۶- میدان‌های الکتریکی در رساناها و پیرامون آنها

۶-۱ پیش‌گفتار

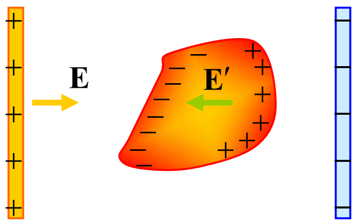
در فصل ٤ ویژگی‌های رساناها را برشمردیم. میدان الکتریکی در گوشت رسانا صفر است. سطح یک رسانا، سطح هم‌پتانسیل است، یعنی پتانسیل در تمام نقاط روی رسانا مقدار ثابتی است. در نتیجه، جابه‌جایی بار الکتریکی در روی رسانا هزینه‌ای ندارد و برای آن کاری خرج نمی‌شود. چگالی بار الکتریکی خالص در گوشت رسانا همواره صفر است و اگر رسانایی را باردار کنیم، بارها در سطح رسانا توزیع می‌شوند. توزیع بارها در سطح رسانا همواره به گونه‌ای است که از نفوذ میدان الکتریکی به درون آن (یعنی در ماده‌ی رسانا، در گوشت رسانا) جلوگیری می‌کند.

در این فصل، به بررسی سامانه‌های شامل رسانا می‌پردازیم که در میدان‌های الکتریکی و بارها به حالت مانا درآمده اند. یعنی سامانه از نظر الکتروستاتیکی به حالت مانا رسیده اند. این بدان معنی است که بارها را در رساناها خودشان را توزیع کرده اند و اینک بدون حرکت اند. به بیان دیگر، در حالت ایستایی بارها حرکت ندارند. این گزاره وسوسه انگیز و شاید هم اندکی گمراه کننده باشد. چون، اگر اثر نیروهای غیر الکتریکی را نادیده بگیریم، به این نتیجه می‌رسیم که اگر بارها به حالت ترازمندی رسیده‌اند و بی حرکت اند، پس باید میدان الکتریکی در درون رسانا صفر باشد. چون اگر میدان صفر نباشد، به حامل‌های بار الکتریکی نیرو وارد می‌شود و آنها را وادار به حرکت می‌کند. در نتیجه، حالت ایستایی نمی‌تواند برقرار شود. این گونه دلیل آوردن درست است، اما وجود نیروهای دیگر را، نیروهای غیر الکتریکی را، که به حامل‌های بار وارد می‌شوند، نادیده می‌گیرد. این گونه نیروها باید با نیروی الکتریکی حذف شوند تا این که سامانه به حالت مانا برسد. در نگاه نخست، کدام نیروهای غیر الکتریکی به ذهن می‌رسد؟ نیروی گرانش شاید نخستین آنها باشد. به هر حال یون مثبتی در ماده‌ی رسانا جرم دارد و پیوسته تحت تاثیر نیروی گرانش است. الکترون هم همین‌طور. شاید بگویید که نیروی گرانش در مقایسه با نیروی الکتریکی بسیار ضعیف است و می‌توان در تقریب نخست آن را نادیده گرفت. اما نیروهای دیگری هم وجود دارند و گاهی سبب می‌شوند که حامل‌های بار الکتریکی در رویارویی با میدان الکتریکی حرکت کنند. بگذارید این نیروها را با نام عمومی‌تر"شیمیایی" بشناسیم. نیروهای شیمیایی را در باطری و دیگر واکنش‌های شیمیایی، از جمله سلول زنده، می‌توان سراغ گرفت. از نگاه فیزیک مدرن و در سطحی بنیادی‌تر نیروهای شیمیایی به راستی نیروهای غیر الکتریکی نیستند، چون به ساختار اتمی و مولکولی ماده مربوط هستند و می‌دانیم که این ساختارها را با استفاده از قانون کولمب و مکانیک کوانتومی می‌توان توصیف کرد. با این حال، از دید نظریه‌ی کلاسیک الکتروستاتیک، این‌ها نیروهای ناآشنا اند و رفتارشان بر اساس قانون عکس مجذور فاصله نیست که نظریه‌ی کلاسیک بر پایه‌ی آن بنا نهاده شده است. نکته این است که گاهی ممکن است با شرایطی روبرو شویم که نیروهای غیر کولمبی به حامل‌های بار الکتریکی در درون ماده‌ی رسانا اثر می‌کنند. در چنین حالت‌هایی برای این که وضعیت الکتروستاتیکی برقرار شود، لازم است که میدان الکتریکی *محدودی* در رسانا وجود داشته باشد تا بتواند بر اثر این نیروها (از هر نوعی که باشد) چیره شود. با این هشدار به مسئله‌ی عمومی‌تر و مهم ماده‌ی رسانای همگن و همسانگرد می‌پردازیم که این گونه نیروها وجود ندارند. با اطمینان می‌توانیم بگوییم که در گوشت این گونه رسانا میدان الکتریکی باید صفر باشد. با این گزاره، منظور ما این است که میدان میانگین در گوشت رسانا صفر است (میانگین به معنی میانگین میدان بر روی ناحیه‌ای است که در مقایسه با ابعاد اتمی بسیار بزرگ است. به هر حال می‌دانیم که در مقیاس کوچک، در نزدیکی هسته‌ی اتم، حتی در بهترین رسانا، میدان الکتریکی خیلی قوی وجود دارد. میدان الکتریکی هسته در میدان میانگین سهمی ندارد، چون جهت آن در یک طرف هسته،

برخلاف جهتش در طرف دیگر هسته است. چگونه می‌توان میدان میانگین را تعریف کرد و آن را اندازه گرفت، پرسش دیگری است که در موضوع این فصل نمی‌گنجد.)

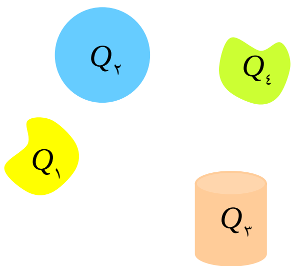
۶-۲ ماده‌ی رسانا در میدان الکتریکی

در بخش ٦-٤ ماده‌ی رسانا را تعریف کردیم و گفتیم که رسانا جسمی است که به‌ازای هر اتم یا مولکول یک یا دو حامل بار الکتریکی دارد که می‌توانند در گوشت رسانا حرکت کنند. حال یک جسم رسانا را در نظر بگیرید که در یک میدان الکتریکی قرار دارد. برای روشنی بیشتر، فرض کنید جسم رسانا را در فضای میان دو صفحه‌ی موازی با بارهای یکسان و ناهمنام قرار دادیم. شکل (٦-١) را ببینید. در فضای بین صفحه‌ها میدان الکتریکی وجود دارد و جهتش از صفحه‌ی مثبت به سوی صفحه‌ی منفی است. این میدان به حامل‌های بار در رسانا نیرو وارد می‌کند. حامل‌های بار مثبت در جهت میدان الکتریکی و حامل‌های بار منفی در خلاف جهت میدان حرکت می‌کنند. آنها فراتر از سطح رسانا نمی‌توانند بروند. بنابراین، بارهای مثبت در یک طرف و بارهای منفی در طرف دیگر رسانا انباشته می‌شوند. این بارها، میدان الکتریکی خود را در درون رسانا تولید می‌کنند. جهت آن برخلاف جهت میدان حاصل از دو صفحه‌ی موازی است و می‌کوشد تا میدان صفحه‌ها را در سطح رسانا خنثی کند. انباشت بارها در دو سوی رسانا ادامه می‌یابد تا این که میدان خارجی را کاملا از بین ببرد. توزیع نهایی بارها در سطح رسانا به گونه‌ای است که جمع میدان آنها و میدان بیرونی، در گوشت رسانا صفر می‌شود. این فرایند در رسانا "خودبه‌خود" و سریع روی می‌دهد. بنابراین، وقتی با رسانا در میدان خارجی سروکار داریم، کافی است که فقط سطح رسانا را بررسی کنیم.



شکل ٦-١ جدایی بارها در رسانا

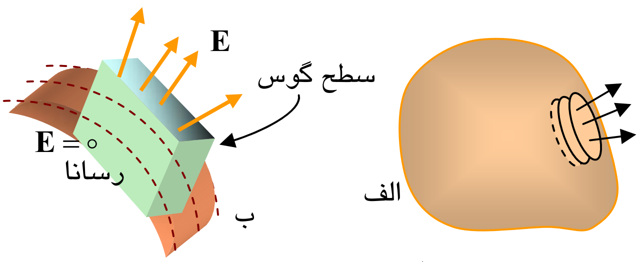
با این یادآوری، سامانه‌ای از چند جسم رسانای ساکن را در فضای تهی نظر بگیرید. شکل (٦-٢) را ببینید. بار خالص روی هر رسانا مقدار ثابتی است. منظور ما از بار خالص، اختلاف میان بارهای مثبت و منفی است. این مقدار ثابتی است، چون بارها نمی‌توانند از رسانا به بیرون و یا از بیرون به رسانا نشت کنند. بار کل رسانای k ام را Q_k بنامید. هر جسم را می‌توان با پتانسیل الکتریکی V_k آن هم مشخص کرد. چون سطح رسانا یک سطح هم-پتانسیل است، اندازه‌ی پتانسیل در تمام نقاط سطح رسانا مقدار ثابتی است. چون هیچ یک از رساناها تا بینهایت گسترده نیستند، می‌توانیم پتانسیل را در بینهایت صفر فرض کنیم. در این صورت، V_k کار در واحد بار است که باید خرج کنیم تا هر بار جزئی را از بینهایت به نقطه‌ای در روی رسانای k ام بیاوریم.



شکل ٦-٢ آرایه‌ی چهار رسانای باردار

چون سطح رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است و پتانسیل در همه‌ی نقاط آن مقدار ثابتی است، میدان الکتریکی، $-\overrightarrow{\nabla V}$ ، باید در هر نقطه‌ای بر سطح رسانا عمود باشد. وقتی از درون رسانا به سوی بیرون حرکت می‌کنیم، در سطح رسانا با یک تغییر ناگهانی در میدان الکتریکی روبرو می‌شویم: میدان $\mathbf{E}$ در درون رسانا صفر است، اما در بیرون آن صفر نیست. علت گسستگی میدان وجود بار الکتریکی با چگالی σ در سطح رساناست. چگالی بار سطحی σ با قانون گوس به شدت میدان $\mathbf{E}$ در سطح رسانا مربوط است. این ارتباط در شکل (٣- ٦ الف) نشان داده شده است. در شکل (٣-٦ ب) بخش کوچکی از سطح رسانا دیده می‌شود. سطح گوسی مانند یک قوطی کبریت را در نظر بگیرید. شار میدان فقط از رویه‌ی بیرونی آن می‌گذرد، چون رویه‌ی

دیگر در درون رسانا قرار دارد و در آنجا میدان صفر است. روشن است که از سطح‌های جانبی قوطی کبریت (سطح گوس) هم شار نمی‌گذرد. خط‌ها میدان در سطحی که شار از آن می‌گذرد، در هر نقطه بر این سطح عمود است. بنابراین، قانون گوس می‌گوید (A مساحت رویه است):



شکل ۳-٦ ارتباط چگالی بار و شدت میدان در سطح رسانا

$$\Phi = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = Q_{enc}/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow E_n A = \sigma A/\varepsilon_0 \;\Rightarrow E_n = \sigma/\varepsilon_0 \qquad (٦-١)$$

میدان $\mathbf{E}$ میدان کل است که همه‌ی بارها، بارهای دوردست و نزدیک، در سطح رسانا تولید می‌کنند. بار سطحی σ فقط بخشی از آن است. توجه کنید که میدان الکتریکی E_n مولفه‌ی عمود بر سطح میدان است و این تنها مولفه‌ای است که میدان دارد. یعنی میدان الکتریکی در روی سطح رسانا هیچ مولفه‌ی دیگری ندارد، چون $\mathbf{E}$ همواره بر سطح رسانا عمود است.

همچنین، بار کل روی رسانا، Q_k، از انتگرال σ بر روی تمامی سطح رسانای k ام به‌دست می‌آید

$$Q_k = \int_{S_k} \sigma da = \varepsilon_0 \int_{S_k} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \qquad (٦-٣)$$

* ۳-۶ مسئله‌ی عمومی

اینک با وضعیتی روبرو هستیم که مقداری بار الکتریکی در روی یک یا چند رسانا توزیع شده‌اند. می‌خواهیم میدان الکتریکی ناشی از این بارها را پیدا کنیم. در واقع، این مسئله‌ی بنیادی الکتروستاتیک است. در اینجا هم چون بارها ساکن اند، مسئله‌ی ما یک مسئله‌ی الکتروستاتیکی است. متاسفانه، شکل هندسی رساناها و آرایش هندسی‌شان در سه بعد، امکان یافتن پاسخ سر راست مسئله را دشوار می‌کند. در واقع، تعداد آرایش‌هایی که بتوان برای آنها پاسخ ریاضی بسته یافت، بسیار محدود است. برای این که سرشت ریاضی مسئله را بفهمیم، بگذارید آن را با زبان تابع پتانسیل، V ، بیان کنیم. همان‌گونه که دیدیم، اگر بتوانیم تابع پتانسیل V را پیدا کنیم، تا یافتن میدان $\mathbf{E}$ فقط یک گام (یک مشتق‌گیری، یا محاسبه‌ی گرادیان) فاصله داریم. تابع پتانسیل در همه‌ی نقاط بیرون رسانا باید از معادله‌ی لاپلاس پیروی کند (فرض می‌کنیم بارهای الکتریکی به رسانا محدود است و در فضای بیرون آن بار یا چشمه‌ی میدان وجود ندارد.) معادله‌ی لاپلاس در سه بعد وقتی در مختصات کارتزی نوشته شود، به صورت زیر درمی‌آید

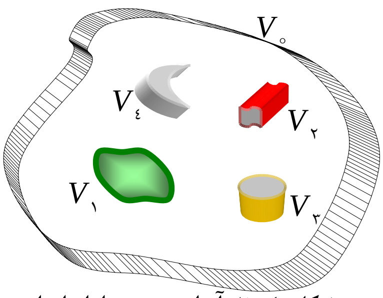
$$\nabla^2 V = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \qquad (٦-٤)$$

مسئله‌ی ما این است که تابع $V(x,y,z)$ را چنان بیابیم که در معادله‌ی (٦-٤) صدق کند و شرایط خاص مربوط به سطح رسانا را (مانند، هم‌پتانسیل بودن سطح رسانا) هم راضی کند. شرط‌های مربوط به ویژگی‌های رساناها ممکن است برای هر رسانا متفاوت باشد. مثلاً، برخی را به باتری وصل کنیم و به این ترتیب، اندازه‌ی پتانسیل در هر نقطه‌ی روی آن رسانا مقدار معینی باشد، یا ممکن است رسانایی به زمین وصل شود و در نتیجه، پتانسیل آن صفر باشد. نمونه‌ی دیگری از این شرایط مربوط به رسانا این است که گفته شود، چگالی بار سطحی در هر رسانا چیست. بنابراین، پاسخ معادله‌ی (٤-٧) باید مقدار درستی را در روی هر رسانا به‌دست بدهد. گاهی ناحیه‌ای را که می‌خواهیم در آن میدان $\mathbf{E}$ را حساب کنیم شامل چندین سطح رساناست که همگی در درون سطح رسانای بزرگ‌تری قرار دارند. در این صورت می‌توانیم به این رسانای بزرگ پتانسیلی

نسبت بدهیم و هر چیزی را که در بیرون آن قرار دارد، نادیده بگیریم. این‌ها نمونه‌هایی اند که نشان می‌دهند، تابع پتانسیل، یعنی پاسخ معادله‌ی (٤-٦) باید تعدادی شرایط مرزی را راضی کند.

همان گونه که گفتم، ممکن است بار کل Q_k هر رسانا داده شده باشد. در این صورت مقدار انتگرال سطح $\mathbf{E}$ (یا $\overrightarrow{-\nabla V}$) در رابطه‌ی (۳-۷) داده می‌شود. گاهی ممکن است ترکیبی از مقدار بار Q_k در برخی سطح‌های رسانا و اندازه‌ی پتانسیل در برخی دیگر داده شده باشند. در این حالت آمیزه‌ای از دو نوع شرایط مرزی داریم.

پرسش کلی این است: با شرایط مرزی معین، آیا معادله‌ی (٤-٦) پاسخی دارد یا نه؟ آیا پاسخ معادله‌ی لاپلاس یگانه است یا می‌تواند پاسخ‌های متفاوت داشته باشد؟ توجه کنید که این پرسش‌ها معنی‌دار هستند. چون معادله‌ی (٤-٦) یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی نیست، بلکه معادله‌ی دیفرانسیل پارمشتق مرتبه‌ی دو است. نظریه‌ی معادله‌های دیفرانسیل پارمشتق به ما می‌آموزد که این گونه معادله‌ها اساسا بینهایت پاسخ دارند. به بیان دیگر، تنها با معادله‌ی لاپلاس نمی‌تواند تابع پتانسیل را تعیین کرد، بلکه باید آن را با مشخص کردن شرایط مرزی به پاسخ مشخصی راهنمایی کرد. ما بر آن نیستیم که همه‌ی مسئله های مربوط به معادله‌ی لاپلاس را بکاویم. یک وضعیت مهم را بررسی خواهیم کرد. این وضعیت به ما نشان خواهد داد که چگونه می‌توان با این مسئله‌ها کنار آمد و به نتیجه‌ی سودمندی دست یافت.



شکل ٤-٦ آرایه‌ی رساناها با پتانسیل‌های معین

فرض کنید پتانسیل‌های V_k در روی همه‌ی رساناها، از جمله رسانایی که بقیه را دربر می‌گیرد، معین و داده شده اند. شکل (٤-٦) را ببینید. ما همچنین شرط می‌کنیم که پتانسیل در بینهایت به صفر می‌گراید. هدف ما یافتن میدان الکتریکی در فضای بین این رساناهاست. وقتی مسئله به زبان پتانسیل فرمول‌بندی شود، به یافتن تابع پتانسیلی که شرایط مرزی را راضی کند، کاهش می‌یابد. منظور از شرایط مرزی چیست؟ نخست باید بگویم که مرزها همانا رویه‌های رساناهاست. شرط مرزی هم به این معنی است که در هر مرزی پتانسیل مقدار معین و ثابتی دارد. از نظر فیزیکی روشن است که این مسئله فقط یک پاسخ دارد. یعنی تنها یک تابع پتانسیل وجود دارد که همه‌ی شرط‌های مرزی در آن صدق می‌کنند. علت این یگانگی پاسخ روشن است، چون سامانه در یک حالت فیزیکی معین قرار دارد. اما اثبات این که معادله‌ی (٤-٦) هم برای این مسئله فقط یک پاسخ دارد، داستان دیگری است. این نوشته مجال اثبات عمومی آن را به ما نمی‌دهد. در عوض ثابت می‌کنیم که با مجموعه‌ای از شرایط مرزی، اگر معادله‌ی لاپلاس پاسخی داشته باشد، این پاسخ باید یگانه باشد. قضیه‌ای را که در زیر به آن می‌پردازیم، **قضیه‌ی یگانگی**[*] نامیده می‌شود. قضیه‌های یگانگی در الکتروستاتیک فراوانند، ما به یکی یا دو تا از آنها خواهیم پرداخت.

قضیه‌ی یگانگی ١: اگر $V(x,y,z)$ پاسخ معادله‌ی لاپلاس در ناحیه‌ای از فضا باشد و پتانسیل در همه‌ی سطح‌های این فضا معین باشد، تابع $V(x,y,z)$ تنها و یگانه پاسخ است.

اثبات: فرض کنید تابع دیگری مانند $\phi(x,y,z)$ هم وجود دارد که پاسخ معادله‌ی لاپلاس در فضای مورد نظر است با همان شرایط مرزی است. به عبارت دیگر، هر دوی $V(x,y,z)$ و $\phi(x,y,z)$ در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کنند. یعنی داریم

$$\nabla^2\phi = 0 \quad , \quad \nabla^2 V = 0 \qquad (٦-٥)$$

بنابراین، هر ترکیب خطی از V و ϕ، مانند $\psi = c_1 V + c_2\phi$ هم پاسخ معادله‌ی لاپلاس است. به ویژه تفاضل آن دو

[*] uniqueness theorem

$$\psi(x,y,z) \equiv V(x,y,z) - \phi(x,y,z) \qquad (٦-٦)$$

هم پاسخ معادله‌ی لاپلاس است. البته روشن است که تابع $\psi(x,y,z)$ در شرایط مرزی مسئله صدق نمی‌کند. برای دیدن این یکی از مرزها را، مثلا رسانای استوانه در شکل (٤-٦) را درنظر بگیرید. هر دوی V و ϕ در روی این مرز مقدار یکسان $V_۲$ دارند. بنابراین، مقدار ψ در این مرز به خصوص صفر است. در واقع، مقدار تابع $\psi(x,y,z)$ در روی همه‌ی مرزهای فضای مورد نظر ما صفر است. بنابراین، $\psi(x,y,z)$ پاسخ مسئله‌ی ما نیست، بلکه پاسخ مسئله‌ی الکتروستاتیک **دیگری** است، مسئله‌ای با همان آرایش رساناها، اما همگی در پتانسیل صفر. بنابراین، $\psi(x,y,z)$ باید در همه‌ی نقاط فضا صفر باشد، چون اگر $\psi(x,y,z)$ در همه جا صفر نباشد، باید در نقطه‌ای مانند P کمینه یا بیشینه داشته باشد. چون ψ در بینهایت و نیز در روی همه‌ی مرزها صفر است، اگر کره‌ای به مرکز P در نظر بگیریم، میانگین تابع ψ بر روی این کره باید با مقدار آن در مرکز، یعنی در نقطه‌ی P برابر باشد. اگر P مکان بیشینه یا کمینه باشد، این نشدنی است (می‌توانستیم از آموزه‌های فصل ٥ استفاده کنیم و بگوییم پاسخ معادله‌ی لاپلاس، کمینه یا بیشینه‌ی موضعی نمی‌پذیرد.) پس، در هیچ نقطه‌ای ψ نمی‌تواند بیشینه یا کمینه داشته باشد. در نتیجه، مقدارش باید در همه جا صفر باشد. در نتیجه، در همه جا $V=\phi$ است. به بیان دیگر، پاسخ معادله‌ی لاپلاس به همراه شرایط مرزی معین در روی همه‌ی مرزها، پاسخی یگانه است. •

یک پی‌آمد قضیه‌ی یگانگی این است که در فضای درون رسانای توخالی اگر بار الکتریکی وجود نداشته باشد، میدان الکتریکی صفر است.

اثبات: تابع پتانسیل $V(x,y,z)$ در درون رسانا باید از معادله‌ی لاپلاس پیروی کند. تمامی مرز این ناحیه، خود رساناست که یک سطح هم‌پتانسیل در $V_۰$ است. بنابراین، $V=V_۰$ مقدار ثابتی در همه‌ی نقاط مرزهای ناحیه است. پس، در درون حجمی که رسانا مرزهای آن است، یک پاسخ معادله‌ی لاپلاس $V=V_۰$ است. بنا به قضیه‌ی یگانگی، تنها یک پاسخ وجود دارد و در نتیجه، $V_۰$ پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل است. چون $V_۰$ مقدار ثابتی است، پس میدان الکتریکی $\mathbf{E}=-\overrightarrow{\nabla V_۰}=۰$ است.•

مهم نیست که میدان الکتریکی در بیرون رسانای توخالی چه باشد، نتیجه‌ی بالا همواره درست است. در واقع، این نتیجه اندکی شگفت آور است. یک جعبه‌ی رسانا را در نظر بگیرید. فرض کنید در بیرون آن بارهای الکتریکی وجود دارند و میداان الکتریک تولید می‌کنند. بنابه اصل برهم‌نهی، میدان در هر نقطه‌ی فضا، از جمله در **درون جعبه** با جمع برداری میدان‌های حاصل از بارهای بیرون برابر است. اما نتیجه‌ی بالا می‌گوید، مهم نیست که توزیع بار در بیرون جعبه چگونه است، میدان در درون جعبه همواره صفر است. اگر حسابش را بکنید، بارهای سطحی جعبه باید خودشان را به گونه‌ای توزیع کرده باشند که میدان‌های بیرونی را درست در سطح جعبه حذف کنند. این توزیع بار می‌تواند کاملا نایکنواخت باشد.

واقعیت این که میدان الکتریکی در درون پوسته‌ی رسانا صفر است، اساس سپرگذاری[†] الکتریکی است. به این دلیل است که ابزار دقیق الکترونیکی را در جعبه‌های فلزی قرار می‌دهند تا از آسیب میدان‌های الکتریکی بیرونی در امان باشد. در آینده خواهیم دید که میدان‌های مغناطیسی هم از رسانا عبور نمی‌کنند. یعنی رسانا سپر خوبی در برابر میدان‌های الکترومغناطیسی است. به این دلیل است که آینه سازها پشت شیشه را با رساناهای خوبی مانند جیوره و نقره اندود می‌کنند. نور ترکیبی از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی است. هنگامی که به اینه تابیده می‌شود، با سطح رسانا در پشت آینه روبرو می‌شود. چون رسانا اجازه نمی‌دهد میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی (نور) به درون آن نفوذ کند، ناگزیر بازتابیده می‌شود و شما چهره‌ی خود و هر چیز دیگری را که در میدان آینه قرار دارد، می‌بینید. هنگامی که آذرخش تولید می‌شود، در جو زمین میدان الکتریکی

[†] electrical shielding

بسیار قوی به وجود می‌آید. تصور کنید که در بیابانی قرار دارید و در آسمان آذرخش می‌درخشد. برای گریز از آسیب "برق گرفتگی" چه کار می‌کنید؟ حالا باید پاسخ را بدانید. بهتر است که به درون اتوموبیل خود پناه ببرید. چون بدنه‌ی آن معمولا از فلز ساخته شده است و رساناست. اتوموبیل سپر خوبی در برابر برق گرفتگی فراهم می‌کند. البته، اگر آذرخش به اتوموبیل برخورد کند، انرژی زیادی را به آن واریز خواهد کرد و ممکن است آن را تا دمای زیادی داغ کند. در درون اتوموبیل امکان کباب شدن و سوختگی وجود دارد، اما، دستکم، از آسیب ناگوار برق گرفتگی در امان خواهید بود.

