

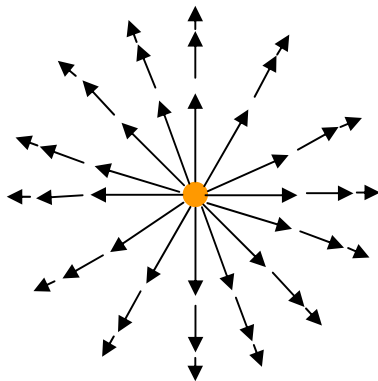
## ۴- قانون گوس

## ۴-۱ خط‌های میدان الکتریکی

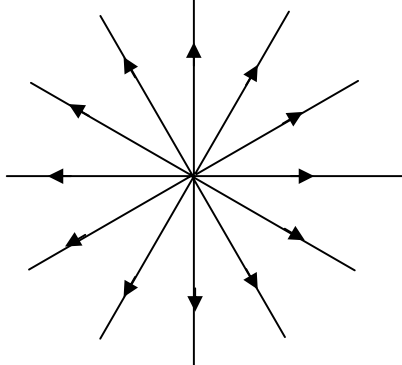
برای این که بتوان میدان الکتریکی  $E$  ناشی از یک آرایه‌ی بار را حساب کرد، باید ریاضیات مربوط به آن را آموخت. میدان الکتریکی یک میدان برداری است و برای شناختن ویژگی‌های میدان‌های برداری باید دیورژانس (واگرایی) و کرل (تاو) آن را شناخت. در واقع، دانش ریاضی مربوط به میدان الکتریکی  $E$  از محاسبه‌ی دیورژانس و کرل آن آغاز می‌شود. در این فصل دیورژانس را مستقیماً از رابطه‌ی (۱۰-۲) به‌دست خواهیم آورد. محاسبه‌ی کرل  $E$  را به فصل ۵ واگذار می‌کنیم. پیش از آنکه به این محاسبه بپردازیم، با یک مشاهده کیفی آغاز می‌کنیم: بنا به قانون کولمب، میدان الکتریکی بار نقطه‌ای  $q$  در فاصله‌ی  $r$  از آن عبارت است از:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (۴-۱)$$

در هر نقطه‌ی فضا، به فاصله‌ی  $r$  از بار، جهت و اندازه‌ی میدان الکتریکی باید مشخص شود. رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد که جهت میدان  $E$  همواره در راستای  $r$  و در نتیجه شعاعی است و اندازه‌ی آن به صورت  $1/r^2$  با فاصله از بار تغییر می‌کند. با دور شدن از بار، اندازه‌ی میدان هم کاهش می‌یابد. این رفتار میدان الکتریکی در شکل (۴-۱) نشان داده شده است. در هر نقطه‌ی



شکل ۴-۱ نمایش اندازه‌ی میدان

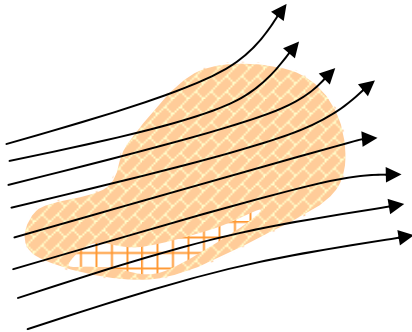


شکل ۴-۲ نمایش خط‌های میدان

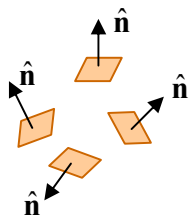
فضا، اندازه‌ی میدان  $E$  با طول بردار در آن نقطه نشان داده شده است. شیوه‌ی بهتری برای نمایش این میدان وجود دارد: به جای اینکه به هر نقطه برداری با طول معین نسبت بدهید، در هر راستایی بردارها را همانند شکل (۴-۲) به یکدیگر وصل کنید. اما به نظر می‌رسد که در یک چنین نمایشی اطلاعات مربوط به اندازه‌ی میدان در فاصله  $r$  که در شکل (۴-۱) با طول بردار در آن نقطه مشخص شده بود، از دست رفته است. در واقع این نگرانی بی‌مورد است. چون، حالا اندازه‌ی میدان در هر فاصله‌ی  $r$  با چگالی خط‌ها در آن فاصله داده شده است. البته، در فضای دو بعدی شکل (۴-۲) این وضعیت به درستی نشان داده نشده است و حتی اندکی گمراه کننده است. زیرا، چگالی خط‌هایی که محیط دایره‌ای به شعاع  $r$  را قطع می‌کنند برابر تعداد خط‌ها ( $n$ ) تقسیم بر محیط دایره ( $2\pi r$ )؛ یعنی  $n/2\pi r$  است. پس، در این صورت چگالی خط‌ها با  $1/r$  تغییر می‌کند و در نتیجه نمی‌تواند نمایش شدت میدان الکتریکی باشد؛ چون شدت میدان الکتریکی با فاصله به صورت  $1/r^2$  تغییر می‌کند. اما اگر شکل (۴-۲) را در فضای سه بعدی تصور کنید، آنگاه خط‌ها سطح کره‌ای به شعاع  $r$  را قطع خواهند کرد و چگالی خط‌ها  $n/4\pi r^2$  خواهد شد، که به صورت  $1/r^2$  تغییر می‌کند. این خط‌های پیوسته نمایش میدان اند و خط‌های میدان می‌نامیم. خط‌های میدان خطوطی در فضا هستند که در هر نقطه، خط مماس بر آنها در راستای میدان  $E$  است.

## ۴-۲ شمار میدان الکتریکی

رابطه‌ی بین میدان الکتریکی و چشمه‌ی تولید‌کننده‌ی آن را با روشی بسیار ساده می‌توان نشان داد. به زودی خواهیم دید که این روش بسیار سودمند است. برای توصیف روش مورد نظر، نخست کمیتی به نام شار\* را تعریف می‌کنیم.

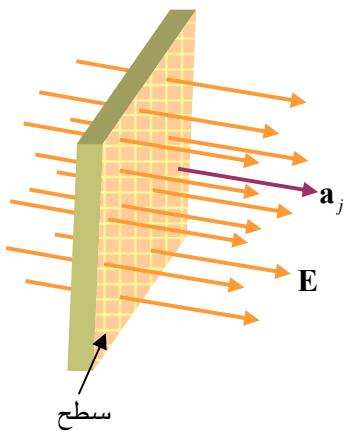


شکل ۳-۴ سطح بسته و خط میدان



شکل ۴-۴ جهت‌گیری بخش‌های سطح

آن است.  $\mathbf{a}_j$  جهت‌گیری و اندازه‌ی جزء سطح  $j$ -ام را به دست می‌دهد. تا زمانی که جزء سطح کوچک است،  $\mathbf{a}_j$  بستگی به این



