۵ پتانسیل ، انرژی الکتروستاتیکی و شرایط مرزی

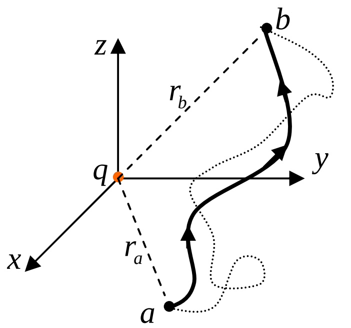
میدان الکتریکی یک کمیت برداری است. میدان برداری را به تقریب با دانستن کرل و دیورژانس آن در تمام نقاط فضا می‌توان به طور کامل حساب کرد. در فصل ٤ دیورژانس میدان الکتریکی $\mathbf{E(r)}$ را به دست آوردیم و قانون گوس را در شکل دیفرانسیلی برحسب آن نوشتیم: $\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0$. اما این رابطه به تنهایی برای یافتن میدان $\mathbf{E}$ کافی نیست، بلکه برای این که آن را حساب کنیم باید کرل میدان ، $\nabla\times\mathbf{E(r)}$، را هم بشناسیم. در بخش ۲-۵ کرل میدان الکتریکی را حساب خواهیم کرد. پیش از آن که این محاسبه را انجام دهیم ، بهتر است ساده‌ترین وضعیت را بررسی کنیم، میدان الکتریکی بار نقطه‌ای جایگزیده در مبداء .

۱-۵ کرل (تاو) میدان الکتریکی $\mathbf{E(r)}$ بار نقطه‌ای

میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q جایگزیده در مبداء مختصات بنا به قانون کولمب، عبارت است از

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۱-۵)$$

نگاهی به شکل (۱-٤) نشان می‌دهد که کرل این میدان باید صفر باشد. بگذارید انتگرال خط این میدان را بین نقطه‌ی a و نقطه‌ی b حساب کنیم و نشان دهیم که در واقع کرل آن صفر است منظور ما از انتگرال خط ، انتگرال ضرب داخلی میدان $\mathbf{E}$ وجزء طول $d\mathbf{s}$ بین دو نقطه است . در شکل (۱-۵) فرض کنید بار q در مبداء مختصات قرار دارد. جون میدان الکتریکی آن فقط به r بستگی دارد و بنابراین، مختصات کروی مناسب‌ترین چارچوب برای محاسبه است. در مختصات کروی، جزء طول $d\mathbf{s}$ عارت است از



شکل ۱-۵ جابه‌جایی بین دو نقطه در میدان بار نقطه‌ای

$$d\mathbf{s}=dr\,\hat{\mathbf{r}}+rd\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\sin\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (۲-۵)$$

نبابراین ، داریم

$$\begin{aligned}\int_a^b\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}&=\int_a^b\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\right)\cdot\left(dr\,\hat{\mathbf{r}}+rd\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\sin\theta d\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right)=\int_a^b\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr\\&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\bigg|_{r_a}^{r_b}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_a}-\frac{q}{r_b}\right)\end{aligned} \qquad (۳-۵)$$

که در آن r_a و r_b فاصله‌ی نقاط a و b از مبداء مختصات اند. نکته‌ی مهمی که در رابطه‌ی (۳-۵) نهفته است این است که پاسخ انتگرال فقط به فاصله‌ی نقاط a و b از مبداء بستگی دارد و کاملا **مستقل** از مسیری است که انتگرال‌گیری روی آن انجام گرفته است. به بیان دیگر، انتگرال بالا وری مسیر نقطه‌چین و مسیر پررنگ در شکل (۱-۵) هر دو به یک پاسخ می‌انجامند. فهمیدن این که چرا انتگرال بالا به مسیر بستگی ندارد ، آسان است: انتگرال بالا در واقع انتگرال کار است و چون میدان در جهت شعاعی است، بنابراین، کار حرکت در راستای θ و ϕ صفر است. اگر نقاط a و b بر هم منطبق شوند، مسیر بسته تشکیل می‌شود و از رابطه‌ی (۳-۵) پیداست که در این صورت ($r_a=r_b$) انتگرال صفر می‌شود:

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=0 \tag{٥-٤}$$

با توجه به قضیه‌ی استوکس (قضیه‌ی بنیادی کرل- پیوست این فصل را ببینید) نتیجه می‌گیریم که

$$\nabla\times\mathbf{E}=0 \tag{٥-٥}$$

رابطه‌های (٤-٥) و (٥-٥) هم‌ارز اند. یکی بیان انتگرالی و دیگری شکل دیفرانسیلی است. این دو رابطه را ما فقط برای میدان یک بار نقطه‌ای به دست آوردیم که در مبداء مختصات قرار داشت. اما نتایج بالا به گزینه‌ی مبداء کاری ندارد. مکان بار هر جا ک باشد، رابطه‌های بالا برقرار اند. اگر بیش از یک بار وجود داشته باشد، بنا به اصل برهم‌نهی، میدان کل این بارها با جمع برداری میدان آن‌ها برابر است

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3+\cdots \tag{٥-٦}$$

و در نتیجه، اگر کرل دو طرف را حساب کنیم، خواهیم داشت

$$\nabla\times\mathbf{E}=\nabla\times\left(\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3+\cdots\right)=\left(\nabla\times\mathbf{E}_1\right)+\left(\nabla\times\mathbf{E}_2\right)+\left(\nabla\times\mathbf{E}_3\right)+\cdots=0 \tag{٥-٧}$$

** ۲-۵ محاسبه‌ی مستقیم $\nabla\times\mathbf{E}$

میدان الکتریکی توزیع بار در عمومی‌ترین حالت با رابطه‌ی (۸۰-۲) داده می‌شود:

$$\mathbf{E}(\mathbf{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\rho\left(\mathbf{r}'\right)d\tau' \tag{٥-٨}$$

توجه کنید که ρ فقط تابعی از $\mathbf{r}'$ است و به $\mathbf{r}$ بستگی ندارد. $\mathbf{r}=\mathbf{R}-\mathbf{r}'$ برداری است از جزء بار تا نقطه‌ی میدان. همچنینف توجه کنید که $r=|\mathbf{r}|$ مقدار ثابتی نسشت . وقتی می‌خواهیم $\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})$ را حساب کنیم، عملگر ∇ ، تغییرات (مشتق) برحسب $\mathbf{R}$ است. پس داریم

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\times\left(\int_V \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\rho\left(\mathbf{r}'\right)d\tau'\right) \tag{٥-٩}$$

در مثال (٤-١) ، رابطه‌ی (٣٦-١)، دیدیم که

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) \tag{٥-١٠}$$

بنابراین، رابطه‌ی (٩-٥) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{R})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\times\left(\int\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\rho\left(\mathbf{r}'\right)d\tau'\right)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\nabla\times\left(\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right]\rho\left(\mathbf{r}'\right)d\tau' \tag{٥-١١}$$

و چون کرل گرادیان هر تابع عددی v صفر است، $\nabla\times\left(\nabla v\right)=0$، پس نتیجه می‌گیریم

$$\nabla\times\mathbf{E}=0 \tag{٥-١٢}$$

از رابطه (١١-٥) دیده می‌شود که می توان میدان برداری الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ را به صورت زیر هم نوشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{R})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\int\frac{1}{r}\rho\left(r'\right)\right)d\tau' \tag{٥-١٣}$$

یعنی ، میدان برداری $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ را می‌توان از گرادیان یک تابع اسکالربه دست آورد. میدان $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ تابعی است

برداری و به سه متغیر وابسته است، در حالی که تابع اسکالر فقط به یک متغیر وابسته است. روشن است که کارمحاسبه با تابع اسکالر آسان‌تر از کار کردن با تابع برداری با سه مولفه است. بنابراین، بهتر است بر روی تابع اسکالر تمرکز کنیم. اگر بتوان تابع اسکالر را بد دست آورد، آنگاه یافتن میدان برداری $\mathbf{E}$ با اعمال عملگر گرادیان (که یک مشتق‌گیری ساده است) بر روی آن شدنی است. هدف اصلی ما در این فصل شناسایی این تابع اسکالر یا **تابع پتانسیل** است و در بخش بعدی به آن خواهیم پرداخت. خوب است که در این جا کرل میدان بار نقطه‌ای را که در بخش ۱-۵ به آن پرداختیم، به عنوان مثال به طور مستقیم حساب کنیم.

مثال ۱-۵ کرل میدان الکتریکی بار نقطه‌ای: کرل میدان الکتریکی بار نقطه‌ای جایگزیده در مبداء مختصات را حساب کنید.

حل: میدان بار نقطه ای عبارت است از

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad (۵-۱۴)$$

کرل میدان، یعنی $\nabla\times\mathbf{E}$ عبارت است از

$$\nabla\times\mathbf{E}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=$$

$$\hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial}{\partial y}E_z-\frac{\partial}{\partial z}E_y\right)-\hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_z-\frac{\partial}{\partial z}E_x\right)+\hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_y-\frac{\partial}{\partial y}E_x\right) \qquad (۵-۱۶)$$

مولفه‌ی x عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial y}E_z-\frac{\partial}{\partial z}E_y=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)\right]=0 \qquad (۵-۱۷)$$

و به همین ترتیب مولفه‌های y و z صفر اند.

میدان‌های برداری که کرل‌شان صفر است (یا به طور هم‌ارز، انتگرال خط‌شان روی مسیر بسته صفر است) میدان‌های **پایستار** اند. پس، میدان الکتروستاتیکی که از این ویژگی برخوردار است، یک میدان پایستار است.

۳-۵ نکاتی پیرامون پتانسیل الکتریکی

در رابطه‌ی (۱۳-۵) دیدیم که میدان الکتریکی را می‌توان از یک تابع عددی به دست آورد. این تابع عددی تابع پتانسیل نام دارد و عبارت است از

$$V\,(R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r')}{r}d\,\tau' \qquad (۵-۱۸)$$

این همان رابطه‌ی (۴۱-۳) است که در فصل ۳ ، بخش ۲-۳-۳ به دست آوردیم. توجه کنید که r فاصله‌ی جزء بار تا نقطه‌ای است که پتانسیل در آن نقطه حساب می‌شود. پس، رابطه‌ی (۱۳-۵) به صورت زیر در می‌آید.

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = -\nabla V\ (R) \qquad (۱۹-۵)$$

این نتیجه هم چیز تازه‌ای نیست و در فصل ۴-۳ (رابطه‌ی ۴۷-۳) به دست آوردیم. نکته‌ای که در فصل ۳ به آن نپرداختیم این است که در رابطه‌ی (۱۸-۵) انتگرال روی تمام فضایی گرفته می‌شود که بار در آن قرار دارد. اگر توزیع بار موضعی باشد و به ناحیه‌ی خاصی از فضا محدود باشد، قلمرو انتگرال‌گیری هم به همان فضای بار محدود است. اگر توزیع بار موضعی نباشد، انتگرال روی تمام بارهای عالم گرفته می‌شود. نکته‌ی دیگر این است که به سمت راست رابطه‌ی (۱۸-۵) همواره می‌توان مقدار ثابتی را افزود. این کار در فیزیک مسئله تغییری ایجاد نمی‌کند. بنابراین، می توان گفت که تابع پتانسیل یگانه نیست. نکته‌ی مهمی که در باره‌ی پتانسیل باید به آن توجه کرد این است که به طور مطلق، پتانسیل یک کمیت فیزیکی نیست و بنابراین قابل اندازه‌گیری هم نیست (اختلاف پتانسیل دو نقطه، اما فیزیکی و قابل اندازه‌گیری است) . رابطه‌ی (۱۸-۵) مقدار پتانسیل را در نقطه‌ای به فاصله‌ی r از مبداء مختصات به دست می‌دهد و گزینه‌ی مبداء کاملا دلبخواه و اختیاری است. پس، تابع پتانسیل به هر نقطه‌ی فضا یک عدد نسبت می‌دهد که به گزینه‌ی مبداء پتانسیل (جایی که در آن نقطه پتانسیل مقدار معینی دارد) بستگی دارد.

کمیتی که واقعا فیزیکی است، میدان الکتریکی است. افزودن مقدار ثابت c به پتانسیل V در میدان الکتریکی تغییر ایجاد نمی‌کند، چون V به $V+c$ تبدیل می‌شود و گرادیان مقدار ثابت همواره صفر است.

چگونه ممکن است میدان الکتریکی را که یک کمیت برداری است و برای محاسبه‌ی آن به سه معادله (یک معادله برای هر مولفه‌ی میدان) نیاز است، از یک کمیت عددی (یعنی یک مولفه- یک معادله) به دست آورد؟ رابطه‌ی (۱۹-۵۹ می‌گوید اگر کمیت عددی V را بدانیم، با گرادیان گرفتن از آن ($\mathbf{E} = -\nabla V$) می توان میدان $\mathbf{E}$ را حساب کرد. این یک دست‌آورد بی‌نظیر است و اگر خوب فکرش را بکنید، می‌بینید که همه‌ی اطلاعات موجود که سه رابطه‌ی مستقل میدان به دست می‌دهد، در یک معادله (تابع پتانسیل) خلاصه شده است. پاسخ این پرسش چندان دشوار نیستک سه مولفه‌ی میدان واقعا مستقل از یکدیگر نیستند، بلکه ویژگی خاص میدان الکتریکی، یعنی $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ (یا صفر بودن انتگرال خط آن در روی هر مسیر بسته) مشتق مولفه‌های $\mathbf{E}$ را به هم وابسته می‌کند:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}\ , \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad (۲۰-۵)$$

به بیان دیگر، هر تابع برداری نمی‌تواند نماینده‌ی میدان الکتریکی باشد. میدان الکتریکی یک تابع برداری با ویژگی **خاصی** است. تابعی است که کرل آن حتما باید صفر باشد. برای نمونه، تابع برداری $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i}$ میدان الکتریکی نمی‌تواند باشد؛ چون $\nabla \times \mathbf{F} = 1\hat{\mathbf{k}} \neq 0$ است. به بیان دیگر، اگر تمام بارهای الکتریکی عالم هم در دسترس ما باشد، نمی‌توان از این بارها آرایه ای ساخت که میدان الکتریکی‌اش $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i}$ باشد.