می‌توان به قضیه‌ی یگانگی بالا را اندکی عمومی‌تر کرد. اثباتی که برای آن ارایه شد، فرض می‌کرد که در ناحیه‌ی مورد نظر، یعنی، فضای بین رساناها، بار الکتریکی وجود ندارد (و بنابراین، تابع پتانسیل از معادله‌ی لاپلاس پیروی می‌کرد). اگر در این فضا توزیع باری با چگالی حجمی ρ هم وجود می‌داشت، هنوز هم قضیه برقرار می‌بود. این بار تابع پتانسیل باید از معادله‌ی پوواسن پیروی کند. اثبات قضیه هنوز هم همان است. فرض کنید V و ϕ هر دو پاسخ معادله‌ی پوواسن اند و هر دو در شرایط مرزی صدق می‌کنند. در این صورت داریم

$$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0 \quad , \quad \nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0 \qquad (۶-۷)$$

بنابراین، تفاضل آن دو، $\psi = V - \phi$ هنوز هم در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند:

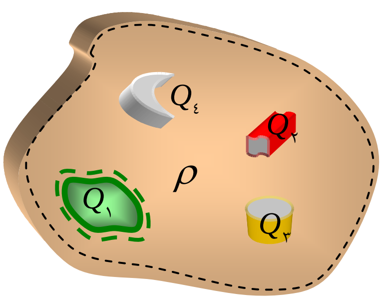
$$\nabla^2\psi = \nabla^2(V-\phi) = \nabla^2 V - \nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0 - (-\rho/\varepsilon_0) \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\psi = 0 \qquad (۶-۸)$$

و مقدارش در روی همه‌ی مرزها صفر است. بنابراین $\psi = 0 \ \Rightarrow \ V = \phi$.

نتیجه: اگر چگالی بار در ناحیه‌ی مورد نظر داده شده باشد و پتانسیل در روی مرزهای ناحیه معین باشد، پتانسیل در آن ناحیه، یگانه است.

قضیه‌ی یگانگی دستاورد مهم و سودمندی است. به ما می‌گوید اگر تابعی داشته باشید که در معادله‌ی لاپلاس صدق کند و شرایط مرزی را راضی کند، مهم نیست که چگونه به این تابع رسیده باشید، آن تابع پاسخ مسئله است. سودمندی این قضیه را در بخش ۴-۶ خواهیم دید.

قضیه‌ی یگانگی را ما برای گروه خاصی از شرایط مرزی بیان کردیم. شرایط مرزی را با معین بودن پتانسیل در همه‌ی مرزها (رویه‌های رساناها و بینهایت) بیان کردیم. همان‌گونه که در آغاز این بخش گفتم، این تنها نوع شرایط مرزی نیست. گروه دیگری از شرایط مرزی را در نظر بگیرید. شکل (۴-۶) را دوباره در نظر بگیرید: تعدادی رسانا در شکل‌های هندسی متفاوت و یک رسانای بزرگ‌تر که مرز بیرونی ناحیه‌ی مورد نظر را تعریف می‌کند. اما حالا پتانسیل‌ها را در روی رساناها نمی‌شناسیم. در عوض، می‌دانیم که در روی هر رسانا چه مقدار بار الکتریکی وجود دارد. فراتر از این، فرض کنید در فضای بین رساناها توزیع بار ρ هم وجود دارد. می‌خواهیم میدان الکتریکی را در این ناحیه حساب کنیم.



شکل ۵-۶ آرایه‌ی رساناها با بارهای معین روی آنها و بار ρ

شکل (۵-۷) را ببینید.تنها چیزی که در مورد رساناها می‌دانیم مقدار بار کل هر یک است. ما شکل توزیع این بارها را در روی رساناها نمی‌شناسیم، چون به محض این که بارها را بر روی رساناها قرار دادیم، بارها خود را به گونه‌ای توزیع می‌کنند که در کنترل ما نیست. آیا میدان الکتریکی در این فضا یگانه است؟ میدان را بارهای روی رساناها و بار حجمی ρ تولید می‌کند. توزیع ρ را می‌شناسیم و در نتیجه، دستکم در بنیاد، میدان آن را هم می‌توانیم حساب کنیم. اما کنترلی بر روی توزیع بارهای رساناها نداریم. آیا ممکن است آنها به گونه‌های گوناگون خود را توزیع بکنند و هر بار میدان

متفاوتی به‌وجود بیاورد؟ خوش‌بختانه این نگرانی بی‌مورد است. قضیه‌ی یگانگی دیگری را می‌توان ثابت کرد که می‌گوید، با دانستن بار کل هر رسانا و توزیع بار ρ در فضای بین رساناها، میدان الکتریکی به طور یگانه تعیین می‌شود. یعنی فقط یک تابع میدان الکتریکی وجود دارد. قضیه به صورت زیر است:

قضیه‌ی یگانگی ۲: در ناحیه‌ای که شامل رساناست و توزیع بار ρ در فضای بین رساناها وجود دارد، اگر بار کل روی هر رسانا معلوم باشد، میدان در آن ناحیه به‌طور یگانه تعیین می‌شود.

اثبات: فرض کنید دو میدان $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{E}_2$ وجود دارند و هر دو در شرایط مسئله صدق می‌کنند. میدان‌های $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{E}_2$ در فضای بین رساناها از شکل دیفرانسیلی قانون گوس پیروی می‌کنند

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_1=\rho/\varepsilon_0 \qquad , \qquad \vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_2=\rho/\varepsilon_0 \tag{۶-۹}$$

اگر سطح گوسی رسانای i ام را (مانند رسانای با بار Q_1 در شکل ۵-۶) دربر داشته باشد، میدان‌های $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{E}_2$ در شکل انتگرالی به‌دست می‌دهند:

$$\oint_i \mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{a}=Q_i/\varepsilon_0 \qquad , \qquad \oint_i \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{a}=Q_i/\varepsilon_0 \tag{۶-۱۰}$$

هم‌چنین برای مرز بیرونی ناحیه‌ی مورد نظر (که ممکن است یک رسانا باشد یا بینهایت) داریم

$$\oint_{\text{outer}} \mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{a}=Q_{\text{total}}/\varepsilon_0 \qquad , \qquad \oint_{\text{outer}} \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{a}=Q_{\text{total}}/\varepsilon_0 \tag{۶-۱۱}$$

که در آن Q_{total} بار کل (بار مربوط به چگالی ρ و بارهای روی رساناها) است. حال تفاضل میدان‌ها، $\mathbf{E}_3=\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2$، را در فضای بین رساالناها نظر بگیرید.

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_3=\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_1-\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_2=\left(\rho/\varepsilon_0\right)-\left(\rho/\varepsilon_0\right)=0 \tag{۶-۱۲}$$

و همین کار را برای هر یک از مرزهایی که سطح رساناها می‌سازند، تکرار کنید. برای هر رسانا داریم

$$\oint_i \mathbf{E}_3\cdot d\mathbf{a}=\oint_i \mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{a}-\oint_i \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{a}=\left(Q_i/\varepsilon_0\right)-\left(Q_i/\varepsilon_0\right)=0 \tag{۶-۱۳}$$

اگرچه نمی‌دانیم بارهای الکتریکی چگونه بر روی رساناها توزیع شده اند، اما می‌دانیم که سطح هر رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است. می‌توانیم از این ویژگی استفاده کنیم. و بگوییم که پتانسیل V_3 متناظر متناظر با $\mathbf{E}_3$ مقدار ثابتی است (لازم نیست که V_3 برای همه‌ی رساناها یکسان باشد. لازم هم نیست که $V_3=0$ باشد، چون ممکن است V_1 و V_2 برابر نباشند. اما می‌دانیم که V_1 و V_2 در سطح هر یک از رساناها مقدارهای ثابت اند.) حال از اتحاد زیر استفاده کنید:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(V_3\mathbf{E}_3\right)=V_3\left(\vec{\nabla}\cdot\mathbf{E}_3\right)+\mathbf{E}_3\cdot\left(\overrightarrow{\nabla V_3}\right)=0+\mathbf{E}_3\cdot\left(-\mathbf{E}_3\right)=-E_3^2 \tag{۶-۱۴}$$

اکر از این رابطه بر روی حجم تمام ناحیه‌ی بین رساناها انتگرال بگیریم و از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\int_\tau \vec{\nabla}\cdot\left(V_3\mathbf{E}_3\right)d\tau=\int_S V_3\mathbf{E}_3\cdot d\mathbf{a}=-\int_\tau E_3^2 d\tau \tag{۶-۱۵}$$

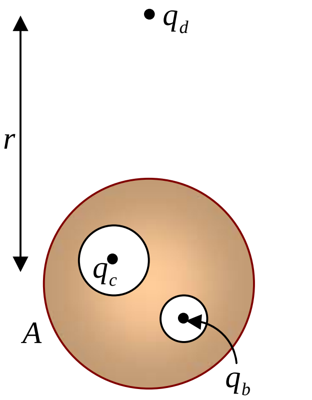
انتگرال سطح شامل همه‌ی مرزهای ناحیه‌ی مورد نظر (یعنی مرزهایی که سطح رساناها به وجود می‌آورند و مرز بیرونی) است. در روی هر مرزی V_3 یک مقدار ثابتی اس، بنابراین، از زیر علامت انتگرال بیرون می‌آید. چیزی که در زیر علامت انتگرال می‌ماند $\mathbf{E}_3$ است. اما بنابه رابطه‌ی (۱۳-۷)، انتگرال $\mathbf{E}_3$ بر روی هر سطحی صفر است. در نتیجه،

$$\int_\tau E_3^2 d\tau=0 \tag{۶-۱۶}$$

اما انتگرالنده در این رابطه، همواره مقدار مثبتی است و تنها راهی که ممکن است انتگرال رابطه‌ی ۶-۰۱۶) صفر باشد، این است که $\mathbf{E}_3=0$ باشد و این یعنی $\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_2$. این اثبات قضیه را کامل می‌کند.●

قضیه‌ی یگانگی می‌گوید اگر مجموعه‌ای رسانا داشته باشیم و هر کدام در پتانسیل معینی باشند، تابع پتانسیل یگانه‌ای برای تمام نقاط فضا وجود دارد که در شرایط مرزی داده شده صدق می‌کند. قضیه‌های یگانگی پی‌آمد معادله‌ی لاپلاس، $\nabla^2 V = 0$، اند. این بدان معنی است که اگر تابعی داشته باشیم که در همه‌ی شرایط مرزی صدق کند، تنها تابعی است که پاسخ درست مسئله است. واقعیت این که میدان الکتریکی در گوشت رسانا صفر است، نتیجه‌ی همین قضیه است.
قضیه‌ی یگانگی به ما می‌اموزد که اگر توانستیم با هر شگردی (از جمله خواب‌نما شدن!) تابعی پیدا کنیم که در شرایط مرزی صدق کند، آن تابع، تنها تابع پتانسیل درست مسئله است. یکی از پی‌آمدهای بسیار مهم قضیه‌ی یگانگی **روش بارهای تصویر** است که در بخش بعدی به آن می‌پردازیم.

مثال ۱-۶ بارهای درون کاواک : در درون رسانای کروی A برابر شکل (٦-٦) دو کاواک وجود دارد. بار کل رسانا صفر است، اما در مرکز یکی از کاواک‌ها بار نقطه‌ای q_b و در مرکز دیگری بار نقطه‌ای q_c قرار دارند. در فاصله‌ی دورتر r از مرکز رسانا بار q_d وجود دارد. نیروهایی که به هر یک از بارهای q_b، q_c، q_d و رسانای A وارد می‌شوند چیست؟ کدام پاسخ تقریبی است و به دور بودن فاصله‌ی r بستگی دارد؟



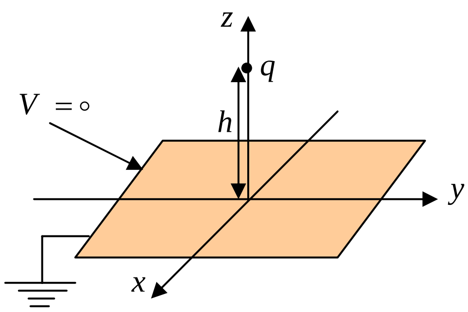
شکل ٦-٦ رسانا و کاواک‌ها

حل: به بارهای q_b و q_c نیرویی وارد نمی‌شود. بار q_b را در نظر بگیرید. اگر بار q_b در کاواک پایینی وجود نمی‌داشت، قضیه‌ی یگانگی می‌گوید که میدان در درون این کاواک صفر می‌بود. این نتیجه مستقل از آن است که بارهای q_c و q_d چه می‌کنند. اما اینک در مرکز کاواک بار q_b وجود دارد و سبب می‌شود که بار $-q_b$ در سطح داخلی کاواک القاء بشود (مقدار بار القایی درست برابر $-q_b$ است. این را از قانون گوس می‌توان فهمید: اگر سطح گوس کروی در درون گوشت رسانا و به مرکز بار q_b در نظر بگیرید، چون میدان الکتریکی در گوشت رسانا صفر است، جمع بارهای درون سطح گوس هم باید صفر شود. در درون سطح گوس بارهای القایی بعلاوه‌ی بار نقطه‌ای q_b وجود دارند. در نتیجه، مقدار بار القایی برابر $-q_b$ است.) بارهای القایی $-q_b$ به طور یکنواخت در سطح کاواک توزیع می‌شوند، چون q_b در مرکز کاواک است. در نتیجه، هنوز هم میدان در مرکز کاواک صفر خواهد بود. بنابراین، نیروی وارد به بار q_b صفر است. به همین دلیل، نیروی وارد به بار q_c صفر است.
نکته: اگر بار q_b در مکانی غیر از مرکز کاواک قرار داشت، نیروی وارد به آن صفر نمی‌شد.♣
حالا رسانای A را در نشر بگیرید. چون بار کل رسانای A صفر است، باید بار $q_b + q_c$ در سطح بیرونی رسانا توزیع شده باشد تا بارهای القایی $-q_b$ و $-q_c$ را که در سطح کاواک‌ها القاء شده اند، خنثی کند. اگر بار q_d وجود نمی‌داشت، میدان در بیرون رسانا می‌بایست متقارن و برابر $E = (q_b + q_c)/4\pi\varepsilon_0 r^2$ می‌بود و بارهای $q_b + q_c$ به طور یکنواخت در سطح بیرونی کره‌ی A توزیع می‌شد (دلیل یکنواختی مانند بالاست؛ افزون بر این، فرض کردیم که در بیرون رسانا بار وجود ندارد. در نتیجه، در بیرون کره، آرایه‌ای با تقارن کروی داریم). وجود بار q_d توزیع بار روی سطح بیرونی کره را اندکی تغییر می‌دهد و سبب می‌شود که چگالی بارهای با علامت مخالف علامت بار q_d در طرف نزدیک به q_d بیشتر باشد، اما تغییری در بار کل رسانا ایجاد نمی‌کند. بنابراین، برای rهای بزرگ، نیروی وارد به بار q_d به تقریب $q_d\,(q_b + q_c)/4\pi\varepsilon_0 r^2$ (اندکی بیش‌تر از این) است. نیروی وارد به A باید درست به همین اندازه و در جهت عکس باشد.

مقدار دقیق نیروی وارد به بار q_d برابر است با جمع نیروی $q_d\left(q_b+q_c\right)/4\pi\varepsilon_0 r^2$ و نیرویی که بار کل موجود در سطح و در درون رسانای A اگر صفر می‌بود (در این مثال $(q_b+q_c$ به بار q_d وارد می‌کرد. این نیروی آخری را می‌توان با استفاده از روش بارهای تصویر حساب کرد.

⁕ ۴-۶ روش بارهای تصویر[◊]

قضیه‌ی یگانگی پروانه‌ی تجسم کردن است. می‌گوید که اگر تابع پتانسیلی بیابید که شرایط مرزی را راضی کند، آن تابع درست و یگانه برای پاسخ مسئله است. یکی از ساده‌ترین مثال‌های کلاسیک برای نمایش این دستاورد و سودمندی آن، یافتن پتانسیل در بالای صفحه‌ی رسانای بینهایت گسترده و بار نقطه‌ای در فاصله‌ی h از صفحه است. در شکل (۷-۶) صفحه‌ی رسانای گسترده‌ای نشان داده شده است که بار نقطه‌ای و مثبت q به فاصله‌ی h از آن قرار دارد. فرض کنید صفحه به زمین وصل است و در نتیجه، در پتانسیل صفر قرار دارد. هدف ما یافتن پتانسیل در فضای بالای صفحه است.



شکل ۷-۶ صفحه‌ی رسانا و بار نقطه‌ای

مسئله چندان ساده نیست، چون بار q در بالای صفحه، میدان الکتریکی تولید می‌کند. این میدان سبب می‌شود که بارهای منفی رسانا به سوی بار مثبت q رانده شوند. یعنی، بار مثبت q مقداری بار منفی در روی رسانا القاء خواهد کرد. اما انتظار نداریم که بارهای منفی درست در زیر بار مثبت و در روی رسانا جمع بشوند. اگر رسانا وجود نداشت، پتانسیل حاصل از بار q برابر $q/4\pi\varepsilon_0 r$ می‌شد (r فاصله از بار q است). اما وجود بارهای القائی در روی سطح رسانا هم اینک در پتانسیل سهم خواهد داشت. پرسش واقعی این است که چگونه می‌توانیم سهم بارهای القایی را در پتانسیل کل حساب کنیم؟

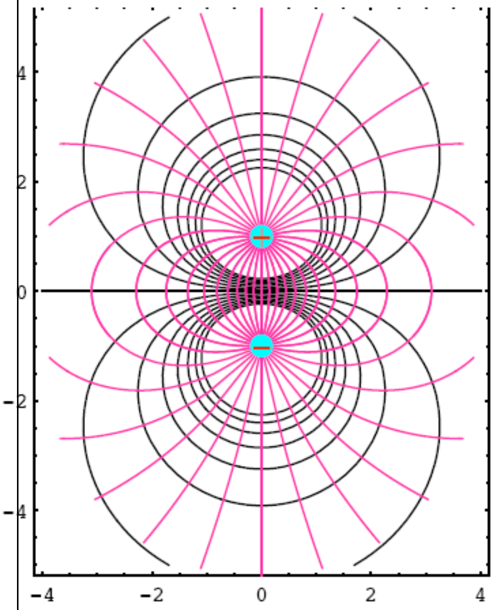
از نظر ریاضی باید معادله‌ی پوواسن را در ناحیه‌ی $z>0$ با شرایط مرزی $V=0$ در $z=0$ و $V\to 0$ برای فاصله‌های دور از بار q (یا $x^2+y^2+z^2\gg h^2$) حل کنیم. قضیه‌ی یگانگی ۱ می‌گوید که فقط یک تابع وجود دارد که در این شرایط مرزی صدق می‌کند. اگر با شگرد یا گمانی زیرکانه بتوانیم ایت تابع را بیابیم، پاسخ را یافته‌ایم.

در این گونه مسئله‌ها شگرد این است که مسئله‌ی اصلی را فراموش کنیم و مسئله‌ی دیگری بسازیم که همان شرایط مرزی را داشته باشد و این مسئله‌ی جایگزین را حل کنیم. چگونه می‌توان آرایه‌ای از بارهای الکتریکی ساخت که پتانسیل آنها در $z=0$ برابر صفر باشد و در بینهایت پتانسیل به صفر میل کند؟ توجه کنید که اینها شرایط مرزی مسئله‌ی اصلی (رسانا و بار نقطه‌ای) است. پاسخ به نظر بدیهی است. اگر دو بار نقطه‌ای $+q$ در $z=h$ و بار $-q$ در $z=-h$ در نظر بگیریم (بدون صفحه‌ی رسانا) پتانسیل این دو بار در $z=0$ برابر صفر می‌شود و در بینهایت به صفر میل می‌کند. چون این همان شرایط مسئله‌ی اصلی ماست، قضیه‌ی یگانگی تضمین می‌کند که پاسخ درست مسئله‌ی اصلی (رسانا و بار نقطه‌ای) است. حالا یافتن پتانسیل دو بار (مسئله‌ی جایگزین) ساده است:

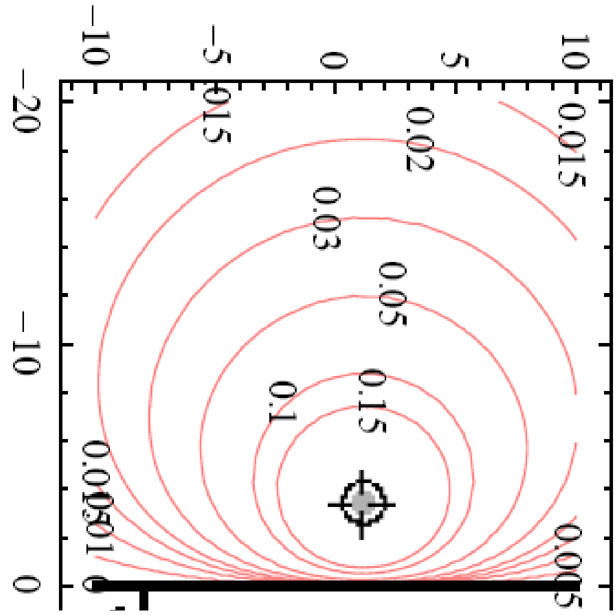
$$V\left(x,y,z\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-h\right)^2}}+\frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z+h\right)^2}}\right] \qquad (۶-۱۷)$$

[◊] The method of image charges

توجه کنید که به ازای $z=۰$ داریم $V=۰$ و در فاصله‌های دور، یعنی $x^۲+y^۲+z^۲ \gg h^۲$ ، پتانسیل $V \to ۰$ می‌گراید. خط‌های میدان و سطح‌های هم‌پتانسیل مسئله‌ی جایگزین در شکل (۸–۶) دیده می‌شوند. قسمت بالای این شکل $(z \geq ۰)$ در شکل (۹–۶) نشان داده شده است



شکل ۸–۶ خط‌های میدان و سطح‌های پتانسیل دو بار نقطه‌ای q و $-q$



شکل ۹–۶ رسانا، بار نقطه‌ای و سطح‌های هم‌پتانسیل

همانگونه که دیده می‌شود در سطح رسانا پتانسیل صفر است و با دور شدن از بار پتانسیل به صفر میل می‌کند و فقط بار $+q$ در $(۰,۰,h)$ وجود دارد. اینها دقیقا ویژگی‌های مسئله‌ی اصلی ماست. نیمی زیرین $(z<۰)$ شکل (۸–۶) کاملا چیز دیگری است، اما این برای ما مهم نیست، ما در پی یافتن پتانسیل در نیمه‌ی بالایی بودیم و آن را یافتیم.

حالا می‌توانیم در باره‌ی توزیع بارهای القایی در سطح رسانا هم سخن بگوییم. به یاد بیاورید که ما می‌دانستیم که بار q سبب القاء بار در سطح رسانا می‌شود، اما نمی‌توانستیم بگوییم چقدر است و چگونه توزیع شده است. بگذارید توزیع بار سطحی القایی را در روی رسانا حساب کنیم. با دانستن پتانسیل، این کار آسان و سر راست است. با استفاده از رابطه‌ی (۱۱٦–۵) داریم

$$\frac{\partial V}{\partial n}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_{\circ}} \qquad (۱۸–٦)$$

که در آن $\partial V/\partial n$ مشتق پتانسیل در جهت عمود بر سطح است. در مثال ما جهت عمودی راستای z است. در نتیجه،

$$\sigma=-\varepsilon_{\circ}\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=۰} \qquad (۱۹–٦)$$

پتانسیل V با رابطه‌ی (۱۷–٦) داده شده است. مشتق آن نسبت به z عبارت است از

$$\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{۱}{٤\pi\varepsilon_{\circ}}\left[\frac{-q(z-h)}{\left(x^۲+y^۲+(z-h)^۲\right)^{۳/۲}}+\frac{q(z+h)}{\left(x^۲+y^۲+(z+h)^۲\right)^{۳/۲}}\right] \qquad (۲۰–٦)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(x,y)=-\varepsilon_{\circ}\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=۰}=\frac{۱}{۲\pi}\frac{-qh}{\left(x^۲+y^۲+h^۲\right)^{۳/۲}} \qquad (۲۱–٦)$$

می‌بینیم که بار القایی منفی است و در $x=y=۰$ بیش‌ترین چگالی را دارد. همچنین توجه کنید که همه‌ی بار درست در این

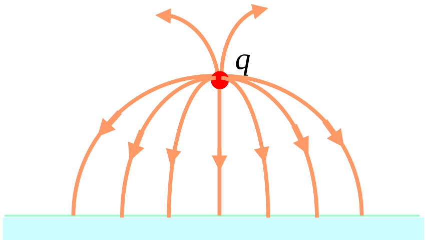
نقطه و در زیر بار $+q$ انباشته نشده است.

بار کل القایی را اینک می‌توانیم حساب کنیم. سطح رسانا را به حلقه‌های به شعاع r و پهنای dr تقسیم کنید و بر روی r از صفر تا بینهایت انتگرال بگیرید. چون $x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}$ است، به‌دست می‌آید

$$Q=\int_{\circ}^{\infty}\sigma\cdot ۲\pi r\,dr=-qh\int_{\circ}^{\infty}\frac{r\,dr}{\left(r^{۲}+h^{۲}\right)^{۳/۲}}=\frac{qh}{\left(r^{۲}+h^{۲}\right)^{۳/۲}}\Bigg|_{\circ}^{\infty}=-q \qquad (۶-۲۲)$$

مقداری که انتظارش را داشتیم.