شکل ۴-۵ خط‌های میدان و جزء سطح

ناحیه‌ای از فضا را در نظر بگیرید که در آن میدان الکتریکی وجود دارد. میدان الکتریکی با چند خط میدان نشان داده شده است. سطح بسته و خط‌های میدان در شکل (۳-۴) دیده می‌شوند. سطح بسته را به بخش‌های کوچکی تقسیم کنید. این بخش‌ها به اندازه‌ای کوچک‌اند که هر یک را می‌توان سطح تخت فرض کرد. در این صورت، میدان برداری در سطح هر بخش از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر تغییر چندانی نخواهد داشت. هر بخش مساحتی برابر  $a$  دارد و جهت معینی را تعریف می‌کند. جهت هر بخش برابر شکل (۴-۴) با برداری عمود بر سطح آن و به سوی بیرون از آن تعریف می‌شود. (چون سطح بسته است، می‌توانید درون و بیرون سطح را به

سادگی از هم تمیز دهید. بنابراین، ابهامی در واژه‌ی به "سوی بیرون" وجود ندارد. ما از ترکیب واژه‌ای "برون‌سو" هم برای آن استفاده خواهیم کرد.) اندازه‌ی مساحت و جهت  $j$ -امین بخش را با بردار  $\mathbf{a}_j$  نشان دهید. یعنی  $\mathbf{a}_j = a_j \hat{\mathbf{n}}_j$  است که در آن  $\hat{\mathbf{n}}_j$  بردار یکه‌ی عمود بر سطح  $j$ -امین جزء سطح و به سوی بیرون از

آن است.  $\mathbf{a}_j$  جهت‌گیری و اندازه‌ی جزء سطح  $j$ -ام را به دست می‌دهد. تا زمانی که جزء سطح کوچک است،  $\mathbf{a}_j$  بستگی به این ندارد که سطح چگونه تقسیم‌بندی شده است. در شکل (۴-۵) بخشی از سطح بسته نشان داده شده است. فرض کنید میدان الکتریکی در مکان  $j$ -امین جزء سطح برابر  $\mathbf{E}_j$  است. ضرب داخلی  $\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j$  یک عدد است. این عدد را شار گذرنده از آن

جزء سطح می‌نامیم. (برای این که ریشه‌ی این نام‌گذاری را بفهمید، جریان آب رودخانه را در نظر بگیرید. هر مولکول آب سرعتی دارد که از مکانی به مکان دیگر تغییر می‌کند، اما در هر مکان سرعت مولکول نسبت به زمان ثابت است. مجموعه‌ی

سرعت‌های مولکول‌های آب رودخانه را می‌توان با میدان برداری  $\mathbf{v}$  یا میدان سرعت نشان داد. قابی را با جهت‌گیری  $\mathbf{a}$  در رودخانه فرو ببرید.  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$  آهنگ شارش (با یکای مترمکعب بر ثانیه) آب از درون است. سطحی را در نظر بگیرید

که در شکل (۴-۶) نشان داده شده است. به سطح  $A$  "بردار سطح"  $\mathbf{A} = A \hat{\mathbf{n}}$  را نسبت بدهید. اندازه‌ی  $\mathbf{A}$  با مساحت سطح  $A$  برابر و جهت آن بر سطح عمود است، چون بردار یکه  $\hat{\mathbf{n}}$  بر سطح عمود است. اگر این سطح در میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  عمود بر سطح (یعنی  $\mathbf{E}$  در جهت بردار یکه‌ی  $\hat{\mathbf{n}}$  باشد) قرار گیرد شار  $\Phi$  گذرنده از سطح برابر

$$\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}A = EA \quad (4-2)$$

است. پس، شار گذرنده از یک سطح تعداد خط‌هایی است که به طور عمودی از آن سطح می‌گذرند.

اگر میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  همانند شکل (۴-۶) با خط عمود بر سطح، یعنی با  $\hat{\mathbf{n}}$ ، زاویه‌ی  $\theta$  بسازد، آنگاه شار گذرنده از سطح برابر

\* Flux

$$\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = EA \cos \theta = E_n A \quad (\text{ع-۳})$$

است که در آن  $E_n = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  مولفه‌ی عمود بر سطح میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  است. توجه کنید که بنا به تعریف بردار یکه‌ی عمود بر سطح  $\hat{\mathbf{n}}$ ، شار میدان الکتریکی  $\Phi_E$  هنگامی مثبت است که خط‌های میدان از سطح خارج می‌شوند. اگر خط‌های میدان به سطح وارد شوند،  $\Phi_E$  منفی است. به بیان دیگر، بردار یکه‌ی  $\hat{\mathbf{n}}$  همواره به سطح عمود و به سوی بیرون از سطح تعریف می‌شود.

به طور کلی، سطح ممکن است رویه‌ای خمیده باشد و جهت میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر در روی سطح تغییر کند. برای هر میدان برداری  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ ، شار میدان ( $\Phi_u$ ) گذرنده از سطح  $S$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi_u = \int_S \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad (\text{ع-۴})$$

که در آن  $d\mathbf{a} = da \hat{\mathbf{n}}$  بردار سطح عمود بر جزء سطح  $da$  است. تاکید می‌کنم که بردار یکه‌ی  $\hat{\mathbf{n}}$  بر جزء سطح  $da$  عمود و به سوی بیرون از جزء سطح است.

شار میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  که از جزء سطح  $\Delta A_i$  در شکل (ع-۷) می‌گذرد

$$\Delta \Phi_E = \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i = E_i \Delta A_i \cos \theta \quad (\text{ع-۵})$$

است. اگر شارهای گذرنده از بخش‌های سطح را جمع کنیم، شار گذرنده از کل سطح به دست می‌آید که یک کمیت اسکالر است و ما آن را با نماد  $\Phi$  نشان می‌دهیم.

شار کل گذرنده از تمامی سطح  $S$  از جمع شارهای گذرنده از هر جزء سطح به دست می‌آید.

$$\Phi = \sum_j \mathbf{E}_j \cdot \Delta \mathbf{A}_j \quad (\text{ع-۶})$$

اگر اندازه‌ی بخش‌های  $\Delta A_i$  روی سطح کوچک‌تر و تعدادشان بسیار زیاد باشد، از گسستگی به پیوستار می‌رسیم و علامت جمع گسسته به انتگرال بر روی سطح تبدیل می‌شود. در این صورت جزء سطح به  $d\mathbf{a} \rightarrow \Delta \mathbf{A}_i$  میل می‌کند. خواهیم داشت

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (\text{ع-۷})$$

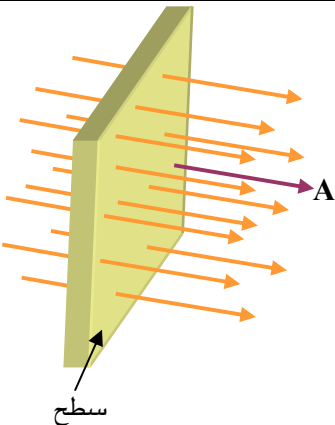
**نکته ۱:** چون شدت میدان  $\mathbf{E}$  در هر نقطه با چگالی خط‌های میدان (تعداد خط‌ها در واحد سطح) تعیین می‌شود، بنابراین، شار

$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$  میدان الکتریکی با تعداد خط‌های میدان که از سطح  $S$  می‌گذرند، متناسب است. در رابطه‌ی (ع-۷) ضرب داخلی

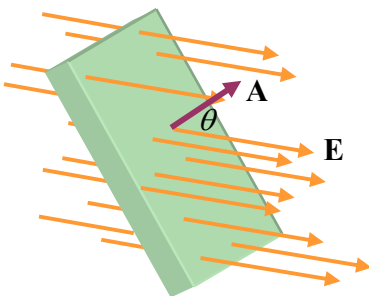
$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$  مولفه‌ی عمودی بر سطح میدان را برمی‌گزیند. ♣

برای این که بتوان انتگرال بالا را حساب کرد، نخست باید سطح  $S$  را مشخص کنیم و سپس بر روی  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$  ها جمع ببندیم.