رابطه‌ی (۴-۵) یا همارز آن، $\nabla \times \mathbf{E} = 0$، به ما اجازه می‌دهد که تابع پتانسیل را به صورت زیر تعریف کنیم

$$V(P) \equiv -\int_{\mathcal{O}}^{P} \vec{E} \cdot d\mathbf{s} \qquad (۵-۲۱)$$

که در آن $\mathcal{O}$ یک نقطه‌ی اختیاری مرجع است. بنابراین، می‌بینیم که V تنها به نقطه P وابسته است. ظاهرا اختلاف پتانسیل میان دو نقطه a و b عبارتست از:

$$V(b)-V(a) = -\int_{\mathcal{O}}^{b} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} - \left(-\int_{\mathcal{O}}^{a} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \right) = -\int_{\mathcal{O}}^{b} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} - \int_{a}^{\mathcal{O}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{a}^{b} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad (۵-۲۲)$$

- **نکته**: در رابطه‌ی (۲۱-۵) توجیهی برای علامت منفی ارائه نشده است. منشاء آن در رابطه(۱۰-۵) است. اگر در میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ یک بار آزمون را از نقطه‌ی a به نقطه‌ی b جابه‌جا کنیم، تابع عددی پتانسیل مفهوم فیزیکی پیدا می‌کند و علت علامت منفی هم مشخص می‌شود. میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ به بار آزمون Q نیروی $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ وارد می‌کند. این نیرو می‌خواهد بار را از مسیر حرکتش از نقطه‌ی a به نقطه‌ی b منحرف کند. برای این که بتوانیم بار آزمون را در روی این مسیر نگه داریم، باید **ما** بر علیه میدان کار انجام دهیم. مقدار این کار برابر است با

$$W = -\int_{a}^{b} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -Q\int_{a}^{b} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = Q\int_{a}^{b} (\vec{\nabla} V)\cdot d\mathbf{s} = Q\left[V(b)-V(a)\right] \qquad (۵-۲۳)$$

پس، علامت منفی به این معنی است که کار را عامل خارجی برای چیره شدن به میدان الکتریکی انجام می‌دهد و نه این که میدان الکتریکی این کار را انجام می‌دهد.

با توجه به رابطه‌ی (۲۳-۵) می‌توان QV را انرژی پتانسیل بار آزمون Q در میدان الکتروستاتیک توضیف کرد. در رابطه‌ی (۲۱-۵) به نقش کلیدی $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ یا مستقل از مسیر بودن انتگرال خط میدان $\mathbf{E}$ توجه کنید. اگر انتگرال خط میدان مستقل از مسیر نمی‌بود، پتانسیل V را نمی‌توانستیم با این رابطه تعریف کنیم؛ چون با عوض شدن مسیر، مقدار $V(P)$ هم تغییر می‌کرد و این رابطه دیگر در قالب تعریف نمی‌گنجید.

در تعریف پتانسیل یک ابهام اساسی وجود دار که اختیاری بودن نقطه مرجع به وجود می‌آورد. تغییر نقطه مرجع معادل افزودن مقدار ثابتی به پتانسیل است؛ اگر مرجع پتانسیل را به جای نقطه $\mathcal{O}$ ، نقطه $\mathcal{O}'$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$V'(P) = -\int_{\mathcal{O}'}^{P} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathcal{O}'}^{\mathcal{O}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathcal{O}}^{P} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = K + V(P) \qquad (۵-۲٤)$$

که در آن K مقدار انتگرال خط $\mathbf{E}$ از نقطه مرجع $\mathcal{O}$ به نقطه مرجع جدید $\mathcal{O}'$ است. همان گونه که پیش‌تر گفتیم ، افزودن مقدار ثابتی به V در **اختلاف پتانسیل** بین دو نقطه تغییری ایجاد نمی‌کند وداریم

$$V'(b) - V'(a) = \left[K + V(b)\right] - \left[K + V(a)\right] = V(b) - V(a) \qquad (۵-۲۵)$$

این واقعیت از رابطه‌ی (۲۲-۵) هم آشکار است، چون اختلاف پتانسیل نستقل از این است که مرجع پتانسیل را در کجا انتخاب کنیم. ابهام در گزینش مرجع روی گرادیان V تاثیر نمی‌گذارد؛ چون گرادیان مقدار ثابت صفر است. بنابراین

$$\nabla V' = \nabla V \qquad (۵-۲٦)$$

یعنی همه‌ی توابع V که فقط در یک مقدار ثابت باهم اختلاف دارند، مربوط به یک میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ اند. به این خاطر است که گفتیم پتانسیل کمیت فیزیکی و در نتیجه، قابل اندازه‌گیری نیست؛ چون با جابه‌جا کردن

نقطه‌ی مرجع $\mathcal{O}$ ، می‌توان مقدار دلخواهی به آن افزود یا از آن کاست، بدون این که میدان $\mathbf{E}$ تغییر کند. باز هم تاکید می‌کنم که تنها کمیت با اهمیت مربوط به پتانسیل، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه است و البته همان گونه که رابطه‌ی (۲۲-۵) نشان می‌دهد، مستقل از گزینه‌ی نقطه‌ی مرجع پتانسیل است. با وجود این، در الکتروستاتیک یک مرجع پتانسیل طبیعی وجود دارد. این نقطه‌ی مرجع جایی است که فاصله‌اش از بار بینهایت است. رابطه‌ی (۱۸-۵) به ما می آموزد که اگر در مخرج، $r \to \infty$ (فاصله‌ی بار تا نقطه‌ای که در آن پتانسیل را می‌خواهیم حساب کنیم) آنگاه $V \to 0$. به این دلیل است که معمولا می‌گوییم پتانسیل در بینهایت برابر صفر است و بینهایت را مبداء پتانسیل برمی‌گزینیم. . این قرارداد در یک حالت خاص غیر قابل استفاده است و آن هنگامی است که توزیع بار تا بینهایت ادامه داشته باشد. در چنین شرایطی پتانسیل بینهایت (نامعین) می‌شود. برای مثال ؛ سطح بینهایت گسترده ای را در صفحه‌ی xy در نظر بگیرید که چگالی توزیع بار سطحی σ دارد. پتانسیل ناشی از آن را در فاصله‌ی z از صفحه حساب کنید. میدان صفحه‌ی بینهایت گسترده را در فصل ٤ به دست آوردیم و دیدیم که عبارت است $\mathbf{E} = (\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\mathbf{k}}$. پس ، اگر در این مورد که توزیع بار تا بینهایت ادامه دارد، مبداء پتانسیل $\mathcal{O}$ را در بینهایت در نظر بگیریم آنگاه پتانسیل در نقطه‌ای به ارتفاع z از صفحه به صورت زیر در می‌آید

$$V(z) = -\int_{\mathcal{O}=\infty}^{z} \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma\, dz = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma\left(Z - \infty\right) = \infty \qquad (۵-۲۷)$$

در این‌گونه موارد، کافی است نقطه‌ی مرجع را در جای دیگری (مانند $z = 0$) انتخاب کنیم. در عمل، البته توزیع باری که تا بینهایت ادامه داشته باشد، وجود ندارد و گزینه‌ی بینهایت برای مبداء پتانسیل دشواری ایجاد نمی‌کند.

نکته‌ی مهم دیگری که به جاست در اینجا آن را یادآوری کنیم، این است که همانند نیرو و میدان الکتریکی، پتانسیل هم از اصل برهم‌نهی پیروی می‌کند. میدان کل در یک نقطه ار فضا عبارت است از جمع برداری میدان‌های جزء: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \cdots$. اگر پتانسیل این میدان کل در نقطه‌ی P را نسبت به یک مرجع مشترک حساب کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} V(P) &= -\int_{\mathcal{O}}^{P} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathcal{O}}^{P} \mathbf{E}_1\cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathcal{O}}^{P} \mathbf{E}_2\cdot d\mathbf{s} - \cdots \\ &\Rightarrow \quad V(P) = V_1(P) + V_2(P) + \cdots \end{aligned} \qquad (۵-۲۸)$$

یعنی در نقطه‌ای مانند P ، پتانسیل عبارت است از جمع پتانسیل‌های ناشی از کلیه‌ی بارهای چشمه‌ای.

- **نکته**: به نظر می رسد که به دو صورت می‌توان پتانسیل را حساب کرد: (۱) با استفاده از رابطه‌ی (۱۸-۵) و (۲) با استفاده از رابطه‌ی (۲۱-۵) . در بسیاری از مواقع دانشجویان در انتخاب یکی از این دو شیوه دچار گمراهی می‌شوند. اگر توزیع بار به صورت تابعی از مکان داده شود، رابطه‌ی (۱۸-۵) روش مناسب برای یافتن پتانسیل است. اگر میدان الکتریکی را بشناسیم یا بتوانیم آن را برای توزیع بار به دست به سادگی حساب کنیم (مثلا با استفاده از قانون گوس) آنگاه، استفاده از رابطه‌ی (۲۱-۵) روش مناسب برای محاسبه‌ی پتانسیل است. دو مثال زیر این نکته را روشن می‌کند.

مثال ۲-۵ پتانسیل توزیع بار کروی با استفاده از رابطه‌ی (۲۱-۵): بار کل q در حجم کره‌ای به شعاع a به طور یکنواخت توزیع شده است. پتانسیل V را در درون و بیرون کره حساب کنید. مبداء پتانسیل را بینهایت فرض کنید. با استفاده از پاسخ، میدان الکتریکی را دوباره حساب کنید.

حل: میدان الکتریکی را در درون و بیرون کره در مثال ۳-٤ فصل ٤ با استفاده از قانون گوس به دست آوردیم :

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{a^3}r\,\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r<a\\[2mm] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r>a\end{cases} \tag{۲۹-۵}$$

بنابراین پتانسیل عبارت است از

$$V(r)=-\int_{\infty}^{r}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \;\Rightarrow$$

$$V(r<a)=-\int_{\infty}^{a}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^2}\right)dr'-\int_{a}^{r}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^3}r'\right)dr'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{a^3}\left(\frac{r^2-a^2}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad V(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2a}\left(3-\frac{r^2}{a^2}\right) \quad ; \quad r<a \tag{۳۰-۵}$$

$$V(r>a)=-\int_{\infty}^{r}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^2}\right)dr'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\infty}^{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \quad ; \quad r>a \tag{۳۱-۵}$$

توجه کنید که چون انتگرال مستقل از مسیر است، در محاسبه‌ی بالاف آسان‌تر بود که در راستای شعاع حرکت کنیم. به این خاطر $d\,\mathbf{s}=d\mathbf{r}$ قرار دادیم.

اینک می‌توان دوبار میدان الکتریکی را با استفاده از $\mathbf{E}=-\nabla V$ به دست آورد. برای $r<a$ داریم

$$\nabla V(r<a)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial r}\left(3-\frac{r^2}{a^2}\right)\hat{\mathbf{r}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2a}\left(-\frac{2r}{a^2}\right)\hat{\mathbf{r}}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3}\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E}=-\nabla V=-\left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3}\hat{\mathbf{r}}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3}\hat{\mathbf{r}} \tag{۳۲-۵}$$

که همان پاسخ (۲۹-۵) است. برای $r>a$ هم داریم

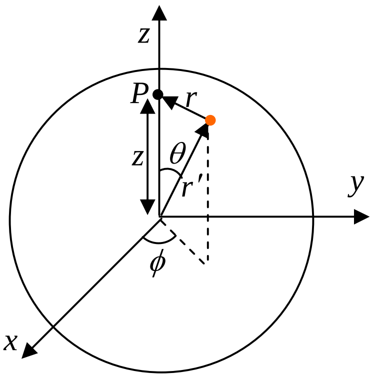
$$\nabla V(r>a)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{\mathbf{r}}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \;\Rightarrow\; \mathbf{E}=-\nabla V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{۳۳-۵}$$

که باز هم همان پاسخ رابطه‌ی (۲۹-۵) است.

مثال ۳-۵ پتانسیل توزیع بار کروی با استفاده از رابطه‌ی (۱۸-۵): بار کل q در حجم کره‌ای به شعاع a به طور یکنواخت توزیع شده است. پتانسیل V را در درون کره حساب کنید.

حل: محورهای مختصات را همانند شکل (۲-۵) چنان انتخاب کنید که نقطه‌ای که می‌خواهیم پتانسیل را در

آن جا حساب کنیم روی محور z باشد. این گزینه از عمومیت مسئله نمی‌کاهد، چون با چرخاندن کره، چیزی تغییر نمی کند.