نکته: شرایط مرزی در اینجا دقیقا همان نیست که در قضیه‌ی یگانگی در نظر گرفتیم. پتانسیل صفحه‌ی رسانا معین و برابر صفر است. اما یک بار نقطه‌ای (بار q) هم داریم که در روی آن پتانسیل به بینهایت میل می‌کند. برای گریز از این دشواری، بار نقطه‌ای را می‌توان حالت حدی کره‌ی رسانای کوچکی در نظر گرفت که بار ثابت q دارد. این وضعیتی را پیش رو می‌گذارد که شرایط مرزی ترکیبی از پتانسیل ثابت در روی یک رسانا و بار معین در روی رسانای دیگر است. با این حال، قضیه‌ی یگانگی۲ تضمین می‌کند که اگر میدان الکتریکی را برای مسئله‌ی جایگزین حل کنیم، پاسخ درست و یگانه‌ای برای مسئله‌ی اصلی به‌دست خواهیم آورد. به یاد بیاورید که میدان الکتریکی بر سطح رسانا عمود است. شکل (۱۰-۶) میدان الکتریکی را در بالای صفحه نشان می‌دهد. می‌توانیم به مسئله‌ی جایگزین برگردیم و اندازه و جهت میدان را در هر نقطه‌ی دلخواه، با استفاده از قانون کولمب حساب کنیم. نقطه‌ای را برابر شکل (۱۱-۶) در روی سطح و به فاصله‌ی r از مبداء مختصات در نظر بگیرید. فاصله تا بار q برابر $\sqrt{r^{۲}+h^{۲}}$ است. مولفه‌ی z میدان حاصل از بار q در نقطه‌ای **روی سطح** رسانا



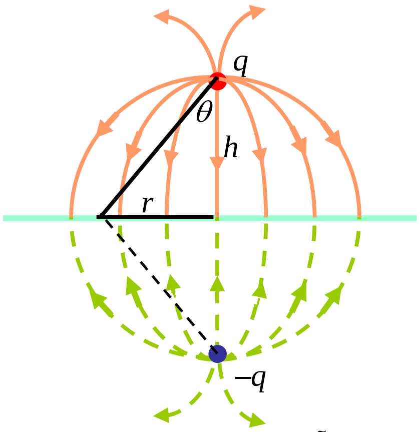
شکل ۱۰-۶ خطهای میدان در بالای صفحه‌ی رسانا

$$E_{z,q}\frac{-q\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_{\circ}\left(r^{۲}+h^{۲}\right)} \qquad (۶-۲۳)$$

است. مولفه‌ی z میدان ناشی از "بار تصویر" $-q$ واقع در زیر صفحه هم همین اندازه است. بنابراین، میدان کل در روی سطح رسانا برابر است با

$$E_{z}=\frac{-۲q\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_{\circ}\left(r^{۲}+h^{۲}\right)}$$

$$=\frac{-۲q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}\left(r^{۲}+h^{۲}\right)}\frac{h}{\left(r^{۲}+h^{۲}\right)^{۱/۲}}=\frac{-qh}{۲\pi\varepsilon_{\circ}\left(r^{۲}+h^{۲}\right)^{۳/۲}} \qquad (۶-۲۴)$$



شکل ۱۱-۶ آرایه‌ی جایگزین و خطهای میدان

اما همچنین می‌دانیم که میدان الکتریکی درست در بالای سطح برابر $\sigma/\varepsilon_{\circ}$ است. بنابراین،

$$\sigma=\varepsilon_{\circ}E_{z}=\frac{-qh}{۲\pi\left(r^{۲}+h^{۲}\right)^{۳/۲}} \qquad (۶-۲۵)$$

است که همان پاسخ پیشین است. انتگرال آن روی سطح بار کل القایی را به‌دست می‌دهد که برابر $-q$ است. این بدان معنی است که همه‌ی شار (خطهای میدان) که از بار q سرچشمه می‌گیرند، در روی رسانا پایان می‌یابند.♣

جمع‌بندی کنیم: اگر بخواهیم پتانسیل الکتریکی حاصل از رسانا و مجموعه‌ای از بارها را در بیرون رسانا حساب کنیم، بیش‌تر وقت‌ها می‌توانیم پتانسیل مورد نظر را که در شرایط مرزی صدق می‌کند، با به کار گیری بارهای تصویر بسازیم. اگر بتوانیم بارهای تصویر درست را در مکان‌های مناسب آن قرار دهیم که پتانسیل آنها شرایط مرزی را راضی کند، بنابه قضیه‌ی یگانگی، باید تابع پتانسیل درستی برای بیرون رسانا باشد. توجه کنید که نمی‌توان از بار تصویر استفاده کرد و پتانسیل را در ناحیه‌ای که بار تصویر قرار دارد، به‌دست آورد. در مثال بالا (رسانای تخت و بار q در بالای آن) بار تصویر $-q$ را در $(\circ,\circ,-h)$ قرار دادیم، این آرایش، در بالای صفحه، پتانسیل درستی به‌دست داد. در زیر صفحه، پتانسیل مقدار ثابتی است و این پتانسیلی نیست که از بار واقعی q در $(\circ,\circ,+h)$ وبار تصویر $-q$ را در $(\circ,\circ,-h)$ به‌دست می‌دهد. در بیش‌تر حالت‌ها، معمولا پتانسیل در ناحیه‌ای که بار تصویر قرار می‌گیرد، مقدار ثابتی است، در نتیجه، تاثیری نخواهد داشت. در این گونه مسئله‌ها، فیزیک جالب در سطح و بیرون رسانا روی می‌دهد.

مثال ۲-۶ نیرو و انرژی در مسئله‌ی صفحه‌ی رسانای تخت گسترده و بار q در فاصله‌ی h در بالای آن، دیدیم که مقداری بار منفی در سطح رسانا القاء می‌شود. این بارهای منفی به بار q نیروی ربایشی وارد می‌کنند. آن را حساب کنید.

حل: نیرویی که به بار q وارد می‌شود برابر $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ است. $\mathbf{E}$ میدانی است که بارهای القایی سطح رسانا تولید می‌کنند. این نیرو را می‌توان از بار تصویر حساب کرد.

$$\mathbf{F}=-\frac{q^{۲}}{۴\pi\varepsilon_\circ\left(۲h\right)^{۲}}\hat{\mathbf{z}} \qquad (۶-۲۶)$$

نکته: شاید گمان کنید که همه چیز در مسئله‌ی جایگزین (بار اولیه بعلاوه‌ی بار تصویر و بدون رسانا) و مسئله‌ی اصلی (یک بار و صفحه‌ی رسانا) یکسان است (به هر حال دیدیم، که میدان الکتریکی و پتانسیل یکسان بودند). این گمان درست نیست. انرژی در دو آرایه متفاوت اند. انرژی در مسئله‌ی جایگزین، برابر است با مقدار کار لازم برای آوردن بار q از بینهایت و قرار دادن آن در مکان $(\circ,\circ,h)$ و قرار دادن بار $-q$ را در $(\circ,\circ,-h)$. کار لازم برای اولی صفر است و کار لازم برای دومی

$$W=-\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q^{۲}}{۲h} \qquad (۶-۲۷)$$

است. اما در مسئله‌ی اصلی، یعنی بار q در $(\circ,\circ,h)$ و صفحه‌ی رسانا در $x=y=\circ$ تنرژی عبارت است از

$$W=\int_\circ^h \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\int_\circ^h\frac{q^{۲}}{۴z^{۲}}dz=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(-\frac{q^{۲}}{۴z}\right)\Bigg|_\circ^\infty=-\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{q^{۲}}{۴h} \qquad (۶-۲۸)$$

این مقدار نصف مقداری است که در رابطه‌ی (۲۷-۶) برای مسئله‌ی جایگزین به‌دست آوردیم. چرا چنین است؟ به یاد بیاورید که انرژی الکتروستاتیکی در میدان الکتریکی ذخیره می‌شود و داریم

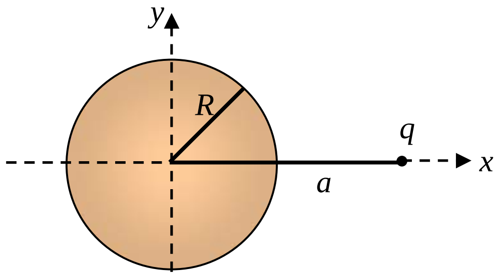
$$W=\frac{\varepsilon_\circ}{۲}\int_\infty E^{۲}d\tau \qquad (۶-۲۹)$$

که در آن انتگرال بر روی تمام فضا گرفته می‌شود. در مسئله‌ی جایگزین میدان را باید برای هر دوی $z>\circ$ و $z<\circ$ در نظر بگیریم، اما در مسئله‌ی اصلی، میدان فقط در ناحیه‌ی $z>\circ$ وجود دارد.♣

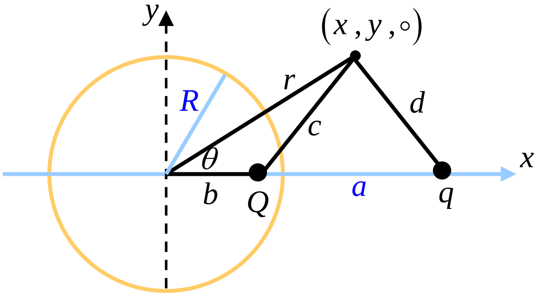
مثال ۳-۶ کره‌ی رسانا و بار q: پوسته‌ی کره‌ی رسانایی به شعاع R به زمین وصل است و در نتیجه، در پتانسیل صفر

است. بار نقطه‌ای q به فاصله‌ی $a > R$ در بیرون کره قرار دارد. با استفاده از روش بارهای تصویر، پتانسیل را در همه‌جا حساب کنید.

حل۱: بار نخست که من این مسئله را حل کردم، از روشی که در اینجا توضیح می‌دهم استفاده کردم. اما راه کوتاه‌تری هم وجود دارد که در حل ۲ به آن می‌پردازم. مسئله را با مختصات شکل (۱۲-۶) در نظر بگیرید. برای یافتن پتانسیل از دو واقعیت بهره خواهیم گرفت: پتانسیل در سطح رسانا مقدار ثابتی است. در این مسئله، پتانسیل در سطح رسانا صفر است و این که میدان الکتریکی باید بر سطح رسانا عمود باشد. پیش از انکه بخواهیم محاسبه‌ای انجام بدهیم، بهتر است حدس بزنیم که کجا باید بار تصویر را قرار دهیم (بنا به قضیه‌ی یگانگی، اگر بتوانیم با بارهای تصویر میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی بسازیم که ویژگی‌های رسانا را، یعنی شرایط مرزی را برآورده کند، باید میدان و پتانسیل درست باشند.) اگر بار تصویر را در بیرون کره قرار دهیم، دو نقطه‌ی $(R,0,0)$ و $(-R,0,0)$ که در دو انتهای روبروی کره اند، هرگز نمی‌توانند در یک پتانسیل باشند. بنابراین، بار تصویر را باید در جایی در درون کره قرار دهیم. بنا به تقارن، بار تصویر باید در روی محور x باشد، چون پتانسیل در $y<0$، قرینه‌ی پتانسیل در $y>0$ است. پس، برای این که پتانسیل را در همه‌جای فضا تعیین کنیم، لازم است که بار تصویر بار تصویر چه اندازه باید باشد و در کجای محور x قرار گیرد. بار تصویر را Q بنامید و مکان آن را با b نشان دهید. شکل (۱۳-۶) را ببینید. برای سادگی، محاسبه را در $z=0$ انجام خواهیم داد. برای حالا بپذیرید که این گزینه از عمومیت محاسبه نمی‌کاهد. پتانسیل ناشی از دو بار q و Q (اما بدون کره‌ی رسانا) در نقطه‌ی $(x,y,0)$ عبارت است از



شکل ۱۲-۶ کره‌ی رسانا در $V=0$ و بار q



شکل ۱۳-۶ پتانسیل در نقطه‌ی $(x,y,0)$

$$V(x,y,0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{c}+\frac{q}{d}\right] \qquad (۶-۳۰)$$

از قانون کسینوس‌ها برای یافتن c و d استفاده خواهیم کرد. داریم

$$c^2=r^2+b^2-2rb\cos\theta,\quad \cos\theta=x/r\;,\; r^2=x^2+y^2 \quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{x^2+y^2+b^2-2bx} \qquad (۶-۳۱)$$

$$d^2=r^2+a^2-2ra\cos\theta,\quad \cos\theta=x/r\;,\; r^2=x^2+y^2 \quad\Rightarrow\quad d=\sqrt{x^2+y^2+a^2-2ax} \qquad (۶-۳۲)$$

$$\Rightarrow\quad V(x,y,0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+b^2-2bx}}+\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+a^2-2ax}}\right] \qquad (۶-۳۳)$$

در سطح رسانا پتانسیل صفر است، بنابراین به ازای $x^2+y^2=R^2$ باید داشته باشیم، $V=0$. در نتیجه،

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+b^2-2bx}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+a^2-2ax}}\quad\Rightarrow\quad Q^2\left(R^2+a^2-2ax\right)=q^2\left(R^2+b^2-2bx\right) \qquad (۶-۳۴)$$

حالا از واقعیت دوم استفاده می‌کنیم که می‌گوید میدان باید بر سطح رسانا عمود باشد. این بدان معنی است که در نقطه‌ی $(0,R)$ میدان باید عمودی باشد و برای این وضعیت، مولفه‌هاافقی میدان‌های Q و q باید یکدیگر را حذف کنند. نخست میدان

هر یک از این دو بار را حساب کنید. داریم

$$\mathbf{E}_q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2}\hat{\mathbf{d}}$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q(x-a)}{\left(x^2+y^2+a^2-2xa\right)\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\hat{\mathbf{x}}+\frac{qy}{\left(x^2+y^2+a^2-2xa\right)\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\hat{\mathbf{y}}\right] \qquad (6\text{-}35)$$

$$\mathbf{E}_Q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2}\hat{\mathbf{c}}$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q(x-b)}{\left(x^2+y^2+b^2-2xb\right)\sqrt{(x-b)^2+y^2}}\hat{\mathbf{x}}+\frac{Qy}{\left(x^2+y^2+b^2-2xb\right)\sqrt{(x-b)^2+y^2}}\hat{\mathbf{y}}\right] \qquad (6\text{-}36)$$

به ازای $x=0$ و $y=R$ مولفه‌های x دو میدان بالا باید یکدیگر را حذف کنند. در نتیجه، اگر در رابطه‌ی

$$\frac{Q(x-b)}{\left(x^2+y^2+b^2-2xb\right)\sqrt{(x-b)^2+y^2}}=-\frac{q(x-a)}{\left(x^2+y^2+a^2-2xa\right)\sqrt{(x-a)^2+y^2}} \qquad (6\text{-}37)$$

قرار دهیم $x=0$ و $y=R$ خواهیم داشت

$$\frac{Qb}{\left(R^2+b^2\right)^{3/2}}=-\frac{qa}{\left(R^2+a^2\right)^{3/2}} \quad\Rightarrow\quad Q=-\frac{qa\left(R^2+b^2\right)^{3/2}}{b\left(R^2+a^2\right)^{3/2}} \qquad (6\text{-}38)$$

(**نکته**: می‌توانستیم از $\mathbf{E}=-\vec{\nabla}V$ هم استفاده کنیم و مولفه‌ی x میدان الکتریکی را مساوی صفر قرار دهیم.♣)

حال این مقدار را در رابطه‌ی (6-34) جایگزین کنید. به‌دست می‌آید

$$\frac{q^2a^2\left(R^2+b^2\right)^3}{b^2\left(R^2+a^2\right)^3}\left(R^2+a^2-2ax\right)=q^2\left(R^2+b^2-2bx\right) \qquad (6\text{-}39)$$

اما رابطه‌ی (6-38) به ازای $x=0$ برقرار بود. بنابراین، در اینجا هم اگر $x=0$ قرار دهیم، رابطه‌ی (6-39) باید برقرار باشد:

$$\Rightarrow\quad \frac{q^2a^2\left(R^2+b^2\right)^3}{b^2\left(R^2+a^2\right)^3}\left(R^2+a^2\right)=q^2\left(R^2+b^2\right) \quad\Rightarrow\quad a^2\left(R^2+b^2\right)^2=b^2\left(R^2+a^2\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad b^2=\frac{R^4+a^4\pm\left(R^4-a^4\right)}{2a^2} \qquad \begin{cases} b^2=a^2 \\ b^2=R^4/a^2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} b=\pm a \\ \boxed{b=\pm R^2/a} \end{cases} \qquad (6\text{-}40)$$

توجه کنید که اگر $b=a$ باشد، خواهیم داشت $Q=-q$ و این سبب می‌شود که پتانسیل در روی رسانا صفر باشد. این البته پاسخ است، اما پاسخ بدیهی است. اگر $b=-a$ باشد، پتانسیل فقط در $x=0$ برابر صفر می‌شود. پس، این پاسخ پذیرفتنی نیست. بنابراین، پاسخ $b=\pm R^2/a$ را در نظر می‌گیریم و آن را در رابطه‌ی (6-38) قرار می‌دهیم تا Q را بیابیم.

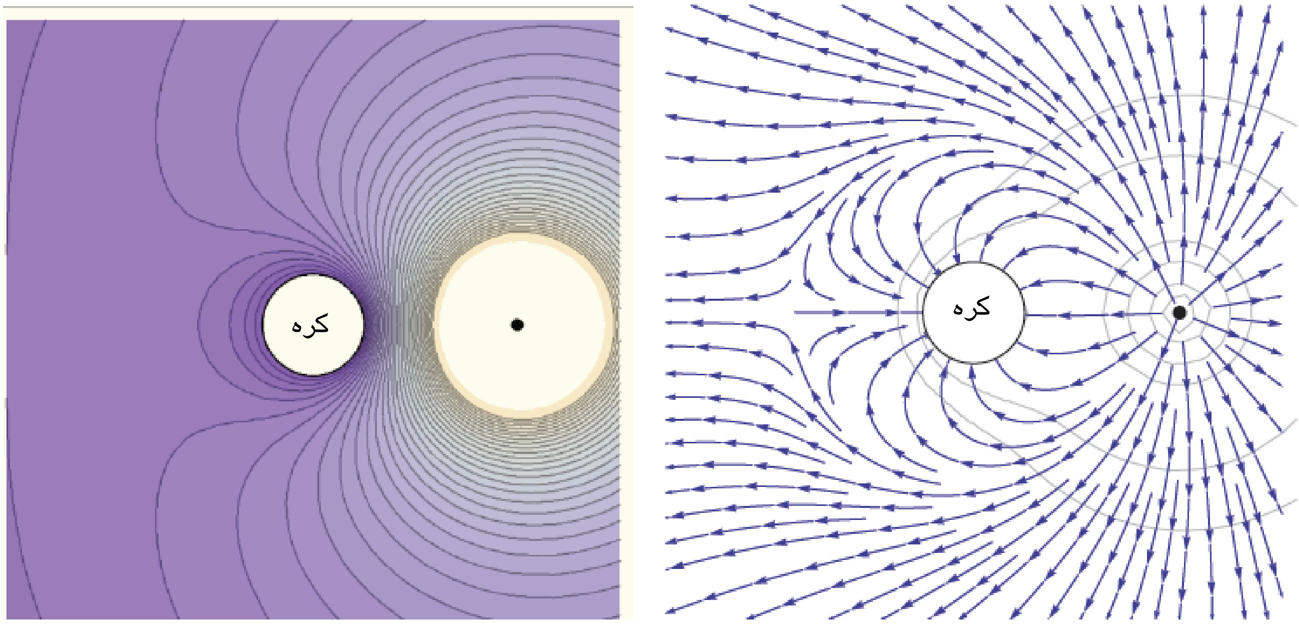
$$Q=\mp\frac{qa^{2}\left(R^{2}+R^{4}/a^{2}\right)^{3/2}}{R^{2}\left(R^{2}+a^{2}\right)^{3/2}}=\boxed{\mp\frac{qR}{a}} \qquad (٦-٤١)$$

حال که مقدار بار تصویر Q و مکان b آن را یافتیم، می‌توانیم پتانسیل را در نقطه‌ی دلخواه (x,y,z) در بیرون کره‌ی رسانا حساب کنیم:

$$V_{\text{Out}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\left[\frac{q}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}+a^{2}-2xa}}-\frac{qR}{a\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}+R^{4}/a^{2}-2xR^{2}/a}}\right] \qquad (٦-٤٢)$$

توجه کنید که به ازای $x^{2}+y^{2}+z^{2}=R^{2}$ داریم $V_{\text{Out}}=0$ که نتیجه‌ی دلخواه است و در بنابراین، با گزینه‌ی $z=0$ در آغاز حل مسئله، چیزی از دست ندادیم. همچنین باید بگویم که پتانسیل در درون کره، $V_{\text{In}}=0$ است، چون نمی‌توانیم از روش بار تصویر استفاده کنیم و در ناحیه‌ای که بار تصویر قرار دارد، پتانسیل را حساب کنیم.

در شکل (٦-١٤) نمودار پتانسیل الکتریکی و خطهای میدان برای $a=4R$ نشان داده شده اند. در نمودار پتانسیل، نمودار سمت چپ، ناحیه‌ی سفید پیرامون بار نقطه‌ای در اثر محدودیت محاسباتی در *Mathematica* است. تجسم کنید که با نزدیک شدن به بار نقطه‌ای پتانسیل به بینهایت میل می‌کند. همچنین توجه کنید که در نمودار خطهای میدان، این خطها بر پوسته‌ی کروی عمود اند. به گسستگی خطهای میدان در روی سطح پوسته‌ی کروی رسانا هم توجه کنید. این گسستگی به چه معنی است؟



شکل ١٤-٦ (راست): خطهای میدان الکتریکی. (چپ): پتانسیل الکتریکی

حل۲: می‌توانستیم دو نقطه‌ای را برگزینیم که می‌دانیم پتانسیل در آنجا چگونه باید باشد و سپس Q و b را چنان بیابیم که در این نقاط پتانسیل را به‌دست بدهد. بعد از آن می‌توانیم ببینیم که آیا این پتانسیل شرایط مرزی را راضی می‌کند یا نه.

می‌دانیم که در نقاط $(R,0,0)$ و $(-R,0,0)$ پتانسیل صفر است، چون این دو نقطه‌ی ساده در روی کره‌ی رسانا هستند. این دو نقطه دو معادله به‌دست می‌دهد تا دو مجهول Q و b را پیدا کنیم.

$$V\left(R,0,0\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{a-R}+\frac{Q}{R-b}\right]=0 \quad\Rightarrow\quad Q=-q\frac{R-b}{a-R} \qquad (۶-۴۳)$$

$$V\left(-R,0,0\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{a+R}+\frac{Q}{R+b}\right]=0 \qquad (۶-۴۴)$$

اگر مقدار Q را از رابطه‌ی (۴۳-۶) در معادله‌ی (۴۴-۶) قرار دهیم خواهیم داشت

$$\frac{q}{a+R}-\frac{q\left(R-b\right)}{\left(b+R\right)\left(a-R\right)}=0 \quad\Rightarrow\quad \left(b+R\right)\left(a-R\right)=\left(R-b\right)\left(a+R\right)$$

$$\Rightarrow\quad 2ab=2R^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{b=\frac{R^2}{a}} \quad ; \quad Q=-q\frac{R-\frac{R^2}{a}}{a-R}=\boxed{-q\frac{R}{a}} \qquad (۶-۴۵)$$

که همان پاسخ‌های حل ۱ اند.

مثال ۴-۶ بازهم پوسته‌ی رسانا: پوسته‌ی کروی رسانای مثال ۳-۶ را دوباره در نظر بگیرید. نیرویی را که کره به بار q وارد می‌کند، حساب کنید. توزیع بار روی پوسته را حساب کنید. اگر پوسته به زمین وصل نبود و بار Q_0 داشت، از چه آرایش بار تصویر می‌بایست استفاده می‌کردید؟

حل: نیروی وارد به بار q همان نیرویی است که بار تصویر جایگزیده در $\left(b,0,0\right)$ به آن وارد می‌کند، چون میدانی را که بار q بر اثر کره‌ی رسانا می‌بیند، همان میدانی است که در نبود کره‌ی رسانا بار تصویر تولید می‌کند. بنابراین،

$$\mathbf{F}_q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{\left(a-b\right)^2}\hat{\mathbf{x}}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2Ra}{\left(a^2-R^2\right)^2}\hat{\mathbf{x}} \qquad (۶-۴۶)$$

برای یافتن توزیع بار روی پوسته‌ی رسانا از گسستگی میدان الکتریکی در روی سطح رسانا استفاده خواهیم کرد. می‌دانیم که $\Delta\mathbf{E}_\perp\equiv\Delta\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\sigma/\varepsilon_0$ است ($\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح است). می‌دانیم که میدان الکتریکی در درون رسانا صفر است. پس، تغییر در میدان الکتریکی با میدان درست در بیرون سطح رسانا برابر است. در مثال ۳-۶ میدان $\mathbf{E}$ را حساب کردیم (از $\mathbf{E}=-\vec{\nabla}V$ هم می‌توانیم استفاده کنیم.) در هر حال به‌دست می‌آید

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}=$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(x-a,y,z\right)}{\left(x^2+y^2+z^2+a^2-2xa\right)^{3/2}}-\frac{R\left(x-R^2/a,y,z\right)}{a\left(x^2+y^2+z^2+R^4/a^2-2xR^2/a\right)^{3/2}}\right]\cdot\frac{\left(x,y,x\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\left[\frac{x^2-ax+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2+a^2-2xa\right)^{3/2}}-\frac{R\left(x^2+y^2+z^2-xR^2/a\right)}{a\left(x^2+y^2+z^2+R^4/a^2-2xR^2/a\right)^{3/2}}\right] \qquad (۶-۴۷)$$

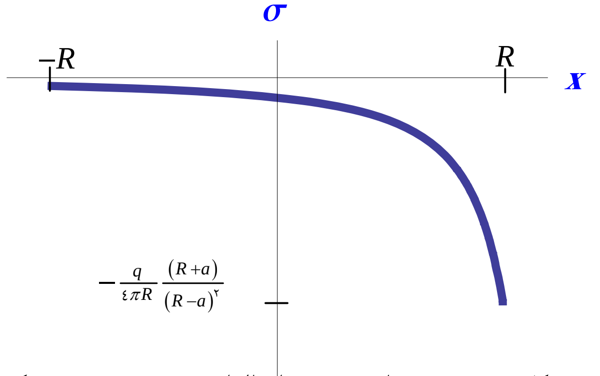
در رابطه‌ی بالا از بردار شعاعی برای $\hat{\mathbf{n}}$ استفاده کردیم. حالا باید رابطه‌ی بالا را در سطح کره، یعنی در $x^2+y^2+z^2=R^2$ حساب کنیم. خواهیم داشت

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ R}\left[\frac{R^2-ax}{\left(R^2+a^2-2ax\right)^{3/2}}-\frac{R^2-xR^2/a}{a\left(R^2+R^4/a^2-2xR^2/a\right)^{3/2}}\right]$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ R}\left[\frac{R^2-ax}{\left(R^2+a^2-2ax\right)^{3/2}}-\frac{R^2-xR^2/a}{\left(R^2/a^2\right)\left(a^2+R^2-2ax\right)^{3/2}}\right]$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ R}\left[\frac{R^2-a^2}{\left(R^2+a^2-2ax\right)^{3/2}}\right]=\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}\quad\Rightarrow\quad \boxed{\sigma=\frac{q}{4\pi R}\left[\frac{R^2-a^2}{\left(R^2+a^2-2ax\right)^{3/2}}\right]}\qquad (۶-۴۸)$$

در شکل (۱۵-۶) نمودار توزیع بار بر روی سطح رسانا دیده می‌شود. می‌توانیم ببینیم که آیا این یافته با مقدار کل بار در روی پوسته سازگار است یا نه. برای محاسبه‌ی بار کل σ از بر روی سطح رسانا انتگرال بگیرید. انتگرال را در مختصات کروی حساب کنید. چون محور x را به دلخواه برگزیدیم، بهتر است آن را با $z=R\cos\theta$ جایگزین بکنیم تا محاسبه‌ی انتگرال‌ساده‌تر بشود.