بیشتر وقت‌ها ما با سطح بسته سروکار خواهیم داشت. سطح بسته، سطحی است که حجمی را دربر دارد. برای مثال، رویه‌ی

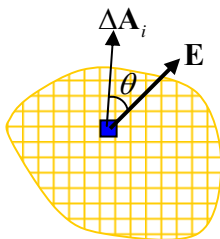


شکل ۵-۴ خط‌های میدان گذرنده از سطح



شکل ۶-۴ خط‌های میدان و بردار سطح

که با هم زاویه‌ی  $\theta$  می‌سازند



شکل ۷-۴ میدان الکتریکی گذرنده از جزء

سطح  $\Delta A$ . میدان با خط عمود بر سطح

زاویه‌ی  $\theta$  می‌سازد

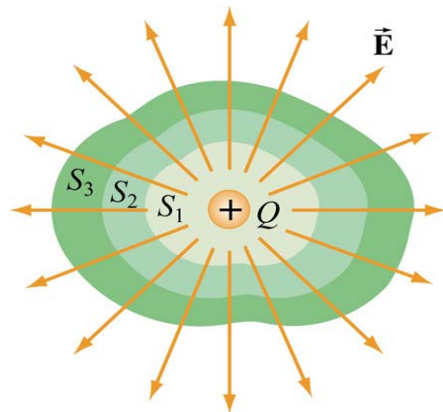
کره یک سطح بسته است.

ساده‌ترین حالت را در نظر بگیرید: فرض کنید میدان الکتریکی از بار نقطه‌ای و منزوی  $q$  ناشی شده است و سطح، کره‌ای به شعاع  $r$  است که مرکزش در مکان بار  $q$  است. برای یک بار نقطه‌ای که در مرکز مختصات قرار دارد، شار گذرنده از سطح کره‌ای عبارت است از

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_S \left( \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\epsilon-8)$$

این پاسخ به  $r$  بستگی ندارد و مقدار ثابتی است. همان تعداد خط‌های میدان که از بار  $q$  آغاز شده‌اند از سطح هر کره‌ای و با هر شعاعی خواهند گذشت. در واقع، لازم نیست که این سطح کره‌ای باشد، بلکه همانند شکل (8- $\epsilon$ )، هر سطحی با هر شکل که بار  $q$  را در برداشته باشد همان تعداد خطوط میدان را از خود عبور خواهد داد. بنابراین، شار گذرنده از هر سطح بسته‌ای که بار  $q$  را احاطه کرده باشد برابر  $q/\epsilon_0$  است.

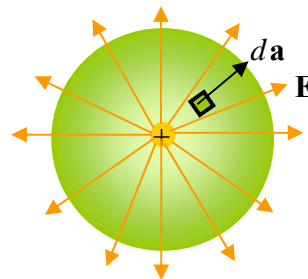
**نکته ۲:** شار میدان گذرنده از یک سطح، تعداد خط‌های میدان است که از آن سطح می‌گذرند. ♣



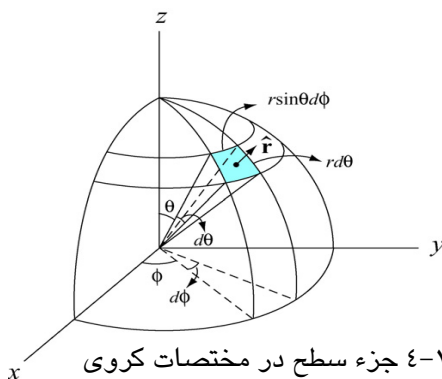
شکل 8- $\epsilon$  سطوح مختلف، اما شار خروجی یکسان

**نکته ۳:** در فصل ۱ در باره‌ی میدان و کنش از راه دور سخن گفتیم. میدان الکتریکی مفهوم مهمی است، چون اجازه می‌دهد تا به فرایندهای الکتریکی به صورت کنش‌های موضعی یا کنش‌های تماسی بنگریم. به بیان دیگر، می‌توان نیروی الکتریکی وارد به بار آزمون را نتیجه‌ی تغییر حالت فضای اطراف بار آزمون بدانیم که بارهای دیگر ایجاد می‌کنند. به این ترتیب نیازی به کنش از راه برای توصیف نیرو نیست. کنش از راه دور با تئوری نسبیت ناسازگار است و بنابراین، پذیرفتنی نیست: اگر باری می‌توانست بر روی بار

دیگر مستقیماً اثر بگذارد، آنگاه حضور هر بار الکتریکی در یک نقطه‌ی فضا را بار دیگری در نقطه‌ای دیگر به طور آنی احساس می‌کرد. این بدان معنی است که انتشار خبر با سرعت فراتر از سرعت نور ممکن است. اما اگر کنش میان دو بار توسط میدان انتقال یابد دیگر نیازی به انتشار آنی آن نیست. هر بار الکتریکی در فضای پیرامون خود اختلال ایجاد می‌کند و این اختلال همانند موج با سرعت نور انتشار می‌یابد و به بار الکتریکی دیگر می‌رسد. همانگونه که خواهیم دید میدان‌ها انرژی و تکانه حمل می‌کنند و در نتیجه مانند حالت‌های دیگر ماده (جامد، مایع، گاز، پلاسما و ...) شکلی از ماده‌اند. ♣



شکل 9- $\epsilon$  سطح کره‌ی شامل بار  $+q$



شکل 10- $\epsilon$  جزء سطح در مختصات کره‌ای

در رابطه (۴-۸) جزء سطح  $da$  را برابر  $r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$  قرار دادیم. این کمیت، جزء سطح در مختصات کروی است. جزء سطح کوچکی در روی کره در مختصات کروی، همانند شکل (۴-۹) برابر  $r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$  است. جزییات آن در شکل (۴-۱۰) دیده می‌شود.

شار میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای را با رابطه (۴-۸) حساب کردیم. اگر به جای یک بار نقطه‌ای جایگزیده در مرکز مختصات، مجموعه‌ای از بارها در اطراف پراکنده باشند، میدان این مجموعه‌ی بارها در نقطه‌ای مانند  $P$  بنا به اصل برنهم برابر است با جمع برداری میدان‌های هر یک از بارها در نقطه‌ی  $P$ . بنابراین، داریم

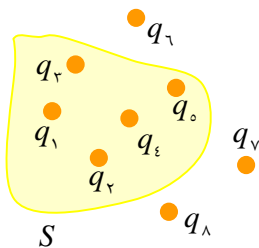
$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad (4-9)$$

و شار گذرنده از هر سطحی که این بارها را در برداشته باشد، عبارت است از

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \left( \oint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{a} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\epsilon_0} q_i \right) \quad (4-10)$$

انتگرال بالا تعداد همه‌ی خط‌های میدان است که سطح بسته  $S$  را قطع می‌کنند.

