دو خازنی که همانند شکل

(۲٤-۷) به طور سری به هم وصل اند، هم‌ارز است.

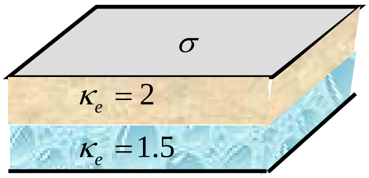
با استفاده از رابطه‌ی (۵۳-٦) می‌توان ظرفیت معادل را به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$\frac{1}{C}=\frac{d-t}{\varepsilon_\circ A}+\frac{t}{\kappa_e\varepsilon_\circ A} \qquad (۷-۱۲۱)$$



شکل ۲٤-۷ آرایه‌ی هم‌ارز

مثال ۱۲-۷ دو دی‌الکتریک در یک خازن تخت: فضای بین صفحه‌های خازن تخت برابر شکل (۲۵-۷) با دو نوع ماده‌ی دی‌الکتریک، هر یک به ضخامت s پرشده است. پس، فاصله‌ی بین صفحه‌های خازن ۲s است. ثابت دی‌الکتریک اول $\kappa_{e_۱}=۲$ و ثابت دی‌الکتریک دوم $\kappa_{e_۲}=۱٫۵$ است. چگالی بار آزاد در روی صفحه‌ی بالایی خازن σ و در روی صفحه‌ی زیرین $-\sigma$ است.



شکل ۲۵-۷ دو دیالکتریک در خازن تخت

(الف): در هر یک از دی‌الکتریک‌ها بردار جابه‌جایی الکتریکی **D** را بیابید.

(ب): در هر یک از دی‌الکتریک‌ها میدان الکتریکی **E** را بیابید.

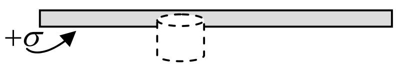
(پ): در هر یک از دی‌الکتریک‌ها بردار قطبش **P** را حساب کنید

(ت): اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن را به دست آورید.

(ج): مکان و اندازه‌ی همه‌ی بارهای القایی را به دست آورید.

(چ): حال که همه‌ی بارها (آزاد و القایی) را می‌شناسید، دی‌الکتریک‌ها را فراموش کنید و با استفاده از بارها دوباره میدان را در هر دی‌الکتریک به دست آورید و با پاسخ بخش (ب) مقایسه کنید.

حل: **(الف)** قانون گوس را برای سطح استوانه‌ای شکل (۲۷-۷) به کار ببرید. داریم



شکل ۲٦-۷ سطح گوس

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a}=q_{f_{\text{enc}}} \Rightarrow DA=\sigma A \quad\Rightarrow\quad D=\sigma \qquad (۷-۱۲۲)$$

A سطح قاعده‌ی استوانه است. جهت D رو به پایین است. توجه کنید که در صفحه‌ی رسانا $D=\circ$ است. در دی‌الکتریک دوم هم وضعیت به همین صورت و $D=\sigma$ است.

(ب):

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E} \Rightarrow \begin{cases} E_۱=\dfrac{۱}{\varepsilon_۱}\sigma=\dfrac{۱}{\varepsilon_\circ\kappa_{e_۱}}\sigma=\dfrac{\sigma}{۲\varepsilon_\circ} & (۷-۱۲۳)\\[2ex] E_۲=\dfrac{۱}{\varepsilon_۲}\sigma=\dfrac{۱}{\varepsilon_\circ\kappa_{e_۲}}\sigma=\dfrac{۲\sigma}{۳\varepsilon_\circ} & (۷-۱۲٤)\end{cases}$$

(پ):

$$\mathbf{P}=\varepsilon_\circ\chi_e\mathbf{E}=\varepsilon_\circ(\kappa_e-۱)\mathbf{E} \Rightarrow \begin{cases} P_۱=\varepsilon_\circ(۲-۱)\dfrac{\sigma}{۲\varepsilon_\circ}=\dfrac{\sigma}{۲} & (۷-۱۲۵)\\[2ex] P_۲=\varepsilon_\circ(۱.۵-۱)\dfrac{۲\sigma}{۳\varepsilon_\circ}=\dfrac{\sigma}{۳} & (۷-۱۲٦)\end{cases}$$

(ت):

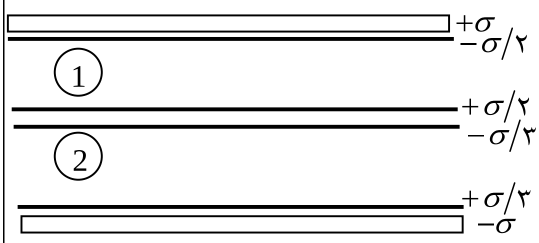
$$\Delta V = E_۱ s + E_۲ s = \left(E_۱ + E_۲\right) s = \frac{\sigma s}{۶\varepsilon_۰}\left(۳+۴\right) = \frac{۷\sigma s}{۶\varepsilon_۰} \qquad (۷-۱۲۷)$$

(ج): چون قطبش P در هر دو دی‌الکتریک مقادیر ثابت اند، $\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\mathbf{P} = ۰$

$$\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} \;\Rightarrow \begin{cases} \sigma_P = P_۱ = \dfrac{\sigma}{۲} & \text{در سطح زیرین دیالکتریک ۱} \quad (۷-۱۲۸) \\ \sigma_P = -P_۱ = -\dfrac{\sigma}{۲} & \text{در سطح بالایی دیالکتریک ۱} \quad (۷-۱۲۹) \\ \sigma_P = P_۲ = \dfrac{\sigma}{۳} & \text{در سطح زیرین دیالکتریک ۲} \quad (۷-۱۳۰) \\ \sigma_P = -P_۲ = -\dfrac{\sigma}{۳} & \text{در سطح بالایی دیالکتریک ۲} \quad (۷-۱۳۱) \end{cases}$$

بنابراین ، توزیع بارها همانند شکل (۲۷-۷) خواهد شد. بار سطحی کل در **بالای** دی‌الکتریک ۱ عبارت است از

$$\sigma + \left(-\sigma/۲\right) = \sigma/۲ \qquad (۷-۱۳۲)$$



شکل ۲۷-۷ مکان بارها

در ناحیه‌ی زیر دی‌الکتریک ۱ بار سطحی کل برابر است با

$$\left(\sigma/۲\right) + \left(-\sigma/۳\right) + \left(+\sigma/۳\right) - \sigma = -\sigma/۲ \qquad (۷-۱۳۳)$$

بنابراین، در بالای ناحیه‌ی ۱ در شکل (۲۷-۷) چگالی بار $+\sigma/2$ و در پایین آن $-\sigma/2$ است. در نتیجه $E_۱ = \sigma/۲\varepsilon_۰$ که همان نتیجه‌ی قسمت (ب) است.