شکل ۱۵-۶ نمودار توزیع بار القایی بر روی پوسته کروی

$$Q_{tot}=\int_S \sigma da=\frac{q}{4\pi R}\int_\circ^{2\pi}\int_\circ^{\pi}\left[\frac{R^2-a^2}{\left(R^2+a^2-2aR\cos\theta\right)^{3/2}}\right]R^2\sin\theta d\theta d\phi \qquad (۶-۴۹)$$

با تغییر متغیر $u=R^2+a^2-2aR\cos\theta \Rightarrow du=2aR\sin\theta d\theta$ خواهیم داشت

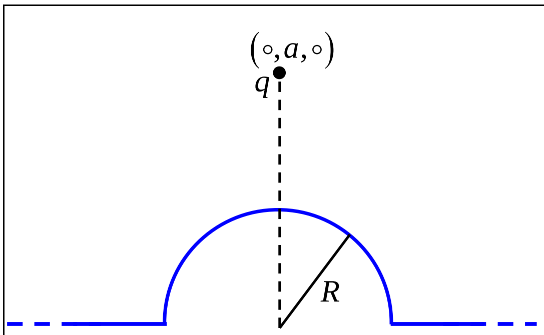
$$Q_{tot}=\frac{q}{4a}\int_{(r-a)^2}^{(R+a)^2}\frac{R^2-a^2}{u^{3/2}}du=-\frac{q}{2a}\left(R^2-a^2\right)u^{-1/2}\Big|_{(r-a)^2}^{(R+a)^2}=-\frac{q}{2a}\left(R^2-a^2\right)\left[\frac{1}{R+a}-\frac{1}{|R-a|}\right]$$

$$\Rightarrow\quad Q_{tot}=-\frac{q}{2a}\left[R-a+R+a\right]=-q\frac{R}{a}\qquad (۶-۵۰)$$

پس، به همان مقدار بار کل می‌رسیم که انتظار داشتیم.

نکته: اگر پوسته به زمین وصل نبود (در پتانسیل صفر نبود) و بار $Q_\circ$ می‌داشت، کافی بود یک بار تصویر دیگری با مقدار مناسب در مرکز کره قرار می‌دادیم تا مقدار بار روی کره را از مقدار $-qR/a$ که به‌دست آوردیم به مقدار $Q_\circ$ برساند. پس، افزون بر بار تصویر $-qR/a$ در R^2/a به یک بار تصویر دیگری به اندازه‌ی $\boxed{Q_\circ+qR/a}$ در مرکز هم نیاز داشتیم.♣

مثال ۵-۶ صفحه‌ی رسانای بینهایت گسترده با برآمدگی: صفحه‌ی رسانای بینهایت گسترده شکل (۱۶-۵) به زمین وصل است و یک برآمدگی نیمکره به شعاع R دارد. بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی $a>R$ از مرکز برآمدگی در مکان $(\circ,a,\circ)$ بالای برآمدگی است. با استفاده از روش بارهای تصویر پتانسیل را در همه‌جا حساب کنید.



شکل ۱۶-۶ صفحه‌ی رسانا با برآمدگی

حل: این آرایه در واقع آمیزه‌ی مثال‌های ۱-۶ و ۳-۶ است. می‌توانیم از آموزه‌های آن دو مثال در اینجا استفاده کنیم. می‌خواهیم رسانا یک سطح هم‌پتانسیل باشد و میدان الکتریکی بر سطح آن عمود باشد. پتانسیل رسانا را $V=0$ قرار دهید. بنابراین، همه‌جا در زیر رسانا هم در $V=0$ خواهد بود، چون در ناحیه‌ی زیر رسانا میدان الکتریکی صفر است. ما آزادیم هر کاری در ناحیه‌ی زیر رسانا انجام دهیم تا به پتانسیل و میدان الکتریکی دلخواهمان در بالای رسانا برسیم. این اجازه را قضیه‌ی یگانگی به ما می‌دهد (اگر پاسخی یافتیم که در شرایط مرزی صدق بکند، آن پاسخ درست و یگانه است.) پس از یافتن پاسخ، می‌توانیم بگوییم که در ناحیه‌ی زیر رسانا همه‌چیز صفر است و رسانا را می‌توانیم از برهم‌نهی یک صفحه‌ی بی‌نهایت گسترده و یک پوسته‌ی کروی بسازیم. در آغاز بخش ۴-۶ و مثال ۱-۶ دیدیم که یک بار تصویر به‌اندازه‌ی $-q$ جایگزیده در $(0,-a,0)$ لازم داریم تا پتانسیل و میدان الکتریکی درست را در بالای صفحه‌ی بی‌نهایت گسترده متصل به زمین را به‌دست آوریم. این بار تصویر در واقع تصویر بار واقعی q در $(0,a,0)$است. در مثال ۳-۶ هم دیدیم که به بار تصویری به اندازه‌ی $-qR/a$ در مکان $(0,R^2/a,0)$ نیاز داریم تا میدان و پتانسیل مناسب ناشی از بار q واقع در $(0,a,0)$ و پوسته‌ی کروی با شعاع R را تولید کند. اما اگر این دو را باهم ترکیب کنیم، با یک دشواری روبرو خواهیم شد: با بازسازی میدان و پتانسیل برای صفحه‌ی رسانا، بار دیگری را (بار $-q$ در $(0,-a,0)$) در بیرون پوسته‌ی کروی رسانا قرار می‌دهیم. همچنین برای بازسازی میدان و پتانسیل پوسته‌ی کروی رسانا بار $-qR/a$ را در $(0,R^2/a,0)$ بالای صفحه‌ی رسانا قرار دادیم. این بارها آرایش ما را در مجموع به‌هم می‌زنند. برای این که اثر بار اضافی در بالای صفحه‌ی رسانا را تصحیح کنیم، می‌توانیم یک بار تصویر دیگر را با علامت مخالف درزیر صفحه و در مکان مناسب آن قرار دهیم. با این کار، بار تصویر سومی به اندازه‌ی qR/a در $(0,-R^2/a,0)$ خواهیم داشت. توجه کنید که با تصحیح کردن اثر بار تصویر واقع در بالای صفحه، اثر بار تصویر در بیرون پوسته‌ی کروی رسانا را هم تصحیح کردیم، چون به یک بار تصویر به اندازه‌ی qR/a در $(0,-R^2/a,0)$ برای میدان درست ناشی از رسانای کروی و یک بار تصویر به اندازه‌ی q در $(0,-a,0)$ نیاز داشتیم. پس، پتانسیل حاصل از بار واقعی q و رسانا در بالای رسانا همان پتانسیل ناشی ازبارهای زیر است: بار واقعی q در $(0,a,0)$، بار تصویر $-qR/a$ در $(0,R^2/a,0)$، بار تصویر qR/a در $(0,-R^2/a,0)$ و بار تصویر $-q$ در $(0,-a,0)$. سرانجام این که پتانسیل در بالای رسانا عبارت است از ($k\equiv 1/4\pi\varepsilon_0$)

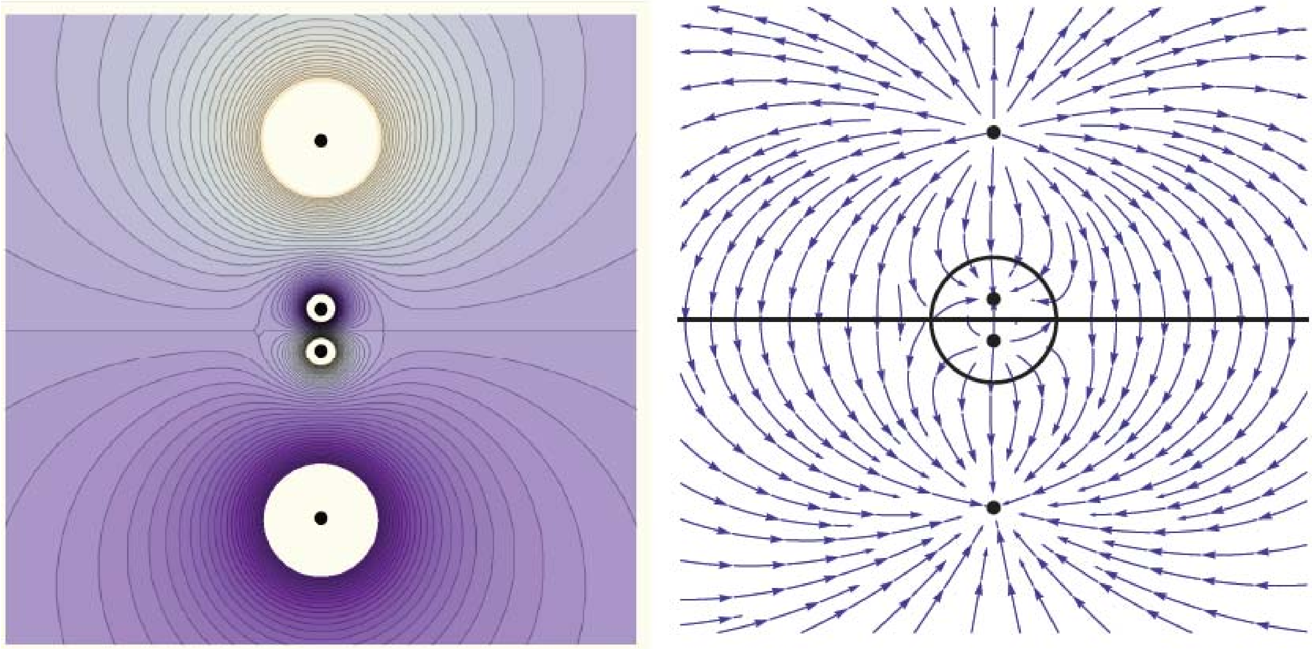
$$V_{\text{above}}=$$

$$\frac{kq}{\sqrt{x^2+(y-a)^2+z^2}}-\frac{kq\,R/a}{\sqrt{x^2+\left(y-R^2/a\right)^2+z^2}}+\frac{kq\,R/a}{\sqrt{x^2+\left(y+R^2/a\right)^2+z^2}}-\frac{kq}{\sqrt{x^2+(y+a)^2+z^2}}\qquad (۶-۵۱)$$

و پتانسیل در زیر رسانا $V_{\text{Below}}=0$ است.

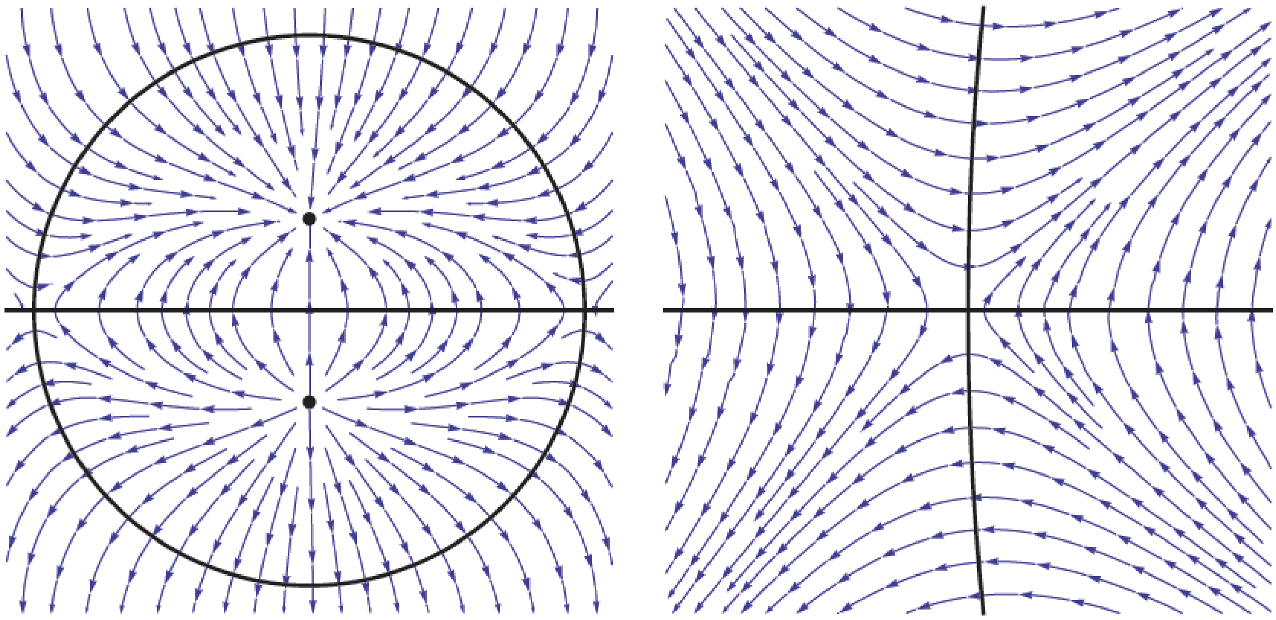
خیلی دشوار نیست که نشان دهیم به‌ازای $y=0$ پتانسیل صفر است. همچنین، می‌توانید نشان دهید که در روی پوسته، یعنی وقتی $x^2+y^2+z^2=R^2$ است، بازهم $V=0$ می‌شود. برای تمرین، می‌توانید میدان الکتریکی را از $\mathbf{E}=-\overrightarrow{\nabla V}$ به‌دست بیاورید. همچنین می‌توانید با برهم‌نهی میدان‌های چهار بار نقطه‌ای آن را حساب کنید. در نمودارهای شکل (۱۷-۶) خط‌های

میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی حاصل از چهار بار نقطه‌ای بالا نشان داده شده است. این نمودار به راستی زیباست!



شکل ۱۷-٦ (راست) خط‌های میدان ناشی از چهار بار نقطه‌ای. (چپ): پتانسیل الکتریکی چهار بار نقطه‌ای

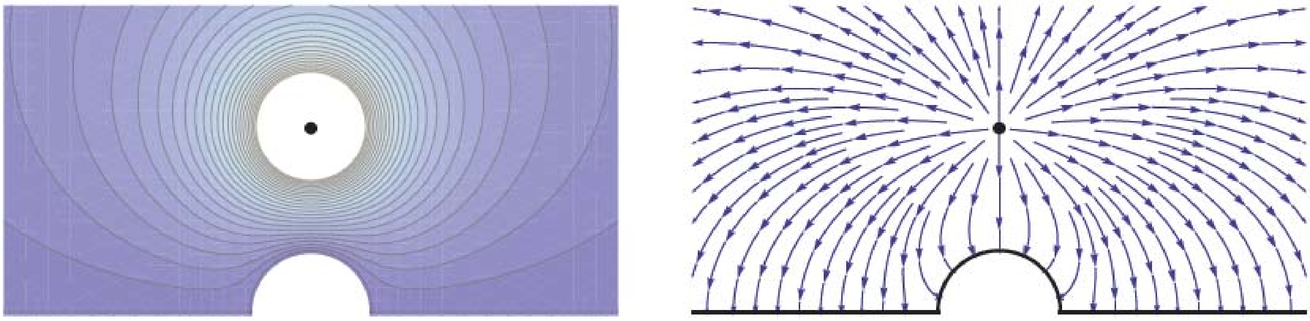
در سمت چپ شکل (۱۸-٦) نمای میدان در نزدیکی‌های برآمدگی کروی دیده می‌شود. توجه کنید که به‌راستی میدان بر سطح پوسته‌ی کروی و بر صفحه‌ی رسانا عمود است. نمودار سمت راست نمای نزدیک میدان در محل تلاقی پوسته‌ی کروی و



شکل ۱۸-٦ (چپ): نمای نزدیک خط‌های میدان در همسایکی پوسته. (راست): خط‌های میدان در محل تلاقی پوسته و صفحه

صفحه است. توجه کنید که درست در نقطه‌ی تلاقی میدان صفر است. باید هم این‌چنین باشد، چون تنها میدان عمود بر دو صفحه‌ی متعامد، بردار صفر است.

نمودارهای بالا به‌راستی پتانسیل و میدان الکتریکی واقعی را نشان نمی‌دهند، چون در زیر رسانا پتانسیل و میدان صفر اند. برای نمایش میدان و پتانسیل واقعی باید آنها را حذف کنیم. نمودار شکل (۱۹-۶) میدان و پتانسیل واقعی را نشان می‌دهند. به گسستگی در میدان الکتریکی در روی رساناها توجه کنید. این گسستگی چه چیزی را بیان می‌کند؟



شکل ۱۹-۶ (راست): خط‌های میدان در بالای رسانا. (چپ) نمودار پتانسیل در بالای رسانا

۵-۶ خازن و ظرفیت خازن

در آغاز این فصل و در فصل ٤ ویژگی‌های رساناها را بررسی کردیم. دیدیم که سطح رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است، یعنی پتانسیل در روی رسانا مقدار ثابتی است. پتانسیل یک رسانای منزوی با بار Q نسبت به بینهایت مقدار معین V_0 است. بار Q با پتانسیل V_0 متناسب است. ضریب تناسب فقط به شکل رسانا بستگی دارد. ما این ضریب تناسب را ظرفیت راسانا می‌نامیم و آن را با C نشان می‌دهیم. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$Q = CV_0 \tag{6-52}$$

روشن است که یکای C بستگی به یکاهای V_0 و Q دارد. در یکاهای SI بار الکتریکی با کولمب و پتانسیل با ولت اندازه‌گیری می‌شود. پس، یکای ظرفیت C کولمب بر ولت است. این ترکیب یکاها نام خاصی برای خود دارد: *فاراد*. چون یک ولت برابر ژول بر کولمب است، می‌توانیم فاراد را برحسب یکاهای دیگری هم بیان کنیم: $1\,\text{farad} = 1\left(C^2.s^2/kg.m^2\right)$.

پتانسیل کره‌ی رسانا منزوی با شعاع a و بار Q نسبت به بینهایت $V_0 = Q/4\pi\varepsilon_0 a$ است. پس، ظرفیتش $C = Q/V_0 = 4\pi\varepsilon_0 a$ است.

یک فاراد واحد بسیار بزرگی است، ظرفیت کره‌ای منزوی به بزرگی زمین فقط برابر است با

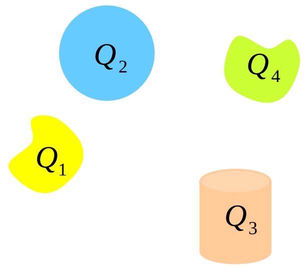
$$C_E = 4\pi\varepsilon_0 a = 4\pi\left(8.85\times10^{-12}\,\frac{C^2s^2}{kg\,m^3}\right)\left(6.4\times10^{6}\,m\right) \approx 7\times10^{-4}\,\frac{C^2s^2}{kg\,m^2} = 7\times10^{-4}\,\text{farad} \tag{6-53}$$

است. به این دلیل، از یکاهای کوچک‌تر میکروفاراد (μF) که 10^{-6} برابر یک فاراد است استفاده می‌شود. پیکوفاراد (pF) سنجه‌ی دیگری است که برابر 10^{-12} فاراد است.

نام عمومی برای آرایه‌ای از چند رسانای باردار و پتانسیل **خازن** است. معمول‌ترین خازن‌ها شامل دو رسانا است که بارهای برابر و ناهمنام $+Q$ و $-Q$ دارند. در این حالت، ظرفیت با نسبت بار Q به اختلاف پتانسیل بین دو رسانا تعریف می‌شود. در شکل (۲۰-۶) آرایه‌ای با چهار رسانا نشان داده شده است.

خازن وسیله‌ای برای انبار کردن بار الکتریکی است. اندازه و شکل خازن‌ها متفاوت اند. اما پیکربندی بنیادی شامل دو رسانا با بارهای مساوی و ناهمنام، همانند شکل (۲۱-۶) است. خازن‌ها در صنعت الکترونیک کاربردهای فراوان دارند. ذخیره کردن

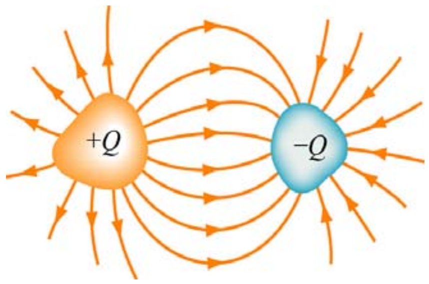
انرژی پتانسیل الکتریکی آشناترین کاربرد آن است. اگر خازن به همراه مقاومت در مدار الکتریکی به کار برود، برای به تاخیرانداختن تغییر ولتاژ، پالایش بسامدهای ناخواسته در یک سیگنال الکترونیکی، ساختن مدارهای تشدید، تقسیم کننده‌ی مستقل از بسامد و وابسته به بسامد ولتاژ را می‌توان از دیگر کاربردهای آن برشمرد. برخی از این کاربردها را در فصل‌های آینده بررسی خواهیم کرد.



شکل ۲۰-۶ آرایه‌ی چهار رسانای

دو رسانای شکل (۲۱-۶) را در نظر بگیرید. بار در روی یکی از این رساناها $+Q$ و در روی رسانای دیگر $-Q$ است. چون رسانا سطح هم‌پتانسیل است، اختلاف پتانسیل بین این دو رسانا کاملا تعریف شده است و می‌توان نوشت

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_{(-)}^{(+)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad (٦-٥٤)$$



شکل ۲۱-۶ پیکربندی بنیادی

وقتی که خازن بی بار است، بار هر دو رسانا صفر است. در فرایند باردار کردن خازن، بار Q روی یک رسانا و بار $-Q$ در روی رسانای دیگر توزیع می‌شوند و در نتیجه، بین رساناها اختلاف پتانسیل ΔV به وجود می‌آید. رسانای با بار مثبت در پتانسیل بالاتر از رسانای با بار منفی قرار می‌گیرد. توجه کنید که چه خازن باردار باشد و چه بی‌بار، در هر دو حالت بار کل خازن صفر است.

برای این که میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در فضای بین دو رسانا حساب کنیم و در نتیجه، اختلاف پتانسیل را به‌دست آوریم، باید توزیع بار را در روی رساناها بدانیم. آنچه را که می‌دانیم، مقدار کل بار در روی هر یک از رساناهاست، اما تابع توزیع بار را نمی‌شناسیم. اگر شکل رساناها نامنظم باشد، محاسبه‌ی میدان در فضای بین آنها می‌تواند بسیار پیچیده باشد و در نتیجه، یافتن اختلاف پتانسیل را هم با دشواری روبرو کند. اما از قانون کولمب یک نکته را می‌توان استنباط کرد: میدان الکتریکی با بار Q متناسب است؛ چون

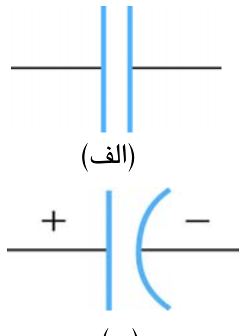
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right)\rho\, d\tau \qquad (٦-٥٥)$$

است. پس، اگر چگالی توزیع بار با ضریب α افزایش (یا کاهش) پیدا کند، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و بار کل Q هم با ضریب α افزایش (یا کاهش) پیدا می‌کنند. به بیان دیگر، اگر بار Q (و به همراه آن $-Q$ را) دوبرابر کنیم، چگالی بار هم در روی این رساناها دو برابر خواهند شد. بنابراین، چون میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ با بار Q متناسب است، اختلاف پتانسیل ΔV هم با بار Q متناسب است. ضریب تناسب بین ΔV و Q **ظرفیت** آرایه‌ی رساناها (خازن) است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad (٦-٥٦)$$

C کمیت مثبتی است (توجه کنید که ΔV مثبت تعریف شده است وبرابر است با پتانسیل رسانای با بار مثبت منهای پتانسیل رسانای با بار منفی). از نظر فیزیکی، C معیار توانایی ذخیره‌ی بار الکتریکی در اختلاف پتانسیل معین ΔV است. همان‌گونه که پیش‌تر گفتم، ظرفیت C یک کمیت هندسی است. در حالت کلی، تابع شکل، ابعاد، و فاصله‌ی بین رساناهاست. در شکل‌های (۲۲-۶) نماد خازن در مدارهای الکتریکی نشان داده شده است. شکل (۲۲-۶ الف) نماد عمومی است، اما برای خازن با قطبایی

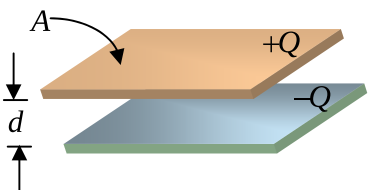
ثابت، از شکل (۲۲-٦ ب) استفاده می‌شود.