شکل ۲-۵ کره‌ی با توزیع بار حجمی

داریم

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r')}{r}d\tau \tag{۵-۳۴}$$

در این مسئله توزیع بار یکنواخت و بنابراین ρ مقدار ثابتی است. جزء حجم $d\tau$ در مختصات کروی عبارت است از $d\tau=r'^2\sin\theta dr\, d\theta d\phi$. اندازه‌ی r (فاصله از جزء بار $dq=\rho d\tau$ یا نقطه‌ی P) با توجه به شکل عبارت است از

$$r=\sqrt{z^2+r'^2-2r'z\cos\theta} \tag{۵-۳۵}$$

بنابراین، داریم

$$V=\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{r'^2\sin\theta dr' d\theta d\phi}{\sqrt{z^2+r'^2-2r'z\cos\theta}} \tag{۵-۳۶}$$

انتگرال روی حجمی گرفته می‌شود که بار در آن وجود دارد، یعنی حجم کره. بنابراین، این یک انتگرال سه‌گانه است. انتگرال $d\phi$ از صفر تا 2π، انتگرال $d\theta$ از صفر تا π و انتگرال dr' از صفر تا z گرفته می‌شوند.

$$\int_0^{2\pi}d\phi=2\pi \tag{۵-۳۷}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\ \ d\theta}{\sqrt{z^2+r'^2-2r'z\cos\theta}}$$

$$=\frac{1}{r'z}\left(\sqrt{z^2+r'^2-2r'z\cos\theta}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{r'z}\left(\sqrt{z^2+r'^2+2r'z}-\sqrt{z^2+r'^2-2r'z}\right)$$

$$=\frac{1}{r'z}\left(r'+z-|r'-z|\right)=\begin{cases}2/z & ;\quad r'<z\\ 2/r' & ;\quad r'>z\end{cases} \tag{۵-۳۸}$$

$$\Rightarrow\ V=\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi)(2)\left\{\int_0^z\frac{1}{z}r'^2dr'+\int_z^a\frac{1}{r'}r'^2dr'\right\}$$

$$=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{z}\frac{z^3}{3}+\frac{a^2-z^2}{2}\right\}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(a^2-\frac{z^2}{3}\right) \tag{۵-۳۹}$$

چون $\rho=q\big/\left(4\pi a^3/4\right)$ است، بنابراین، رابطه‌ی (۳۹-۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$V(z)=\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{3q}{4\pi a^3}\left(a^2-\frac{z^2}{3}\right)=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(3-z^2/a^2\right)\Rightarrow\ V(R)=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(3-R^2/a^2\right) \tag{۵-۴۰}$$

که همان رابطه‌ی (۳۰-۵) مثال ۲-۵ است.

مثال ۴-۵ میدان و پتانسیل الکتریکی توزیع بار متغیر: چگالی بار در درون کره‌ای به شعاع a به صورت $\rho = cr'^{\lambda}$ است که در آن λ مقدار ثابتی است. r' فاصله از مرکز کره تا نقطه‌ای در درون آن است. برای این که بار درون کره متناهی باشد، چه شرطی باید برای λ وجود داشته باشد؟ میدان الکتریکی این توزیع بار را بیابید. پتانسیل $V(r)$ را برای همه‌ی مقادیر r برحسب بار Q کره حساب کنید.

- **حل۱ با استفاده از رابطه‌ی** (۲۱-۵) : بار کل کره عبارت است از

$$Q = \int \rho d\tau = \int \left(cr^{\lambda}\right) r^2 \sin\theta dr\, d\theta d\phi = (2)(2\pi)\int_0^a r^2 \left(cr^{\lambda}\right) dr = 4\pi c\,\frac{a^{\lambda+3}}{\lambda+3} \qquad (۵-۴۱)$$

برای این که Q متناهی باشد باید مخرج کسر مخالف صفر باشد. پس باید شرط $\lambda > -3$ برقرار باشد.

$$Q = 4\pi c\,\frac{a^{\lambda+3}}{\lambda+3} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{(\lambda+3)Q}{4\pi a^{\lambda+3}} \qquad (۵-۴۲)$$

با استفاده از قانون گوس، میدان الکتریکی در درون و بیرون کره عبارت اند از

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, d\tau \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E\,(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int (cr'^2)\left(r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\phi\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}(2\pi)(2)\int_0^r cr'^{\lambda+2} dr'$$

$$E\,(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}4\pi c\,\frac{r^{\lambda+3}}{\lambda+3}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi\frac{(\lambda+3)Q}{4\pi a^{\lambda+3}}\frac{r^{\lambda+3}}{\lambda+3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^{\lambda+1}}{a^{\lambda+3}} \quad ; \quad r<a \qquad (۵-۴۳)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad ; \quad r>a \qquad (۵-۴۴)$$

پس، پتانسیل در درون کره عبارت است از

$$V\,(r<a) = -\int_\infty^a \mathbf{E}_{r>a}\cdot d\mathbf{r} - \int_a^r \mathbf{E}_{r<a}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_\infty^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr - \int_a^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^{\lambda+1}}{a^{\lambda+3}}dr = \left.\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right|_\infty^a - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^r \frac{r^{\lambda+1}}{a^{\lambda+3}}dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^r \frac{r^{\lambda+1}}{a^{\lambda+3}}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\lambda+2}\frac{r^{\lambda+2}}{a^{\lambda+3}} + \frac{1}{\lambda+2}\frac{1}{a}\right]$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda+3}{\lambda+2}\frac{1}{a} - \frac{1}{\lambda+2}\frac{r^{\lambda+2}}{a^{\lambda+3}}\right) \quad ; \quad r<a \qquad (۵-۴۵)$$

(توجه کنید که جهت‌های $d\mathbf{r}$ و $\mathbf{E}$ خلاف یکدیگر اند.) پتانسیل در بیرون کره عبارت است از

$$V\,(r>a) = -\int_\infty^{r>a} \mathbf{E}_{r>a}\cdot d\mathbf{s} = \int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad ; \quad r>a \qquad (۵-۴۶)$$

- **حل ۲ با استفاده از رابطه‌ی** (۱۸-۵): با توجه به شکل (۲-۵) داریم

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{cr'^{\lambda}}{r}d\tau=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}c\int\frac{r'^{\lambda}}{\sqrt{z^2+r'^2-2r'z\cos\theta}}\left(r'^2\sin\theta dr'd\theta d\phi\right)$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}c\left(2\pi\right)\int r'^{\lambda+2}dr'\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{z^2+r'^2-2r'z\cos\theta}}d\theta \qquad (۵-۴۷)$$

انتگرال $d\theta$ همانی است که در رابطه‌ی (۵-۳۸) حساب شده است و برابر است با

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{z^2+r'^2-2r'z\cos\theta}}d\theta=\begin{cases}2/z & ;\quad r'<z\\ 2/r' & ;\quad r'>z\end{cases} \qquad (۵-۴۸)$$

بنابراین، برای $r<a$ داریم:

$$V=\frac{c}{\varepsilon_0}\left\{\int_0^z\frac{1}{z}r'^{\lambda+2}dr'+\int_z^a\frac{1}{r'}r'^{\lambda+2}\right\}=\frac{c}{\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{z}\frac{r'^{\lambda+3}}{\lambda+3}\Bigg|_0^z+\frac{r'^{\lambda+2}}{\lambda+2}\Bigg|_z^a\right\}$$
$$=\frac{c}{\varepsilon_0}\left\{\frac{z^{\lambda+2}}{\lambda+3}+\frac{a^{\lambda+2}}{\lambda+2}-\frac{z^{\lambda+2}}{\lambda+2}\right\}=\frac{\left(\lambda+3\right)Q}{4\pi a^{\lambda+3}}\frac{1}{\varepsilon_0}\left\{\frac{z^{\lambda+2}}{\lambda+3}+\frac{a^{\lambda+2}}{\lambda+2}-\frac{z^{\lambda+2}}{\lambda+2}\right\}$$
$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{z^{\lambda+2}}{\lambda+3}+\frac{1}{a}\frac{\lambda+3}{\lambda+2}-\frac{\lambda+3}{\lambda+2}\frac{z^{\lambda+2}}{a^{\lambda+3}}\right\}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{z^{\lambda+2}}{a^{\lambda+3}}\left(1-\frac{\lambda+3}{\lambda+2}\right)+\frac{1}{a}\frac{\lambda+3}{\lambda+2}\right\}$$
$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\frac{1}{\lambda+2}\left(\frac{z^{\lambda+2}}{a^{\lambda+3}}\right)+\frac{1}{a}\frac{\lambda+3}{\lambda+2}\right\}\qquad ;\quad r<a$$
$$\Rightarrow\quad z\to r:\quad V(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\frac{1}{\lambda+2}\left(\frac{z^{\lambda+2}}{a^{\lambda+3}}\right)+\frac{1}{a}\frac{\lambda+3}{\lambda+2}\right\}\qquad ;\quad r<a \qquad (۵-۴۹)$$

این همان پاسخ حل ۱ در رابطه‌ی (۵-۴۵) است. پتانسیل در بیرون کره ($r>a$) عبارت است از

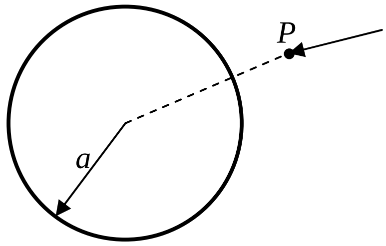
$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{cr'^{\lambda}}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}c\int\frac{r'^{\lambda}}{r}\left(r'^2\sin\theta dr'd\theta d\phi\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{c}{r}(2\pi)(2)\int_0^a r'^{\lambda+2}dr'$$
$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left(\frac{\left(\lambda+3\right)Q}{4\pi a^{\lambda+3}}\right)\frac{r'^{\lambda+3}}{\lambda+3}\Bigg|_0^a=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \qquad (۵-۵۰)$$

باز هم با پاسخ در حل ۱ سازگار است.

- **نکته** : همان‌گونه که پیش‌تر گفتیم و مثال های بالا هم نشان می‌دهند و من باید در این جا هم به آن پافشاری کنم، این است که وقتی از رابطه‌ی (۵-۱۸) برای محاسبه‌ی پتانسیل استفاده می‌کنید، انتگرال روی تمام بارها گرفته می‌شود. مهم نیست که پتانسیل را در بیرون ناحیه‌ای که بار قرار دارد حساب می‌کنید یا در درون آن.

مثال ۵-۵ پتانسیل توزیع بار سطحی روی یک کره: چگالی بار سطحی در روی کره‌ای به شعاع a ، شکل (۵-۳) ، یکنواخت و برابر a است. بار کل روی کره q است. پتانسیل را در درون و بیرون کره به دست

آورید. مبداء پتانسیل را در بینهایت فرض کنید.



شکل ۳-۵ پتانسیل سطح کروی باردار

حل: میدان الکتریکی در درون و بیرون کره، از قانون گوس قابل محاسبه است. ($q = 4\pi a^2 \sigma$) داریم:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad r > a \qquad (۵-۵۱)$$

$$\mathbf{E} = 0 \quad ; \quad r < a$$

پتانسیل در نقاط بیرون کره عبارت است از

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{q}{r'^2}dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'}\Bigg|_{\infty}^{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad (۵-۵۲)$$

توجه کنید که در این گونه مسئله‌ها حتما از بینهایت (جایی که پتانسیل در آنجا معلوم است) به سوی به نقطه‌ی مورد نظر حرکت کنید .

پتانسیل در ناحیه‌ی درون کره: برای نقاط درون کره ($r < a$) انتگرال را باید به دو بخش تقسیم کنیم؛ چون در حرکت از بینهایت به نقطه‌ای در درون کره، با دو میدان الکتریکی (یکی میدان در بیرون کره و دیگری میدان در درون کره) روبرو می‌شویم. پس

$$V(r < a) = -\int_{\infty}^{r \le a}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{\infty}^{a}\mathbf{E}_{r>a}\cdot d\mathbf{s} - \int_{a}^{r}\mathbf{E}_{r<a}\cdot d\mathbf{s}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{a}\frac{q}{r^2}dr - \int_{a}^{r}(0)dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\Bigg|_{\infty}^{a} + 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} \qquad (۵-۵۳)$$

پس، پتانسیل در درون کره مقدار ثابت غیر صفر است. اگرچه میدان در درون کره صفر است، اما پتانسیل صفر نیست.در واقع، از $\mathbf{E} = -\nabla V = 0$ روشن است که پتانسیل باید مقدار ثابتی باشد.

بکوشید این مثال را با استفاده از رابطه‌ی (۱۸-۵) هم به دست آورید.

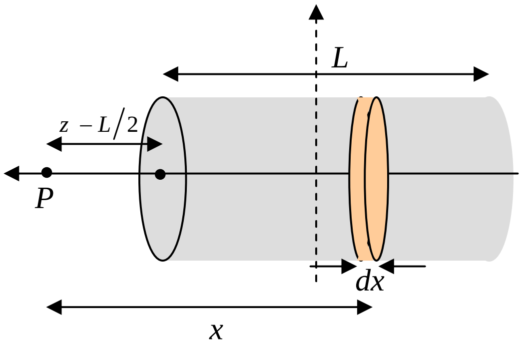
مثال ۶-۵ پتانسیل استوانه‌ی باردار در روی محورش: در مثال ۷-۳ [رابطه‌ی (٦٠-۳)] پتانسیل یک قرص بار دار به شعاع R و چگالی بار سطحی σ را در نقطه‌ای به فاصله‌ی z از مرکز قرص ودر روی محور آن را دست آوردیم:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + z^2} - z\right] \qquad (۵-٥٤)$$

از این نتیجه استفاده کنید و پتانسیل ناشی از استوانه‌ی توپری با چگالی بار حجمی ρ، شعاع قاعده‌ی R وطول L را در فاصله‌ی z از وسط استوانه به دست آورید. میدان الکتریکی را در این نقطه حساب کنید.