به همین ترتیب، چگالی بار سطحی کل در بالای ناحیه‌ی ۲ عبارت است از

$$\left(+\sigma\right) + \left(-\sigma/۲\right) + \left(+\sigma/۲\right) + \left(-\sigma/۳\right) = ۲\sigma/۳ \qquad (۷-۱۳۴)$$

و در زیر آن، چگالی بار سطحی کل برابر است با

$$\left(+\sigma/۳\right) + \left(-\sigma\right) = -۲\sigma/۳ \qquad (۷-۱۳۵)$$

و در نتیجه، میدان در این ناحیه برابر است با $E_۲ = ۲\sigma/۳$ که بارهم همان پاسخ بخش (ب) است.

۶-۷ شرایط مرزی در سطح دی‌الکتریک

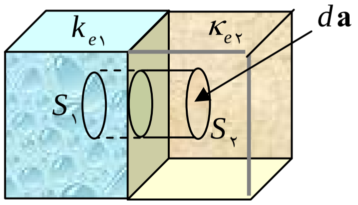
شاید به نظر برسد که چون $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ است، پس میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و بردار جابه‌جایی الکتریکی $\mathbf{D}$ تنها در یک ضریب ε با هم تفاوت دارند. این برداشت نادرست و گمراه کننده است: در حالت عمومی، انتگرال $\mathbf{D}$ روی مسیر بسته صفر نیست، در حالیکه انتگرال میدان الکتروستاتیکی $\mathbf{E}$ روی هر مسیر بسته‌ای صفر است. برای این که تفاوت‌های اساسی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ را بررسی کنیم، نخست به شرایط مرزی می‌پردازیم.

در فصل ۵ دیدیم که مولفه‌ی عمودی میدان الکتریکی در گذار از یک سطح باردار گسسته است اما مولفه‌ی مماسی آن پیوسته است. در شکل (۲۸-۷) سطح بین دو دی‌الکتریک با ثابت‌های $\kappa_{e۱}$ و $\kappa_{e۲}$ نشان داده شده است. نخست حالتی را در نظر بگیرید که **هیچ گونه بار آزاد** در سطح تماس دو دی‌الکتریک وجود **ندارد**.

سطح گوس شکل (۲۸-۷) را در نظر بگیرید و قانون گوس را برای بردار $\mathbf{D}$ بنویسید. شار کل بردار $\mathbf{D}$ که از این سطح می‌گذرد

صفر است، چون این سطح گوس هیچ بار آزادی را احاطه نکرده است.

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = q_f = 0 \qquad (۷-۱۳۶)$$



شکل ۷-۲۸ سطح گوس برای تعیین شرایط مرزی **D**

شار گذرنده از سطح جانبی استوانه‌ی سطح گوس را می‌توانیم صفر فرض کنیم؛ چون فقط به رفتار **D** در سطح دو دی‌الکتریک علاقمندیم و می‌توانیم ارتفاع استوانه را به صفر میل دهیم. سطح قاعده‌ی سمت چپ استوانه را S_1 و سطح قاعده‌ی سمت راست آن را S_2 بنامید، می‌توان نوشت

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = \int_{S_1} \mathbf{D}_1\cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{D}_2\cdot d\mathbf{a}_2 = -\int_{S_1} D_{n1} da_1 + \int_{S_2} D_{n2} da_2 = 0 \qquad (۷-۱۳۷)$$

علامت منفی در مقابل انتگرال سمت چپ مرز دو دی‌الکتریک به این خاطر است که بردار یکه‌ی عمود بر سطح S_1 به سوی چپ و بردار $\mathbf{D}_1$ به سوی راست است. پس، از این رابطه نتیجه می‌شود که

$$D_{n1} = D_{n2} \qquad (۷-۱۳۸)$$

یعنی اگر در مرز دو دی‌الکتریک بار **آزاد وجود نداشته باشد** (اما بار القایی معمولا وجود دارد) *مولفه‌ی عمودی بردار* **D** در *مرز بین دو دی‌الکتریک یکسان و پیوسته است*. توجه کنید که در حالت کلی دلیلی وجود ندارد که، E_n پیوسته باشد؛ زیرا در مرز دو دی‌الکتریک ممکن است چگالی خالص بار سطحی القایی صفر نباشد.

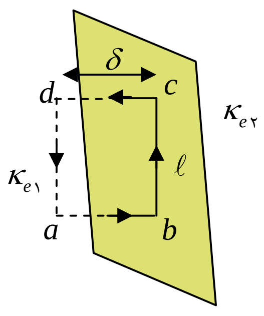
اگر در مرز بین دو دی‌الکتریک بار آزاد وجود داشته باشد، آنگاه داشتیم

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = q_f \quad \Rightarrow \int_{S_1} \mathbf{D}_1\cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{D}_2\cdot d\mathbf{a}_2 = \int_S \sigma_f\, d\mathbf{a}$$

$$= -\int_{S_1} D_{n1} da_1 + \int_{S_2} D_{n2} da_2 = \int_S \sigma_f\, d\mathbf{a} \Rightarrow \quad D_{n2} - D_{n1} = \sigma_f$$

$$\therefore \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}} = \sigma_f \qquad (۷-۱۳۹)$$

حال به بررسی مولفه‌ی افقی می‌پردازیم. در شکل (۷-۲۹) مرز دو دی‌الکتریک نشان داده شده است. مسیر بسته‌ی abcda را چنان انتخاب کنید که نیمی از آن در یک دی‌الکتریک و نیم دیگرش در دی‌الکتریک دوم قرار داشته باشد. انتگرال $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0$ را برای این مسیر حساب کنید.



شکل ۷-۲۹ انتگرال خط برای مولفه‌ی افقی **E** و **D**

$$\int_b^c \mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{s}_1 + \int_d^a \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{s}_2 = \int_b^c E_{t2} d\ell - \int_d^a E_{t1} d\ell = 0 \qquad (۷-۱۴۰)$$

چون bc=da است. توجه کنید که ضلعهای ab و cd سهمی در انتگرال ندارند؛ چون ما فقط به رفتار **E** در مرز دو دی‌الکتریک علاقمندیم و می‌توانیم δ را به صفر میل دهیم. از رابطه‌ی بالا روشن است که

$$E_{t1} = E_{t2} \qquad (۷-۱۴۱)$$

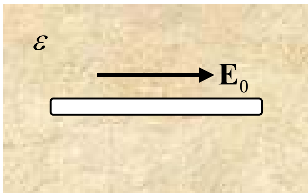
است. اما این به معنی آن نیست که در حالت عمومی $D_{t1} = D_{t2}$ است، زیرا برای بردار **D** داریم

$$\int_b^c \mathbf{D}_1\cdot d\mathbf{s}_1 + \int_d^a \mathbf{D}_2\cdot d\mathbf{s}_2 = \int_b^c D_{t2} d\ell - \int_d^a D_{t1} d\ell = \int_b^c (\varepsilon_2 E_{t2}) d\ell - \int_d^a (\varepsilon_1 E_{t1}) d\ell \neq 0 \qquad (۷-۱۴۲)$$

چون، اگرچه $E_{t1} = E_{t2}$ اند اما در حالت کلی $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ است. به بیان دیگر، در حالت عمومی، انتگرال روی مسیر بسته، بردار

قطبش **P** صفر نیست. پس ، در حالت عمومی $D_{t1} \neq D_{t2}$.