شکل ۲۲-٦ نماد خازن

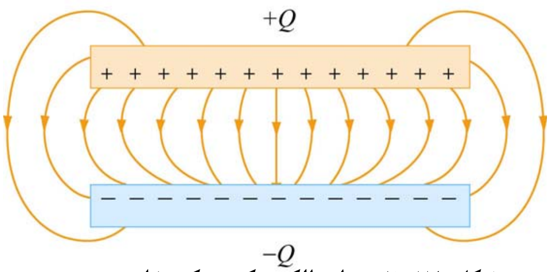
۶-۶ محاسبه‌ی ظرفیت خازن

ساده‌ترین نوع خازن از دو صفحه‌ی تخت موازی با مساحت A تشکیل شده است که به فاصله‌ی d از هم قرار دارند (شکل۲۳-٦). بار صفحه‌ی بالایی $+Q$ وبار صفحه‌ی پایینی $-Q$ است. خازن را می‌توان با وصل کردن آن به یک باتری، باردار کرد. به این وسیله اختلاف پتانسیلی بین صفحه‌ها به‌وجود می‌آید. همان‌طور که گفتیم، برای محاسبه‌ی ظرفیت C باید میدان الکتریکی بین صفحه‌ها را بدانیم. چون ابعاد صفحه‌های یک خازن واقعی محدود است در لبه‌های صفحه‌ها خط‌های میدان راست نیستند و میدان هم به طور کامل به فضای بین صفحه‌ها محدود نیست. این پدیده را **اثر لبه** می‌گویند و میدان را در حاشیه‌ی صفحه‌ها **میدان‌های چتری** می‌نامند. در شکل (۲٤-٦) خط‌های میدان الکتریکی خازن تخت به همراه اثرهای لبه و میدان‌های چتری آن دیده می‌شود. با وجود این، در محاسبه‌ای که انجام خواهیم داد، اثرهای لبه را نادیده خواهیم گرفت و به وضعیتی آرمانی خواهیم پرداخت که خط‌های میدان به درون فضای بین صفحه‌ها محدود است و در این فضا، خط‌های میدان، خط‌های راست اند. در حالت حدی که صفحه‌ها بینهایت بزرگ اند (اگر فاصله‌ی بین صفحه‌ها در مقایسه با ابعاد صفحه، خیلی کوچک باشد، این تقریب پذیرفتنی است و معمولا هم این چنین است.)،



شکل ۲۳-٦ نمای یک خازن تخت

سامانه تقارن صفحه‌ای دارد و با استفاده از قانون گوس می‌توان میدان الکتریکی را در همه‌جا به دست آورد. برابر شکل (۲٥-٦) ،سطح گوسی به صورت قوطی کبریت با مساحت رویه‌ی A' انتخاب کنید که بارهای صفحه‌ی مثبت را در برداشته باشد. بنا به قانون گوس، داریم



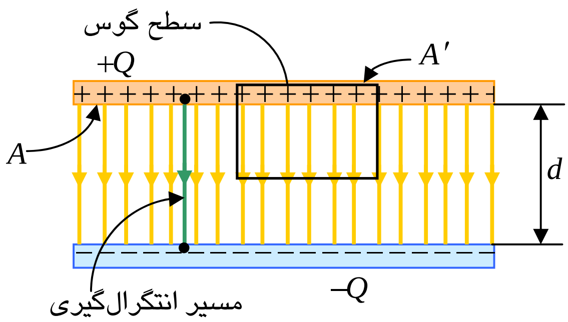
شکل ۲٤-٦ میدان الکتریکی یک خازن

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{enc}} \Rightarrow EA' = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma A' \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (٦-٥٧)$$

نتیجه‌ای که پیش‌تر هم با استفاده از اصل برهم‌نهی به‌دست آورده بودیم. حالا می‌توان اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن را حساب کرد

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_{(-)}^{(+)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = Ed \qquad (٦-٥٨)$$

مسیر انتگرال‌گیری را در راستای خط میدان از صفحه‌ی مثبت به صفحه‌ی منفی برگزیدیم. چون جهت خط میدان همیشه از ناحیه‌ی با پتانسیل بالا به سوی ناحیه‌ی با پتانسیل پایین است، در اینجا



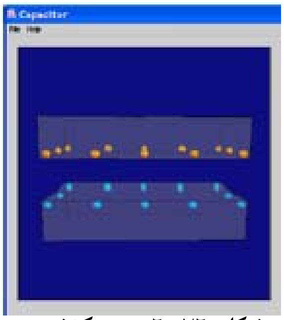
شکل ۲٥-٦ سطح گوس برای میدان بین دو صفحه

$V_+ > V_-$ است. اما وقتی می‌خواهیم ظرفیت C را حساب کنیم، علامت ΔV مهم نیست، و اندازه‌ی آن، $|\Delta V|$ ، کفایت می‌کند. پس داریم، $|\Delta V| = Ed$. از تعریف ظرفیت می‌توان نوشت

$$C \equiv \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\sigma A}{(\sigma/\varepsilon_\circ)d} = \frac{\varepsilon_\circ A}{d} \qquad (۶-۵۹)$$

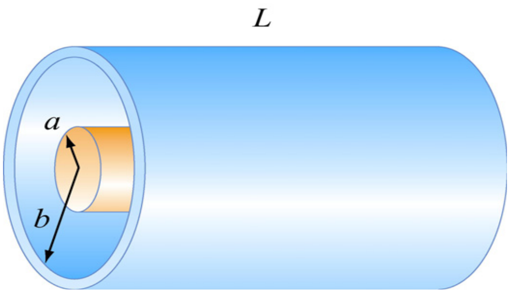
همانطور که دیده می‌شود، ظرفیت C به ابعاد هندسی آرایه (A و d) و سرشت محیط (در ایجا خلاء: $\varepsilon_\circ$) بستگی دارد. ظرفیت به‌طور خطی با A افزایش می‌یابد؛ چون در اختلاف پتانسیل معین ΔV، صفحه‌ی بزرگ‌تر می‌تواند بارهای بیشتری داشته باشد. همچنین، C با d نسبت وارون دارد، چون به ازای بار معین Q ، هرقدر d کوچک‌تر باشد اختلاف پتانسیل هم کوچک‌تر است.

یکی از پرسش‌های معمول دانشجویان این است که صفحه‌های خازن به هر حال ضخامت دارند و بار هم در روی سطح رسانا توزیع می‌شود. پس، چرا بار در رویه‌های روبروی صفحه‌های رسانا (مانند شکل ۶-۶) جمع می‌شود و در روی سطوح دور از هم انباشته نمی‌شود. برای این که به این پرسش به جا و درست پاسخ بدهیم، به یکی از چارچوب‌های شبیه‌سازی توزیع بار در خازن تخت توجه کنید [۱]. این چارچوب در شکل (۶-۲۶) نشان داده شده است. برای سادگی در پی‌گیری جابه‌جایی بارها و برهم‌کنش آنها در رسانا، ۱۲ بار نقطه‌ای در روی هر یک از صفحه‌ها در نظر گرفته شده است. در هر صفحه، بارها با نیروی کولمبی با هم برهم‌کنش می‌کنند. بارهای صفحه‌ی بالایی مثبت و بارهای صفحه‌ی پایین منفی است. برهم‌کنش بین بارهای هر صفحه رانشی است. بنابراین، بارها در یک صفحه ناگزیرند که فاصله‌ی میان خودشان را بیشینه کنند و به طور یکنواخت خود را در لبه‌های صفحه‌ی خود توزیع کنند. اما از سوی دیگر، بین بارهای یک صفحه و صفحه‌ی دیگر نیروی ربایشی وجود دارد. این نیرو می‌خواهد فاصله‌ی بارهای صفحه‌ها را کمینه کند. در نتیجه، بارهای هر صفحه خود را در روی سطح‌های نزدیک به صفحه‌ی دیگر توزیع می‌کنند.



شکل ۶-۲۶ برهم‌کنش بارها در خازن تخت

مثال ۶-۶ خازن استوانه‌ای: استوانه‌ی رسانای توپری به شعاع a برابر شکل (۶-۲۷) در درون پوسته‌ی استوانه‌ی رسانای دیگری با شعاع درونی b قرار دارد. دو استوانه هم‌محور اند. طول هر دو استوانه L است. فرض کنید $L \gg b-a$ است و از اثرهای لبه چشم‌پوشی کنید. بار استوانه‌ی داخلی $+Q$ و بار استوانه‌ی بیرونی $-Q$ است. ظرفیت این آرایه را بیابید.



شکل ۶-۲۷ یک خازن استوانه‌ای

حل: برای این که ظرفیت را حساب کنیم، نخست باید میدان الکتریکی را در همه‌جا پیدا کنیم. برای این کار از قانون گوس استفاده می‌کنیم. چون سامانه تقارن استوانه‌ای دارد،سطح گوس را استوانه‌ی هم‌محوری به طول $\ell < L$ و به شعاع r انتخاب می‌کنیم. در فضای بین دو استوانه $a < r < b$ (شکل ۶-۲۸ را ببینید) داریم

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = EA = E(۲\pi r\ell) = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_\circ} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_\circ r} \qquad (۶-۶۰)$$

که در آن $\lambda = Q/L$ بار در واحد طول استوانه‌ی داخلی است. توجه کنید که فقط در ناحیه‌ی بین دو استوانه، $a < r < b$، میدان

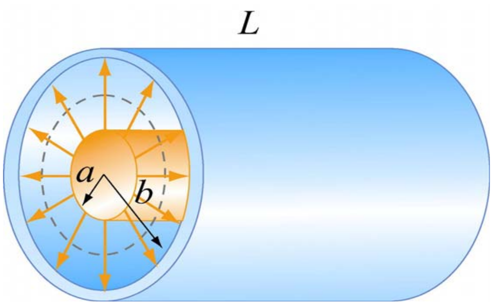
---

[۱] http://web.mit.eud/8.02t/8.02TEAL3D/www/visualization

الکتریکی غیر صفر است؛ .چون، ناحیه‌ی $r<a$ در گوشت رسانا قرار دارد و بار درون سطح گوس صفر است: $q_{enc}=0$. همچنین در ناحیه‌ی $r>b$ بار درون سطح گوس برابر $q_{enc}=\lambda\ell-\lambda\ell=0$ است ($\lambda\ell$ در روی استوانه‌ی توپر داخلی و $-\lambda\ell$ در سطح داخلی پوسته‌ی بیرونی). پس، برای این ناحیه هم میدان الکتریکی صفر است. اختلاف پتانسیل بین دو استوانه عبارت است از

$$V(b)-V(a)$$

$$=-\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_a^b \frac{1}{r}dr=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ell n\left(b/a\right) \qquad (٦-٦١)$$



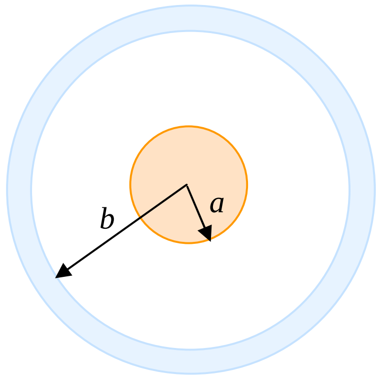
شکل ٦-٢٨ سطح گوس و میدان الکتریکی

این کمیت مثبتی استو یعنی استوانه‌ی داخلی در پتانسیل بالاتر قرار دارد؛ چون بار این استوانه مثبت است.

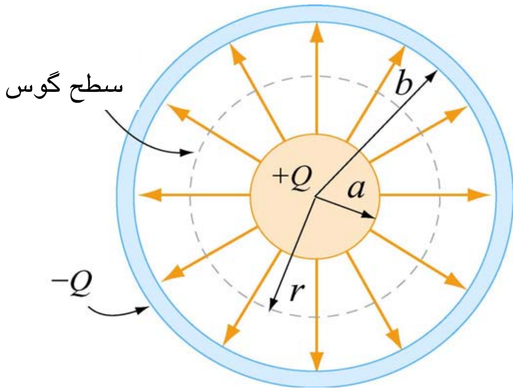
$$V\equiv V(a)-V(b)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ell n\left(b/a\right)\Rightarrow C\equiv\frac{Q}{V}=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ell n\left(b/a\right)}\quad\Rightarrow\quad C=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ell n\left(b/a\right)} \qquad (٦-٦٢)$$

باز هم می‌بینیم که C فقط به ابعاد سامانه بستگی دارد. اگر استوانه‌ی داخلی توپر هم می‌بود، پاسخ همین می‌شد.

مثال ۷-۶ خازن کروی: کره‌ی رسانایی به شعاع a برابر شکل (٦-٢٩) در درون و هم‌مرکز با پوسته‌ی رسانای کروی با شعاع داخلی b قرار دارد. این آرایه، یک خازن کروی است. ظرفیت آن را حساب کنید.



شکل ٦-٢٩ دو کره‌ی هم‌مرکز: خازن کروی



شکل ٦-٣٠ سطح گوس برای محاسبه‌ی میدان

حل: بار $+Q$ را روی کره‌ی درونی و بار $-Q$ را روی کره‌ی بیرونی قرار دهید. میدان الکتریکی فقط در فضای بین دو کره ، $a<r<b$ غیر صفر است. با استفاده از قانون گوس (سطح گوس در شکل (٦-٣٠) نشان داده شده است)، میدان در این ناحیه

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=E\left(4\pi r^2\right)=\frac{Q}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (٦-٦٣)$$

است. بنابراین، اختلاف پتانسیل بین دو کره برابر است با

$$\Delta V=V_a-V_b=-\int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{1}{r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \qquad (٦-٦٤)$$

در نتیجه، ظرفیت خازن عبارت است از

$$C=\frac{Q}{\Delta V}=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a} \qquad (٦-٦٥)$$

باز هم می‌بینیم که ظرفیت خازن فقط به ابعاد سامانه (a و b) بستگی دارد.

گاهی از خازن با یک رسانا صحبت می‌شود. منظور از این حرف آن است که رسانای دوم در بینهایت قرار دارد. همان‌گونه که در آغاز این بخش گفتم، یک رسانای "منزوی" (رسانای دوم در بینهایت است) هم ظرفیت دارد. برای نمونه، مثال کره را در نظر بگیرید. کره‌ی بیرونی را به بینهایت ببرید، یعنی $b \to \infty$. در این صورت رابطه‌ی بالا به شکل زیر در می‌آید.

$$\lim_{b\to\infty} C = \lim_{b\to\infty} ۴\pi\varepsilon_\circ \left(\frac{ab}{b-a}\right) = \lim_{b\to\infty} ۴\pi\varepsilon_\circ \frac{a}{\left(۱-\frac{a}{b}\right)} = ۴\pi\varepsilon_\circ a \qquad (۶-۶۶)$$

بنابراین، ظرفیت کره‌ی رسانای منزوی با شعاع R برابر است با

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (۶-۶۷)$$

می‌شود که پیش‌تر هم دیدیم.

*** ۷-۶ آرایه‌ی با بیش از دو رسانا**

در حالت کلی ، آرایه‌ای از n رسانا را هم می‌توان بررسی کرد. فرض کنید پتانسیل هر یک از رساناها V_i ($i = ۱,۲\cdots n$) و بار آن‌ها Q_i است. بارهای Q_i و پتانسیل‌های V_i با یک رابطه‌ی خطی به هم مربوط اند؛ چون روابطه‌های الکتروستاتیک خطی اند. یعنی میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ به‌طور خطی به بار Q و پتانسیل V به خطی به میدان $\mathbf{E}$ مربوط اند. بنابراین، در آرایه‌ای از رساناها، پتانسیل رسانای i ام را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}\ Q_j \quad (i = 1,2,...n) \qquad (۶-۶۸)$$

که در آن P_{ij} به هندسه‌ی رساناها بستگی دارد و **ضرایب پتانسیل** نام دارند. رابطه‌ی (۶۸-۶) شامل n معادله‌ی زیر است

$$\begin{aligned} V_۱ &= P_{۱۱}Q_۱ + P_{۱۲}Q_۲ + P_{۱۳}Q_۳ + ... \\ V_۲ &= P_{۲۱}Q_۱ + P_{۲۲}Q_۲ + P_{۲۳}Q_۳ + ... \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{aligned} \qquad (۶-۶۹)$$

می‌توان آنها را برحسب Q_i نوشت:

$$Q_i = \sum_{j=۱}^{n} C_{ij}\ V_j \quad (i = ۱,۲,...n) \qquad (۶-۶۹)$$

ضرایب C_{ii} ظرفیت نامیده می‌شوند. C_{ij} ($i \neq j$) را **ضرایب القائی** می‌نامند. بنابه تعریف، ظرفیت رسانا عبارت است از بار کل روی آن رسانا هنگامی‌که رسانا در پتانسیل واحد قرار دارد و بقیه رساناها در پتانسیل صفر اند.

انرژی آرایه‌ی n رسانا عبارت است از (نگاه کنید به رابطه‌ی (۲۸-۳) یا (۷۱-۵))

$$W = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n} V_i Q_i = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\left(\sum_{j=۱}^{n} P_{ij}Q_j\right)Q_i = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\left(V_i \sum_{j=۱}^{n} C_{ij}V_j\right) \qquad (i = ۱,۲,....n) \qquad (۶-۷۰)$$

می‌توان نشان داد که $P_{ij} = P_{ji}$ و $P_{ii} \geq P_{ij}$ اند: از رابطه‌ی (۷۰-۶) استفاده می‌کنیم. اگر بار روی رسانای kام را به اندازه dQ_k تغییر دهیم، انرژی آرایه‌ی رساناها به اندازه dW تغییر خواهد کرد. بنابراین

$$dW = \left(\partial W / \partial Q_k\right) dQ_k \qquad (۵-۷۱)$$

اگر از رابطه‌ی (۷۰-۶) مشتق بگیریم، برای dW خواهیم داشت

$$dW = \frac{۱}{۲}\sum_i \left(\sum_j P_{ij} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial Q_k} Q_i dQ_k + \frac{\partial Q_i}{\partial Q_k} Q_j dQ_k \right)\right) \qquad (۶-۷۲)$$

اما، چون بار رسانای i ام و j ام مستقل از هم اند، داریم

$$\frac{\partial Q_j}{\partial Q_k} = \frac{\partial Q_i}{\partial Q_k} = \begin{cases} ۰ \; ; & j \neq i \neq k \\ ۱ \; ; & j = i = k \end{cases} \qquad (۶-۷۳)$$

بنابراین، در رابطه‌ی (۷۲-۶) جمله‌ی نخست داخل پرانتز، تنها هنگامی غیرصفر است که $j = k$ باشد (یعنی در جمع روی j فقط یک جمله‌ی غیر صفر باقی می‌ماند که برابر یک است.) همچنین، جمله‌ی دوم درون پرانتز فقط به ازای $i = k$ غیر صفر است (یعنی وقتی روی i جمع ببندیم، این جمله برابر یک می‌شود). بنابراین، رابطه‌ی (۷۲-۶) به‌صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید

$$dW = \frac{۱}{۲}\left(\sum_i P_{ik} Q_i \, dQ_k + \sum_j P_{kj} Q_j \, dQ_k \right) \qquad (۶-۷۴)$$

در رابطه‌ی بالا، دو جمع مستقل از هم وجود دارد و می‌توانیم در جمع دوم زیرنویس j را با i جایگزین کنیم. خواهیم داشت

$$dW = \frac{۱}{۲}\left(\sum_i P_{ik} Q_i \, dQ_k + \sum_i P_{ki} Q_i \, dQ_k \right) \Rightarrow dW = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n} (P_{ik} + P_{ki}) Q_i \, dQ_k \qquad (۶-۷۵)$$

از طرفی ، می‌دانیم که انرژی بار Q در پتانسیل V برابر $W = VQ$ است. پس، وقتی بار Q_k را به اندازه‌ی dQ_k تغییر دهیم، انرژی آن به اندازه‌ی $dW = V_k dQ_k$ تغییر می‌کند. در نتیجه

$$dW = V_k \, dQ_k = \sum_{j=1}^{n} P_{ki} \, Q_i \, dQ_k \qquad (۶-۷۶)$$

از مقایسه‌ی رابطه‌های (۷۵-۶) و (۷۶-۶) نتیجه می‌گیریم

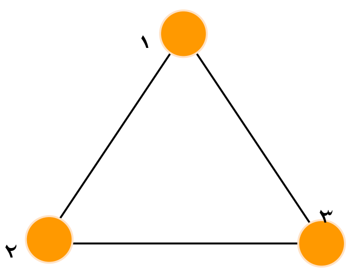
$$\frac{۱}{۲}(P_{ik} + P_{ki}) = P_{ki} \qquad (۶-۷۷)$$

اما این تساوی فقط موقعی می‌تواند برقرار باشد که داشته باشیم

$$P_{ik} = P_{ki} \qquad (۶-۷۸)$$

چون $C_{ii} = ۱/P_{ii} > ۰$ (توجه کنید که C_{ii} ظرفیت و یک کمیت مثبت است) بنابراین، $P_{ii} > ۰$ است. یعنی: بیشینه‌های تابع پتانسیل به بارهای مثبت مربوط اند و کمینه‌های آن به بار منفی مربوط است، به بیان دیگر پتانسیل ناشی از بار مثبت، مثبت است.

مثال ۸-۶ سه کره در سه گوشه‌ی مثلث: سه کره‌ی فلزی یکسان را در نظر بگیرید که در آغاز بدون بار و دور از یکدیگر قرار دارند. کره‌ی شماره ۱ را به پتانسیل V می‌رسانیم ومرکز آن را در راس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار می‌دهیم. بار الکتریکی این کره $Q_۱$ است. سپس، کره‌ی دوم را به پتانسیل V می‌رسانیم و می‌بینیم که بار آن $Q_۲$ است. مرکز این کره را هم در یک گوشه‌ی مثلث قرار می‌دهیم. سرانجام، کره‌ی سوم را به پتانسیل V می‌رسانیم و مرکز آن را در گوشه‌ی سوم مثلث قرار می‌دهیم ، شکل (۳۱-۶). بار کره‌ی سوم را



شکل ۳۱-۶ سه کره‌ی رسانا در سه گوشه

حساب کنید.

حل: چون شکل و نوع کره‌ها یکسان اند، ضرایب پتانسیل P_{ij} $(i,j=1,2,3)$ برابرند: کره‌ها یکسان اند،: $P_{11}=P_{22}=P_{33}$.
از طرفی، چون $P_{ij}=P_{ji}$ اند، پس $P_{12}=P_{21}$ ، $P_{13}=P_{31}$ و $P_{23}=P_{32}$ هستند. در نتیجه، تنها دو ضریب مستقل P_{11} و P_{12} باقی می‌ماند . پتانسیل رساناها با رابطه‌ی (٦-٦٨) به بار آنها مربوط است. در گام نخست آرایش کره‌ها، بار کره‌های ٢ و ٣ صفر اند. بنابراین، پتانسیل V کره‌ی شماره ١ با رابطه‌ی زیر به بار Q آن مربوط است

$$V=P_{11}Q_1 \qquad (٦-٧٩)$$

در گام دوم، بار کره‌های اول و دوم و سوم به ترتیب Q_1 ، Q_2 و صفر است و کره‌ی دوم در پتانسیل V است. پس برای کره‌ی دوم می‌توان نوشت

$$V_2=V=P_{21}Q_1+P_{22}Q_2+P_{23}Q_3 \qquad (٦-٨٠)$$

و سرانجام، برای کره‌ی سوم داریم

$$V_3=V=P_{31}Q_1+P_{32}Q_2+P_{33}Q_3 \qquad (٦-٨١)$$

کره‌ها در گوشه‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طور متقارن قرار دارند و بنابراین، روشن است که $P_{12}=P_{13}=P_{23}$ است.
پس، برای کره‌های دوم و سوم خواهیم داشت

$$V_2=V=P_{12}Q_1+P_{11}Q_2+P_{23}(0) \qquad \text{(برای کره‌ی دوم)} \qquad (٦-٨٢)$$

$$\begin{aligned}V_3=V&=P_{13}Q_1+P_{23}Q_2+P_{11}Q_3=P_{12}Q_1+P_{12}Q_2+P_{11}Q_3\\&=P_{12}Q_1+P_{12}Q_2+P_{11}Q_3=P_{11}Q_3+P_{12}(Q_1+Q_2)\end{aligned} \qquad \text{(برای کره‌ی سوم)} \qquad (٦-٨٣)$$

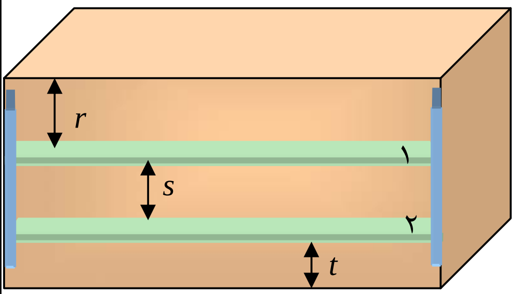
اما از رابطه‌ی (٦-٧٩) داریم $P_{11}=V/Q_1$ که اگر در رابطه‌ی (٦-٨٢) قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$P_{12}=\frac{V}{Q1}\left(1-\frac{Q_2}{Q_1}\right) \qquad (٦-٨٤)$$

حال که P_{11} و P_{12} را یافتیم، اگر مقادیر آنها را در رابطه‌ی (٦-٨٣) چایگزین کنیم، به دست می‌آید

$$Q_3=\frac{Q_2^2}{Q_1} \qquad (٦-٨٥)$$

مثال ٩-٦ دو ورق در درون جعبه: در شکل (٦-٣٢) جعبه‌ای فلزی نشان داده شده است که در درونش دو صفحه‌ی تخت افقی ١ و ٢ با مساحت A قرار دارد. صفحه‌ها با نوارهای عایق از بدنه‌ی جعبه جدا شده اند. جعبه در پتانسیل صفر قرار دارد. فاصله‌های صفحه‌ها از یکدیگر و از رویه‌ی بالایی و پایینی جعبه با r، s و t در شکل دیده می‌شوند. فرض کنید این فاصله‌ها در مقایسه با طول و پهنای صفحه‌ها کوچک اند و می‌توان از اثرهای لبه‌ای چشم‌پوشی کرد. با این تقریب ضریب‌های ظرقیت C_{11}، C_{22} و ضریب‌های القایی C_{12} و C_{21} را بیابید و ببینید آیا $C_{12}=C_{21}$ است یا نه؟ رابطه‌ی این ضریب‌ها و ظرفیت یک خازن تخت چگونه است؟

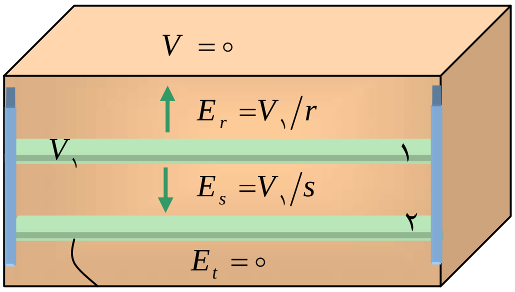


شکل ٦-٣٢ دو صفحه در یک جعبه

حل: چون پتانسیل جعبه صفر است، می‌توانیم بنویسیم

$$Q_1=C_{11}V_1+C_{12}V_2 \qquad , \qquad Q_2=C_{21}V_1+C_{22}V_2 \qquad (٦-٨٦)$$

وضعیتی را در نظر بگیرید که با سیمی صفحه‌ی ۲ به بدنه‌ی جعبه وصل شده است و بنابراین $V = 0$ است. شکل (۶-۳۳).