حل: استوانه را به برش‌های نازکی به ضخامت dx همانند شکل (٤-۵) تقسیم کنید و با جایگرینی‌های

$z \to x$ و $\sigma \to \rho dx$ در رابطه‌ی (٥-٥٤) پتانسیل حاصل از این برش، dV ، را به دست آورید. با انتگرال گیری از dV آنگاه پتانسیل کل در نقطه‌ی P به دست می‌آید. توجه کنید که جایگزینی نخست روشن است . جایگزینی $\sigma \to \rho dx$ هم پذیرفتنی است، چون اگر dx خیلی کوچک باشد، می‌توان فرض کرد که بار موجود در برش $\rho A dx$ (A= سطح قاعده‌ی برش) با بار موجود در سطح قرص σA برابر می‌شود و در نتیجه $"\sigma" = \rho dx$. پس داریم



شکل ٥-٤ پتانسیل استوانه در روی محور آن

$$V = \int dV = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_{z-L/2}^{z+L/2}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)dx$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\left[x\sqrt{R^2+x^2}+R^2\ell n\left(x+\sqrt{R^2+x^2}\right)-x^2\right]_{z-L/2}^{z+L/2}$$

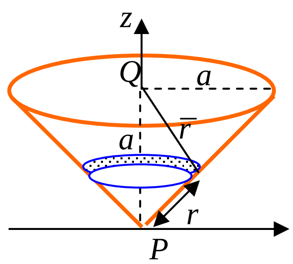
$$= \frac{\rho}{4\varepsilon_0}\left\{\begin{array}{l}(z+L/2)\sqrt{R^2+(z+L/2)^2}-(z-L/2)\sqrt{R^2+(z-L/2)^2} \\ +R^2\ell n\left[\dfrac{z+L/2+\sqrt{R^2+(z+L/2)^2}}{z-L/2+\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}}\right]-2zL\end{array}\right\} \qquad (٥-٥٥)$$

میدان الکتریکی در نقطه‌ی P را با استفاده از $\mathbf{E} = -\nabla V$ به دست می‌آوریم. خوشبختانه پتانسیل فقز تابع یک متغیر، z ، است و بنابراین داریم (پس از اندکی عملیات جبری)

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[L-\sqrt{R^2+(z+L/2)^2}+\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}\right]\hat{\mathbf{k}} \qquad (٥-٥٦)$$

مثال ٧-٥ پتانسیل مخروط: مخروطی را در نظر بگیرید که ارتفاع و شعاع سطح قاعده اش a است. چگالی بار الکتریکی در روی سطح جانبی آن یکنواخت و برابر σ است. پتانسیل الکتریکی را در راس مخروط و در مرکز سطح قاعده‌ی آن حساب کنید. اختلاف پتانسیل این دو نقطه را بیابید.

حل: پتانسیل در راس P - "روبان" باریکی به پهنای dr را در روی سطح جانبی مخروط و به فاصله‌ی z از راس آن در نظر بگیرید، شکل (٥-٥) را ببینید. شعاع این روبان هم z است. جزء بار موجود در روی این روبان $\sigma da = \sigma(2\pi z)dr$ است. با استفاده از رابطه‌ی (٥-١٨) داریم



شکل ٥-٥ پتانسیل الکتریکی مخروط

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma}{r}da = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma}{r}(2\pi z\, dr) \qquad (٥-٥٧)$$

با توجه به شکل (۵–۵) و این که ارتفاع مخروط و شعاع قاعده‌ی آن باهم برابر اند، نتیجه می‌گیریم

$$r=\sqrt{2}z \quad\Rightarrow\quad dr=\sqrt{2}dz \quad ; \quad z=[0,a] \tag{۵–۵۸}$$

پس، رابطه‌ی (۵–۵۷) با این جایگزینی به صورت زیر در می‌آید

$$V(P)=\frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{r}\left(z\,dr\right)=\frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a\frac{1}{\sqrt{2}z}(z)(\sqrt{2}dz)=\frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a dz=\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} \tag{۵–۵۹}$$

پتانسیل در نقطه‌ی Q: هنوز هم همان جزء بار را انتخاب می‌کنیم: روبانی به پهنای dr در فاصله‌ی z از راس مخروط (و بنابراین شعاع حلقه‌ی روبان هم z است.) این بار فاصله‌ی جزء بار (نقاط روی روبان) برابر است با $\bar{r}$:

$$\bar{r}=\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos 45^\circ}=\sqrt{a^2+(\sqrt{2}z)^2-2(\sqrt{2}z)a\sqrt{2}/2}=\sqrt{a^2+2z^2-2az} \tag{۵–۶۰}$$

بنابراین، با استفاده از رابطه‌ی (۵–۱۸) داریم

$$V(Q)=\frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a\frac{z\sqrt{2}dz}{\sqrt{a^2+2z^2-2az}}=\frac{\sigma\sqrt{2}}{2\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2z^2-2az}\Big|_0^a\\ +\frac{a}{2}\int_0^a\frac{dz}{\sqrt{a^2+2z^2-2az}}\end{array}\right]$$

$$=\frac{\sigma\sqrt{2}}{2\varepsilon_0}\left\{\cancel{\sqrt{a^2+2a^2-2a^2}}-\cancel{\sqrt{a^2}}+a\frac{1}{\sqrt{2}}\ell n\left(2\sqrt{2}\sqrt{a^2+2z^2-2az}+4z-2a\right)\Big|_0^a\right\}$$

$$=\frac{\sigma\sqrt{2}}{4\varepsilon_0}\frac{a}{\sqrt{2}}\ell n\left\{\frac{2\sqrt{2}\sqrt{a^2+2a^2-2a^2}+4a-2a}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2}-2a}\right\}=\frac{\sigma a}{8\varepsilon_0}2\ell n\left\{\frac{2\sqrt{2}a+2a}{2\sqrt{2}a-2a}\right\}$$

$$=\frac{\sigma a}{8\varepsilon_0}2\ell n\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)=2\frac{\sigma a}{8\varepsilon_0}\ell n\left\{\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}\right\}=2\frac{\sigma a}{4\varepsilon_0}\ell n\left(1+\sqrt{2}\right) \tag{۵–۶۱}$$

و بنابراین اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ی P و Q برابر است با

$$V(P)-V(Q)=\frac{\sigma a}{4\varepsilon_0}\left[2-2\ell n\left(1+\sqrt{2}\right)\right]=\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\left(1-\ell n\left(1+\sqrt{2}\right)\right) \tag{۵–۶۲}$$

مثال ۸–۵ پتانسیل بار خطی بینهایت دراز: پتانسیل را در فاصله r از یک سیم راست بینهایت دراز با چگالی بار خطی یکنواخت λ بدست آورید. گرادیان پتانسیل را حساب کنید و درستی پاسختان را بیازمائید.

حل: میدان این آرایه‌ی بار را در مثال ۷–٤ ، رابطه‌ی (٤–۵۱) به دست آوردیم و برابر است با

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r}\hat{\mathbf{r}} \tag{۵–۶۳}$$

چون آرایه‌ی بار الکتریکی تا (در بینهایت هم بار الکتریکی وجود دارد) نمی‌توان مبداء پتانسیل را در بینهایت پنداشت (گمان نکنید که فقط در یک راستا بار تا بینهایت ادامه دارد و در دیگر جهت‌ها در بینهایت بار وجود ندارد. بینهایت، بینهایت است و یک نقطه بیش نیست). مبداء پتانسیل را در $r=a$ فرض کنید. داریم

$$V(r) = -\int_a^r \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_a^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r}dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda\,\ell n\left(r/a\right) \qquad (۵-۶۴)$$

از این نتیجه روشن است که چرا $a = \infty$ و $a = 0$ گزینه‌های مناسبی برای مبداء پتانسیل نیستند. در این نقاط لگاریتم بینهایت می‌شود و پتانسیل مقدار معینی نیست.

$$\vec{\nabla}V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda\frac{\partial}{\partial r}\left[\ell n\left(\frac{r}{a}\right)\right]\hat{\mathbf{r}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda\frac{1}{r}\hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{E} \qquad (۵-۶۵)$$

**** ۴-۵ معادله‌ی پواسن و معادله‌ی لاپلاس**

در بخش ۱-۵ دیدیم که میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را می‌توان از گرادیان یک تابع عددی به نام تابع پتانسیل به دست آورد: $\mathbf{E} = -\nabla V$. همچنین می‌دانیم که چون $\mathbf{E}$ یک تابع برداری است، برای محاسبه‌ی آن باید هر دوی دیورژانس و کرل $\mathbf{E}$ آن را بدانیم. قانون گوس در شکل دیفرانسیلی دیورژانس میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را به دست می‌دهد. در بخش ۲-۵ توانستیم نشان دهیم که کرل میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ همواره صفر است و این ویژگی میدان الکتروستاتیکی است. بنابراین، داریم

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \nabla\times\mathbf{E} = 0 \qquad (۵-۶۶)$$

این دو رابطه برای به دست آوردن میدان برداری $\mathbf{E}$ لازم و کافی است. اگر این دو رابطه را برحسب تابع پتانسیل V بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \nabla\cdot(-\nabla V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (۵-۶۷)$$

بنابراین، شکل دیفرانسیلی قانون گوس، برحسب پتانسیل به صورت زیر در می‌آید

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (۵-۶۸)$$

این رابطه، **معادله‌ی پواسن** است. معادله‌ی پواسن یک معادله‌ی دیفرانسیلی مرتبه‌ی دو پارمشتقی با طرف دوم است. حل آن آسان نیست و به روش‌های به نسبت پیچیده‌ی ریاضی نیاز دارد. اگر این معادله را در ناحیه‌ای که بار وجود ندارد (در جاهایی که از توزیع بار موضعی فاصله دارند و در آن نقاط $\rho = 0$ است) به کار ببریم به صورت ساده‌تری در می‌آید

$$\nabla^2 V = 0 \qquad (۵-۶۹)$$

این معادله، **معادله‌ی لاپلاس** است . حل کردن آن در مقایسه با معادله‌ی پواسن آسان‌تر و شناخته شده است.

اگر قانون $\nabla\times\mathbf{E} = 0$ برحسب پتانسیل بنویسیم، خواهیم داشت

$$\nabla\times\mathbf{E} = \nabla\times(-\nabla V) = -\nabla\times\left(\nabla V\right) \qquad (۵-۷۰)$$

و این برابر صفر باشد. اما سمت راست رابطه‌ی (۷۰-۵) **همواره صفر است**؛ چون کرل گرادیان صفر است. در نتیجه، این رابطه هیچ شرط تازه‌ای بر V اعمال نمی‌کند. البته ما از قانون $\nabla\times\mathbf{E} = 0$ استفاده کردیم و

نشان دادیم که $\mathbf{E}$ را می‌توان به صورت گرادیان یک تابع عددی نوشت. بنابراین شگفت انگیز نیست که کرل گرادیان V برابر صفر باشد. $\nabla\times\mathbf{E}=0$ به ما اجازه می‌دهد تا میدان الکتریکی را به صورت $\mathbf{E}=-\nabla V$ بنویسیم و این تضمین می‌کند که $\nabla\times\mathbf{E}=0$ باشد. نتیجه آن که: برای یافتن V تنها به یک معادله‌ی دیفرانسیل (معادله‌ی پواسن) نیاز داریم ؛ چون V یکتابع عددی است؛ در حالی که برای یافتن $\mathbf{E}$ به دو معادله‌ی دیفرانسیل ، معدله‌های رابطه‌ی (٦٦-٥) ، کرل و دیورژانس $\mathbf{E}$ ، نیازمندیم.

٥-٥ انرژی الکتروستاتیکی

در فصل ٣ ، بخش١-٣-٣، انرژی لازم برای آرایش مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای را به دست آوردیم. انرژی لازم برای این که بارهای $q_1,q_2,\cdots,q_i,\cdots$ از بینهایت به مکان‌های $r_1,r_2,\cdots,r_i,\cdots$ بیاوریم در رابطه‌ی (٢٨-٣) داده شده است:

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iV\left(r_i\right) \qquad (٥-٧١)$$

که در آن $V\left(r_i\right)$ پتانسیل ناشی از تمام بارها به جز بار i-ام در مکان بار i-ام است. برای توزیع بار پیوسته کافی است که در رابطه‌ی بالا، علامت جمع را به انتگرال و q_i را با $\rho d\tau$ (برای توزیع حجمی) ، σda (برای توزیع سطحی بار) و یا با λds (برای توزیع خطی) جلیگزین کنیم. بنابراین، رابطه‌ی (٧١-٥) برای توزیع حجمی بار الکتریکی به صورت زیر در می‌آید

$$W=\frac{1}{2}\int\rho V d\tau \qquad (٥-٧٢)$$

این انتگرال روی حجمی گرفته می‌شود که بارهای الکتریکی را در بر دارد؛ همان‌گونه که علامت جمع در رابطه‌ی (٧١-٥) روی همه‌ی بارها بسته شده است. برای توزیع بارهای سطحی و خطی هم داریم

$$W=\frac{1}{2}\int_S\sigma da \quad , \quad W=\frac{1}{2}\int_L\lambda ds \qquad (٥-٧٣)$$

باز هم انتگرال‌ها روی سطح S و خم L محاسبه می‌شوند که بارها در روی آن سطح و خم قرار دارند. رابطه‌ی (٧٢-٥) را می‌توان برحسب میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ بازنویسی کرد. یعنی ρ و V را برحسب $\mathbf{E}$ نوشت. این کار را برای معادله‌های رابطه‌ی (٧٣-٥) هم می‌توان انجام داد. با این کار، انرژی الکتریکی به طور طبیعی به میدان الکتریکی نسبت داده می‌شود و این رویکرد خوبی است. در فصل ٤ دیدیم که میدان الکتریکی تنش ایجاد می‌کند و به ذره‌ی باردار فشار وارد می‌کند. هم‌چنین، بین ذره‌ی باردار و میدان الکتریکی انرژی تبادل می‌شود. اینک به جاست که ببینیم میدان انرژی‌اش را از کجا فراهم می‌کند.
جایگزینی ρ در رابطه‌ی (٧٢-٥) برحسب میدان آسان است. از قانون گوس در شکل دیفرانسیلی آن می‌توان استفاده کرد و نوشت