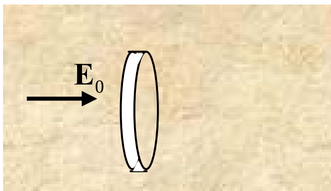
برای این که کاربرد ساده‌ای از این شرایط مرزی را ببینیم، دی‌الکتریکی با گذردهی ε را در نظر بگیرید که میدان الکتریکی در درون آن $\mathbf{E}_\circ$ است. کاواک نازک و درازی (مانند یک سوزن) موازی $\mathbf{E}_\circ$ همانند شکل (۷-۳۰) در دی‌الکتریک ایجاد کنید. میدان الکتریکی در این کاواک خالی چگونه است؟ پاسخ را مستقیم می‌توان از رابطه‌ی (۷-۱۴۱) به‌دست آورد. چون سطح دو انتهای کاواک بسیار کوچک اند، می‌توان از آنها چشم‌پوشی کرد. بنابراین همه‌ی سطح کاواک در راستای طول آن است. در این راستا، اما میدان **E** مماسی و بنابراین، پیوسته است. در نتیجه، میدان در درون کاواک $E_t = E_{\circ t} = E_\circ$ است. در درون کاواک میدان مولفه‌ی عمودی ندارد؛ چون $E_n = \varepsilon E_{\circ n} = \circ$ است. پس، میدان در درون این کاواک با میدان در درون دی‌الکتریک یکسان است (در نزدیکی‌های دو انتهای سوزن این سخن درست نیست و ما از این ناحیه‌ها پرهیز می‌کنیم.)



شکل ۷-۳۰ کاواک سوزنی در دی‌الکتریک

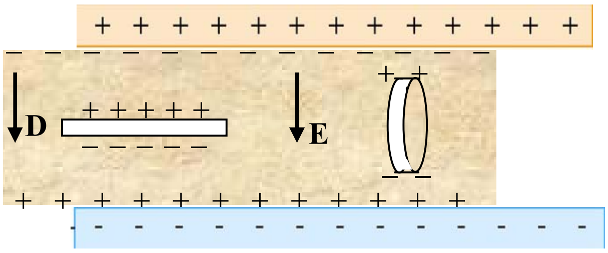
حال فرض کنید که شکل کاواک به جای سوزنی بودن به شکل یک قرص یا یک سکه باشد که سطوح آن همانند شکل (۷-۳۱) بر میدان $\mathbf{E}_\circ$ عمود اند. در این حالت، میدان در درون کاواک چگونه است؟

حالا به تقریب همه‌ی سطح کاواک در دو روی آن قرار دارد (دو روی سکه) و ضخامت سکه سطح ناچیزی است. در سطح رویه‌ها مولفه‌ی عمودی بردار جابه‌جایی ، D_n، پیوسته است. بنابراین، مولفه‌ی عمودی میدان الکتریکی در درون کاواک $E_n = \varepsilon E_{\circ n} = \varepsilon E_\circ$ است. مولفه‌ی افقی میدان در درون کاواک صفر است؛ چون $E_t = E_{\circ t} = \circ$ است. پس، در کاواک سکه‌ای میدان **E** با میدان در دی‌الکتریک برابر است.



شکل ۷-۳۱ کاواک سکه مانند در درون دی‌الکتریک

مثال۱۳ -۷ کاواک در دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن تخت: خازن تخت شکل (۷-۳۲) با دی‌الکتریک انباشته شده است. در این دی‌الکتریک دو کاواک، یکی به صورت یک سوزن دراز که طولش بر میدان درون دی‌الکتریک عمود است. دیگری کاواک سکه مانند است که بردار یکه‌ی عمود بر رویه‌های آن بر میدان الکتریکی درون دی‌الکتریک عمود است (رویه‌ها با میدان **E** موازی اند). میدان الکتریکی را در درون هریک از این دو کاواک به‌دست آورید.



شکل ۷-۳۲ دو کاواک در دی‌الکتریک بین صفحه‌های خازن تخت

حل: در کاواک سمت چپ، مولفه‌ی عمودی بردار **D** پیوسته است. بنابراین، $D_n = D_{cn}$ که در D_{cn} مولفه‌ی عمودی بردار **D** در کاواک است. از مثال ۷-۱۲ ، رابطه‌ی (۷-۱۲۲) می‌دانیم که در دی‌الکتریک $D = \sigma_f$ است (σ_f چگالی بار سطحی خازن است و البته این بار آزاد است) و فقط مولفه‌ی عمودی دارد. پس، در کاواک سمت چپ داریم

$$D_{cn} = D_n = \sigma_f \;\Rightarrow\; \varepsilon_\circ E_{cn} = \sigma_f \qquad \therefore \qquad E_{cn} = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_\circ} \tag{۷-۱۴۳}$$

چون **D** مولفه‌ی افقی ندارد، $D_{ct} = D_t = \circ$ است. پس، در کاواک سمت چپ شکل (۷-۳۲) بردار $\mathbf{D}_c$ با بردار **D** در دی‌الکتریک

برابر است. روشن است که میدان الکتریکی در این کاواک باید با ضریب $\kappa_e = \varepsilon/\varepsilon_\circ$ از میدان در دی‌الکتریک بزرگ‌تر باشد. به سادگی می‌توان این را دید: در دی‌الکتریک، میدان الکتریکی $E = D/\varepsilon = \sigma_f/\varepsilon = (\sigma_f + \sigma_P)/\varepsilon_\circ$ است. بنابراین، داریم

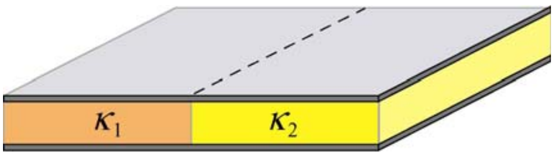
$$\frac{E_c}{E} = \frac{\sigma_f/\varepsilon_\circ}{\sigma_f/\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_\circ} = \kappa_e \quad \Rightarrow E_c = \kappa_e E \qquad (۷-۱۴۴)$$

در کاواک سکه مانند سمت راست شکل (۷-۳۲) بارهای القایی کل در لبه‌های سکه قرار دارند و چون سطح لبه‌ها کوچک اند، این مقدار بار بسیار اندک است و می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. در نتیجه، میدان در درون این کاواک عبارت است از

$$\mathbf{E}_n = \frac{\sigma_f + \sigma_P}{\varepsilon_\circ} \qquad (۷-۱۴۵)$$

که همان میدان در دی‌الکتریک است.

مثال ۱۴-۷ خازن با دو دی‌الکتریک: نیمی از فضای بین صفحه‌های خازن تخت را دی‌الکتریکی با ثابت κ_1 و نیم دیگرش را دی‌الکتریکی با ثابت κ_2 برابر شکل (۷-۳۳) پر شده است. مساحت صفحه‌ی خازن A و جدایی بین صفحه‌ها d است. ظرفیت آرایه را بیابید.