شکل ۶-۳۲ میدان بین صفحه‌ها

در نتیجه، میدان در ناحیه‌های مختلف $E_r = V_1/r$، $E_s = V_1/s$ و $E_t = 0$ اند. سطح گوسی در نظر بگیرید که صفحه‌ی ۱ را کاملا دربر دارد. قانون گوس می‌گوید $Q_1 = \varepsilon_0 \left(AE_r + AE_s\right)$ است. اگر به جای E_r و E_s مقدارها را برحسب V_1 قرار دهیم خواهیم داشت:

$$Q_1 = \varepsilon_0 A\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)V_1 = C_{11}V_1 \quad \Rightarrow \quad C_{11} = \varepsilon_0 A\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right) \qquad (۶-۸۷)$$

همچنین، قانون گوس با سطحی که تمامی صفحه‌ی ۲ را دربرداشته باشد، نشان می‌دهد که

$$Q_2 = -\frac{\varepsilon_0 A V_1}{s} = C_{21}V_1 \quad \Rightarrow \quad C_{21} = -\frac{\varepsilon_0 A_1}{s} \qquad (۶-۸۸)$$

محاسبه‌ی بالا را می‌توانیم با وصل کردن صفحه‌ی ۱ به بدنه جعبه و $V_1 = 0$ تکرار کنیم. این کار فقط به جایگزینی $2 \leftrightarrow 1$ و $r \to t$ می‌انجامد (s تغییر نمی‌کند). بنابراین، به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم

$$C_{22} = \varepsilon_0 A\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{s}\right) \quad , \quad C_{12} = -\frac{\varepsilon_0 A}{s} \qquad (۶-۸۹)$$

همان‌گونه که انتظار داشتیم، $C_{21} = C_{12}$ است.

این چهار ضریب چگونه به ظرفیت $C = \varepsilon_0 A/s$ خازن تخت (رابطه‌ی ۶-۵۹) مربوط می‌شود؟ در خازن تخت معمولی جعبه‌ای وجود ندارد که صفحه‌ها را دربر داشته باشد. به بیان دیگر، فاصله‌ی s بین صفحه‌ها خیلی کوچک‌تر از فاصله‌های r و t است. در نتیجه، اگر اجازه دهیم $r \to \infty$ و $t \to \infty$ میل کنند، باید بتوانیم ظرفیت $C = \varepsilon_0 A/s$ را به‌دست آوریم. در این حد، جمله‌های $1/r$ و $1/t$ قابل چشم‌پوشی می‌شوند و معادله‌ی (۶-۸۶) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$Q_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{s}V_1 - \frac{\varepsilon_0 A}{s}V_2 \quad , \quad Q_2 = -\frac{\varepsilon_0 A}{s}V_1 + \frac{\varepsilon_0 A}{s}V_2 \qquad (۶-۹۰)$$

به یاد بیاورید که در خازن، بار و پتانسیل با $Q = CV$ به یکدیگر مربوط اند که در واقع به معنی $Q = C\left(\Delta V\right)$ است و ΔV اختلاف پتانسیل دو صفحه (یا دو رسانا) است و $\pm Q$ بار روی صفحه‌هاست. به ازای پتانسیل‌های V_1 و V_2 برابر $\pm \Delta V/2$، معادله‌ی (۶-۹۰) به صورت زیر درمی‌آید

$$Q = \frac{\varepsilon_0 A}{s}\left(\frac{\Delta V}{2}\right) - \frac{\varepsilon_0 A}{s}\left(-\frac{\Delta V}{2}\right) = \frac{\varepsilon_0 A}{s}\Delta V \quad , \quad -Q = -\frac{\varepsilon_0 A}{s}\left(\frac{\Delta V}{2}\right) + \frac{\varepsilon_0 A}{s}\left(-\frac{\Delta V}{2}\right) = -\frac{\varepsilon_0 A}{s}\Delta V \qquad (۶-۹۱)$$

هر دوی این معادله‌ها با $Q = \left(\varepsilon_0 A/s\right)\Delta V$ برای خازن تخت هم‌ارزند.

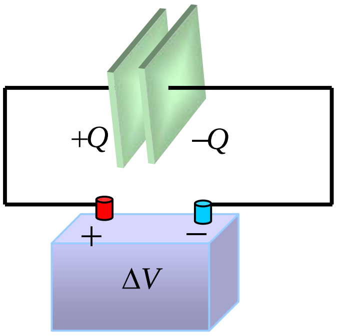
چون ضرایب C_{ij} با رابطه‌ی (۶-۷۱) به P_{ij} مربوط اند، ویژگی‌های C_{ij} را می‌توان از ویژگی‌های P_{ij} نتیجه گرفت و نشان داد که

$$C_{ij} = C_{ji} \quad , \quad C_{ii} > 0 \quad , \quad C_{ij} \le 0 \quad (i \ne j) \qquad (۶-۹۲)$$

۸-۶ باردار کردن خازن و انرژی انباشته در آن

همان‌گونه که در آغاز این فصل گفتیم، از خازن برای انبار کردن انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی می‌توان استفاده کرد. مقدار

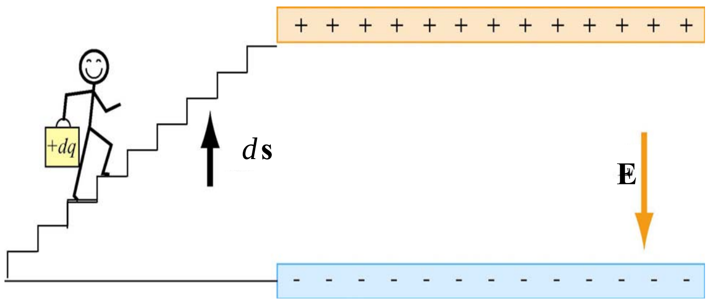
انرژی ذخیره شده در خازن با کار لازم برای باردار کردن آن برابر است. برای این که خازن بی بار را باردار کنیم، می‌توانیم همانند شکل (۳۳-٦) صفحه‌های آن را به پایانه‌های یک باتری وصل کنیم (پایانه‌های باتری در اختلاف پتانسیل ΔV قرار دارند که **ولتاژ پایانه** نام دارد). وقتی صفحه‌های خازن به باتری وصل می‌شود، هر پایانه‌ی باتری بار خودش را با صفحه‌ای که به آن وصل است شریک می‌شود. صفحه‌ای که به پایانه‌ی مثبت باتری وصل است، مقداری بار مثبت و صفحه‌ی وصل به پایانه‌ی منفی باتری مقداری بار منفی به‌دست می‌آورد. به اشتراک گذاشتن بار سبب کاهش لحظه‌ای بار در پایانه‌ها و افت پتانسیل پایانه می‌شود. در نتیجه، در باتری واکنش شیمیایی آغاز می‌شود. واکنش شیمیایی بار را از یک پایانه به پایانه‌ی دیگر منتقل می‌کند و کاهش بار را در آن پایانه جبران می‌کند و اختلاف پتانسیل را به وضعیت اولیه برمی‌گرداند. بنابراین، می‌توان باتری را همانند پمپ بار پنداشت که بار را از یک صفحه‌ی خازن به صفحه‌ی دیگر منتقل می‌کند. در فرایند باردار کردن خازن، باتری برای انتقال بار از یک صفحه به صفحه‌ی دیگر، کار انجام می‌دهد.



شکل ۳۳-٦ خازن متصل به باتری

فرض کنید، خازن در آغاز بی بار است. در هر صفحه‌ی خازن تعداد زیادی بار مثبت و منفی وجود دارد، اما شمار بارهای منفی و مثبت باهم برابر اند و در نتیجه یکدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین، بار خالص وجود ندارد و بین صفحه‌های خازن هم میدان الکتریکی نیست.

فرض کنید پیمانه‌ای داریم که می توان آن را با بار الکتریکی پُر کرد. هم‌چنین فرض کنید چندین پله صفحه‌ی پایین خازن را به صفحه‌ی بالایی وصل می‌کند. شکل (۳٤-٦) را ببینید. از صفحه‌ی پایین شروع می‌کنیم. سطل را با بار $+dq$ پُر می‌کنیم و آن را به صفحه‌ی بالایی منتقل می‌کنیم. حالا صفحه‌ی بالایی به اندازه‌ی dq بار مثبت به‌دست آورده است. با این کار، اما صفحه‌ی پایین به اندازه‌ی $+dq$ بار از دست داده است که معادل این است که بگوییم صفحه‌ی پایین بار $-dq$ به‌دست آورده است. از پله‌ها سرازیر می‌شویم و دوباره سطل را از بار $+dq$ پر و به صفحه‌ی بالایی منتقل می‌کنیم. این کار را بارها تکرار می‌کنیم تا



شکل ۳٤-٦ با انتقال بار از صفحه‌ی پایین به بالای خازن ، عامل خارجی کار انجام

خازن باردار شود و در فضای بین صفحه‌های خازن میدان الکتریکی به‌وجود بیاید.

فرض کنید در یک لحظه به صفحه‌ی بالایی نگاه می‌کنیم و می‌بینیم که مقدار بار انباشته شده در آن $+q$ است (این بار نهایی خازن نیست، بلکه بار لحظه‌ای است). بنابراین، در این لحظه اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ها برابر $|\Delta V| = q/C$ است. برای این که یک سطل دیگر بار $+dq$ در روی صفحه‌ی بالایی خالی کنیم، باید برای چیرگی به نیروی رانشی بین بارهای مثبت روی صفحه و بار $+dq$ سطل، کار انجام دهیم. مقدار کار لازم برابر $dW = |\Delta V| dq$ است. اگر در پایان فرایند باردار کردن، بار نهایی روی صفحه‌ی بالایی خازن $+Q$ باشد، کار کل که در این فرایند انجام می‌گیرد، عبارت است از

$$W = \int dW = \int_{\circ}^{Q} dq\,|\Delta V| = \int_{\circ}^{Q} dq\,\frac{q}{C} = \frac{۱}{۲}\frac{Q^{۲}}{C} \qquad (۶-۹۳)$$

و این مقدار با انرژی پتانسیل الکتریکی سامانه برابر است:

$$U_E = \frac{۱}{۲}\frac{Q^{۲}}{C} = \frac{۱}{۲}Q\,|\Delta V| = \frac{۱}{۲}C\,|\Delta V|^{۲} \qquad (۶-۹۴)$$

انرژی ذخیره شده در خازن، در خود میدان الکتریکی بین صفحه‌ها ذخیره می‌شود. به هر حال، در فصل ۵ دیدیم که میدان الکتریکی انرژی حمل می‌کند. برای این که نشان دهیم انرژی خازن در رابطه‌ی (۹۴-۶) در واقع به میدان الکتریکی بین صفحه‌ها مربوط است، خازن تخت را برای نمونه بررسی می‌کنیم. ظرفیت خازن تخت $C = \varepsilon_{\circ}A/d$ و اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های آن $|\Delta V| = Ed$ است. بنابراین، رابطه‌ی (۹۴-۶) را می‌توان برحسب این کمیت‌ها به‌صورت زیر نوشت:

$$U_E = \frac{۱}{۲}C\,|\Delta V|^{۲} = \frac{۱}{۲}\frac{\varepsilon_{\circ}A}{d}(Ed)^{۲} = \frac{۱}{۲}\varepsilon_{\circ}E^{۲}(Ad) \qquad (۶-۹۵)$$

کمیت (Ad) حجم فضای بین صفحه‌های خازن است. بنابراین، $u_E \equiv U_E/(Ad)$ انرژی در واحد حجم یا چگالی انرژی خازن است

$$u_E = \frac{۱}{۲}\varepsilon_{\circ}E^{۲} \qquad (۶-۹۶)$$

با توجه به آنچه که در بخش ۵-۵ گفته شد، این پاسخ دور از انتظار نبود.

با روش دیگری هم می‌توان انرژی ذخیره شده در خازن را حساب کرد. چون بار صفحه‌ها مخالف یکدیگر اند، صفحه‌ها یکدیگر را به سوی خود می‌کشند. برای جلوگیری از این کار و ثابت نگه داشتن فاصله‌ی بین آنها باید به صفحه‌ها نیرو وارد کرد. از فصل ۴-۶-۴ و رابطه‌ی (۱۴۵-۴) می‌دانیم که وقتی سطح باردار در میدان الکتریکی قرار دارد به آن نیرو وارد می‌شود. بنا به رابطه‌ی (۱۴۵-۴) به جزء بار $\sigma(\Delta A)$ نیرویی برابر $\Delta F = \sigma^{۲}(\Delta A)/۲\varepsilon_{\circ}$ وارد می‌شود. اگر سطح کل صفحه A باشد، عامل خارجی باید نیرویی برابر $F_{Ext} = \sigma^{۲}A/۲\varepsilon_{\circ}$ به آن وارد کند تا بر نیروی ربایش الکترکی بین صفحه‌ها چیره شود و فاصله‌ی آن‌ها را d نگه دارد. چون شدت میدان الکتریکی در فضای بین صفحه‌ها $E = \sigma/\varepsilon_{\circ}$ است، این نیروی خارجی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F_{Ext} = \frac{\varepsilon_{\circ}}{۲}E^{۲}A \qquad (۶-۹۷)$$

توجه کنید که نیروی خارجی به d بستگی ندارد. کار کل این نیروی برای جدایی d صفحه‌ها برابر است با

$$W_{Ext} = \int \mathbf{F}_{Ext}\cdot d\mathbf{s} = F_{Ext}d = \left(\frac{\varepsilon_{\circ}E^{۲}A}{۲}\right)d \qquad (۶-۹۸)$$

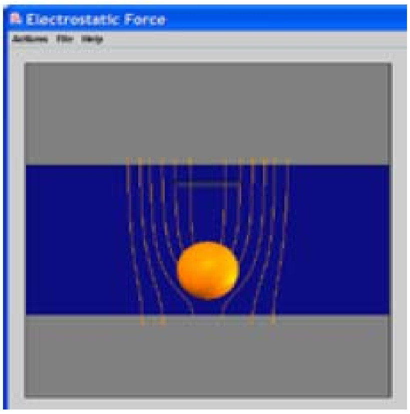
که با رابطه‌ی (۹۵-۶) کاملا سازگار است.

چون انرژی پتانسیل سامانه با کار عامل خارجی برابر است، پس داریم

$$u_E = \frac{W_{Ext}}{Ad} = \frac{۱}{۲}\varepsilon_{\circ}E^{۲} \qquad (۶-۹۹)$$

همچنین، توجه کنید که u_E با فشار در رابطه‌ی (۱۴۶-۴) یکی است. پس، u_E را می‌توان فشار P الکتروستاتیکی هم توصیف کرد.

چگونه می‌توان این فشار را دید؟ شکل (۳۵-۶) شبیه‌سازی آزمایشی است که در آن با باردار شدن خازن، کره‌ی آلومینیومی



شکل ۳۵-۶ نیروی الکتروستاتیکی وارد به کره در فضای بین صفحه‌های خازن تخت.

توسط نیروی الکتروستاتیکی از روی صفحه‌ی پایین خازن برمی‌خیزد و به سوی صفحه‌ی بالایی می‌رود*. وقتی کره با صفحه‌ی پایینی خازن در تماس است، چگالی بار کره با چگالی بار صفحه‌ی پایین یکی است. وقتی خازن درحال باردار شدن است، چگالی بار کره متناسب با اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ها افزایش می‌یابد. افزون بر این، با افزایش تدریجی شدت میدان، انرژی هم به فضای بین صفحه‌ها شارش پیدا می‌کند. شارش انرژی را در حرکت خط‌های میدان از کناره‌ها به سوی وسط خازن می‌توان دید. با افزایش اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های خازن، به کره نیروی فزاینده‌ی ربایشی به سوی صفحه‌ی بالایی خازن وارد می‌شود. انگار که با وصل شدن بیشتر و بیشتر خط‌های میدان به کره، کشش رو به بالای میدان هم افزایش پیدا می‌کند. سرانجام این نیرو به حدی می‌رسد که بر نیروی گرانش رو به پایین چیره می‌شود و کره از روی سطح پایینی بلند می‌شود. پس از جدا شدن کره از صفحه‌ی پایینی، چگالی بار آن دیگر افزایش پیدا نمی‌کند. از این لحظه به بعد، افزون بر نیروی ربایشی بین کره و صفحه‌ی بالایی، صفحه‌ی پایینی خازن هم یک نیروی الکتروستاتیکی رانشی رو به بالا به کره وارد می‌کند. برآیند این دو نیروی روبه بالا، کره را به سوی صفحه‌ی بالایی می‌راند. برای این که کره در تماس با صفحه‌ی بالایی قرار نگیرد و تخلیه‌ی روی ندهد، سطح زیرین صفحه‌ی بالایی خازن را با یک لایه‌ی نازک عایق‌پوش می‌کنیم.

صفحه‌های خازن با بارهای مخالف یکدیگر را جذب خواهند کرد. یک نیروی مکانیکی لازم است که آنها را دور از هم نگه دارد. در مورد خازن با صفحه‌های تخت می‌توانیم به سادگی نیروی وارد به بارهای سطحی را حساب کنیم. همچنین، با استفاده از رابطه‌ی (۹۳-۶) می‌توانیم گزاره‌ای عمومی‌تر را بیان کنیم.فرض کنید C به طور خطی به مختصات x بستگی دارد. x کمیتی است که جابه‌جایی یکی از "صفحه‌ها" را (که می‌تواند رسانایی با هر شکل باشد) نسبت به دیگری اندازه می‌گیرد. نیرویی را که باید به هر صفحه اعمال بشود تا بر ربایش آنها چیره بشود و x را ثابت نگه دارد، F بنامید. حال تصور کنید که x به اندازه‌ی Δx افزایش می‌یابد، اما Q تغییر نمی‌کند و یکی از صفحه‌ها ثابت می‌ماند. نیروی خارجی F بر روی صفحه‌ای که جابه‌جا شده است، به اندازه‌ی $F\Delta x$ کار انجام می‌دهد و اگر قرار است که انرژی پایسته بماند، این مقدار کار باید به صورت افزایش انرژی انباشته شده در خازن، $Q^۲/۲C$، ظاهر بشود. چون بار Q ثابت است، افزایش انرژی برابر است با

$$\Delta U = \frac{dU}{dx}\Delta x = \frac{Q^۲}{۲}\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{C}\right)\Delta x \qquad (۶-۱۰۰)$$

از برابری این تغییر انرژی و کار $F\Delta x$ به‌دست می‌آید

$$F = \frac{Q^۲}{۲}\frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{c}\right) \qquad (۶-۱۰۱)$$

مثال ۱۰-۶ خازن با صفحه‌های تخت موازی: نشان دهید که رابطه‌ی (۱۰۱-۶) به پاسخ درستی برای نیروی وارد به صفحه‌ی خازن تخت می‌انجامد.

* برگرفته از: http://web.mit.eud/8.02t/8.02TEAL3D/www/visualization

حل: اگر جدایی صفحه‌ها x باشد، بنابه رابطه‌ی (۶–۵۹) ظرفیت خازن $C = \varepsilon_\circ A/x$ می‌شود. در نتیجه، از معادله‌ی (۶–۱۰۱) خواهیم داشت

$$F = \frac{Q^۲}{۲}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\varepsilon_\circ A}\right) = \frac{Q^۲}{۲\varepsilon_\circ A} \qquad (۶\text{–}۱۰۲)$$

آیا این پاسخ درستی است؟ می‌دانیم نیرویی که بر واحد سطح صفحه‌ای با بار سطحی σ در میدان الکتریکی وارد می‌شود، برابر با حاصل‌ضرب میانگین میدان در دو طرف صفحه و بار σ است. بنابراین، نیروی کل وارد به هر یک از صفحه‌های خازن برابر بار کل $Q = \sigma A$ ضرب در میانگین میدان. میدان در بیرون خازن صفر است و در فضای بین صفحه‌ها برابر $\sigma/\varepsilon_\circ$ است. پس، میدان میانگین $\sigma/۲\varepsilon_\circ$ است. در نتیجه، نیروی وارد به صفحه عبارت است از

$$F = Q\,\frac{\sigma}{۲\varepsilon_\circ} = Q\,\frac{Q/A}{۲\varepsilon_\circ} = \frac{Q^۲}{۲\varepsilon_\circ A} \qquad (۶\text{–}۱۰۳)$$

که همان پاسخ رابطه‌ی (۶–۱۰۲) است.

مثال ۶–۱۱ انرژی کره‌ی فلزی: انرژی ذخیره شده در کره‌ی فلزی به شعاع a و بار Q را حساب کنید.

حل: میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\hat{\mathbf{r}} & , \quad r > a \\ \circ & , \quad r < a \end{cases} \qquad (۶\text{–}۱۰۴)$$

چگالی انرژی مربوط به این میدان در درون کره صفر و در ناحیه‌ی بیرون آن عبارت است از

$$u_E = \frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ E^۲ = \frac{Q^۲}{۳۲\pi^۲\varepsilon_\circ r^۴} \qquad (۶\text{–}۱۰۵)$$

برای یافتن انرژی کل باید در تمان فضای بیرون کره ، از $r = a$ تا $r = \infty$ از آن انتگرال بگیریم.

$$U_E = \int_a^\infty \left(\frac{Q^۲}{۳۲\pi^۲\varepsilon_\circ r^۴}\right)\left(۴\pi r^۲\,dr\right) = \frac{Q^۲}{۸\pi\varepsilon_\circ}\int_a^\infty \frac{dr}{r^۲} = \frac{Q^۲}{۸\pi\varepsilon_\circ a} = \frac{۱}{۲}QV \qquad (۶\text{–}۱۰۶)$$

که در آن $V = Q/۴\pi\varepsilon_\circ a$ پتانسیل الکتریکی در سطح کره نسبت به بینهایت ($V_\infty = \circ$) است.

به سادگی می‌توان نشان داد که انرژی سامانه با کار لازم برای باردار کردن کره برابر است. فرض کنید در یک لحظه بار روی کره q و پتانسیل آن $V = q/۴\pi\varepsilon_\circ a$ است. کار لازم برای افزودن بار به اندازه‌ی dq برابر $dW = Vdq$ است. پس کار کل لازم برای این که بار کره را از صفر به Q برسانیم، برابر است با

$$W = \int dW = \int V dq = \int_\circ^Q da\left(\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_\circ a}\right) = \frac{Q^۲}{۸\pi\varepsilon_\circ a} \qquad (۶\text{–}۱۰۷)$$

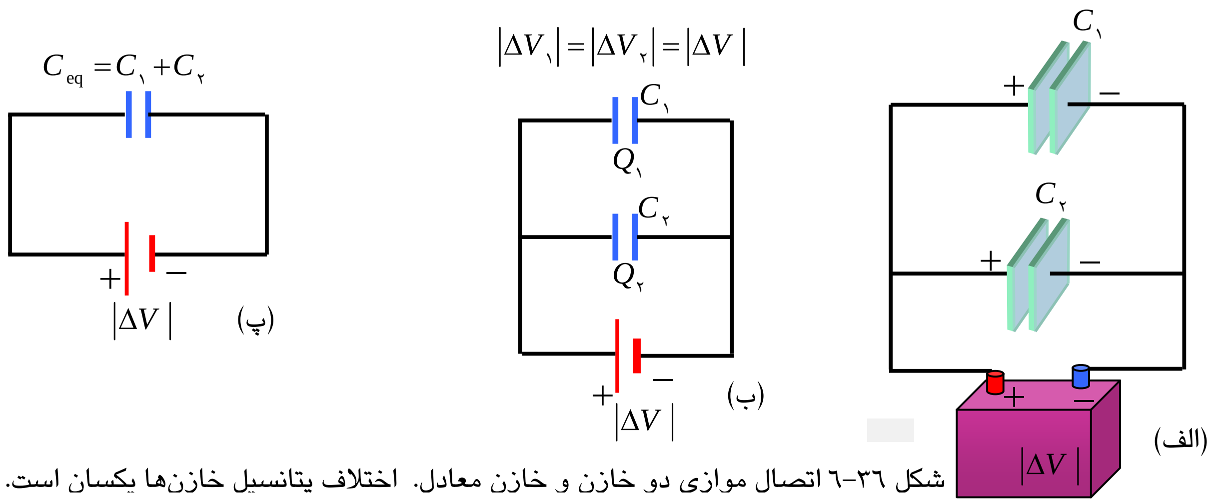
۶–۴ به هم بستن خازن‌ها

دو یا چند خازن را می‌توان به چندین روش به هم وصل کرد و در یک مدار الکتریکی قرار داد. ظرفیت معادل ترکیب‌های خاصی از خازن‌ها را می‌توان حساب کرد. در یک مدار الکتریکی، افزون بر خازن، باتری یا هر چشمه‌ی تولید جریان مستقیم هم وجود

دارد. ما آن را با نماد نشان خواهیم داد. پایانه‌ی مثبت باتری در پتانسیل بالاتر قرار دارد و خط عمودی بلند نماد یاد شده نشان دهنده‌ی آن است.