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0 \qquad \Rightarrow \qquad \rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\mathbf{E} \qquad (٥-٧٤)$$

پس، رابطه‌ی (٧٢-٥) به صورت زیر در می‌آید

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\nabla\cdot\mathbf{E})V d\tau \qquad (۵-۷۵)$$

برای این که بتوانیم کار را ادامه دهیم، به اتحاد ریاضی زیر نیاز داریم:

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}V) = (\nabla\cdot\mathbf{E})V + \mathbf{E}\cdot(\nabla V) \;\Rightarrow\; (\nabla\cdot\mathbf{E})V = \nabla\cdot(\mathbf{E}V) - \mathbf{E}\cdot(\nabla V) \qquad (۵-۷۶)$$

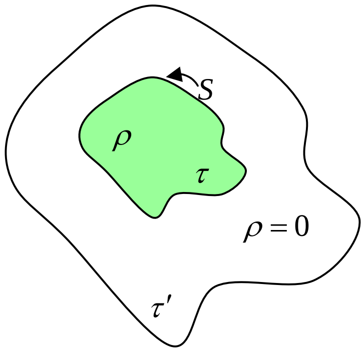
اگر در جمله‌ی آخر سمت راست این معادله قرار دهیم $\mathbf{E} = -\nabla V$، رابطه‌ی بالا به صورت زیر در می‌آید

$$(\nabla\cdot\mathbf{E})V = \nabla\cdot(\mathbf{E}V) - \mathbf{E}\cdot(\nabla V) = \nabla\cdot(\mathbf{E}V) + E^2 \qquad (۵-۷۷)$$

و در نتیجه، رابطه‌ی (۷۵-۵) را می توان به صورت جمع دو انتگرال نوشت

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_\tau \nabla\cdot(\mathbf{E}V)\,d\tau + \int_\tau E^2 d\tau\right] \qquad (۵-۷۸)$$

این رابطه زشت به نظر می‌آید و اصلا از رابطه‌ای که با آن آغاز کردیم، رابطه‌ی (۷۲-۵) ، ساده‌تر نیست. با وجود این، زیبایی‌های آن به زودی آشکار خواهد شد. هر دوی انتکرال‌های رابطه‌ی بالا روی حجمی گرفته می‌شوند که بار در آن قرار دارد. فرض کنید بار الکتریکی موضعی و محدود به حجم τ در شکل (٦-۵) است. با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس (نگاه کنید به پیوست فصل ٤) انتگرال اول را می‌توان به انتگرال سطح تبدیل کرد.



شکل ٦-۵ سطح و حجم انتگرال گیری

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\oint_S V\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} + \int_\tau E^2 d\tau\right) \qquad (۵-۷۹)$$

سطح S سطح بسته‌ای است که مرزهای حجم τ است. از سوی دیگر، با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس، انتگرال حجم را به انتگرال سطحی تبدیل کردیم که در آن سطح میدان الکتریکی وجود دارد. اما میدان الکتریکی معمولا به یک حجم خاصی محدود نیست و بنابراین، به سطح S هم محدود نیست (به یاد بیاورید که خطهای میدان یک توزیع بار یا باید به بار دیگری ختم شود و یا تا بینهایت ادامه می‌یابد.) در واقع، انتگرال سطح (انتگرال نخست) در رابطه‌ی (۷۹-۵) باید بر روی سطح بسته‌ای گرفته شود که مرزهای آن در بینهایت قرار دارد. اگر مرزهای سطح S را به بینهایت ببریم (اما بار هنوز در حجم محدود τ جایگزیده است) در فاصله‌ی دوری از توزیع بار قرار خواهیم گرفت و برای توزیع بار دلخواهف میدان الکتریکی در فاصله‌های بسیار دور از آن به صورت $1/r^2$ (و یا سریع‌تر) کاهش پیدا می‌کند. پتانسیل V مربوط به آن هم با $1/r$ کاهش می‌یابد. اما سطح S به صورت r^2 افزایش پیدا می‌کند. در نتیجه، انتگرالنده در انتگرال نخست رابطه‌ی (۷۹-۵) به صورت $\left(1/r^2\right)\left(1/r\right)r^2 = 1/r$ رفتار می‌کند. هنگامی که $r \to \infty$ میل کند، انتگرال اول صفر می‌شود و رابطه‌ی (۷۹-۵) در حد $r \to \infty$ به صورت زیر در می‌آید

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\infty E^2 d\tau \qquad (۵-۸۰)$$

توجه کنید که گستره‌ی انتگرال‌گیری در این رابطه تمام فضا (تمام عالم) است. چرا؟ چون با بردن مرزهای سطح S به بینهایت، حجم آن را افزایش می‌دهیم. این نتیجه را به گونه‌ی دیگری هم می‌توان بیان کرد: به

رابطه‌ی (۷۲–۵) برگردید. از این رابطه نقطه‌ی آغاز ما بود و انتگرال روی حجمی گرفته شده است که بار را در بر دارد (حجم τ در شکل (٦–۵)) . اما می توان حجم بزرگتری را در نظر گرفت، مانند حجم τ' در شکل (٦–۵). فضای اضافی که با افزایش حجم به وجود می‌آید در مقدار انتگرال رابطه‌ی (۷۲–۵) تغییری به وجود نمی‌آورد؛ چ.ن در این فضای اضافی $\rho = 0$ است. اما در رابطه‌ی (۷۹–۵) انتگرال دوم (انتگرال E^2) فقط می‌تواند افزایش پیدا کند (چون E^2 یک کمیت مثبتی است). اما سمت چپ این رابطه، یعن W مقدار ثابتی است، پس باید انتگرال سطح با افزایش فضا کاهش پیدا کند و بزرگ شدن انتگرال حجم را جربان کند.

با افزایش حجم انتگرال‌گیری به تمام عالم، به ناگزیر، انتگرال سطح به صفر می‌گراید. آنچه باقی می‌ماند رابطه‌ی (۸۰–۵) است.

کمیت $\varepsilon_0 E^2/2$ **چگالی انرژی** الکتروستاتیکی نام دارد.

- **نکته**: شاید استدلال کنید که انتگرالنده‌ی $E^2 d\tau \propto \left(1/r^2\right)^2\left(r^3\right) \propto 1/r$ هم با دور شدن از توزیع بار به صفر میل می‌کند. این سخن نادرستی است؛ چون E^2 یک کمیت مثبتی است. درست است که اندازه‌ی آن با دور شدن از توزیع بار همواره کاهش می‌یابد، اما همواره مثبت باقی می‌ماند.انتگرال E^2 در تمام فضا مانند این است که یک سری نزولی نامنتاهی داشته باشیم که همه‌ی جمله‌هایش مثبت است و بخواهیم جمله-های آن را جمع ببندیم. روشن است که مقدار آن هرگز صفر نمی‌شود.

مثال ۹–۵ انرژی کره‌ای با توزیع بار سطحی: بار کل q در روی سطح کره‌ای به شعاع R بطور یکنواخت توزیع شده است. انرژی این آرایه را به دو روش: (۱) با استفاده از رابطه (۷۳–۵) و (۲) با استفاده از رابطه (۸۰–۵) بدست آورید.

حل (۱) با استفاده از رابطه (۷۳–۵) : پتانسیل روی سطح کره مقدار ثابتی است. از رابطه‌ی (۵۲–۵) داریم

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \tag{۸۱–۵}$$

بنابراین، انرژی عبارت است از

$$W = \frac{1}{2}\int \sigma V\, da = \frac{1}{2}\int_S \sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} da = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}\int \sigma\, da = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R} \tag{۸۲–۵}$$

(۲) با استفاده از رابطه‌ی (۸۰–۵) : تمام عالم به دو ناحیه نقسیم شده است. فضای درون کره ($r < R$) و فضای بیرون کره ($r > R$) . میدان در این دو ناحیه با هم فرق دارند. بنابراین، داریم

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\infty E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{r<R} E_{r<R}^2 d\tau + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{r>R} E_{r>R}^2 d\tau \tag{۸۳–۵}$$

اما میدان در درون کره صفر است ($E_{r<R} = 0$) و در بیرون کره عبارت است از

$$\mathbf{E}_{r>R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad E_{r>R}^2 = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{q^2}{r^4} \tag{۸۴–۵}$$

پس، رابطه‌ی (۸۳–۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\int 0\,d\tau+\frac{\varepsilon_0}{2}\int\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{q^2}{r^4}(r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi)$$

$$=0+\ \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}q^2(4\pi)\int_R^\infty\frac{1}{r^2}dr=\ \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R} \qquad (۵-۸۵)$$

پس، می بینیم که هر دو روش به یک پاسخ می انجامند.

مثال ۱۰-۵ انرژی کره‌ی با بار حجمی : بار q به طور یکنواخت در حجم کره‌ای به شعاع R توزیع شده است. انرژی این آرایه را به سه روش به دست آورید. **(الف)**: با استفاده از رابطه‌ی (۷۳-۵) ، **(ب)**: با استفاده از رابطه‌ی (۸۰-۵) و **(پ)**: با استفاده از رابطه‌ی (۷۹-۵) . در روش سوم، کره‌ای به شعاع a انتخاب کنید و انتگرال‌ها را برای سطح و حجم آن به دست آورید. اگر $a\to\infty$ چه پیش می‌آید؟

حل: **(الف)** با استفاده از رابطه‌ی (۷۳-۵) . در مثال ۳-۵ ، رابطه‌ی (۴۰-۵) ، پتانسیل کره‌ی با بار حجمی را به دست آوردیم. در این جا از آن استفاده می‌کنیم. داریم

$$W=\frac{1}{2}\int\rho V\,d\tau=\frac{1}{2}\rho\int\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2R}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)\right)\left(4\pi r^2dr\right)$$

$$=\frac{1}{2}\rho\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2R}\int_0^R\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)4\pi r^2dr=\frac{q\rho}{4\varepsilon_0R}\left[3\frac{r^3}{3}-\frac{1}{R^2}\frac{r^5}{5}\right]\Bigg|_0^R$$

$$=\frac{q\rho}{4\varepsilon_0R}\left(R^3-\frac{R^3}{5}\right)=\frac{\rho q}{5\varepsilon_0}R^2=\frac{q}{5\varepsilon_0}R^2\left(\frac{q}{(4/3)\pi R^3}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{5}\frac{q^2}{R}\right) \qquad (۵-۸۶)$$

(ب) : با استفاده از رابطه‌ی (۸۰-۵) . بار هم ، همانند مثال پیش، تمام فضا به دو ناحیه تقسیم شده است، درون کره ($r<R$) و بیرون کره ($r>R$) . میدان الکتریکی در این دو ناحیه در فصل ٤، مثال ۳-٤ و رابطه‌های (۳۰-٤) و (۳۲-٤) ، حساب شدند:

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & ;\quad r>R\\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^2}r\,\hat{\mathbf{r}} & ;\quad r<R\end{cases} \qquad (۵-۸۷)$$

بنابراین، از رابطه‌ی (۸۰-۵) داریم

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_\infty E^2d\tau=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2q^2\left\{\int_0^R\left(\frac{r}{R^3}\right)^2\left(4\pi r^2dr\right)+\int_R^\infty\frac{1}{r^4}\left(4\pi r^2dr\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2}\left\{\frac{1}{R^6}\left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^R+\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^\infty\right\}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{5R}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{q^2}{R} \qquad (۵-۸۸)$$

که همان پاسخ بخش (الف) است.

(پ) با استفاده از رابطه‌ی (۷۹-۵) : داریم

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\oint_S V\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} + \int_\tau E^2 d\tau\right) \qquad (۵-۷۹)$$

در این رابطه حجم τ هر حجم دلخواهی است که توزیع بار را در بر دارد. اجازه دهید کره‌ای به شعاع $a > R$ را برگزینیم. در این صورت $V = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$ و داریم

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\oint_S V\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} + \int_\tau E^2 d\tau\right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{S:r=a}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right)\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi \\ \displaystyle+\int_0^R E_{r<R}^2 d\tau + \int_R^a\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2\left(4\pi r^2 dr\right)\end{array}\right\}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{4\pi}{a} + \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{4\pi}{5R} + \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi q^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^a\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2}\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{5R}-\frac{1}{a}+\frac{1}{R}\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{q^2}{R} \qquad (۵-۸۹)$$

باز هم پاسخ با پاسخ‌هایی که با دو روش پیشین به دست آمد، یکسان است. در حد $a \to \infty$ سهم انتگرال سطح، $(1/4\pi\varepsilon_0)(q^2/a)$ ، به صفر میل می‌کند اما ، سهم انتگرال حجم بزرگ می‌شود.

- **نکته**: در فصل ٤ ، پس از رابطه‌ی (١١٢-٤) گفتیم که در یک رسانا، بارهای اضافی در سطح آن جمع می‌شوند. در آنجا گفتیم که یک چنیم آرایش بار انرژی رسانا را کمینه می‌کند. از مثال‌های (۹-۵) و (۱۰-۵) پیداست که اگر بار q در سطح کره توزیع شود انرژی‌اش کمتر از حالتی است که همین مقدار بار در حجم همان کره توزیع شود.