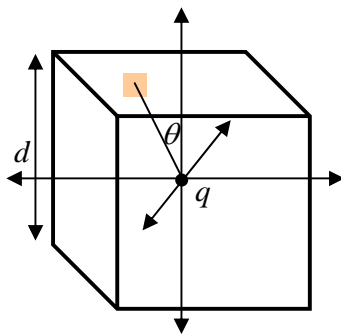
بارهایی که در بیرون این سطح بسته قرار دارند سهمی در شار میدان الکتریکی نخواهند داشت؛ چون خط‌های میدان این بارها از یک سوی وارد سطح و از سوی دیگر خارج می‌شوند و در نتیجه یکدیگر را حذف می‌کنند. در شکل (۴-۱۱) بارهای



شکل ۴-۱۱ بارهای درون سطح در شار گذرنده از سطح  $S$  سهمیم دارند، اما بارهای بیرون سهمی در شار ندارند.

$q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8$  در درون سطح بسته‌ی  $S$  قرار دارند و در شار گذرنده از سطح سهمیم اند؛ اما بارهای  $q_9, q_{10}, q_{11}$  در بیرون سطح  $S$  اند و در نتیجه، در محاسبه‌ی شار گذرنده از سطح  $S$  سهمی ندارند.

#### مثال ۴-۱ مکعب شار بار نقطه‌ای واقع در مرکز یک مکعب:



در شکل (۴-۱۲) بار نقطه‌ای  $q$  در مرکز مکعبی به ضلع  $d$  قرار دارد. شار گذرنده از یک رویه‌ی مکعب را با استفاده از تعریف شار به دست آورید. (این مسئله با روش ساده‌تری هم قابل حل است و در بخش ۲-۳-۴ دوباره آن را حل خواهیم کرد.)

حل: با به تعریف شار، شار گذرنده از رویه‌ی بالایی واقع در  $(z = d/2)$  را حساب می‌کنیم.

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int E da \cos \theta = \int E (dx dy) \cos \theta \quad (4-11)$$

میدان در نقطه‌ای در روی سطح بالایی مکعب  $(q/r^2)(1/4\pi\epsilon_0)$  است که

در آن  $r^2 = x^2 + y^2 + (d/2)^2$  است. در اینجا  $r$  فاصله‌ی بین بار و نقطه‌ای است که در آنجا می‌خواهیم میدان را حساب کنیم. هم چنین، با توجه به شکل (۴-۱۲) داریم

$$\cos \theta = \frac{d/2}{r} = \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (d/2)^2}} \quad (4-12)$$

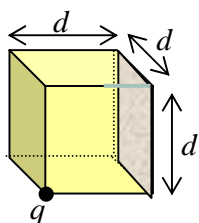
بنابراین، می‌توان نوشت

$$\Rightarrow \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int E da \cos \theta = \int E (dx dy) \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \int_{-d/2}^{d/2} dx \int_{-d/2}^{d/2} dy \left( \frac{q}{x^2 + y^2 + (d/2)^2} \right) \left( \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (d/2)^2}} \right) \quad (4-13)$$

انتگرالنده تابع زوجی از  $x$  و  $y$  است. برای هر یک از متغیرها می‌توان انتگرال را از صفر تا  $d/2$  حساب کرد و سپس در ۲ ضرب کرد. بهتر است از کمیت‌های بدون بعد  $x \equiv \bar{x} d/2$  و  $y \equiv \bar{y} d/2$  استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \left( \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \right) (\pi) q \int_{-d/2}^{d/2} (d/2) d\bar{x} \int_{-d/2}^{d/2} (d/2) d\bar{y} \left( \frac{1}{(d/2)^2 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1)} \right) \left( \frac{d/2}{(d/2) \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1}} \right) \\ &= \left( \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \right) \frac{\epsilon q (d/2)^2}{(d/2)^2} \int_{-d/2}^{d/2} d\bar{x} \int_{-d/2}^{d/2} d\bar{y} \frac{1}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1)^{3/2}} = \frac{\epsilon q}{\epsilon \pi \epsilon_0} \int_{-d/2}^{d/2} d\bar{x} \frac{1}{(\bar{x}^2 + 1) \sqrt{\bar{x}^2 + 2}} \\ &= \frac{q}{\pi \epsilon_0} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{q}{\pi \epsilon_0} \frac{\pi}{6} = \frac{q}{6 \epsilon_0} \quad (4-14) \end{aligned}$$



شکل ۴-۱۳ بار در یک گوشه‌ی مکعب

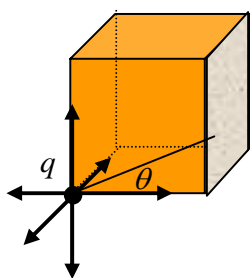
مثال ۲-۴ بار  $q$  برابر شکل (۴-۱۳) در یک گوشه‌ی مکعبی به ضلع  $d$  قرار دارد. شار گذرنده از رویه‌ی روبروی مکعب را به دست آورید. یعنی  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$  گذرنده از رویه‌ی خاکستری را حساب کنید.

حل: مانند مسئله‌ی پیش، این مسئله را هم می‌توان به دو روش حل کرد. در اینجا با توجه به تعریف شار آن را حل می‌کنیم. در بخش ۲-۳-۴ (مثال ۴-۱۳) روش دیگری را برای حل آن به کار خواهیم برد. مکان بار  $q$  را مبداء مختصات فرض کنید (شکل ۴-۱۴ را ببینید). شار گذرنده از یک سطح (در این جا شار گذرنده از سطح  $z = d$ ) را حساب می‌کنیم:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_0^d dx \int_0^d dy \left( \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{q}{x^2 + y^2 + d^2} \right) \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} \quad (4-15)$$

توجه کنید که این رابطه همانند انتگرال مسئله‌ی پیش است و تنها  $d/2$  جایگزین  $d$  شده است. مانند مسئله‌ی بالا اگر تغییر متغیری به کمیت‌های بدون بعد بدهیم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \left( \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \right) q \int_{-d/2}^{d/2} d\bar{x} \int_{-d/2}^{d/2} d\bar{y} \frac{1}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 1)^{3/2}} \\ &= \left( \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \right) q \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{q}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{\pi}{6} = \frac{q}{24 \epsilon_0} \quad (4-16) \end{aligned}$$



شکل ۴-۱۴ مختصات بار  $q$

### ۴-۳ قانون گوس

#### ۴-۳-۱ شکل انتگرالی قانون گوس

شار کل گذرنده از یک سطح بسته با مقدار بار کل موجود در درون سطح متناسب است. این گزاره‌ی کوتاه، بیان قانون گوس

است. بیان ریاضی آن هم ساده است

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \equiv \frac{1}{\epsilon_0} q_{enc} \quad (4-17)$$

$q_{enc}$  بار کل درون سطح بسته‌ی  $S$  است. سطح بسته را سطح گوس خواهیم خواند. سطح گوس یک سطح واقعی نیست بلکه، یک سطح پنداری است. در شکل (4-8) هر یک از سطوح  $S_1$ ،  $S_2$  و  $S_3$  یک سطح گوس است. یکی از توجیه‌های درستی قانون گوس این است که تعداد خط‌های میدان که از بار الکتریکی آغاز می‌شوند، مستقل از شکلی است که برای سطح گوس پنداری برمی‌گزینیم تا بار را احاطه کند. برای این که قانون گوس را ثابت کنیم، نخست باید با مفهوم زاویه‌ی فضایی آشنا شویم.