شکل۷-۳۳ خازن تخت با دو نوع دی‌الکتریک

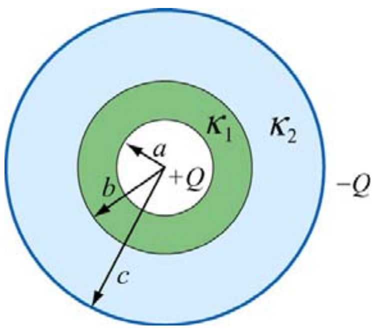
حل : چون اختلاف پتانسیل در هر دو نیمه‌های خازن یکسان است، می‌توان مجموعه را دو خازن با ظرفیت‌های C_1 و C_2 درنظر گرفت که موازی بسته شده‌اند. ظرفیت هر یک از این خازن‌ها برابر است با

$$C_i = \frac{\kappa_i \varepsilon_\circ (A/2)}{d} \quad , \quad i = 1,2 \qquad (۷-۱۴۶)$$

بنابراین، ظرفیت معادل آنها عبارت است از

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\kappa_1 \varepsilon_\circ (A/2)}{d} + \frac{\kappa_2 \varepsilon_\circ (A/2)}{d} = \frac{\varepsilon_\circ A}{2d}(\kappa_1 + \kappa_2) \qquad (۷-۱۴۷)$$

مثال ۱۵ خازن کروی با دو دی‌الکتریک: فضای بین دو کره‌ی رسانا به شعاع‌های a و c برابر شکل (۷-۳۴) از a تا b با دی‌الکتریکی با ثابت‌های κ_1 و از b تا c با دی‌الکتریکی با ثابت κ_2 انباشته شده است. ظرفیت این سامانه را حساب کنید.



شکل ۷-۳۴ خازن کروی با دو دی‌الکتریک

حل: این سامانه همانند دو خازن است که به طور سری به هم بسته شده‌اند؛ چون اختلاف پتانسیل، جمع اختلاف پتانسیل‌های دو خازن است. ظرفیت یک خازن کروی با شعاع داخلی r_1 و شعاع بیرونی r_2 که با دی‌الکتریکی با ثابت κ_e پر شده باشد، برابر

$$C = 4\pi\varepsilon_\circ \kappa_e \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right) \qquad (۷-۱۴۸)$$

است. بنابراین، ظرفیت معادل برابر است با

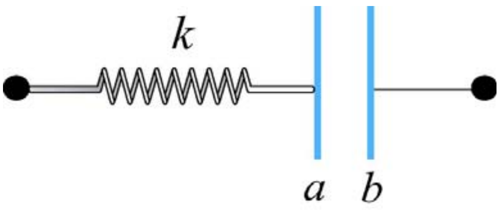
$$\frac{1}{C}=\frac{1}{\dfrac{4\pi\varepsilon_0\kappa_1 ab}{(b-a)}}+\frac{1}{\dfrac{4\pi\varepsilon_0\kappa_2 bc}{(c-b)}}=\frac{\kappa_2 c(b-a)+\kappa_1 a(c-b)}{4\pi\varepsilon_0\kappa_1\kappa_2 abc}\quad\Rightarrow\quad C=\frac{4\pi\varepsilon_0\kappa_1\kappa_2 abc}{\kappa_2 c(b-a)+\kappa_1 a(c-b)}\qquad (۷-۱۴۹)$$

خوب است که حد $\kappa_1\to 1$ و $\kappa_2\to 1$ را بیازماییم. در این حالت، رابطه‌ی بالا به رابطی زیر کاهش می‌یابد.

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0 abc}{c(b-a)+a(c-a)}=\frac{4\pi\varepsilon_0 abc}{b(c-a)}=\frac{4\pi\varepsilon_0 ac}{(c-a)}\qquad (۷-۱۵۰)$$

که با پاسخی که در رابطه‌ی (۶-۶۵) برای خازن کروی به شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b به‌دست آوردیم، سازگار است.

مثال ۱۶-۷ خازن و فنر: خازنی را در نظر بگیرید که برابر شکل (۳۵-۷) به یک صفحه‌ی آن فنری با ثابت نیروی k وصل است و صفحه‌ی دیگرش ثابت است. این سامانه در روی میزی قرار دارد. اگر بار $+Q$ را روی صفحه‌ی a و بار $-Q$ را روی صفحه‌ی b خازن قرار دهیم، فنر چه مقدار کشیده می‌شود؟



شکل ۳۵-۷ خازن و فنر

حل: نیرویی که فنر به صفحه‌ی a وارد می‌کند، برابر است با

$$\mathbf{F}_s=-kx\,\hat{\mathbf{i}}\qquad (۷-۱۵۱)$$

هم‌چنین، میدان حاصل از بارهای صفحه‌ی b به بارهای صفحه‌ی a نیروی الکتروستاتیکی $\mathbf{F}_e$ وارد می‌کنند. این نیرو عبارت است از

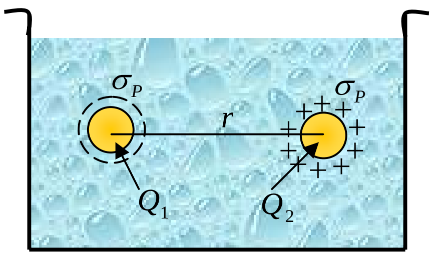
$$\mathbf{F}_e=QE\,\hat{\mathbf{i}}=Q\left(\sigma/2\varepsilon_0\right)\hat{\mathbf{i}}=\frac{Q^2}{2A\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}}\qquad (۷-۱۵۲)$$

که در آن A مساحت صفحه‌ی خازن است. توجه کنید که بارهای روی صفحه‌ی a ، بنا به قانون سوم نیوتون، نمی‌توانند به خودشان نیرو وارد کنند؛ به این خاطر فقط نیروی بارهای صفحه‌ی b در نظر گرفته شد. در حالت ترازمندی، $\mathbf{F}_e$ و $\mathbf{F}_s$ باید باهم برابر و در خلاف جهت یکدیگر باشتد تا همدیگر را حذف کنند. پس:

$$kx=Q\left(\frac{Q}{2A\varepsilon_0}\right)\quad\Rightarrow\quad x=\frac{Q^2}{2kA\varepsilon_0}\qquad (۷-۱۵۳)$$

۷-۷ نیروی بین بارها در محیط دی‌الکتریک

یکی از اثرهای مهم دی‌الکتریک، ایجاد تغییر در نیروی بین بارهای الکتریکی است. حالت ساده‌ای را در نظر بگیرید که دو کره‌ی رسانای کوچک با بارهای Q_1 و Q_2 برابر شکل (۳۶-۷) در یک مایع دی‌الکتریک با ثابت κ_e قرار دارند. فرض کنید فاصله‌ی کره‌ها r است. می‌خواهیم میدان الکتریکی را در فاصله‌ی r از بار Q_1، با در نظر گرفتن بارهای القایی پیرامون Q_1 ، حساب کنیم. پس از یافتن این میدان، نیروی وارد به بار Q_2 را می‌توان به‌دست آورد.