مثال ۱۱-۵ انرژی توزیع بار نا یکنواخت: توزیع بار حجمی در کره‌ای به شعاع R به صورت $\rho(r) = kr$ است. k مقدار ثابتی است. انرژی این آرایه را به دو روش، با استفاده از رابطه‌ی(۷۲-۵) و رابطه‌ی (۸۰-۵) حساب کنید.

حل از قانون گوس نخست میدان الکتریکی را در درون و بیرون کره حساب می‌کنیم. داریم

$$\varepsilon_0\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \varepsilon_0 4\pi r^2 E = q_{enc} = \int \rho\, d\tau = \int (kr')r'^2\theta\, dr'\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_0 4\pi r^2 E = 4\pi k \int_0^r r'^3 dr' = \begin{cases}\pi k r^4 & ; \quad r < R \\ \pi k R^4 & ; \quad r > R\end{cases} \qquad (۵-۹۰)$$

بنابراین، میدان در درون و بیرون کره عبارت اند از

$$\mathbf{E}_{r<R} = \frac{k}{4\varepsilon_0}r^2\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad r < R \qquad , \qquad \mathbf{E}_{r>R} = \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad r > R \qquad (۵-۹۱)$$

(الف): با استفاده از رابطه‌ی (۸۰-۵):

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int E_{r<R}^{2} d\tau + \int E_{r>R}^{2} d\tau\right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R \left(\frac{kr^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty \left(\frac{kR^4}{4\pi\varepsilon 0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= 4\pi \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{k}{4\varepsilon_0}\right)^2 \left\{\int_0^R r^6 dr + R^8 \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr\right\}$$

$$= \frac{\pi k^2}{8\varepsilon_0}\left\{\frac{R^7}{7} + R^8\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^\infty\right\} = \frac{\pi k^2}{8\varepsilon_0}\left(\frac{R^7}{7} + R^7\right) = \frac{\pi k^2 R^7}{7\varepsilon_0} \qquad (۹۲-۵)$$

(ب) استفاده از رابطه‌ی (۷۳-۵) : نخست باید پتانسیل را برای ناحیه‌ی $r < R$ حساب کنیم. این کار ساده است:

$$V(r<R) = -\int_\infty^r \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_\infty^R \left(\frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r'^2}\right) dr' - \int_R^r \left(\frac{kr'^2}{4\varepsilon_0}\right) dr' = -\frac{k}{4\varepsilon_0}\left\{R^4\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_\infty^R + \frac{r^3}{3}\Bigg|_R^r\right\}$$

$$= -\frac{k}{4\varepsilon_0}\left(-R^3 + \frac{r^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{k}{3\varepsilon_0}\left(R^3 - \frac{r^3}{4}\right) \qquad (۹۳-۵)$$

پس:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^R (kr)\left[\frac{k}{3\varepsilon_0}(R^3 - \frac{r^3}{4})\right] 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi k^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R (R^3 r^3 - \frac{1}{4} r^6) dr$$

$$= \frac{2\pi k^2}{3\varepsilon_0}\left\{R^3 \frac{R^4}{4} - \frac{1}{4}\frac{R^7}{7}\right\} = \frac{\pi K^2 R^7}{6\varepsilon_0}\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{\pi k^2 R^7}{7\varepsilon_0} \qquad (۹۴-۵)$$

باز هم پاسخ‌های دو روش باهم سازگارند.

۶-۵ **یک کاربرد عملی**: **شکافت هسته‌ای**

در این بخش می خواهیم با استفاده از مثال (۱۰-۵) انرژی گداخت هسته‌ای را تخمین بزنیم. در مثال (۱۰-۵) انرژی توزیع بار در درون یک کره را حساب کردیم. نخست گفتار کوتاهی در باره‌ی شکافت هسته‌ای و فیزیک هسته‌ای.

هسته‌ی اتم سنگین Z پروتون و N نوترون دارد. در هسته‌های سنگین تعداد نوترون‌بیش از تعداد پروتون است. شعاع هسته به تقریب برابر است با

$$R = \left(1.2\times10^{-15}\right) A^{1/3} \ \ \mathrm{m} \qquad (۹۵-۵)$$

که در آن $A = Z + N$ عدد اتمی است. رابطه‌ی بالا می‌گوید که حجم هسته با تعداد نوکلیون (نوکلیون نام عمومی برای پرون و نوترون است) های هسته متناسب است. بنابراین، چگالی هسته برای همه‌ی هسته‌ها یکسان است. چون پروتون‌ها یکدیگر را می‌رانند، باید **نیروی ربایشی هسته‌ای** وجود داشته باشد که بر این

رانش چیره شود و هسته را از متلاشی شدن حفظ کند. این نیرو برای نوترون و پروتون یکسان است و برد کوتاهی در حدود 10^{-15} m دارد. یکی از پی‌آمدهای کوتاه‌برد بودن این نیرو و ثابت بودن چگالی هسته برای همه‌ی هسته‌ها این است که انرژی پتانسیل نیروی هسته‌ای، U_N ، به تنهایی با عدد اتمی A به تقریب متناسب است. برعکس، انرژی الکتروستاتیکی هسته، بنا به نتیجه‌ی مثال (۱۰–۵) برابر است با

$$U_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{q^2}{R} = \frac{3}{5}\left(\frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\right) \tag{۵–۹۶}$$

و با مربع Z افزایش می‌یابد. e بار الکترون یا پروتون است. چون ، بخش برهم‌کنشی انرژی الکتروستاتیک (انرژی پتانسیل رانشی بین پروتون‌ها) مورد توجه ماست، باید جمله‌ای که متناسب با Ze^2 ار رابطه‌ی (۹۶–۵) کم کنیم. این جمله به خود–انرژی Z پروتون مربوط است (نگاه کنید به بخش بعدی ، بخش ۷–۵). پس، داریم

$$U_E = \frac{3}{5}\frac{Z(Z-1)e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{۵–۹۷}$$

این انرژی برای هسته‌ای که فقط یک پروتون دارد، صفر است. توجه کنید که $Z(Z-1)/2$ تعداد جفت پرتون‌های هسته است.

اگر نوترون کُند (نوترون گرمایی) به وسیله‌ی هسته‌ی اورانیوم به دام بیفتد، هسته‌ی اورانیوم ناپایدار می-شود و به دو هسته‌ی با اندازه‌های به فقریب یکسان شکافته می‌شود. چون در این واکنش، عدد اتمی کل پایسته می‌ماند، تغییر چندانی در انرژی هسته‌ای U_N به وجود نمی‌آید. اما انرژی الکتروستاتیک فراورده‌های هسته‌ای کمتر از انرژی الکتروستاتیک اولیه می‌شود؛ چون شکافت هسته‌ای بارهای هم‌نام را در این واکنش از هم جدا می‌کند. انرژی الکتروستاتیک آزاد می‌شود و به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود.

برای این که انرژی آزاد شده را تخمین بزنیم، انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی را برای هسته‌ی اورانیوم حساب می‌کنیم. در هسته‌ی اورانیوم $Z=92$ و $A=235$ اند. با استفاده از رابطه‌ی (۹۷–۵) داریم

$$U_E\left({}^{92}U_{235}\right) = \frac{(3/5)(92)\left(1.6\times10^{-19}\right)^2}{\left(9\times10^9\right)^{-1}\left(1.2\times10^{-15}\right)(235)^{1/3}}\,\mathrm{J} \approx 10^9\ \mathrm{eV} \tag{۵–۹۸}$$

در گام آخر، یکای انرژی را از ژول به الکترون ولت تبدیل کردیم ($1\mathrm{eV} = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J}$). دو پاره‌شکافت واکنش، به تقریب هر یک نیمی از Z و A اولیه را حمل می‌کنند و انرژی الکتروستاتیکی آنها برابر است با U_E (پاره‌شکافت ها) $= 0.6\times10^9\ \mathrm{eV}$ و در نتیجه ، انرژی آزاد شده عبارت است از

$$\Delta U_E = U_E\left({}^{92}U_{235}\right) - U_E\left(\mathrm{Fragments}\right) \approx 0.4\times10^9\,\mathrm{eV} \tag{۵–۹۹}$$

این تخمین دست‌بالا است؛ چون نوکلیون‌هیی که در سطح هسته قرار دارند به اندازه‌ی نوکلیون‌هایی که در فضای درونی هسته قرار دارند در برهم‌کنش الکتروستاتیکی شرکت نمیکنند. مانند هر شاره‌ی دیگری، این ویژگی به انرژی در واحد سطح می‌انجامد که انرژی **کشش سطحی** نام دارد. در واکنش شکافت هسته‌ای، حجم ماده‌ی هسته‌ای تغییر نمی‌کند، اما کشش سطجی افزایش پیدا می‌کند. تغییر کشش سطحی در اثر شکافت، حدود نصف انرژی الکتروستاتیکی است. بنابراین، انرژی خالص آزاد شده که به طور تجربی اندازه

گرفته شده است، برابر است با

$$\Delta U \approx 0.2\times 10^{9}\ \text{eV} \qquad (۵-۱۰۰)$$

بنابراین، در هر شکافت هسته‌ای انرژی آزاد شده حدود 10^8 برابر انرژی واکنش شیمیایی (مانند سوزاندن چوب و نفت و ...) است

۵-۷ نکاتی پیرامون انرژی الکتروستاتیکی

- بنا به رابطه (۵-۸۰) انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار ساکن، همواره کمیتی **مثبت** است. این رابطه را ما از رابطه‌ی (۵-۷۲) به دست آوردیم. از مثال‌های ۵-۹ تا ۵-۱۱ دیده می‌شود که هر دو به یک پاسخ می‌انجامند. اما هیچ شرطی در رابطه (۵-۷۲) وجود ندارد که مثبت بودن نتیجه را تضمین کند. در واقع، پاسخ انتگرال در رابطه‌ی (۵-۷۲) می‌تواند مثبت یا منفی باشد (برای مثال انرژی آرایه‌ای از دو بار مساوی اما باا علامت‌های مخالف که در فاصله‌ی r از هیکدیگر قرار دارند بنا به رابطه‌ی (۵-۷۲) ،یا همزاد آن برای بارهای گسسته ، رابطه‌ی (۵-۷۱) برابر است با $0<\left(-q^2/4\pi\varepsilon_0 r\right)$ که مقداری منفی است. این ناسازگاری از کجا ناشی شده است؟ کدام یک از این دو رابطه درست است؟ واقعیت این است که هر دو رابطه درست است ولی توجیه فیزیکی آن‌ها متفاوت است. در رابطه‌ی (۵-۷۲) کار لازم برای کنار هم چیدن بارها حساب شده است. این که بارها چگونه تولید شده اند وبرای تولید آن‌ها چه مقدار انرژی هزینه شده است، به حساب نیامده است. کار لازم برای خلق بار نقطه‌ای **خود ـ انرژی** نامیده می‌شود. ما بارهای نقطه‌ای را در اختیار داشتیم ، آنها را از بینهایت به مکان‌های مورد نظر آوردیم وکار لازم برای کنار هم چیدن آنها را حساب کردیم.

بنا به رابطه‌ی (۵-۸۰) خود- انرژی یک بار نقطه‌ای بینهایت است، چون میدان بار نقطه‌ای q برابر است با $\mathbf{E}=\left(q/4\pi\varepsilon_0 r^2\right)\hat{\mathbf{r}}$ و در نتیجه، انرژی آن عبارت است از

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\infty} E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\int_{\infty}\frac{q^2}{r^4}\left(r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi\right) \\ &= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \infty \qquad (۵-۱۰۱)\end{aligned}$$

محاسبه‌ی خود- انرژی بار نقطه‌ای به راستی باید به طور کوانتومی انجام بگیرد. نتیجه‌ی بالا به طور کلاسیکی به دست آمده است. با وجود این، محاسبه‌ی الکترودینامیک کوانتومی خود- انرژی بار نقطه‌ای مقدار بینهایت را به دست می‌دهد. یک راه فرار از این فاجعه این است که بگوییم بار الکتریکی نقطه‌ای وجود ندارد. اما تا جایی که می‌دانیم و می‌توانیم ابعاد کوچک‌تر را بکاویم، اگر الکترون بُعد هم داشته باشد، کمتر از 10^{-18} m است. الکترون بار نقطه‌ای است. هرگز ساختاری برای الکترون دیده نشده است. این که چگونه الکترون، خود- انرژی‌اش را به صورت جرم، متناهی نگه می‌دارد، رازی ناگشوده است. یکی از ره‌یافت‌هایی که برای این راز پیشنهاد شده است، این است که انرژی $+\infty$ الکتروستاتیکی الکترون با یک انرژی $-\infty$

گرانشی حذف می‌شود. برخی پژوهش‌های نطری از این دیدگاه پشتیبانی می‌کند، اما درک ما از مسئله‌ی خود- انرژی در حدی نیست که به نتیجه‌ی معتبری دست بیابیم.

خوش‌بختانه، در عمل چندان نگران این مسئله نیستیم، چون خود- انرژی در رابطه‌ی (۵-۱۰۱) مقدار ثابت (البته بینهایت) افزودنی به انرژی است و می‌توان آن را نادیده گرفت. می‌توانید به این موضوع این گونه بیندیشید که یک انرژی زمینه‌ی بینهایت دارد و همه چیز بر روی این تشک نرم انرژی قرار دارد. آن بخش از انرژی برای ما اهمیت دارد که با تغییر مکان بارها، تغییر می‌کند.