۱-۴-۶ ترکیب موازی خازن‌های

شکل (٦-٣٦) اتصال **موازی** دو خازن با ظرفیت‌های C_1 و C_2 را نشان می‌دهد. صفحه‌های سمت چپ آنها با یک سیم رسانا به پایانه‌ی مثبت باتری و صفحه‌های سمت چپ به پایانه‌ی منفی باتری وصل اند. وقتی خازن‌ها در مدار قرار می‌گیرند، الکترون‌ها



شکل ٦-٣٦ اتصال موازی دو خازن و خازن معادل. اختلاف پتانسیل خازن‌ها یکسان است.

از صفحه‌های سمت چپ به صفحه‌های سمت راست منتقل می‌شوند و صفحه‌ها سمت چپ بارمثبت و صفحه‌های سمت راست بار منفی پیدا می‌کنند. وقتی که اختلاف پتانسیل خازن‌ها با اختلاف پتانسیل بین پایانه‌های باتری برابر شد، انتقال بار هم تمام می‌شود. فرض کنید، پس از برقراری تعادل، بارهای نهایی خازن‌ها به ترتیب Q_1 و Q_2 است. پس، بارکلی که در خازن‌ها ذخیره شده است، برابر $Q=Q_1+Q_2$ است. چون اختلاف پتانسیل $|\Delta V|$ بین صفحه‌های خازن C_1 و C_2 برابرند، داریم

$$C_1=\frac{Q_1}{|\Delta V|}\qquad,\qquad C_2=\frac{Q_2}{|\Delta V|}\tag{٦-١٠٨}$$

این دو خازن را با یک خازن معادل C_{eq} که بار کل Q دارد می‌توان جایگزین کرد. چون بار Q بین دو خازن تقسیم شده است، باید داشته باشیم

$$Q=Q_1+Q_2=C_1|\Delta V|+C_2|\Delta V|=(C_1+C_2)|\Delta V|\tag{٦-١٠٩}$$

خازن معادل با ظرفیت C_{eq} عبارت است از

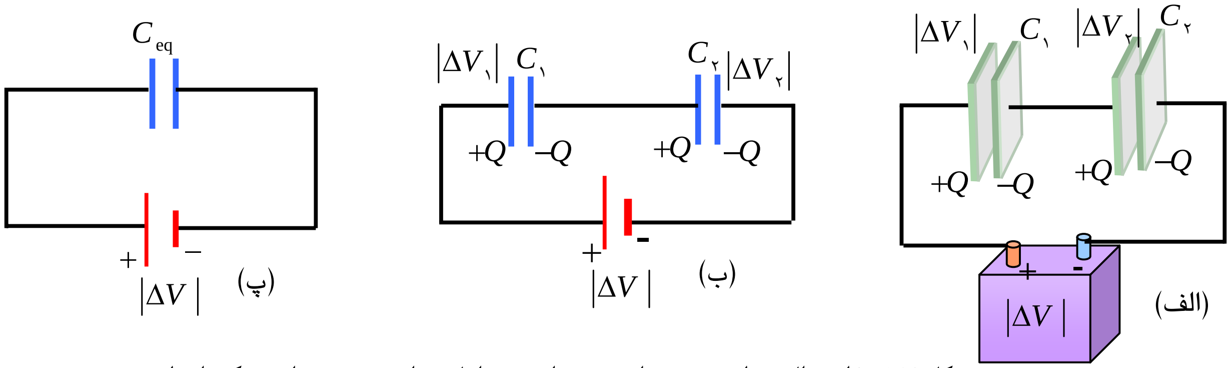
$$C_{eq}=\frac{Q}{|\Delta V|}=C_1+C_2\tag{٦-١١٠}$$

بنابراین، در اتصال موازی خازن‌ها، ظرفیت‌ها باهم جمع می‌شوند. اگر بیش از دو خازن به طور موازی به هم وصل باشند، ظرفیت معادل آنها عبارت است از

$$C_{eq}=C_1+C_2+C_3+\cdots+C_N=\sum_{i=1}^{N}C_i\qquad\text{(اتصال موازی)}\tag{٦-١١١}$$

۲-۴-۶ ترکیب سری خازن‌ها

فرض کنید دو خازن بی بار $C_۱$ و $C_۲$ را برابر شکل (۳۷-٦) به طور سری به هم وصل کنیم. صفحه‌ی سمت چپ خازن $C_۱$ به پایانه‌ی مثبت باتری وصل است و در نتیجه بار مثبت $+Q$ بر روی آن می‌نشیند. صفحه‌ی سمت راست خازن $C_۲$ به پایانه‌ی منفی باتری مصل است و بنابراین، بار منفی $-Q$ دارد. بار صفحه‌های میانی چیست ؟ آنها در آغاز بی بار بودند.اما با باردار شدن صفحه‌هایی که مستقیم به پایانه‌های باتری وصل اند، هر یک از آنها به اندازه‌ی باری که دارند، بار با علامت مخالف به



شکل ۳۷-٦ اتصال موازی دو خازن و خازن معادل. بار هر دو خازن یکسان است.

سوی خود جذب می‌کند. بنابراین، صفحه‌ی سمت راست خازن $C_۱$ بار $-Q$ و صفحه‌ی سمت چپ خازن $C_۲$ بار مثبت $+Q$ به دست می‌آورد. اختلاف پتانسیل بین دوسر خازن‌ها با جمع اختلاف پتانسیل دو سر تک تک خازن‌ها برابر است. پس داریم

$$|\Delta V_1| = \frac{Q}{C_1} \qquad , \qquad |\Delta V_2| = \frac{Q}{C_2} \tag{٦-۱۱۲}$$

از شکل (۳۷-٦) دیده می‌شود که اختلاف پتانسیل کل با اختلاف پتانسیل دو سر باتری، $|\Delta V|$، برابر است.

$$|\Delta V| = |\Delta V_۱| + |\Delta V_۲| \tag{٦-۱۱۳}$$

در واقع، اگر چندین خازن به طور سری به هم وصل شوند، اختلاف پتانسیل دو سر باتری با جمع اختلاف پتانسیل‌های دو سر تک تک خازن‌ها برابر است. دو خازن بالا را می‌توان با یک ظرفیت معادل با ظرفیت $C_{eq} \equiv Q/|\Delta V|$ جایگزین کرد. با استفاده از رابطه‌های (۱۱۲-٦) و (۱۱۳-٦) داریم

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_۱} + \frac{Q}{C_۲} \quad \Rightarrow \quad C_{eq} = \frac{۱}{C_۱} + \frac{۱}{C_۲} \tag{٦-۱۱٤}$$

و برای مجموعه‌ای از خازن‌ها که به طور سری به هم وصل باشند، ظرفیت خازن معادل عبارت است از

$$\frac{۱}{C_{eq}} = \frac{۱}{C_۱} + \frac{۱}{C_۲} + \cdots + \frac{۱}{C_N} = \sum_{i=۱}^{N} \frac{۱}{C_i} \qquad \text{(اتصال سری)} \tag{٦-۱۱٥}$$

مثال ۱۲-۶ ظرفیت معادل: ظرفیت خازن معادل ترکیب خازن‌های شکل (۳۸-٦) را بیابید

حل: خازن‌های $C_۱$ و $C_۲$موازی اند. ظفیت خازن معادل آنها، $C_{۱۲}$

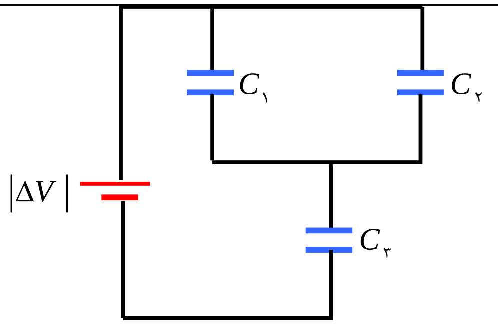
$$C_{۱۲} = C_۱ + C_۲ \tag{٦-۱۱٦}$$

است. می‌توانیم به جای آنها، همانند شکل (۳۹-٦)، از یک خازن استفاده کنیم که در اتصال سری باخازن $C_۳$ قرار دارد. حال خازن $C_{۱۲}$ با خازن $C_۳$ به طور سری بسته شده است. ظرفیت خازن معادل این دو را $C_{۱۲۳}$ بنامید. $C_{۱۲۳}$ عبارت است از

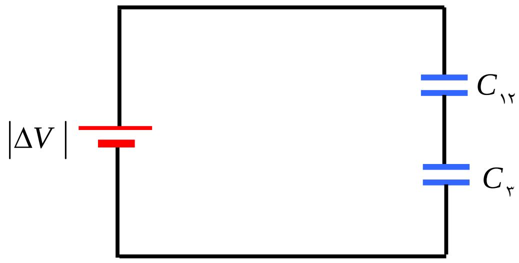
$$\frac{۱}{C_{۱۲۳}}=\frac{۱}{C_{۱۲}}+\frac{۱}{C_{۳}}$$

$$\Rightarrow\quad C_{۱۲۳}=\frac{C_{۱۲}C_{۳}}{C_{۱۲}+C_{۳}}=\frac{(C_{۱}+C_{۲})C_{۳}}{C_{۱}+C_{۲}+C_{۳}} \qquad (٦-١١٧)$$

بنابراین، مدار معادل نهایی با یک خازن معادل $C_{۱۲۳}$ به صورت شکل (٤٠-٦) در می‌آید.



شکل ٦-٣٨ ترکیب موازی و سری خازن‌ها



شکل ٦-٣٩ مدار معادل

شکل ٦-٤٠ مدار معادل نهایی

مثال ۱۳-۶ ظرفیت معادل ۲: در چیدمان شکل (٤١-٦) ظرفیت همه‌ی خازن‌ها C است. ظرفیت خازن معادل را حساب کنید.

حل: در شاخه‌ی میانی دو خازن به طور سری به هم وصل اند.

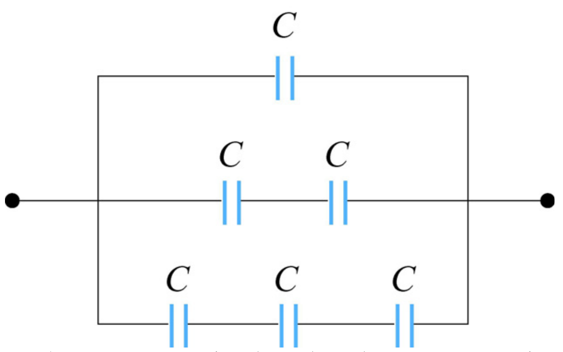
ظرفیت خازن معادل آن دو عبارت است از

$$\frac{۱}{C_{۲}}=\frac{۱}{C}+\frac{۱}{C}=\frac{۲}{C}\quad\Rightarrow\quad C_{۲}=\frac{C}{۲} \qquad (٦-١١٨)$$

هم چنین، سه خازن شاخه‌ی پایین با هم سری بسته شده اند. می‌توان آنها را با خازن معادل

$$\frac{۱}{C_{۳}}=\frac{۱}{C}+\frac{۱}{C}+\frac{۱}{C}=\frac{۳}{C}\quad\Rightarrow\quad C_{۳}=\frac{C}{۳} \qquad (٦-١١٩)$$

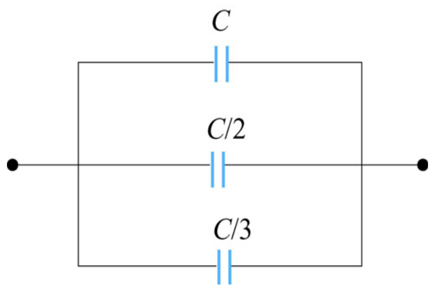
جایگزین کرد. بنابراین، مدار به صورت شکل (٤٢-٦) در می‌آید.



شکل ٦-٤١ چیدمان خازن‌ها: ترکیب سری و موازی

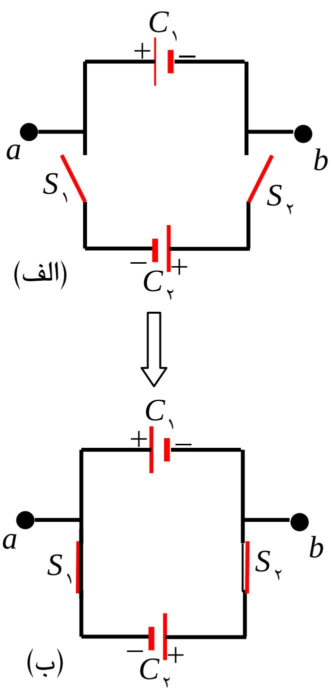
حالا سه خازن داریم که به طور موازی بسته شده اند. ظرفیت معادل آنه عبارت است از

$$C_{eq}=C+C_{۲}+C_{۳}=C\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۱۱}{٦}C \qquad (٦-١٢٠)$$



شکل ٦-٤٢ مدار معادل

مثال ۱۴-۶ اتصال دو خازن باردار با قطبایی مخالف: دو خازن $C_{۱}$ و $C_{۲}$ $(C_{۱}>C_{۲})$ را باردار می‌کنیم و هر دو را به پتانسیل یکسان $V_{\circ}$ می‌رسانیم. اما قطبایی خازن‌ها خلاف یکدیگر اند. خازن‌های باردار شده را از باتری جدا می‌کنیم و صفحه‌های آنها را برابر شکل (٤٣-٦ الف) به هم وصل می‌کنیم و سپس کلیدهای $S_{۱}$ و $S_{۲}$ را می‌بندیم. مدار به صورت شکل (٤٣-٦ ب) در می‌آید.



شکل ۴۳-۶ پیوند خازن‌ها با قطبایی مخالف

(الف): اختلاف پتانسیل نهایی بین نقطه‌های a و b را حساب کنید.

(ب): انرژی کل ذخیره شده در خازن‌ها را پیش از و پس از بستن کلیدها به‌دست آورید.

حل: **(الف)** بار روی خازن‌ها پیش از بسته شدن کلیدها Q_1 و Q_2 اند. پس:

$$Q_1 = C_1 V_0 \qquad , \qquad Q_2 = -C_2 V_0 \qquad (۶-۱۲۱)$$

علامت منفی بار Q_2 به این خاطر است که قطبایی خازن C_2 **مخالف** قطبایی خازن C_1 است. پس از بستن کلیدها، بارها دوباره خود را روی صفحه‌های خازن‌ها توزیع می‌کنند تا این که بارکل Q بین خازن‌ها تقسیم شود:

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 - C_2) V_0 \qquad (۶-۱۲۲)$$

توجه کنید که خازن‌ها حالا **موازی** اند و اختلاف پتانسیل بین آنها باهم **برابر** است. پس

$$V = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right) V_0 \qquad (۶-۱۲۳)$$

(ب): پیش از بسته شدن کلیدها، انرژی کل ذخیره شده در خازن‌ها ، بنا به رابطه‌ی (۶-۹۴) برابر است با

$$U_i = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 + \frac{1}{2} C_2 V_0^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) V_0^2 \qquad (۶-۱۲۴)$$

(ب): پیش از بسته شدن کلیدها، انرژی کل ذخیره شده در خازن‌ها، بنا به رابطه‌ی(۶-۹۴) برابر است با

$$U_i = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 + \frac{1}{2} C_2 V_0^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) V_0^2 \qquad (۶-۱۲۵)$$

پس از بسته شدن بار و رسیدن بار خازن‌ها به خالت ترازمندی، انرژی کل برابر است با

$$U_f = \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) V^2$$

$$= \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)^2 V_0^2 = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)^2 U_i \qquad (۶-۱۲۶)$$

پس، نسبت انرژی نهایی به انرژی اولیه ذخیره شده عبارت است از

$$\frac{U_f}{U_i} = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)^2 \qquad (۶-۱۲۷)$$

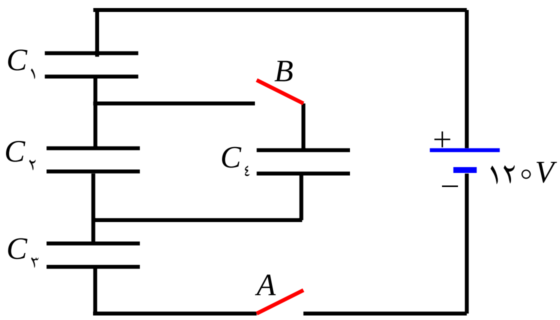
این رابطه نشان می‌دهد که انرژی نهایی **کم‌تر** از انرژی اولیه است. شاید به نظر برسد که پایستگی انرژی نقض شده است. اما این چنین نیست. ما فرض کردیم که مدار آرمانی است و مقاومت ندارد. بخشی از انرژی به‌صورت گرما در پیوندگاه‌ها از بین می‌رود و بخشی هم به‌صورت تابش موج الکترومغناطیسی (فصل آخر را ببینید) گسیل می‌شود.

مثال ۱۵-۶ مدار دو شاخه: ظرفیت هر چهار خازن در مدار شکل (۴۴-۶) یکسان است و پتانسیل دو سر باتری ۱۲۰ ولت است. با خازن‌های بی بار شروع کنید، دو حالت زیر را در نظر بگیرید و به پرسش‌ها پلسخ دهید.

حالت اول:

(الف): کلید B را باز نگه دارید، اما کلید A را ببندید. پس از آن که خازن‌های C_1، C_2 و C_3 کاملا باردار شدند، کلید A را باز کنید و سپس اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از خازن‌ها را حساب کنید.

(ب): پس از باز کردن کلید A، کلید B را ببندید. اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از خازن‌ها را حساب کنید.



شکل ٤٤-٦ مداری با دو شاخه

حالت دوم:

(پ): کلید A را باز نگه دارید و نخست کلید B را ببندید. اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از خازن‌ها را حساب کنید.

(ت): حالا کلید A را هم ببندید و اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از خازن‌ها را حساب کنید.

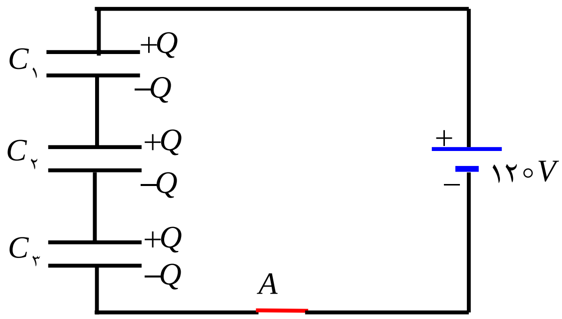
حل حالت اول (الف): وقتی کلید B باز و کلید A بسته است، خازن C_4 عملا در مدار وجود ندارد. پس مداری داریم با سه خازن C_1، C_2 و C_3 که به طور سری به هم وصل اند، شکل (٤٥-٦). بارهر سه خازن در روی صفحه‌ها باید یکسان و برابر $\pm Q$ باشد. همچنین جمع اختلاف پتانسیل دوسر سه خازن باید برابر اختلاف پتانسیل دو سر باتری، $V = 120\,\mathrm{V}$ باشد.

$$V_1 + V_2 + V_3 = V \qquad (٦-١٢٨)$$

چون ظرفیت هر سه خازن برابر C است، پس داریم

$$Q = CV_1 = CV_2 = CV_3$$

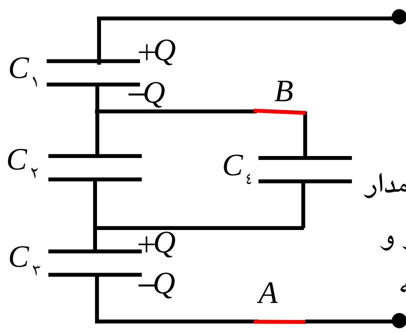
$$\Rightarrow\; V_1 = V_2 = V_3 = \frac{V}{3} = 40\,\mathrm{V} \qquad (٦-١٢٩)$$



شکل ٤٥-٦ کلید A بسته و کلید B باز اند

یک بار که خازن‌ها به این ترتیب باردار شدند، اختلاف پتانسیل دو سر هر خازن، حتی اگر کلید A را هم قطع کنیم، به همان صورت باقی خواهد ماند.

(ب): پس از باردار شدن خازن‌ها ، با قطع کلید A، باتری از مدار خارج می‌شود. بستن کلید B خازن C_4 را دوباره وارد مدار می‌کند. مدار به صورت شکل (٤٦-٦) در می‌آید. بار خازن‌های C_1 و C_3 هنوز هم همان بار Q است (باز کردن کلید A آنها را از شارش هر باری محفوظ نگه می‌دارد.) اما بار Q که در روی خازن C_2 بود، حالا بین خازن‌های C_2 و C_4 تقسیم می‌شود. چون $C_2 = C_4 = C$ است بنابراین ، بار خازن‌های C_2 و C_4 برابر $Q/2$ می‌شود و در نتیجه، اختلاف پتانسیل دو سر هر دو خازن C_2 و C_4 هم نصف اختلاف پتانسیل اولیه‌ی C_2 می‌شود. پس:

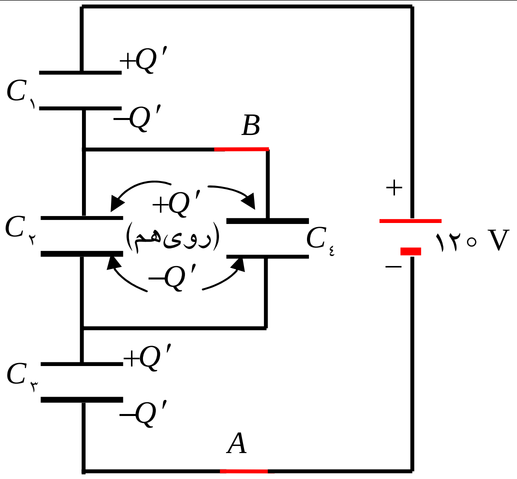


شکل ٤٦-٦ مدار باکلید A باز و کلید B بسته

$$V_1 = V_3 = 40\,\mathrm{V} \quad , \quad V_2 = V_4 = 20\,\mathrm{V} \qquad (٦-١٣٠)$$

حالت دوم- (پ): در این حالت، چون خازن‌ها از ابتداء بدون بار اند و کلید A هم باز است، بستن کلید B بین دو سر هیچ یک از خازن‌ها اختلاف پتانسیل ایجاد نمی‌کند، زیرا باتری عملا از مدار خارج است.

(ت): حالا کلید A را می بندیم. کلید B هم که از پیش بسته بود. اینک مدار به صورت شکل (۴۷-۶) در می‌آید. دو خازن $C_۲$ و $C_۴$ موازی اند. آن‌ها را با خازن معادل $C_{۲۴}=C+C=۲C$ جایگزین کنید. خازن‌های $C_۱$ ، $C_{۲۴}$ و $C_۳$ به طور سری به هم وصل اند. می‌توان آن‌ها را با یک خازن معادل جایگزین کرد. ظرفیتاین خازن معادل عبارت است از



شکل ۴۷-۶ مدار در حالت (ت)

$$C_{eq}=\left(\frac{۱}{C_۱}+\frac{۱}{C_{۲۴}}+\frac{۱}{C_۳}\right)^{-۱}$$

$$=\left(\frac{۱}{C}+\frac{۱}{۲C}+\frac{۱}{C}\right)^{-۱}=\frac{۲}{۵}C \qquad (۶-۱۳۱)$$

از باتری بار Q' کشیده می‌شود و در روی هر یک از خازن‌های $C_۱$، $C_{۲۴}$ و $C_۳$ می‌نشیند:

$$Q'=C_{eq}V=\frac{۲}{۵}CV \qquad (۶-۱۳۲)$$

حالا می‌توان اختلاف پتانسیل دو سر خازن‌ها را حساب کرد

$$V_۱=V_۳=\frac{Q'}{C}=\frac{۲}{۵}V=۴۸\ \text{V} \qquad (۶-۱۳۳)$$

$$V_۲=V_۴=\frac{Q'}{۲C}=\frac{۱}{۵}V=۲۴\ \text{V} \qquad (۶-۱۳۴)$$

آزمون‌های کوتاه و چند گزینه‌ای

۱-۶ بار Q به فاصله‌ی h از یک رسانای تخت بینهایت گسترده قرار دارد. چه نیرویی به بار Q وارد می‌شود؟

(الف): $Q^۲/۴\pi\varepsilon_0 h^۲$ و به سوی بیرون از رسانا **(ب):** $Q^۲/۱۶\pi\varepsilon_0 h^۲$ و به سوی بیرون از رسانا

(پ): $Q^۲/۴\pi\varepsilon_0 h^۲$ و به سوی رسانا **(ت):** $Q^۲/۱۶\pi\varepsilon_0 h^۲$ و به سوی رسانا **(ج):** صفر

۲-۶ کدام تغییرات: (۱) افزایش بار، (۲) افزایش فاصله‌ی (۳) افزایش سطح (۴) افزایش همه‌ی ابعاد با یک ضریب در یک خازن تخت با صفحه‌های موازی ظرفیت آن را افزایش می‌دهد؟

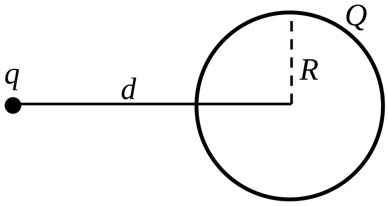
(الف): ۲ **(ب):** ۳ و ۴ **(پ):** ۱ و ۳ **(ت):** ۲ و ۴ **(ج):** ۱ و ۲

۳-۶ ظرفیت خازن تخت با صفحه‌های موازی $\varepsilon_0 A/s$ است. اگر فاصله‌ی s بین صفحه‌ها را افزایش دهیم (سطح صفحه‌ها تغییر نمی‌کنند) تا این که صفحه‌ها خیلی از هم دور بشوند (و سامانه دیگر شبیه خازن معمولی نباشد) کدام گزاره در باره‌ی ظرفیت سامانه‌ی با آرایش جدید درست است

(الف): ظرفیت بزرگ‌تر از حالت اولیه می‌شود. **(ب):** ظرفیت کم‌تر از حالت اولیه می‌شود.