شکل ۳۶-۷ دو کره‌ی کوچک باردار در مایع دی‌الکتریک

ساده‌ترین راه، محاسبه‌ی D در فاصله‌ی r است. سطح گوسی به شکل کره‌ی به شعاع r و به مرکز بار Q_1 انتخاب کنید. از قانون گوس برای دی‌الکتریک داریم

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a}=Q_1\quad\Rightarrow\quad D\left(4\pi r^2\right)=Q_1$$

$$D=\frac{Q_1}{4\pi r^2}=\varepsilon E=\varepsilon_0\kappa_e E\qquad (۷-۱۵۴)$$

بنابراین، میدان الکتریکی E (در نبود بار Q_2) در فاصله‌ی r برابر است با

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{Q_1}{\kappa_e r^2} \qquad (۷-۱۵۵)$$

بار دوم Q_2 وقتی در دی‌الکتریک قرار می‌گیرد، همانند بار Q_1، مایع را در پیرامون خودش قطبیده می‌کند. اما، اثر این قطبش تولید بارهای قطبشی با تقارن کروی در پیرامون بار Q_2 است و تاثیری در نیروی وارد بر Q_2 ندارد. بنابراین، نیروی کل وارد به بار Q_2 عبارت است از

$$F = Q_2 E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{Q_1 Q_2}{\kappa_e r^2} \qquad (۷-۱۵۶)$$

در این مثال فرض کردیم که هر دو بار Q_1 و Q_2 به حجمی محدود شده اند که در مقایسه با r بسیار کوچک اند. در غیر این صورت نباید انتظار داشته باشیم که قانون عکس مجذور فاصله (حتی در خلاء) برقرار باشد. نتیجه‌ی بالا در این حالت حدی این گونه است که نیروی بین بارهای نقطه‌ای در محیط دی‌الکتریک با ضریب $1/\kappa_e$ نسبت به خلاء کاهش می‌یابد. اگر چه رابطه‌ی (۷-۱۵۶) فقط برای بارهای نقطه‌ای درست است، اما کاهش پیدا کردن نیروی بین بارها مستقل از اندازه‌ی و شکل بار است.

۷-۷ انرژی در سامانه‌های دی‌الکتریک

در فصل ۵ دیدیم که در خلاء چگالی انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی به صورت زیر است

$$u_E = \frac{\varepsilon_\circ}{2}E^2 \qquad (۷-۱۵۷)$$

این رابطه در محیط دی‌الکتریک به چه صورت درمی‌آید؟ پاسخ این پرسش را می‌توان از مقایسه‌ی انرژی ذخیره شده در یک خازن با دی‌الکتریک و بدون دی‌الکتریک به‌دست آورد. می‌دانیم که برای باردار کردن یک خازن باید کار انجام داد. فرض کنید، خازنی با ظرفیت C را به یک باتری با اختلاف پتانسیل V وصل کرده‌ایم. انرژی ذخیره شده در این خازن برابر است با

$$W = \frac{1}{2}CV^2 \qquad (۷-۱۵۸)$$

حال اگر اختلاف پتانسیل را ثابت نگه داریم (بنابراین، میدان $\mathbf{E}$ ثابت باشد) و یک قطعه دی‌الکتریک با ثابت κ_e را بین صفحه‌های خازن قرار دهیم، ظرفیت خازن تغییر و به مقدار $C' = \kappa_e C$ افزایش پیدا خواهد کرد. انرژی ذخیره شده در خازن با رابطه‌ی (۷-۱۵۸) داده شده است، بنابراین، انتظار داریم که انرژی خازن دارای دی‌الکتریک برابر

$$W' = \frac{1}{2}C'V^2 = \frac{1}{2}\left(\kappa_e C\right)V^2 = \kappa_e W \qquad (۷-۱۵۹)$$

باشد. بنابراین، در پتانسیل ثابت، با افزودن دی‌الکتریک به خازن، انرژی ذخیره شده در آن از W به $W' = \kappa_e W$ افزایش می‌یابد. به بیان دیگر، برای باردار کردن خازن دارای دی‌الکتریک در اختلاف پتانسیل ثابت، باید کار بیشتری انجام داد . این کار را باتری با فرستادن بارهای بیشتر به صفحه‌های خازن انجام می‌دهد. چون، اثر بخشی از بارهای آزاد با بارهای القایی در سطح دی‌الکتریک خنثی می‌شود و برای این که اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن ثابت بماند، باتری کار بیشتری هزینه می‌کند. این کار در خازن ذخیره می‌شود. κ_e برابر شدن انرژی در خازن انباشته از دی‌الکتریک به این معنی است که چگالی انرژی هم نسبت به حالت خلاء κ_e برابر افزایش پیدا می‌کند. پس می‌توان نوشت

$$u'_E = \kappa_e u_E = \kappa_e\left(\frac{\varepsilon_\circ}{2}\right)E^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_\circ}\left(\frac{\varepsilon_\circ}{2}\right)E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E\right)E = \frac{1}{2}DE \qquad (۷-۱۶۰)$$

انرژی کل ذخیره شده در خازن دارای دی‌الکتریک عبارت است از

$$W' = \frac{\varepsilon_\circ}{۲}\int \kappa_e E^۲ d\tau = \frac{\varepsilon_\circ}{۲}\int \kappa_e \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\, d\tau = \frac{۱}{۲}\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\, d\tau \qquad (۷-۱۶۱)$$

البته، انتگرال روی تمام فضا گرفته می‌شود. این مقایسه بر پایه‌ی میدان‌های یکسان در خلاء ودر دی‌الکتریک بود. اگر خازن را با بار Q باردار کنیم و آن از باتری جدا کنیم و سپس قطعه‌ی دی‌الکتریک را در درون آن قرار دهیم، انرژی ذخیره شده در خازن کاهش می‌یابد. در این حالت، بار Q را ثابت نگه می‌داریم، اما با افزودن دی‌الکتریک، اختلاف پتانسیل خازن تغییر می‌کند. بنابراین، در این حالت می‌توان نوشت

انرژی خازن بدون دی‌الکتریک (۷-۱۶۲)

$$W = \frac{۱}{۲}\frac{Q^۲}{C}$$

انرژی خازن با دی‌الکتریک (۷-۱۶۳)

$$W' = \frac{۱}{۲}\frac{Q^۲}{\kappa_e C}$$

برای ثابت= Q (۷-۱۶۴)

$$\Rightarrow \quad W' = \frac{۱}{\kappa_e} W$$

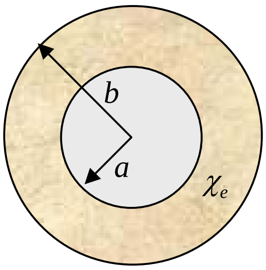
مثال ۱۷-۷ انرژی کره‌ی پوشیده در دی‌الکتریک: کره‌ی رسانایی به شعاع a برابر شکل (۳۷-۷) تا شعاع b با ماده‌ی دی‌الکتریک خطی با پذیرفتاری χ_e پوشانده شده است. انرژی این آرایه را حساب کنید.