فرض کنید بار q در مبداء مختصات و بار q' در مکان $\mathbf{r}'$ قرار دارند. میدان الکتریکی این آرایه‌ی بارها در نقطه‌ای به فاصله‌ی $\mathbf{r}$ از مبداء عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\mathbf{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \qquad (۵-۱۰۲)$$

چگالی انرژی انرژی این بارها برابر است با

$$\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{q^2}{r^4} + \frac{q'^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^4} + 2qq'\frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right] \qquad (۵-۱۰۳)$$

بنابراین، انرژی شامانه عبارت است از انتگرال رابطه‌ی بالا روی تمام فضا:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\frac{q^2}{r^4}d\tau + \frac{1}{8\pi}\int\frac{q'^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^4}d\tau + \frac{2qq'}{8\pi}\int\frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d\tau \qquad (۵-۱۰٤)$$

جمله‌ی اول سمت راست انرژی الکتروستاتیکی بار نقطه‌ای منزوی q است؛ یعنی خود- انرژی بار q و همان گونه که دیدیم بینهایت است. جمله‌ی دوم، خود- انرژی بار نقطه‌ای q' است. فقط جمله‌س سوم است که به مکان بارها بستگی دارد. بنابراین، می توان نوشت

$$W = C + qq'\frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}|^3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d\tau = C + \frac{qq'}{r'} \qquad (۵-۱۰۵)$$

که در آن C مقدار ثابت افزودنی مربوط به خود- انرژی بارهاست.

نکته‌ی دیگری که اشاره به آن شاید جالب باشد، اینست که هرگز الکترون (یا بار الکتریکی نقطه‌ای) لخت نمی‌توان داشت! الکترون همواره به همراه میدان الکتریکی خود است. میدان الکتریکی الکترون، آن را در خود می‌پوشاند. این میدان همراه در واژگان نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی معادل بینهایت جفت الکترون- پاد الکترون (پوزیترون) است.

برگردیم به ناسازه‌ی ظاهری بین رابطه‌های (۵-۷۲) و (۵-۸۰): این تناقض ظاهری چگونه در محاسبه‌های ما خزیده است و از کجا ناشی می‌شود؟ تناقض در گدار از رابطه‌ی (۵-۷۱) به رابطه‌ی (۵-۷۲) به درون بحث خزید. در رابطه (۵-۷۱) پتانسیل $V(P_i)$ پتانسیل حاصل از تمام بارها به جز بار q_i است در حالی که در رابطه (۵-۷۲) پتانسیل $V(P)$ پتانسیل ناشی از **همه‌ی بارها** است، چون برای توزیع پیوسته بار یک چنین تمایزی وجود ندارد. مقدار بار درست در نقطه‌ی P به سمت صفر میل می‌کند و سهم آن در پتانسیل صفر است.

- رابطه‌های (۷۲–۵) و (۸۰–۵) دو روش برای محاسبه‌ی یک چیز اند. اولی یک انتگرال‌گیری روی توزیع بار است و دومی یک انتگرال‌گیری روی میدان الکتریکی است. حدود انتگرال‌گیری در دو حالت می‌تواند ناحیه‌های کاملاً متفاوتی باشند. در مثال ۹–۵ بار الکتریکی به سطح کره محدود است، در حالی که میدان الکتریکی در تمام فضای بیرون این سطح حضور دارد. بنابراین از دید رابطه (۷۲–۵) انرژی در خود بارها (سطح کره) ذخیره شده است. اما از دید رابطه (۸۰–۵)، انرژی در میدان ذخیره شده است. به راستی انرژی در کجاست؟ سطح این کتاب مجال بحث کردن درباره‌ی این پرسش را به ما نمی‌دهد. در چارچوب نظریه‌ی تابش و نیز نظریه‌ی نسبیت عام، به جاست که بگوئیم انرژی در **میدان** ذخیره شده است و چگالی انرژی میدان الکتروستاتیکی برابر است با

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \equiv T^{00} \qquad (۱۰۶-۵)$$

در الکتروستاتیک، همچنین می‌توان گفت که انرژی با چگالی $\rho V/2$ در **خود بار** الکتریکی ذخیره شده است. در رابطه‌ی (۱۰۶–۵) نماد T^{00} را برای چگالی انرژی **میدان** به کار بردیم. در این کتاب به آن نخواهیم پرداخت. اما در کتاب‌هایی که الکترودینامیک را در سطحی پیش‌رفته بررسی می‌کنند، از تانسور انرژی–تکانه $T^{\mu\nu}$ نام برده می‌شود. چگالی انرژی T^{00} یک مولفه‌ی این تانسور است.

- انرژی الکتروستاتیک بر حسب مجذور میدان الکتریکی است و بنابراین، از اصل برنهش پیروی نمی‌کند . یعنی انرژی یک سامانه ی ترکیبی، مجموع انرژی عناصر آن نیست

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 d\tau \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^{\,2} + 2\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2)\, d\tau = W_1 + W_2 + \varepsilon_0 \int \mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2 d\tau \qquad (۱۰۷-۵) \end{aligned}$$

معنی این حرف این است که برای مثال، اگر در همه جا بارهای الکتریکی را دو برابر بکنیم، انرژی کل چهار برابر نمی‌شود.

۸–۵ شرایط مرزی الکتروستاتیکی

۱–۸–۵ شرایط مرزی میدان الکتریکی

در مسئله‌های الکتروستاتیک، معمولا توزیع بارهای چشمه، ρ، داده می‌شود و میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را باید محاسبه کرد. اگر توزیع بار تقارن داشته باشد، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را می‌توان از شکل انتگرالی قانون گوس به دست آورد. اگر مسئله تقارن نداشته باشد، بهتر است نخست پتانسیل V را با استفاده از رابطه‌ی (۱۸–۵) به دست آورد و سپس میدان را از $\mathbf{E} = -\nabla V$ حساب کرد.

در الکتروستاتیک سه کمیت بنیادی وجود دارد که عبارتند از چگالی بار ρ، پتانسیل V و میدان الکتریکی $\mathbf{E}$. این یه کمیت به یکدیگر مربوط اند. ارتباط بیان آن‌ها را ما با پذیرش دو اصل (۱) اصل برهم‌نهی و (۲) قانون کولمب به دست آوردیم. در واقع، چیر تازه‌ای به جز این دو اصل در پروراندن مصالب این کتاب تا اینجا در آن نخزیده است. درست است که برخی روش‌های محاسباتی را هم آموختیم، اما این همه فقط بر این دو اصل استوار اند. با وام گرفتن از دیوید گرفیتس در کتاب

ارتباط David J.Griffiths,"Introduction To Electrodynamics" 2nd Ed., Prentice Hall,1989.
بین این سه کمیت بنیادی را می‌توان در شکل زیر خلاصه کرد. این شکل همه‌ی آموخته‌های ما تا این‌جا را در بر دارد.

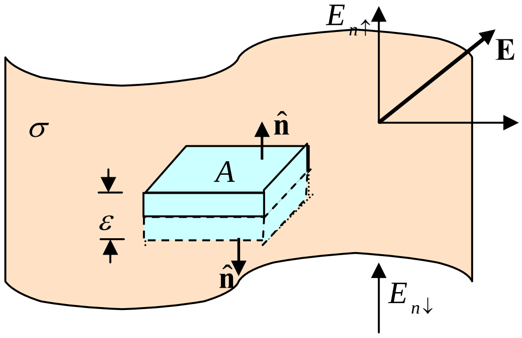
هم‌چنین، بارها مشاهده کردیم که در گذار از یک سطح باردار میدان الکتریکی گششته است (برای نمونه، نگاه کنید به بخش‌های ۲–٦–٤ و ٤–٦–٤). در درون کره‌ای به شعاع a با چگالی بار سطحی σ میدان الکتریکی صفر و در بیرون آن $\left(q/4\pi\varepsilon_0 r^2\right)\hat{\mathbf{r}} = \left(a^2\sigma/\varepsilon_0 r^2\right)\hat{\mathbf{r}}$ است. اگر از بیرون، یعنی از سوی $r > a$ به سطح کره نزدیک شویم،در $r = a$ میدان الکتریکی $\mathbf{E}_{r=a} = \left(\sigma/\varepsilon_0\right)\hat{\mathbf{r}}$ می‌شود. اما اگر از درون بهشوی سطح نزدیک شویم، میدان کماکان صفر باقی می‌ماند. یعنی حد بالا و حد پایین میدان الکتریکی در روی سطح باردار باهم برابر نیست. در روی سطح باردار میدان الکتریکی ناپیوسته است. نمونه‌ی دیگری از گسسته بودن میدان الکتریکی، میدان یک سطح باردار بینهایت گسترده است. میدان درست در بالای سطح $(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\mathbf{n}}$ و درست در زیر سطح $(-\sigma/2\varepsilon_0)\hat{\mathbf{n}}$ است ($\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح و به سوی بیرون سطح است) . در هر دو نمونه، اختلاف اندازه‌ی میدان در دو سوی سطح باردار برابر است با $\Delta E = \sigma/\varepsilon_0$.
این وضعیت برای کره‌ای که بار در حجم آن توزیع شده است پیش نمی‌آید. همانطور که دیدیم، میدان در بیرون و در درون کره‌ای به شعاع a و با چگالی بار حجمی ρ عبارت است از

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r < a \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & ; \quad r > a \end{cases} \tag{۵–۱۰۸}$$

اگر r از سمت $r > a$ به a میل کند میدان الکتریکی به $\left(\rho a/3\varepsilon_0\right)\hat{\mathbf{r}}$ میل می‌کند. اگر r از سمت $r < a$ به a میل کند بازهم میدان الکتریکی به $\left(\rho a/3\varepsilon_0\right)\hat{\mathbf{r}}$ میل می‌کند. پس، در این جا هنگام گذار از درون کره به بیرون آن میدان گسستگی ندارد و حدهای بالا و پایین میدان الکتریکی در $r = a$ باهم برابر اند. این گونه هم باید باشد، چون سطح کره بار ندارد و همه‌ی بار آن به حجم کره محدود است.
یافتن اندازه‌ی گسستگی میدان الکتریکی در گذار از سطح باردار دشوار نیست. سطحی را در نظر بگیرید که چگالی بار سطحی آن σ است. همانند شکل (۸–۵) سطح گوسی به صورت قوطی کبریت رسم کنید که نیمی از آن در بالای سطح باردار و نیم دیگرش در زیر سطح باشد. به این ترتیب، سطح گوس بخشی از سطح باردار در درون سطح گوس قرار می‌گیرد. چون فقط به اندازه‌ی میدان درست در بالا و درست در زیر سطح باردار علاقمندیم، ارتفاع ε سطح گوس (قوطی کبریت) را خیلی کوچک فرض می‌کنیم. از قانون گوس داریم

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}q_{enc} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma A \tag{۵–۱۰۹}$$

که در آن A مساحت رویه‌ی قوطی کبریت است (توجه کنید که اگر σ از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر کند یا سطح باردار یک صفحه‌ی خمیده مانند سطح کره، باشد باید A را خیلی کوچک انتخاب کنیم.)



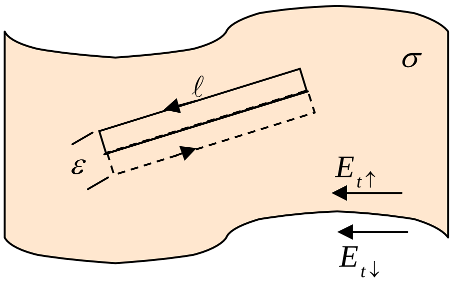
شکل ۸-۵ سطح گوس و مولفه‌ی عمودی میدان $\mathbf{E}$

انتگرال سمت چپ در رابطه‌ی (۱۰۹-۵) شار گذرنده از سطح گوس است. به ازای $\varepsilon \to 0$ از سطح جانی قوطی گبریت شار نمی‌گذرد(سطح جانبی هم به صفر میل می‌کند). مولفه‌ی عمودی میدان درست در بالای سطح هم باردار ، $E_{n\uparrow}$ و هم درست در زیر سطح باردار، $E_{n\downarrow}$ رو به بالاست. بنابراین، شار فقط از رویه های بالا و رویه های پایین سطح گوس می-گذرد. در شکل (۸-۵) بردارهای یکه‌ی عمود برسطح بالا و پایین قوطی کبریت نشان داده شده‌اند. بنابراین شار گذرنده از سطح گوس عبارت است از

$$E_{n\uparrow}A - E_{n\downarrow}A = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma A \quad \Rightarrow \quad E_{n\uparrow} - E_{n\downarrow} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma \qquad (۱۱۰-۵)$$

پس، دیده می‌شود که هنگام گذار از سطج باردار، مولفه‌ی عمودی میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ به اندازه‌ی σ/ε_0 نا پیوسته است.