(پ): ظرفیت سامانه تغییر نمی‌کند. **(ت):** ظرفیت دیگر بی معنی است.

۴-۶ بار q در فاصله‌ی d از مرکز یگ پوسته‌ی کروی رسانا به شعاع R و بار کل Q قرار دارد. میدان الکتریکی بار q و



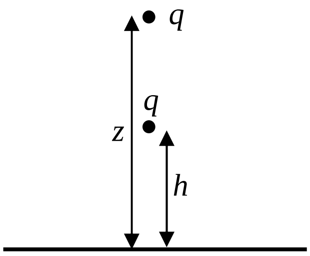
توزیع بار در روی پوسته، در مرکز پوسته به طور جداگانه عبارتند از (سوی راست را مثبت فرض کنید.)

(الف): $E_q = \circ\ ,\ E_{\text{shell}} = \circ$ **(ب)**: $E_q = q/\text{٤}\pi\varepsilon_\circ d^{\text{٢}},\ E_{\text{Sell}} = \circ$

(پ): $E_q = \circ\ \ ,\ \ E_{\text{Sell}} = -Q/\text{٤}\pi\varepsilon_\circ R^{\text{٢}}$

(ت): $E_q = q/\text{٤}\pi\varepsilon_\circ d^{\text{٢}},\ \ E_{\text{Sell}} = -Q/\text{٤}\pi\varepsilon_\circ R^{\text{٢}}$

(ج): $E_q = q/\text{٤}\pi\varepsilon_\circ d^{\text{٢}},\ \ E_{\text{Sell}} = -q/\text{٤}\pi\varepsilon_\circ R^{\text{٢}}$



۵-۶: بار q در فاصله‌ی h از یک صفحه‌ی رسانای بینهایت گسترده قرار دارد. بار نقطه‌ی q دیگری در ارتفاع z ($z > h$) بالای صفحه است. بسته با مقدار z (با $z > h$) نیروی وارد به بار بالایی :

(الف): همواره به سوی بالاست

(ب): همواره به سوی پایین است.

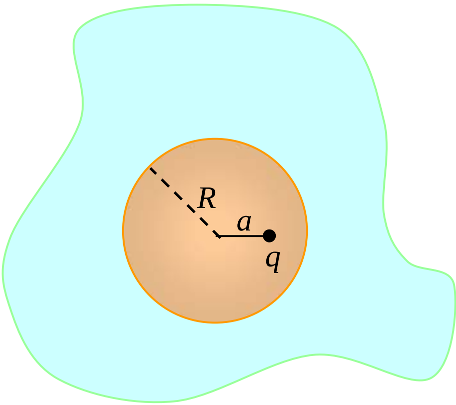
(پ): همیشه صفر است.

(ت): شاید رو به بالا، شاید رو به پایین و شاید صفر است.

مسئله‌ها

۱-۶ **خط میدان افقی**: میدان الکتریکی بار نقطه‌ای واقع در بالای صفحه‌ی تخت رسانا (شکل ۱۰-۶) را در نظر بگیرید. اگر یکی از خط‌های میدان را پی بگیرید که از بار نقطه‌ای آغاز می‌شود و افقی (موازی صفحه) ادامه می‌یابد، در کجا به سطح رسانا می‌رسد؟*

۲-۶ بار q در درون کاواکی کروی به شعاع R و در فاصله‌ی a از مرکز کاواک قرار دارد. مختصات مکان بار q را $(a,0,0)$ بنامید. برابر شکل (۴۸-۶)، کاواک در درون رسانای متصل به زمین و با شکل دلخواه قرار دارد. پتانسیل الکتریکی را در درون کاواک کروی حساب کنید. آیا به بار q نیرویی وارد می‌شود؟ اگر پاسختان آری است، اندازه‌ی نیرو را حساب کنید. اگر گمان می‌کنید که به بار q نیرو وارد نمی‌شود، توضیح دهید که چرا. توزیع بار را بر روی سطح به‌دست آورید.



شکل ۴۸-۶ کاواک کروی در رسانا

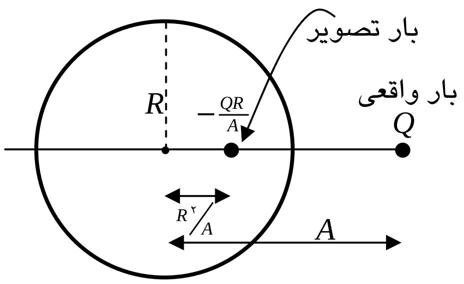
۳-۶ **بار تصویر** ۱: بار نقطه‌ای q بین دو صفحه‌ی موازی و تخت رسانا قرار دارد. فاصله‌ی بار از یک صفحه d و از دیگری $\ell - d$ است. بارهای تصویر در کجا باید قرار گیرند تا میدان الکتریکی در همه‌جا بر صفحه‌ها عمود باشد؟

۴-۶ **بار تصویر** ۲: **(الف)** یک بار نقطه‌ای $-q$ در $x=a$ و بار نقطه‌ای دیگر Q در $x=A$ قرار دارند. نشان دهید که مکان‌های نقاط با پتانسیل $V=0$ دایره‌ای در صفحه‌ی $x-y$ است (و در نتیجه، یک پوسته‌ی کروی در فضا است).

(ب): برای این که مرکز دایره در $x=0$ باشد، چه رابطه‌ای بین q، Q، a و A باید وجود داشته باشد؟

(پ): فرض کنید رابطه‌ای را که در بخش (ب) یافتید، برقرار است. شعاع دایره را برحسب a و A حساب کنید.

(ت): توضیح دهید که چرا نتایج شما در بخش‌های پیش به گزاره‌ی زیر می‌انجامد: اگر بار Q در فاصله‌ی $A>R$ از مرکز یک پوسته‌ی کروی رسانای متصل به زمین و با شعاع R باشد، میدان ناشی از پوسته در **بیرون** آن با میدان یک بار تصویر نقطه‌ای با اندازه‌ی $-q=-QR/A$ جایگزیده در فاصله‌ی $a=R^2/A$ از مرکز پوسته برابر است. میدان کل در بیرون پوسته از جمع این میدان و میدان بار Q به‌دست می‌آید (بنا به قضیه‌ی یگانگی، میدان در ناحیه‌ی درون پوسته صفر است.). شکل (۴۹-۶) را ببینید.



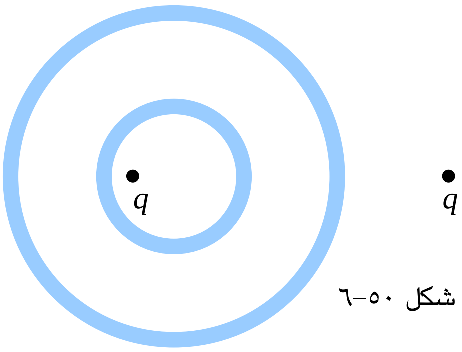
شکل ۴۹-۶ کره در $V=0$

(ج): همچنین درستی گزاره‌ی زیر را نتیجه بگیرید: اگر بار $-q$ در **درون** پوسته‌ی کروی رسانای متصل به زمین با شعاع R و در فاصله‌ی $a<R$ از مرکز کره باشد، میدان ناشی از پوسته در **درون** آن با میدان حاصل از بار تصویر $Q=qR/a$ جایگزیده در فاصله‌ی $A=R^2/a$ از مرکز پوسته برابر است. میدان کل در درون پوسته جمع این میدان و میدان ناشی از بار q است. (میدان در بیرون پوسته، ناشی از بار $-q$ در مرکز است.)

* بر گرفته از: Edward M. Purcell, *Electricity and Magnetism*, McGraw-Hill, 1985

۵-۶ بار تصویر ۳: بار Q در فاصله‌ی $r>R$ از مرکز پوسته‌ی رسانای کروی به شعاع R قرار دارد. پوسته به زمین وصل **نیست** و بار روی آن مقدار معین q_s است. میدان در بیرون پوسته را می‌توان با استفاده از بارهای تصویر در مسئله‌ی ٤-٦ به همراه یک بار تصویر اضافی بازآفرینی کرد. بار تصویر اضافی چقدر است و در کجا قرار دارد؟

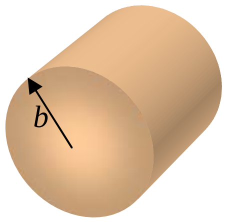
۶-۶ بار تصویر :۴ بار نقطه‌ای q در بیرون یک پوسته‌ی رسانای کروی قرار دارد. بار کل در روی پوسه هم q است. اگر بار نقطه‌ای خیلی به پوسته نزدیک باشد، چگالی بار سطحی در طرف نزدیک به بار پوسته منفی خواهد بود. اما اگر بار نقطه‌ای خیلی از پوسته دور باشد، توزیع بار سطحی در همه جای روی پوسته مثبت خواهد بود (و اساسا توزیع یکنواخت خواهد داشت). نشان دهید که جدایی بین این دو حالت جایی است که بار نقطه‌ای در فاصله‌ی $\frac{R}{۲}\left(۳+\sqrt{۵}\right)$ از مرکز پوسته یا در فاصله $\frac{R}{۲}\left(۱+\sqrt{۵}\right)$ از سطح پوسته قرار گیرد. این ضریب، کسر طلایی است.


شکل ٦-٥٠

۷-۶ دو کره و دو بار: **(الف)** شکل (٦-٥٠) دو پوسته‌ی رسانای کروی کلفت و هم‌مرکز را نشان می‌دهد. ناحیه‌های سفید خلاء اند. دو بار نقطه‌ای q در مکان‌هایی قرار دارند که در شکل دیده می‌شوند (بار درونی در مرکز نیست.) نمودار به نسبت دقیقی برای خطهای میدان در همه‌ی ناحیه‌ها رسم کنید و توزیع بارهای مختلف را نشان دهید. چه کمیت‌هایی تقارن کروی دارند؟

(ب): اگر دو پوسته با سیمی به هم وصل شده باشند و در نتیجه، در پتانسیل یکسان باشند، پرسش بالا را دوباره برای این وضعیت پاسخ دهید.

۸-۶ خازن استوانه‌ای با شعاع متغیر: چگالی خطی بار در روی یک پوسته‌ی رسانای استوانه‌ای بسیار نازک $\lambda[\mathrm{C/m}]$ است. شعاع قاعده‌ی این پوسته b است. پوسته‌ی رسانای نازک دیگری با چگالی بار خطی $-\lambda[\mathrm{C/m}]$ در درون آن پوسته‌ی اولی و هم‌محور با آن قرار دارد. شکل (٥١-٦) . شعاع پوسته‌ی درونی به کندی و به صورت $a(t)=\frac{a_\circ}{۲}\left[\cos(\omega t)+۲\right]$ با زمان تغییر می‌کند (یعنی می‌توانید از اثرهای القایی چشم‌پوشی کرد به زودی در باره خواهیم آموخت). $b>a_\circ$ است.


شکل ٦-٥١ استوانه با شعاع متغیر

(الف): ظرفیت $C(t)$ در واحد طول این سامانه را به صورت تابعی از زمان حساب کنید.

(ب): از زمان $t=\circ$ تا زمان $t=T$ چه مقدار کار در واحد طول انجام گرفته است؟

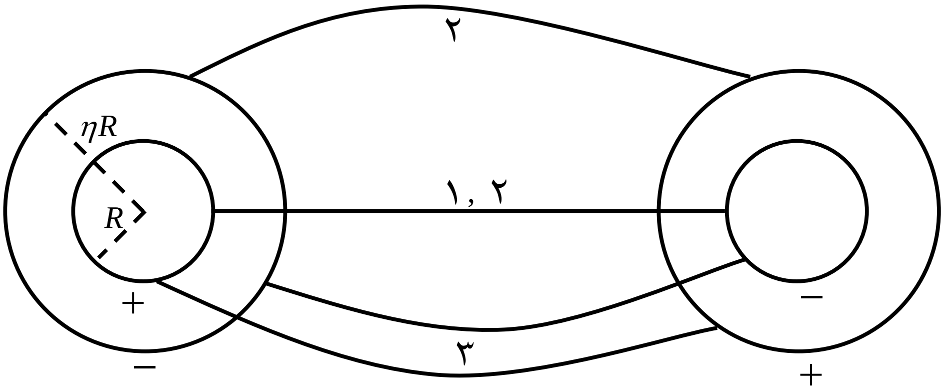
۹-۶ دو جفت پوسته‌ی کروی: دو جفت پوسته‌ی کروی هم‌مرکز رسانا داریم که بسیار از یکدیگر دورند. در جفت نخست شعاع پوسته‌ی درونی R و بار کل آن Q است. شعاع پوسته‌ی بیرونی ηR و بار کل آن $-Q$ است. η یک ضریب عددی بزرگ‌تر از یک است. در جفت دوم شعاع پوسته‌ی درونی R و بار کل آن $-Q$ است. شعاع پوسته‌ی بیرونی ηR و بار کل آن Q است. شکل (٥٢-٦). در هر یک از حالت‌های زیر بارهای جدید را بر روی هر پوسته حساب کنید.

۱. فقط پوسته‌های درونی را با سیم به هم وصل کنید.

۲. با یک سیم دو پوسته‌ی درونی را به هم وصل کنید و با سیم دیگری پوسته‌های بیرونی را به هم وصل کنید.

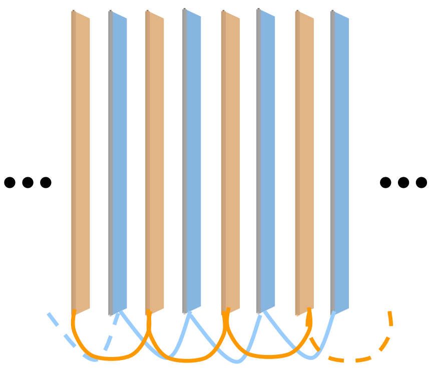
۳. دو پوسته‌ی با بار مثبت را با سیم به هم وصل کنید و دو پوسته‌ی با بار منفی را با سیم دیگری به یکدیگر وصل کنید. در

این حالت ظرفیت آرایه را بیابید.



شکل۶-۵۲ دو جفت پوسته‌ی کروی

۶-۱۰ خازن با $2N$ صفحه: ظرفیت خازن شامل $2N$ صفحه‌ی موازی را حساب کنید. هر صفحه یک مربع با مساحت A است و فاصله‌ی آنها از یکدیگر s است. صفحه‌ها را از چپ به راست به ترتیب، با ۱، ۲، ⋯ شماره‌گذاری کنید، همه‌ی صفحه‌های فرد با سیم به یکدیگر وصل اند و صفحه‌های زوج هم با سیمهای دیگری به یکدیگر وصل شده اند. شکل (۶-۵۳) را ببینید. می‌توانید فرض کنید که $s \gg \sqrt{A}$ است.



شکل ۶-۵۳ خازن با $2N$ صفحه

۶-۱۱ خازن با سه پوسته: خازنی از سه پوسته‌ی کروی هم مرکز به شعاع‌های R، $2R$ و $3R$ ساخته شده است. پوسته‌ی درونی و بیرونی با سیم به‌هم وصل اند و در پتانسیل یکسان قرار دارند. پوسته‌ها نخست بدون بار اند. اما یک باتری بارها را از پوسته‌ی میانی به پوسته‌های بیرونی و درونی منتقل می‌کند.

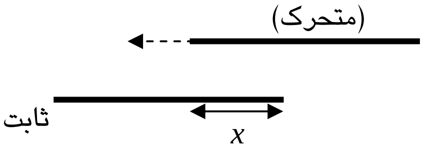
(الف): اگر بار نهایی روی پوسته‌ی میانی $-Q$ باشد، بارهای روی پوسته‌ی درونی و بیرونی را بیابید.

(ب): ظرفیت سامانه را حساب کنید

(پ): اگر باتری را ازپوسته‌ها جدا کنیم و بار q را به پوسته‌ی بیرونی بیفزاییم، بارهای پوسته‌ها را حساب کنید.

۶-۱۲ خازن با بارهای نابرابر: خازن تختی با صفحه‌های موازی را در نظر بگیرید. اندازه‌ی بارها در روی دو صفحه متفاوت اند. بار روی صفحه‌ها را Q_1 و Q_2 بنامید. مقدار بار موجود در رویه‌ی درونی و بیرونی هر صفحه را حساب کنید.

۶-۱۳ نیروی وارد به صفحه‌ی خازن: خازن تختی با صفحه‌های موازی شامل یک صفحه‌ی ثابت و یک صفحه‌ی قابل حرکت است و می‌تواند در امتداد خودش بلغزد شکل (۶-۵۴). طول هم‌پوشانی دو صفحه را x بنامید.



شکل ۶-۵۴ خازن باصفحه‌ی متحرک

(الف): فرض کنید صفحه‌ها از نظر الکتریکی منزوی اند و در نتیجه بار روی آنها مقدار ثابتی است. نیرویی که می‌خواهد دو صفحه را به سوی یکدیگر بکشد.

رابطه‌ای برای این نیرو برحسب بار Q و ظرفیت C خازن بیابید. (*راهنمایی:* به تغییر انرژی برحسب x بیندیشید. بخش ۶-۸ را ببینید).

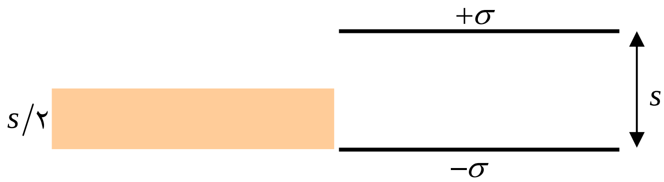
(ب): حالا فرض کنید صفحه‌ها به یک باتری وصل اند و بنابراین، در اختلاف پتانسیل ثابتی قرار دارند. رابطه‌ای برای نیرویی که صفحه‌ها یکدیگر را جذب می‌کنند، برحسب اختلاف پتانسیل V و ظرفیت C بیابید.

(پ): اگر با نیرویی بازدارنده، صفحه‌ها را در جایشان ثابت نگه داریمف هر یک از چیدمان‌های (الف) و (ب) معنی‌دار خواهند بود، چون چیزی جابه‌جا نمی‌شود و در نتیجه، نیروهایی که در بخش (الف)و (ب) به‌دست آوردید باید برابر باشند. نشان دهید که این گزاره درست است.

۱۴-۶ بازهم نیروی وارد به صفحه‌ی خازن: هر سه بخش مسئله‌ی ۱۳-٦ را دوباره حل کنید، اما این بار از واژه‌ی "خازن" در حل خود استفاده نکنید. به جای آن انرژی خازن را با استفاده از تعریف چگالی انرژی میدان الکتریکی به‌دست آورید. نیرو را برحسب فاصله‌ی هم‌پوشانی x، فاصله‌ی جدایی s دو صفحه، پهنای ℓ صفحه (در جهتی که بر صفحه‌ی کاعد عمود است) و بار Q (برای قسمت (الف)) یا برحسب σ (در قسمت (ب)) بیابید.

۱۵-۶ بیشینه انرژی در خازن استوانه‌ای: می‌خواهیم با دو پوسته‌ی استوانه، یک خازن استوانه‌ای طراحی کنیم که فضای بین استوانه‌ها خلاء باشد و بیش‌ترین مقدار انرژی را در خود ذخیره کند. محدودیت‌های خازن عبارتند از این که شعاع استوانه بیرونی مقدار معین a است وشدت میدان در روی استوانه‌ی درونی نباید از $E_\circ$ بیش‌تر باشد. برای استوانه‌ی داخلی چه شعاع b باید انتخاب بشود. در واحد طول این خازن چه مقدار انرژی می‌توان ذخیره کرد؟

۱۶-۶ خازن نیمه‌پُر: در شکل (٥٥-٦) مساحت صفحه‌های خازن A و فاصله‌ی آنها s است. صفحه‌ها به یک باتری وصل اند تا در اختلاف پتانسیل ثابتی باقی بمانند. تیغه‌ی رسانای بدون باری به ضخامت $s/۲$ در بیرون خازن با دست نگه داشته شده است. چگالی بار اولیه‌ی صفحه‌ها $\pm\sigma$ است. تیغه را رها می‌کنیم. تیغه به درون استوانه رانده می‌شود. در لحظه‌ای که تیغه کاملا در درون خازن قرار می‌گیرد، انرژی جنبشی آن چقدر است؟ (تیغه به راستی به درون خازن رانده می‌شود. این را از واقعیت می‌توان دید که انرژی جنبشی که حساب می‌کنید مثبت خواهد بود.) فراموش نکنید که باتری کار انجام می‌دهد.

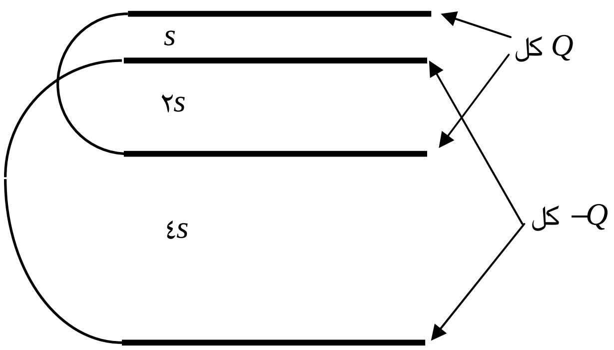


شکل ٦-٥٥ تیغه و خازن

۱۷-۶ خازن با چهار صفحه۱: خازنی از چهار صفحه‌ی تخت موازی تشکیل شده است. صفحه‌ها بزرگ اند و مساحت هر یک A است. فاصله‌ی بین صفحه‌ها برابر شکل (٥٦-٦) به ترتیب، s، ۲s و ٤s اند. (فرض کنید s در مقایسه باطول و پهنای صفحه‌ها کوچک است. صفحه‌ی اول و سوم با سیمی به یکدیگر وصل شده اند و بار کل Q بر روی این صفحه‌ها قرار دارد. صفحه‌های دوم و چهارم هم با سیم به یکدیگر وصل اند و بار کل $-Q$ بر روی این صفحه‌ها نشسته است.

(الف): چگالی بار هر هشت رویه‌ی چهار صفحه را بیابید.

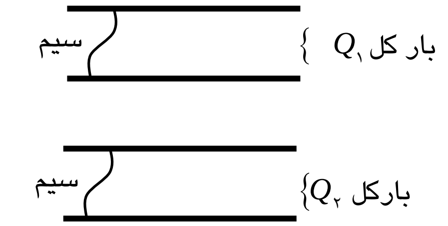
(ب): ظرفیت سامانه را حساب کنید.



شکل ٦-٥٦ خازن با چهار صفحه

۱۸-۶ خازن با چهار صفحه۲: چهار صفحه‌ی بینهایت گسترده برابر شکل (٥٧-٦) موازی هم قرار دارند. دو صفحه‌ی بالایی با

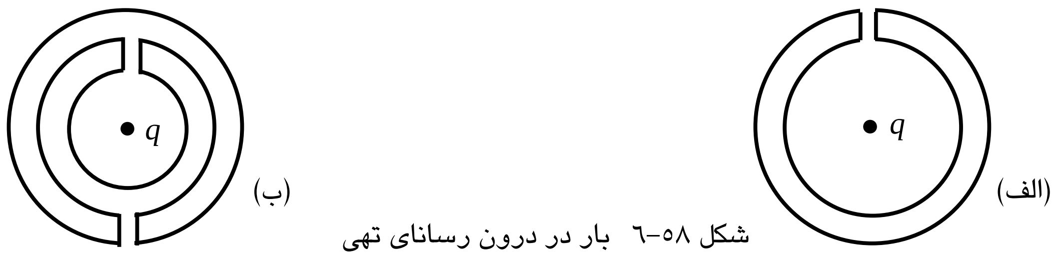
سیمی به یکدیگر وصل اند و در نتیجه، در پتانسیل یکسان اند. دو صفحه‌ی پایینی هم با سیم به یکدیگر وصل اند و در پتانسیل یکسان قرار دارند. بار کل Q_1 بر روی دو صفحه‌ی بالایی و بار کل Q_2 بر روی دو صفحه‌ی پایینی نشسته اند. بار موجود در هر یک از چهار صفحه را بیابید. بگویید که چرا این چیدمان با خازن تخت معمولی دو صفحه‌ای (بدون اتصال) با بارهای Q_1 در روی یک صفحه و Q_2 در روی صفحه‌ی دوم هم‌ارز است.



شکل ۶-۵۷ خازن با ٤ صفحه

۶-۱۹ پایستگی انرژی و فشردن کره: پوسته‌ی رسانای کروی با شعاع R در پتانسیل V قرار دارد (اگر دوست دارید آن را بخشی از یک خازن کروی در نظر بگیرید که پوسته‌ی دیگرش در بینهایت است). با یک باتری پتانسیل V را ثابت نگه می‌داریم، اما پوسته را کوچک می‌کنیم تا اساسا شعاع آن صفر بشود (در طول کوچک کردن پوسته، همواره آن را کروی نگه می‌داریم). با محاسبه‌ی انرژی اولیه و نهایی که در این سامانه ذخیره شده است و کاری که برای کوچک کردن پوسته انجام می‌گیرد، نشان دهید که انرژی پایسته می‌ماند. به روشنی بگویید که منظورتان از گزاره‌ی پایسته بودن انرژی یعنی چه. به علامت کمیت‌های مختلف دقت کنید.

۶-۲۰ درون یا بیرون: بار نقطه‌ای q در مرکز یک پوسته‌ی رسانای استوانه‌مانند تهی قرار دارد. سطح مقطع رسانا در شکل (۶-۵۸) در دو حالت نشان داده شده است. در هر دو حالت، توزیع بارهای القایی روی رسانا را با تقریب خوبی نشان دهید. بگویید که بارها در کدام طرف سطح قرار دارند. آیا توزیع شما با این واقعیت که اگر در درون رسانا بار وجود نداشته باشد، میدان الکتریکی در درون رسانا صفر است، سازگار است؟



شکل ۶-۵۸ بار در درون رسانای تهی