حل: از مثال ۲-۷ ، رابطه‌های (۴۲-۷) و (۴۳-۷) داریم

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \circ & ; \quad r < a \\ \dfrac{Q}{۴\pi r^۲}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r \geq a \end{cases} \qquad (۷-۱۶۵)$$

بنابراین، میدان الکتریکی در ناحیه‌های $r < a$ ، $a < r < b$ و $r > b$ عبارتند از

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \circ & ; \quad r < a \\ \dfrac{Q}{۴\pi\varepsilon r^۲}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad a < r < b \\ \dfrac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r > b \end{cases} \qquad (۷-۱۶۶)$$



شکل ۳۷-۷ کره‌ی رسانا با پوشش دی‌الکتریک

حال می‌توان انرژی را حساب کرد. از رابطه‌ی (۱۶۱-۷) داریم

$$W = \frac{۱}{۲}\int_\infty \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\, d\tau = \frac{۱}{۲}\frac{Q^۲}{(۴\pi)^۲}(۴\pi)\left\{\frac{۱}{\varepsilon}\int_a^b \frac{۱}{r^۲}\frac{۱}{r^۲} r^۲ dr + \frac{۱}{\varepsilon_\circ}\int_b^\infty \frac{۱}{r^۲}\frac{۱}{r^۲} r^۲ dr\right\}$$

$$= \frac{Q^۲}{۸\pi}\left\{\frac{۱}{\varepsilon}\left(-\frac{۱}{r}\right)\Bigg|_a^b + \frac{۱}{\varepsilon_\circ}\left(-\frac{۱}{r}\right)\Bigg|_b^\infty\right\} = \frac{Q^۲}{۸\pi\varepsilon_\circ}\left\{\frac{۱}{(۱+\chi_e)}\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\right)+\frac{۱}{b}\right\} = \frac{Q^۲}{۸\pi\varepsilon_\circ(۱+\chi_e)}\left[\frac{۱}{a}+\frac{\chi_e}{b}\right] \qquad (۷-۱۶۷)$$

۷-۸ نیروی وارد به دی‌الکتریک

اگر یک قطعه دی‌الکتریک در میدان الکتریکی قرار گیرد، به آن نیروی الکتریکی ربایشی وارد می‌شود؛ چون بارهای القایی در نزدیکی بارهای آزاد با علامت مخالف جمع می‌شوند و بارهای ناهم‌نام یکدیگر را می‌ربایند.

محاسبه‌ی این نیرو در بسیاری موارد دشوار و پیچیده است. در این بخش خواهیم دید که اگر تغییر انرژی سامانه را بتوان حساب کرد، بدون نیاز به محاسبات پیچیده، می‌توان نیروی وارد به دی‌الکتریک را هم یافت.

انرژی سامانه به این دلیل تغییر می‌کند که با قرار گرفتن دی‌الکتریک در میدان الکتریکی، بارهای القایی تولید می‌شود. بگذارید نخست، این تغییر انرژی را برای حالت خاصی بررسی کنیم و سپس حالت عمومی را در نظر بگیریم.

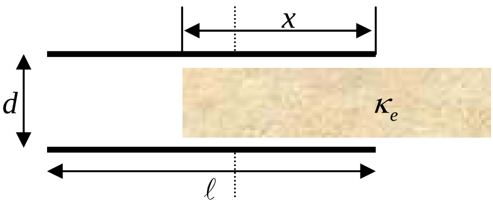
وقتی دی‌الکتریک در بین صفحه‌های خازن قرار می‌گیرد، انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی تغییر می‌کند. اگر اختلاف پتانسیل صفحه‌های خازن ثابت نگه داشته شود ، میدان الکتریکی هم در فضای بین صفحه‌های خازن ثابت می‌ماند. اما انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی افزایش پیدا می‌کند. اگر بار در روی صفحه‌های خازن ثابت نگه داشته شود، انرژی در میدان الکتریکی کاهش می‌یابد. پرسش جالب این است که انرژی از کجا فراهم می‌شود و در کجا از دست می‌رود؟

می‌توان از اصل کار مجازی استفاده کرد و به این پرسش پاسخ داد. نخست حالتی را در نظر بگیرید که در یک خازن منزوی، اختلاف پتانسیل V (یا میدان E) ثابت نگه داشته می‌شود. معادله‌ای که حساب کار و انرژی را نگه می‌دارد، عبارت است از

$$dU = -F_e\,dx + V dQ \qquad (۷-۱۶۸)$$

که در آن F_e نیرویی است که میدان الکتریکی به دی‌الکتریک وارد می‌کند. جمله‌ی $V\,dQ$ به این خاطر است که برای ثابت نگه داشتن اختلاف پتانسیل، باید بار اضافی به خازن منتقل کنیم. بنابراین، با جابه‌جایی dx دی‌الکتریک به درون خازن، ظرفیت خازن افزایش پیدا می‌کند و هم‌زمان با آن باتری بار dQ را در پتانسیل V به خازن منتقل می‌کند.

برای این که نیروی F را بیابیم، کافی است dU و $V\,dQ$ را برحسب مقدار جابه‌جایی dx دی‌الکتریک بنویسیم و سپس از معادله‌ی (۷-۱۶۸) F را حساب کنیم. برای این کار، با $U = (۱/۲)QV$ آغاز می‌کنیم. چون V ثابت است ، می‌توان Q را برحسب V و C نوشت. در شکل (۷-۳۸) وضعیتی با خازن تخت نشان داده شده است. این شکل همانند دو خازن موازی است که در درون یکی دی‌الکتریک وجود دارد و دیگری خلاء است. اگر A سطح ناحیه‌ی خلاء و A' سطح با دی‌الکتریک باشد، ظرفیت این خازن عبارت است از



شکل ۷-۳۸ دی‌الکتریک و خازن

$$C = \frac{\varepsilon_\circ A}{d} + \frac{\kappa_e \varepsilon_\circ A'}{d} \qquad (۷-۱۶۹)$$

که در آن d فاصله‌ی بین صفحه‌های خازن است. اگر پهنای صفحه‌های خازن b باشد، داریم

$$C = \frac{\varepsilon_\circ b}{d}\left(\kappa_e x + \ell - x\right) \qquad (۷-۱۷۰)$$

ℓ طول صفحه‌ی خازن است. چون $Q = CV$ است، می‌توان نوشت

$$Q = \frac{\varepsilon_\circ bV}{d}\left(\kappa_e x + \ell - x\right) \quad \Rightarrow \quad dQ = \frac{\varepsilon_\circ bV}{d}\left(\kappa_e - ۱\right)dx \qquad (۷-۱۷۱)$$