مولفه‌ی مماسی میدان الکتریکی، اما، پیوسته است. یعنی مولفه‌ی مماسی میدان درست در بالای سطح باردار، $E_{t\uparrow}$ ، و درست در زیر سطح باردار، $E_{t\downarrow}$ پیوسته است و از هیچ گونه گسستگی رنج نمی‌برد. برای اثبات آن انتگرال خط میدان را روی مسیر بسته‌ی مستطیل شکل (۹-۵) حساب می‌کنیم. مستطیل مسیر را چنان انتخاب کنید که نیمی از آن بالای سطح و نیم دیگرش در زیر سطح باردار قرار گیرد. فرض کنید، طول مستطیل ℓ و پهنای آن ε است. باز هم، چون فقط درست به بالا و درست به پایین سطح علاقمندیم، اجازه می‌دهیم که $\varepsilon \to 0$ میل کند. داریم



شکل ۹-۵ مولفه‌ی مماسی میدان و مسیر انتگرال خط میدان

$$\begin{aligned}
\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0 &= \int E_{t\uparrow} ds + \int E_{t\downarrow} ds \\
&= \left(E_{t\uparrow}\ell\right) - \left(E_{t\downarrow}\ell\right) \\
&= \left(E_{t\uparrow} - E_{t\downarrow}\right)\ell \\
&\Rightarrow E_{t\uparrow} = E_{t\downarrow} \qquad (۱۱۱-۵)
\end{aligned}$$

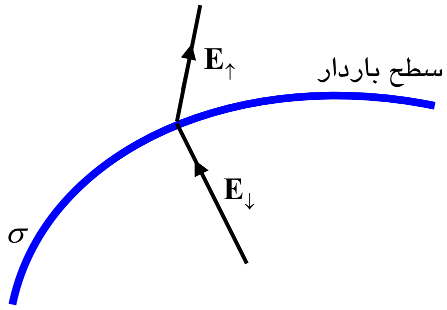
توجه کنید که پنهاهای مستطیل سهمی در انتگرال بسته ندارند؛ چون $\varepsilon \to 0$. رابطه‌ی (۱۱۱-۵) نشان می‌دهد که مولفه‌ی مماسی میدان درست در بالای سطح باردار و درست در زیر آن باهم برابر اند و گشستگی ندارد.

رابطه‌های (۱۱۰-۵) و (۱۱۱-۵) را در یک معادله خلاصه کرد و برای میدان کل $\mathbf{E}$ نوشت:

$$\mathbf{E}_{\uparrow} - \mathbf{E}_{\downarrow} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \qquad (٥-١١٢)$$

که در آن $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح باردار است و مولفه‌ی عمودی میدان را بر می‌گزیند ببینید).

رابطه‌ی (٥-١١٢) نشان می‌دهد که وقتی از یک سطح باردار می‌گذریم ، خط‌های میدان الکتریک $\mathbf{E}$ شکسته می‌شوند و جهت میدان الکتریکی در یک سوی سطح باردار با جهت میدان در سوی دیگر آن متفاوت اند (شکل ٥-١٠ را ببینید.) نا پیوستگی میدان سبب می‌شود که میدان به سطح باردار فشار وارد کند. این موضوع را در فصل ٤ بررسی کردیم و در این جا تکرار نمی‌کنیم.

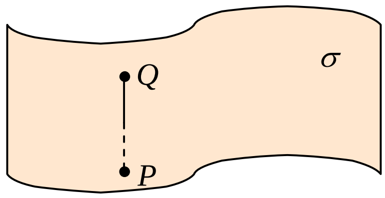


شکل ٥-١٠ شکست میدان الکتریکی در گذار از سطح باردار

آیا می‌توان این رابطه‌ی (٥-١١٢) را بر حسب پتانسیل V هم نوشت؟ می‌دانیم که $\mathbf{E}$ گرادیان پتانسیل است و برای این‌که تابعی در یک نقطه مشتق (گرادیان) باشد، باید در آن نقطه پیوسته باشد. آیا تابع پتانسیل در روی طیح باردار پیوسته است؟ خوشبختانه تابع پتانسیل هنگام گذار از یک سطح باردار پیوسته است. برای این که آن را ثابت کنیم در شکل (٥-١١) نقطه‌ی P درست در زیر سطح باردار و نقطه‌ی Q درست در بالای آن باشند. اختلاب پتانسیل این دو نقطه عبارت است از

$$V_Q - V_P = -\int_P^Q \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad (٥-١١٣)$$

در حدی که نقاط P و Q به سوی صفحه‌ی باردار میل می‌کنند (این چیزی است که به آن علاقمندیم ؛ چون به رفتار پتانسیل درست دربالا و درست در پایین سطح باردار را بررسی می‌کنیم) $ds \to 0$ میل می‌کند و انتگرال سمت راست رابطه‌ی (٥-١١٣) صفر می‌شود. بنابراین، تابع پتانسیل در گذار از سطح باردار پیوسته است و داریم



شکل ٥-١١ پتانسیل الکتریکی پیوسته است

$$V_Q - V_P = -\int_P^Q \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \to 0 \quad \Rightarrow \quad V_{\uparrow} = V_{\downarrow} \qquad (٥-١١٤)$$

سرانجام این که رابطه‌ی (٥-١١٢) می توان برحسب پتانسیل به صورت زیر نوشت

$$\nabla V_{\uparrow} - \nabla V_{\downarrow} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \qquad (٥-١١٥)$$

یا

$$\frac{\partial V_{\uparrow}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\downarrow}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (٥-١١٦)$$

که در آن

$$\frac{\partial V}{\partial n} \equiv \nabla V \cdot \hat{\mathbf{n}} \qquad (۵-۱۱۷)$$

مشتق تابع پتانسیل در راستای همود بر سطح است.

شرط‌های بالا برای میدان $\mathbf{E}$ و پتانسیل V برای هر سطحی، باردار یا بدون بار و تخت یا خمیده درست اند و نتیجه‌ی مستقیم قانون گوس و $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ اند.

مسئله‌ها

۵-۱ **انرژی توزیع بار شعاعی**: توزیع بار کروی به صورت زیر داده شده است

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \dfrac{r}{a} & ; \quad r \le a \\ 0 & ; \quad r > a \end{cases} \qquad (۵-۱۱۸)$$

(الف): میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را در همه جای فضا (یعنی برای ناحیه‌ی $r < a$ و $r > a$) حساب کنید.

(ب): تابع پتانسیل الکتریکی V را در همه جا به دست آورید.

(پ): نمودار تابع پتانسیل قسمت (ب) را به صورت تابعی از r رسم کنید.

(ت): با استفاده از $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V V(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})d\tau$ انرژی لازم برای سامان دادن این آرایه را به دست آورید .

(ج): انرژی ذخیره شده در میدان $W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\infty E^2 d\tau$ را حساب کنید. (*راهنمایی:* پاسخ را می‌توان بدون هیچ گونه انتگرال‌گیری به دست آورد.)

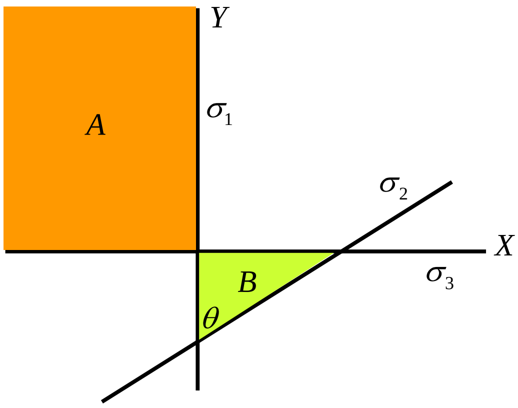
۵-۲ **سه صفحه‌ی باردار**: سه صفحه ی بینهایت گسترده باردار برابر شکل (۵-۱۲) قرار دارند. چگالی بار الکتریکی هر صفحه عبارت است از $\sigma_1 = \sigma_0$ و σ_2 و σ_3 است. فقط σ_0 و زاویه ی θ بین صفحه های با بار σ_1 و σ_2 داده شده اند.

(الف): σ_2 و σ_3 را چنان بیابید که میدان الکتریکی در درون مثلث B صفر شود.

(ب): چگالی انرژی (انرژی در واحد حجم) میدان الکتریکی را در ناحیه ی A بیابید.

(پ): اگر صفحه ی با بار σ_2 در امتداد محور Y پایین آورده شود، انرژی کل سامانه افزایش می یابد یا کاهش پیدا می کند؟

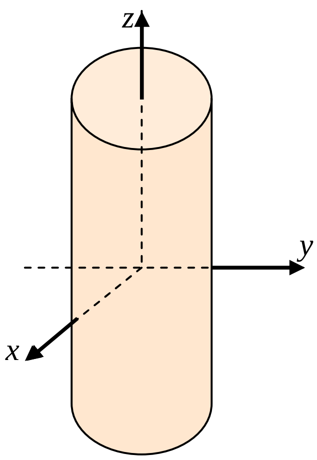
(ت): اگر صفحه ها را از موقعیتی که دارند رها کنیم، حرکتشان چگونه خواهد شد؟



شکل ۵-۱۲ سه صفحه‌ی باردار

۵-۳ **توزیع بار استوانه‌ای و کار**: توزیع بار حجمی در استوانه‌ی شکل (۵-۱۳) به شعاع a و طول L ($L \gg a$) به صورت $r < a$, $\rho(r) = Ar$ است که در آن A مقدار ثابتی است و $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

در مختصات استوانه‌ای اند.



شکل ۱۳–۵ توزیع بار استوانه‌ای

(**الف**): میدان الکتریکی $\mathbf{E}(r)$ این توزیع بار را در همه جای فضا بیابید. شما باید دو ناحیه‌ی مختلف را در نظر بگیرید.

(**ب**): فرض کنید پتانسیل در سطح استوانه صفر است: $V\,(a)=0$. تابع پتانسیل این توزیع بار را در همه‌ی ناحیه‌های فضا بیابید.

(پ): در یک گام نشان دهید که پتانسیلی را که در قسمت (ب) حساب کردید، با توزیع بار داده شده سازگار است.

(**ت**): وقتی میدان را در بیرون استوانه ($r>a$) اندازه‌گیری می‌کنیم، می‌بینیم که به صورت $\mathbf{E}=\left(Aa^3/\varepsilon_0 r\right)\hat{\mathbf{r}}$ است. آیا این نتیجه با پاسخ قسمت (الف) سازگار است؟ اگر نیست، توضیح دهید.

(**ج**): درستی ابعاد میدان $\mathbf{E}$ را که در قسمت (ت) داده شده است بیازمایید.

(**چ**): با توجه به قسمت (ت) پتانسیل را در ناحیه‌ی $r>a$ به دست آورید.

(**ح**): برای جابه‌جایی بار q ار نقطه‌ی A با مختصات کارتزی $(3a,0,0)$ به نقطه‌ی B با مختصات کارتزی $(0,2a,0)$ چه مقدار کار لازم است.

(**خ**): برای جابه‌جایی بار q ار نقطه‌ی C با مختصات کارتزی $(2a,0,0)$ به نقطه‌ی D با مختصات کارتزی $(0,2a,0)$ چه مقدار کار لازم است؟

۴–۵ پتانسیل توزیع بار: در فضای سه بعدی پتانسیل یک توزیع بار الکتریکی عبارت است از

$$V\,(r,\theta)=\frac{Q_0}{a}\left(1-\frac{r\cos\theta}{3a}-\frac{a}{r}\right)\quad;\quad 0<r<a\quad,\quad V\,(r,\theta)=-\frac{Q_0 a\cos\theta}{3r^2}\quad;\quad r>a$$

(**الف**): با محاسبه ی $E=-\nabla V$ نشان دهید که میدان مربوط به این پتانسیل به صورت زیر است

$$\mathbf{E}=-\frac{Q_0}{a^2}\left(\frac{a^2}{r^2}-\frac{\cos\theta}{3}\right)\hat{\mathbf{r}}-\frac{Q_0\sin\theta}{3a^2}\hat{\boldsymbol{\theta}}\quad;\quad 0<r<a$$

$$\mathbf{E}=-\frac{2aQ_0\cos\theta}{3r^3}\hat{\mathbf{r}}-\frac{Q_0 a\sin\theta}{3r^3}\hat{\boldsymbol{\theta}}\quad;\quad r>a$$

(**ب**): به پرسش های زیر پاسخ دهید

۱– آیا پتانسیل V در $r=a$ پیوسته است؟ آیا انتظار دارید که پتانسیل پیوسته باشد؟

۲– آیا میدان در $r=a$ پیوسته است؟ برای پو.سته ی کروی به شعاع a از پاسختان چه برداشتی دارید؟

۳– در ناحیه ی $r<a$ چگالی بار حجمی ρ را حساب کنید.

٤– در ناحیه ی $r>a$ چگالی بار حجمی ρ را حساب کنید.

٥– بار کل Q_1 موجود در درون پوسته ی کروی به شعاع $R<a$ را حساب کنید.

٦– آیا پاسخ پرسش ٥ با پاسخ پرسش ۳ سازگار است؟ بار Q_1 در کجا جایگزین است؟

۷- کره ای به شعاع $R > a$ را در نظر بگیرید و بار کل Q_2 درون آن را بیابید. بار $Q_3 = Q_2 - Q_1$ را حساب کنید.

۸- با توجه به پاسخ پرسش های ۳ و ٤ ، مکان Q_3 کجاست؟

۹- چگالی بار سطحی را در روی کره ای به شعاع a حساب کنید.

۱۰- جمله های مختلف توزیع بار را به پتانسیل در $r < a$ و $r > a$ نسبت دهید.

۵-۵ انرژی و پتانسیل: میدان الکتریکی زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{E} = A(3r + 4R)\mathbf{r} \quad ; \quad r \le R$$

$$\mathbf{E} = \frac{7AR^4}{r^3}\mathbf{r} \quad ; \quad r \ge R$$

که در آن $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ و A مقدار ثابتی با یکای مناسب است.

(الف): چگالی بار ρ را برای همه ی نقاط فضا به دست آورید.

(ب): در درون کره ای به شعاع r_o و به مرکز مبداء مختصات چه مقدار بار، Q_t ، وجود دارد؟

(پ): پتانسیل الکتریکی ، V ، را در همه ی نقاط فضا حساب کنید.

(ت): نمودارهای ρ , Q_t, V را برحسب r_o رسم کنید.

(ج): انرژی لازم برای این آرایش بار با چگالی ρ را به دست آورید.

(*راهنمایی:* محاسبه را در مختصات کروی انجام دهید.)