زاویه‌ی فضایی مانسته‌ی سه بعدی زاویه‌ی معمولی است. زاویه‌ی معمولی  $\Delta\phi$  با نسبت طول کمانی از دایره به شعاع  $r$  همان دایره تعریف می‌شود:  $\Delta\phi \equiv \Delta s / r$ . چون طول پیرامون دایره  $s = 2\pi r$  است، زاویه‌ی مرکزی مربوط به آن  $\phi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$  است. در سه بعد، جزء کمان  $\Delta s$  از یک دایره، با جزء سطح  $\Delta A$  از سطح کره‌ای به شعاع  $r$  جایگزین می‌شود. جزئی از سطح کره‌ی  $S_1$  با شعاع  $r_1$  برابر  $\Delta A_1 \hat{\mathbf{r}}$  است. در شکل (4-15) جزء سطح  $\Delta A_1$  را بر روی کره‌ی  $S_1$  به شعاع  $r_1$  (4-13) در

نظر بگیرید. زاویه‌ی فضایی  $\Delta\Omega$  مربوط به این جزء سطح با راسی که در مرکز کره قرار دارد، عبارت است از

$$\Delta\Omega \equiv \frac{\Delta A_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r_1^2} \quad (4-18)$$

زاویه‌ی فضایی کمیتی بدون بعد با یکای استرادیان ( $Sr$ ) است. چون سطح کره‌ی  $S_1$  برابر  $4\pi r_1^2$  است، پس اندازه‌ی زاویه‌ی فضایی کره

$$\Omega = \frac{4\pi r_1^2}{r_1^2} = 4\pi \quad (4-19)$$

است. حال کره‌ی  $S_2$  به شعاع  $r_2$  را در شکل (4-15) در نظر بگیرید که با شکل 4-15 جزء سطح و زاویه‌ی فضایی آن کره‌ی  $S_1$  هم‌مرکز است. جزء سطح  $\Delta A_2$  از کره‌ی  $S_2$  با بردار یکه‌ی شعاعی زاویه‌ی  $\theta$  می‌سازد. پس زاویه‌ی فضایی مربوط به این جزء سطح در روی کره‌ی  $S_2$  عبارت است از

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r_2^2} = \frac{\Delta A_2 \cos\theta}{r_2^2} = \frac{\Delta A_{2n}}{r_2^2} \quad (4-20)$$

که در آن  $\Delta A_{2n} = \Delta A_2 \cos\theta$  تصویر جزء سطح  $\Delta A_2$  است که بر شعاع کره عمود است. همان طور که از شکل (4-15) پیداست، زاویه‌های فضایی مربوط به  $\Delta A_1$  و  $\Delta A_2$  باهم برابرند

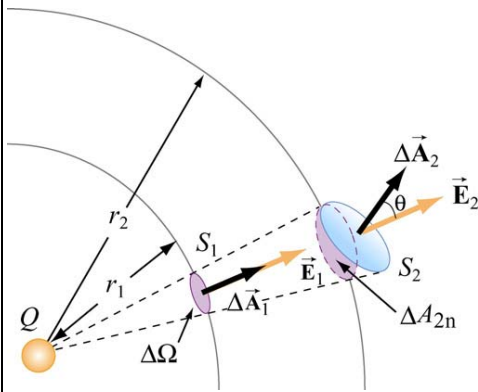
$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A_1}{r_1^2} = \frac{\Delta A_2 \cos\theta}{r_2^2} \quad (4-21)$$

حال، فرض کنید بار  $Q$  در مرکز این کره‌ها قرار دارد. شدت میدان الکتریکی در مرکز جزء سطح  $\Delta A_1$  را  $E_1$  و شدت میدان الکتریکی در مرکز جزء سطح  $\Delta A_2$  را  $E_2$  بنامید. این دو شدت میدان با قانون کولمب به یکدیگر مربوط اند

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_i^2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (4-22)$$

شار الکتریکی گذرنده از جزء سطح  $\Delta A_1$  کره‌ی  $S_1$  برابر است با

$$\Delta\Phi_1 = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{A}_1 = E_1 \Delta A_1 \quad (4-23)$$



و شار الکتریکی گذرنده از جزء سطح  $\Delta A_r$  کره  $S_r$  عبارت است از

$$\Delta\Phi_r = \mathbf{E}_r \cdot \Delta\mathbf{A}_r = E_r \Delta A_r \cos\theta = E_r \left( \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \cdot \left( \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) \Delta A_r = E_r \Delta A_r = \Delta\Phi_r \quad (4-24)$$

بنابراین، می بینیم که شار گذرنده از جزء سطح‌های با زاویه‌ی فضایی یکسان، مقداری ثابت و مستقل از شکل و جهت‌گیری جزء سطح است.

رابطه (4-17) بیان انتگرالی قانون گوس است. در این قانون البته اطلاعات جدیدی، افزون بر آنچه که از قانون کولمب و اصل برنهمش آموختیم وجود ندارد، ولی توان محاسباتی آن فوق العاده است. نکته‌ای که باید به آن توجه کرد رفتار  $1/r^2$  قانون کولمب است. بدون این رفتار محاسبه‌ی کلیدی در رابطه (4-8) امکان پذیر نبود. در رابطه (4-8) شعاع کره حذف و انتگرال مستقل از  $r$  شد. اگر این حذف شدن شعاع میسر نمی‌شد، شار میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  نه تنها به بار کل درون سطح بستگی پیدا می‌کرد، به شکل سطح بسته انتخابی نیز وابسته می‌شد.

سطح بسته شکل (4-8) یک سطح ساده است. می‌توان سطح‌های بسته با هندسه‌ی پیچیده‌تری را تصور کرد که در آنها خط‌های میدان بیش از یک بار سطح را قطع کنند. قانون گوس برای این گونه رویه‌ها هم درست است؛ چون در کلی‌ترین حالت می‌توان نشان داد که تعداد دفعاتی که خطوط میدان بارهای درون یک سطح آن را قطع می‌کنند، فرد است و تعداد دفعاتی که خط‌های میدان بارهای بیرون سطح آن را قطع می‌کنند، زوج است.

در رابطه (4-17)، بار کل درون سطح بسته،  $q_{enc}$ ، می‌تواند مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای و یا هر توزیع بار پیوسته باشد. بنابراین، بسته به این که توزیع بار نقطه‌ای، خطی، سطحی تا حجمی باشد، داریم

$$q_{enc} = \sum_{i=1}^n q_i, \quad q_{enc} = \int_L \lambda dl, \quad q_{enc} = \int_S \sigma da, \quad q_{enc} = \int_V \rho d\tau \quad (4-25)$$

قانون گوس در رابطه (4-17) یک معادله‌ی انتگرالی است. این رابطه یکی از چهار معادله‌ی بنیادی الکترواستاتیکی به نام معادلات مکسول است. می‌توان آن را به شکل دیفرانسیلی هم نوشت و ما در بخش به آن خواهیم پرداخت.