با توجه به این که

$$U = \frac{۱}{۲}VQ \quad \Rightarrow \quad dU = \frac{۱}{۲}V\,dQ = \frac{۱}{۲}\frac{V^{۲}\varepsilon_\circ b}{d}\left(\kappa_e - ۱\right)dx \qquad (۷-۱۷۲)$$

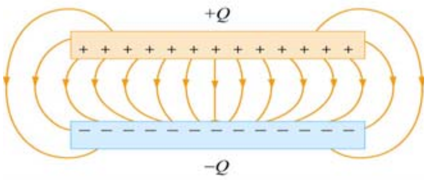
است، اینک رابطه‌ی (۱۶۸-۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$F_e\,dx = -dU + V\,dQ = -\frac{۱}{۲}\frac{V^{۲}\varepsilon_۰ b}{d}(\kappa_e - ۱)dx + \frac{V^{۲}\varepsilon_۰ b}{d}(\kappa_e - ۱)dx \quad\Rightarrow\quad F_e = \frac{۱}{۲}\frac{V^{۲}\varepsilon_۰ b}{d}(\kappa_e - ۱) \qquad (۷-۱۷۳)$$

چون F_e مثبت است، جهتش، در جهت افزایش x است و بنابراین، دی‌الکتریک به وسیله‌ی نیروی الکتریکی به درون خازن **کشیده** می‌شود. نیمی از کار که باتری خرج می‌کند هزینه‌ی افزایش انرژی ذخیره شده در خازن و نیمی دیگر صرف کشیدن دی‌الکتریک به درون خازن می‌شود.

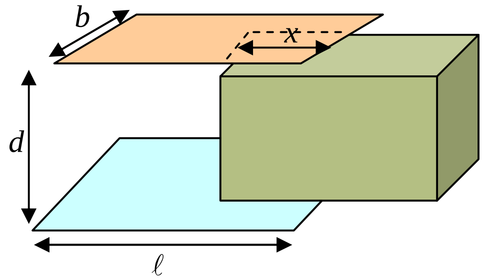
در حالتی که بار روی خازن ثابت است، با وجود دی‌الکتریک انرژی خازن کاهش پیدا می‌کند. در این حالت، کاری که میدان الکتریکی خرج می‌کند تا دی‌الکتریک را به درون خود بکشد، با کاهش انرژی ذخیره شده در میدان خازن تامین می‌شود.

مسئله را می‌توان کلی‌تر از این بررسی کرد. ما همواره فرض کرده‌ایم که میدان الکتریکی بین صفحه‌های خازن تخت یکنواخت و در بیرون آن صفر است. اگر واقعا این گونه می‌بود، به قطعه‌ی دی‌الکتریک نیرو وارد نمی‌شد. واقعیت این است که در کنار لبه‌های خازن خطهای میدان خمیده می‌شوند و یک مولفه‌ی افقی هم پیدا می‌کنند. در شکل (۳۹-۷) خطهای میدان در یک خازن تخت نشان داده شده است. میدان خمیده در لبه‌ها نا یکنواخت است و میدان‌های **چتری** نامیده می‌شوند. محاسبه‌ی میدان‌های چتری دشوار و پیچیده است، اما روش ابتکاری زیر ما را از این دشواری می‌رهاند.



شکل ۳۹-۷ میدان‌های چتری در خازن

خازن تخت شکل (۴۰-۷) را در نظر بگیرید که طول و پهنای صفحه‌های آن به ترتیب ℓ و b است و فاصله‌ی بین صفحه‌ها d است. یک قطه ماده‌ی دی‌الکتریک را تصور کنید که بخشی از آن در درون خازن قرار دارد. انرژی این سامانه را U بنامید. همان‌گونه که در بالا دیدیم، این انرژی به هم‌پوشی خازن و دی‌الکتریک، x ، بستگی دارد. اگر دی‌الکتریک را به اندازه‌ی کوچک dx به بیرون بکشیم، انرژی سامانه به اندازه‌ی کاری که در این جابه‌جایی انجام می‌گیرد، تغییر می‌کند. فرض کنید، دی‌الکتریک را با نیروی F_s چنان جابه‌جا می‌کنیم که شتاب پیدا نکند. یعنی نیروی F_s با نیروی الکتروستاتیکی F_e که آن را به درون خازن می‌کشد، از نظر اندازه برابر باشد تا از افزایش انرژی جنبشی جلوگیری شود. پس، $F_s = -F_e$ است. کار ما در جابه‌جایی دی‌الکتریک به اندازه‌ی dx (یا تغییرانرژی سامانه) عبارت است از



شکل ۴۰-۷ دی‌الکتریک دربین صفحه‌های خازن

$$dU = F_s\,dx \qquad (۷-۱۷۴)$$

در نتیجه، نیروی الکتروستاتیکی F_e وارد به قطعه‌ی دی‌الکتریک برابر است با

$$F = -\frac{dU}{dx} \qquad (۷-۱۷۵)$$

پس، اگر تغییر انرژی سامانه را بتوانیم حساب کنیم، نیروی الکتروستاتیکی وارد به دی‌الکتریک هم به‌دست می‌آید.

انرژی ذخیره شده در خازن عبارت است از

$$U = \frac{۱}{۲}CV^{۲} \qquad (۷-۱۷۶)$$

و ظرفیت خازن در رابطه‌ی (۱۷۰-۷) داده شده است:

$$C = \frac{\varepsilon_\circ b}{d}\left(\kappa_e x + \ell - x\right) = \frac{\varepsilon_\circ b}{d}\left(\ell + \chi_e x\right) \tag{۷-۱۷۷}$$

چون در اینجا خازن در اختلاف پتانسیل ثابت قرار ندارد، با حرکت دی‌الکتریک پتانسیل تغییر می‌کند؛ اما بار آزاد Q مو.جود در خازن ثابت می‌ماند. چون $Q = CV$ است ، رابطه‌ی (۱۷۶-۷) برحسب Q به صورت

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{۷-۱۷۸}$$

درمی‌آید. تنها چیزی که در این رابطه به مقدار جابه‌جایی دی‌الکتریک بستگی دارد، ظرفیت C است. بنابراین،

$$F_e = -\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} \tag{۷-۱۷۹}$$

از طرفی، می‌توان dC/dx را از رابطه‌ی (۱۷۷-۷) حساب کرد و در رابطه‌ی (۱۷۹-۷) قرار دار. پس، برای F_e خواهیم داشت

$$\frac{dC}{dx} = \frac{\varepsilon_\circ b \chi_e}{d} \qquad \Rightarrow \qquad F_e = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_\circ b \chi_e}{d}V^2 \tag{۷-۱۸۰}$$

توجه کنید که در این رابطه V اختلاف پتانسیل نهایی صفحه‌های خازن است. هم‌چنین توجه کنید که برای محاسبه‌ی dU/dx ، یا نیروی F_e، از رابطه‌ی (۱۷۶-۷) استفاده نکردیم، چون در این رابطه V یک متغیر است. به جای آن از رابطه‌ی (۱۷۸-۷) سود بردیم. اگر از رابطه‌ی (۱۷۶-۷) استفاده می‌کردیم پاسخ به صورت زیر می‌شد:

$$F_e = -\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon_\circ b \chi_e}{d} \tag{۷-۱۸۱}$$