## ۲-۳-۴ کاربردهای قانون گوس

قانون گوس همواره درست و روش مناسب و سودمندی برای محاسبه‌ی میدان الکتریکی است. با وجود این، دست‌کم در شکل انتگرالی، همیشه قابل استفاده نیست. فقط هنگامی می‌توان از آن استفاده کرد که سامانه‌ی مورد بررسی تقارن داشته باشد. این تقارن‌ها عبارت‌اند از تقارن کروی، استوانه‌ای و صفحه‌ای. در چنین وضعیتی‌هایی یافتن میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  بسیار آسان‌تر از شیوه‌های دیگر است. در مثال‌های زیر تقارن سامانه و سطح گوس مناسب با تقارن و سرانجام محاسبه‌ی میدان الکتریکی نشان داده شده‌اند.

هنگام استفاده از قانون گوس در شکل انتگرالی آن، دنبال کردن گام‌های زیر می‌تواند سودمند باشد

(۱) با توجه به توزیع بار، تقارن مربوط به آن را مشخص کنید.

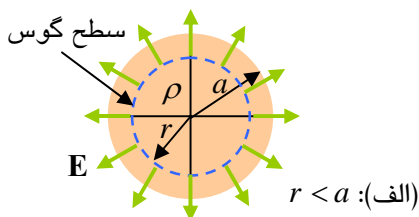
(۲) "سطح گوس" را چنان برگزینید که در روی آن (یا در روی بخش‌هایی از آن) اندازه‌ی میدان الکتریکی ثابت است. جهت میدان الکتریکی را در روی سطح گوس مشخص کنید.

(۳) فضا را به ناحیه‌های متمایز تقسیم کنید. در هر ناحیه، بار موجود در درون سطح گوس،  $q_{enc}$ ، را حساب کنید.

- (۴) شار میدان الکتریکی،  $\Phi_E$ ، گذرنده از سطح گوس را در هر ناحیه‌ی فضا به دست آورید.  
 (۵) شار میدان الکتریکی  $\Phi_E$  را مساوی  $q_{enc}/\epsilon_0$  قرار دهید و اندازه‌ی میدان الکتریکی را حساب کنید.  
 در مثال‌های زیر این گام‌ها را پی می‌گیریم

مثال ۳-۴ میدان الکتریکی توزیع بار کروی: میدان الکتریکی حاصل از یک کره باردار به شعاع  $a$  و چگالی بار حجمی یکنواخت  $\rho$  را در بیرون کره ( $r > a$ ) و در درون کره ( $r < a$ ) به دست آورید.

حل: (۱) روشن است که توزیع بار الکتریکی تقارن کروی دارد. (۲) چون توزیع بار یکنواخت است، جهت میدان در روی کره‌ای به شعاع  $r$ ، همواره در راستای شعاع و به سوی بیرون است. در روی این کره، اندازه‌ی میدان الکتریکی مقدار ثابتی است.



بنابراین، سطح گوس را همانند شکل (۱۶-۴) کره‌ای به شعاع  $r$  و هم‌مرکز با توزیع بار در نظر می‌گیریم. (۳) ناحیه‌های  $r \leq a$  و  $r \geq a$  را جداگانه بررسی می‌کنیم.

(۴) محاسبه‌ی شار میدان الکتریکی گذرنده از سطح گوس

(الف)  $r \leq a$ : سطح گوس، همانند شکل (۱۶-۴ الف) کره‌ای به شعاع  $r < a$  است. شار گذرنده از این سطح برابر

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (۴-۲۶)$$

است. ما در پی یافتن  $\mathbf{E}$  هستیم، اما  $\mathbf{E}$  در زیر علامت انتگرال قرار دارد. در این جا، تقارن مسئله اهمیت پیدا می‌کند و به یاری می‌آید و اجازه می‌دهد تا آن را از زیر انتگرال بیرون بیاوریم. چون اندازه‌ی میدان در همه‌ی نقاط روی سطح گوس مقدار ثابتی است و جهتش در راستای شعاعی است. همچنین، بردار  $d\mathbf{a}$  در راستای شعاع و هم‌سو با  $\mathbf{E}$  است. بنابراین

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint_S |\mathbf{E}| da = E \oint_S da = E (\epsilon \pi r^2) \quad (۴-۲۷)$$

شکل ۱۶-۴ سطح گوس برای کره‌ی با توزیع بار یکنواخت

(۵) بار موجود در درون سطح گوس: چون توزیع بار یکنواخت است، بنابراین، مقدار بار در درون سطح گوس عبارت است از

$$q_{enc} = \int_V \rho d\tau = \rho \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) \quad (۴-۲۸)$$

حال با استفاده از قانون گوس و از برابری رابطه‌های (۲۷-۴) و (۲۸-۴) اندازه‌ی میدان الکتریکی به دست می‌آید. داریم

$$\Phi_E = E (\epsilon \pi r^2) = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} ; \quad r \leq a \quad (۴-۲۹)$$

اگر با کل برابر  $Q$  باشد، چگالی بار را می‌توان به صورت  $\rho = Q / (4\pi a^3 / 3)$  نوشت و میدان  $E$  برحسب بار کل برابر است با

$$E = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi \epsilon_0 a^3} ; \quad r \leq a \quad (۴-۳۰)$$

چون جهت میدان در راستای شعاع است، رابطه‌ی بالا در شکل برداری آن عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}} = \frac{Qr}{\epsilon\pi\epsilon_0 a^3} \hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{\epsilon\pi\epsilon_0 a^3} \mathbf{r} = \frac{(\epsilon\pi a^3/3)\rho}{\epsilon\pi\epsilon_0 a^3} \mathbf{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r} \quad ; \quad r \leq a \quad (\epsilon-31)$$

(ب)  $r \geq a$ : در این حالت سطح گوس، همانند شکل (۱۶-۴) به شعاع  $r > a$  و هم‌مرکز با توزیع بار است. چون شعاع سطح گوس بزرگ‌تر از شعاع توزیع بار است، سطح گوس تمامی بار  $Q$  را دربر دارد. پس، در این حالت بار کل محصور در سطح گوس  $q_{enc} = Q = \epsilon\pi\epsilon_0 a^3/3$  است. شار گذرنده از این سطح گوس عبارت است از

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E \oint_S da = E(\epsilon\pi r^2) \quad (\epsilon-32)$$

در اینجا هم از تقارن مسئله استفاده کردیم و  $E$  را از زیر انتگرال بیرون آوردیم. در نتیجه، از برابری  $\Phi_E$  و  $q_{enc}/\epsilon_0$  داریم:

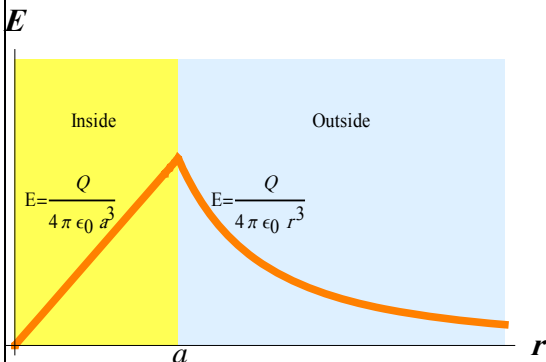
$$E(\epsilon\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad ; \quad r \geq a \quad (\epsilon-33)$$

یا در شکل برداری آن

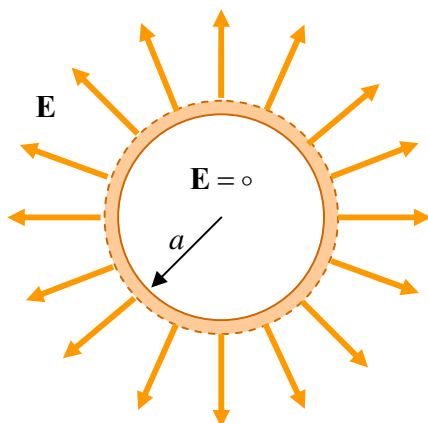
$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad ; \quad r \geq a \quad (\epsilon-34)$$

توجه کنید که در بیرون توزیع بار (یعنی  $r > a$ ) میدان همانند میدان بار نقطه‌ای  $Q$  است که در مرکز کره قرار دارد. در شکل (۱۵-۴) نمودار رفتار میدان برحسب فاصله  $r$  نشان داده شده است.

**نکته:** در مثال (۳-۴) اگر سطح گوس را غیرکروی برمی‌گزیدیم و یا  $\rho$  تقارن کروی نمی‌داشت باز هم شار میدان  $E$  برابر  $q_{enc}/\epsilon_0$  می‌شد، ولی دیگر نمی‌توانستیم  $E$  را از زیر علامت انتگرال خارج کنیم. چون دیگر نمی‌توانستیم مطمئن باشیم که  $E$  در راستای شعاع است و یا اندازه آن در تمام نقاط روی سطح گوس مقدار ثابتی است. تقارن برای کاربرد قانون گوس در شکل انتگرالی کلیدی است. ♣



شکل ۱۵-۴ نمودار میدان الکتریکی کروی باردار برحسب فاصله از مرکز آن



شکل ۱۷-۴ میدان الکتریکی پوسته‌ی کروی با توزیع بار یکنواخت

**مثال ۴-۴ پوسته‌ی کروی:** بار  $+Q$  در سطح پوسته‌ی کروی بسیار نازکی به شعاع  $a$  به‌طور یکنواخت توزیع شده است. میدان الکتریکی را در بیرون و در درون پوسته حساب کنید.

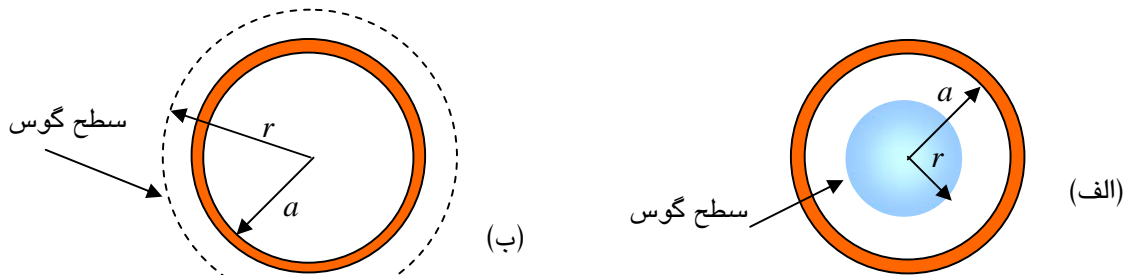
**حل:** (این همان مثال ۱۶-۲ است که با استفاده از قانون کولمب آن را حل کردیم. حل آن با بهره گرفتن از قانون گوس بسیار ساده‌تر است). توزیع بار تقارن کروی دارد. چگالی بار سطحی  $\sigma = Q/\epsilon\pi a^2$  است. میدان الکتریکی باید شعاعی و همانند شکل (۱۷-۴) (برون‌سو باشد). فضا را به دو ناحیه‌ی  $r \geq a$  و  $r \leq a$  تقسیم و هر یک را جداگانه بررسی می‌کنیم.

**(الف):**  $r \leq a$ : (درون پوسته): در این حالت سطح گوس را مانند شکل (۱۸-۴ الف) کره‌ای به شعاع  $r < a$  برگزینید. مقدار بار موجود در درون این سطح گوس صفر

است:  $q_{enc} = 0$ ؛ چون همهی بار در روی سطح پوسته‌ی کروی قرار دارد که در بیرون سطح گوس است. سطح گوس هیچ باری را احاطه نکرده است. بنابراین، با استفاده از قانون گوس،  $\Phi_E = q_{enc}/\epsilon_0$  داریم

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(\epsilon\pi r^2) = 0 \Rightarrow E = 0 ; r < a \quad (4-35)$$

(ب):  $r \geq a$  در این حالت، سطح گوس همانند شکل (۱۸-۴) ب)، کره‌ای به شعاع  $r \geq a$  است. حالا شعاع سطح گوس بزرگ‌تر از



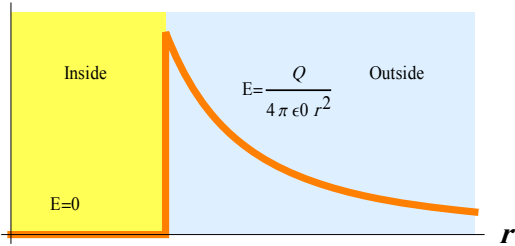
شکل ۱۸-۴ سطح گوس برای پوسته‌ی کروی با بار یکنواخت: (الف)  $r < a$  و (ب)  $r > a$

شعاع پوسته است. در نتیجه، همهی بار در درون سطح گوس قرار دارد:  $q_{enc} = Q$ . پس، بنابه قانون گوس داریم

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E \oint_S da = E(\epsilon\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} ; r \geq a \quad (4-36)$$

توجه کنید که میدان الکتریکی در بیرون پوسته همانند میدان بار نقطه‌ای  $Q$  جایگزیده در مرکز کره است. هم‌چنین توجه کنید

$E$



شکل ۱۹-۴ اندازه‌ی میدان الکتریکی  $E$  برحسب  $r$

که این همان پاسخ مثال ۱۶-۲ در رابطه‌ی (۱۲۹-۲) است. رفتار کیفی

میدان در شکل (۱۹-۴) دیده می‌شود. میدان در گذار از سطح در

$r = a$  گسسته است:  $\lim_{x \rightarrow a^-} E \neq \lim_{x \rightarrow a^+} E$ . این پدیده را در بخش‌های

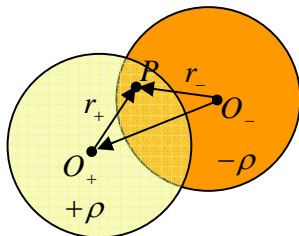
آینده در همین فصل بررسی خواهیم کرد. وقتی از ناحیه‌های  $r < a$

و  $r > a$  به سطح باردار پوسته نزدیک می‌شویم، میدان به اندازه‌ی

$$\Delta E = E_+ - E_- = \frac{Q}{\epsilon\pi\epsilon_0 a^2} - 0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4-37)$$