که در یک علامت منفی با رابطه‌ی (۱۸۰-۷) اختلاف دارد و جهت نادرستی برای نیروی الکتریکی به‌دست می‌دهد. در آغاز این بخش نشان دادیم که می‌توان اختلاف پتانسیل را ثابت نگه داشت و از رابطه‌ی (۱۷۶-۷) برای یافتن نیروی F_e استفاده کرد. اما برای این کار لازم است که خازن به یک باتری وصل شود. در این صورت، سامانه از باتری بعلاوه‌ی خازن و قطعه‌ی دی-الکتریک تشکیل می‌شود و باید در انرژی U سامانه سهم باتری را هم به‌حساب آوریم. این همان کاری است که در رابطه‌ی (۱۶۸-۷) انجام دادیم. بگذارید یک بار دیگر آن را تکرار کنیم. تغییر انرژی سامانه عبارت است از کاری که ما در جابه‌جایی قطعه‌ی دی‌الکتریک انجام می‌دهیم بعلاوه‌ی کاری که باتری انجام می‌دهد تا بارهای اضافی را به خازن منتقل کند (و اختلاف پتانسیل را ثابت نگه دارد).

$$dU = F_S dx + V\ dQ = -F_e dx + V\ dQ \tag{۷-۱۸۲}$$

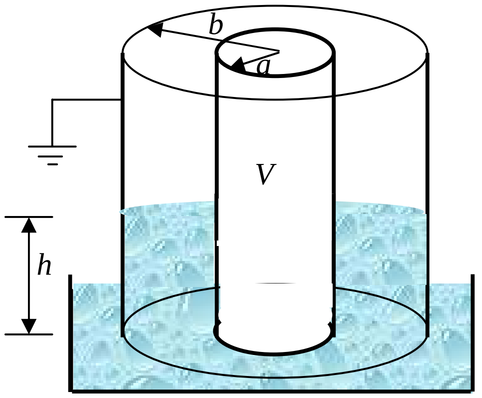
و از این رابطه نتیجه می‌شود که

$$F_e = -\frac{dU}{dx} + V\frac{dQ}{dx} = -\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} + V^2\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon_\circ b \chi_e}{d} \tag{۷-۱۸۳}$$

که همان پاسخ رابطه‌ی (۱۸۰-۷)، اما، با علامت درست است. همان‌گونه که در آغاز این بخش گفتیم، نیروی وارد به قطعه‌ی دی‌الکتریک به توزیع بارهای القایی و آزاد بستگی دارد و نمی‌تواند به ثابت بودن V یا Q وابسته باشد.

مثال ۱۸-۷ ارتفاع مایع دی‌الکتریک در خازن استوانه‌ای: دو لوله‌ی دراز فلزی هم‌محور برابر شکل (۴۱-۷) یک خازن استوانه می‌سازند. فرض کنید شعاع استوانه‌ی داخلی a و شعاع استوانه‌ی بیرونی b است. استوانه‌ها را به طور عمودی در ظرفی از روغن دی‌الکتریک با پذیرفتاری χ_e و چگالی جرمی ρ قرار می‌دهیم. استوانه‌ی درونی در پتانسیل ثابت V قرار دارد و

استوانه‌ی بیرونی به زمین وصل است. بنابراین، اختلاف پتانسیل استوانه‌ها مقدار ثابت V است. در فضای بین لوله‌ها روغن تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟



شکل ۴۱-۷ خازن استوانه در روغن دی‌الکتریک

حل: این مثال همانند خازن تخت است که دی‌الکتریک به اندازه‌ی x در فضای بین صفحه‌ها قرار داشت و در بالا آن را بررسی کردیم. در اینجا فقط به جای خازن تخت، شکل خازن استوانه‌ای است. بنابراین، مانند مثال خازن تخت، در اینجا هم نخست ظرفیت آرایه را برحسب h حساب می‌کنیم: این آرایه را می‌توان دو خازن استوانه‌ای موازی پنداشت که در یکی دی‌الکتریک وجود دارد و در دیگری خلاء است.

بگذارید این محاسبه را از آغاز انجام دهیم. با استفاده از قانون گوس، در ناحیه‌ی خلاء داریم

$$E = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ell n\left(b/a\right) \tag{۷-۱۸۴}$$

که در آن λ بار در واحد طول قسمت خلاء است. در قسمتی هم که دی‌الکتریک دارد، می‌توان نوشت

$$D = \frac{2\lambda'}{4\pi r} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{2\lambda'}{4\pi\varepsilon r} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{2\lambda'}{4\pi\varepsilon}\ell n\left(b/a\right) \tag{۷-۱۸۵}$$

چون سطح رسانا هم‌پتانسیل است، اختلاف پتانسیل در دو بخش خازن باید باهم برابر باشد:

$$\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ell n\left(b/a\right) = \frac{2\lambda'}{4\pi\varepsilon}\ell n\left(b/a\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda'}{\varepsilon} \qquad \therefore \lambda' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\lambda = \kappa_e\lambda \tag{۷-۱۸۶}$$

اگر طول کل لوله ℓ باشد، بار کل خازن عبارت است از

$$Q = \lambda' h + \lambda\left(\ell - h\right) = \kappa_e\lambda h - \lambda h + \lambda\ell = \lambda\left[\left(\kappa_e - 1\right)h + \ell\right] = \lambda\left(\chi_e h + \ell\right) \tag{۷-۱۸۷}$$

بنابراین، ظرفیت خازن برابر است با

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0\frac{\lambda\left(\chi_e h + \ell\right)}{2\lambda\,\ell n\left(b/a\right)} = 2\pi\varepsilon_0\frac{\left(\chi_e h + \ell\right)}{\ell n\left(b/a\right)} \tag{۷-۱۸۸}$$

پس، نیروی رو بالا که میدان الکتریکی به دی‌الکتریک وارد می‌کند برابر است با

$$F_e = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dh} = \frac{V^2 2\pi\varepsilon_0\chi_e}{2\,\ell n\left(b/a\right)} \tag{۷-۱۸۹}$$

این نیرو با نیروی وزن مایع در لوله به ترازمندی می‌رسد. نیروی وزن روغن درون لوله رو به پایین و برابر است با

$$F_g = mg = \rho\pi\left(b^2 - a^2\right)gh \tag{۷-۱۹۰}$$

از برابری $F_e = F_g$ به‌دست می‌آید

$$h = \frac{\varepsilon_0\chi_e V^2}{\rho\left(b^2 - a^2\right)g\,\ell n\left(b/a\right)} \tag{۷-۱۹۱}$$

توجه کنید که از این چیدمان می‌توان برای یافتن، پذیرفتاری یا ثابت دی‌الکتریک استفاده کرد.