تغییر می‌کند

مثال ۵-۴ میدان در ناحیه‌ی هم‌پوشی دو کره: دو کره، هر یک به شعاع  $R$  با چگالی بار الکتریکی  $+\rho$  و  $-\rho$  اند. این دو کره



شکل ۲۰-۴ میدان در ناحیه‌ی هم‌پوشی دو کره

مطابق شکل (۲۰-۴) با هم تداخل کرده اند. برداری که مرکز کره منفی

را به مرکز کره مثبت وصل می‌کند  $\mathbf{s}$  است. میدان الکتریکی را در ناحیه

هم‌پوشی حساب کنید و نشان دهید که مقدار ثابتی است

حل: در مثال ۳-۴ میدان را در درون کره‌ی باردار حساب کردیم. بنابه

رابطه‌ی (۳۱-۴) میدان در درون کره‌ی باردار عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \mathbf{r} \quad (4-38)$$

ناحیه‌ی همپوشی بخشی از هر دو کره است و میدان در نقطه‌ای مانند  $P$  از هر دو کره‌ی مثبت و کره‌ی منفی ناشی می‌شود. پس، بنابه به اصل برنهش، میدان در این نقطه از جمع برداری میدان در درون کره مثبت و میدان در درون کره منفی به دست می‌آید. میدان در درون کره‌ی مثبت (رابطه‌ی ۴-۳۱ را ببینید) برابر

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_+ \quad (4-39)$$

است. به همین ترتیب، میدان در درون کره‌ی منفی

$$\mathbf{E}_- = \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_- \quad (4-40)$$

است.  $\mathbf{r}_+$  و  $\mathbf{r}_-$  به ترتیب بردارهایی از مرکز کره‌ی مثبت و مرکز کره‌ی منفی تا نقطه‌ی  $P$  اند. پس،

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_+ - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) \quad (4-41)$$

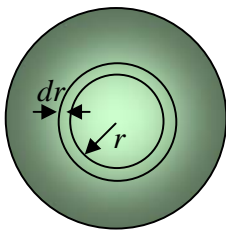
با توجه به شکل (۴-۱۹) دیده می‌شود که  $\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- = \mathbf{s}$  است. بنابراین داریم:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{s} \quad (4-42)$$

چون  $\mathbf{s}$  بردار ثابتی است، در نتیجه میدان هم در ناحیه‌ی همپوشی ثابت است. یعنی در همه‌ی نقاط درون این ناحیه میدان با رابطه‌ی (۴-۴۲) داده می‌شود.

**مثال ۶-۴ کره‌ی با توزیع بار نایکنواخت:** چگالی بار حجمی کره‌ای به شعاع  $R$  نایکنواخت و به صورت  $\rho = \rho_0 (r/R)$  است.  $\rho_0$  مقداری ثابت و  $r$  فاصله از مرکز کره است.

(الف): بار کل درون کره چیست؟ (ب): میدان الکتریکی را در همه جا (در درون و بیرون کره) حساب کنید.



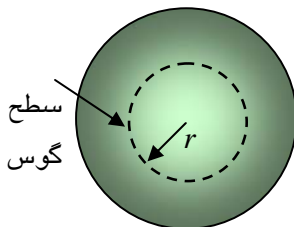
شکل ۴-۲۱ جزء حجم در کره‌ی با توزیع بار نایکنواخت

**حل:** (الف) جزء حجم را برابر شکل (۴-۲۱) پوسته‌ی کروی به شعاع  $r$  و ضخامت  $dr$  در نظر بگیرید. حجم این پوسته  $d\tau = \epsilon\pi r^2 dr$  و بار آن برابر  $dq = \rho \epsilon\pi r^2 dr$  است. چون کره مجموعه‌ای از پوسته‌های هم‌مرکز است، پس، بار کل درون کره برابر است با

$$Q = \int \rho d\tau = \int_0^R \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right) (\epsilon\pi r^2 dr) = \frac{\rho_0 \epsilon\pi}{R} \int_0^R r^3 dr = \frac{\rho_0 \epsilon\pi}{R} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\rho_0 \epsilon\pi R^4}{4R} = \rho_0 \pi R^3 \quad (4-43)$$

(ب): فضا دو ناحیه دارد: ناحیه‌ی  $r < R$  (درون توزیع بار) و  $r > R$  (بیرون کره) باردار. پس، قانون گوس را برای هر یک از این ناحیه‌ها به‌طور جداگانه به کار می‌بریم. برای ناحیه‌ی  $r < R$  سطح گوسی را به صورت کره‌ی با شعاع  $r < R$  برابر شکل (۴-۲۲) برگزینید. اندازه‌ی میدان در روی سطح این کره ثابت و جهتش در راستای

شعاع است. به بیان دیگر میدان  $\mathbf{E}$  در جهت بردار  $d\mathbf{a}$  است و در نتیجه،  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E da$  است. شار گذرنده از این سطح برابر است با



شکل ۴-۲۲ سطح گوس در ناحیه‌ی  $r < R$

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint E da = E \oint da = E(4\pi r^2) \quad (4-44)$$

اینک باید مقدار بار موجود در درون سطح گوس،  $q_{enc}$ ، را حساب کنیم. چون توزیع بار یکنواخت نیست، باید در حجمی که سطح گوس مرزهای آن است، از چگالی بار انتگرال بگیریم:

$$q_{enc} = \int_V \rho d\tau = \int_V \rho_0 \left( \frac{r'}{R} \right) (r'^3 \sin\theta d\theta d\phi dr') \quad (4-45)$$

جزء حجم در مختصات کروی است. چون  $\int_0^\pi \sin\theta d\theta = 2$  و  $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$  است، در نتیجه، رابطه‌ی

$$q_{enc} = \int_V \rho d\tau = \int_V \rho_0 \left( \frac{r'}{R} \right) (r'^3 \sin\theta d\theta d\phi dr') = (2)(2\pi) \frac{\rho_0}{R} \int_0^r r'^3 dr' = \frac{4\pi\rho_0 r^4}{4R} = \frac{\pi\rho_0 r^4}{R} \quad (4-46)$$

بنابراین، از برابری  $\Phi_E = q_{enc}/\epsilon_0$  به دست می‌آید

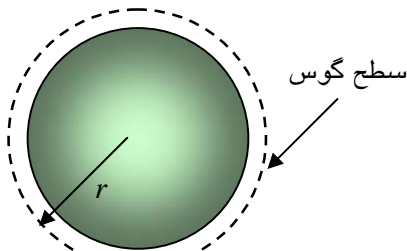
$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho_0 \pi r^4}{R \epsilon_0} \Rightarrow E_I = \frac{\rho_0 r^2}{4R \epsilon_0} \quad ; \quad r < R \quad (4-47)$$

برای این که تاکید کنیم  $E$  مربوط به ناحیه‌ی  $r < R$  است آن را با  $E_I$  نشان دادیم. نمایش برداری میدان عبارت است از

$$\mathbf{E}_I = \frac{\rho_0 r^2}{4R \epsilon_0} \hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad 0 < r < R \quad (4-48)$$

ناحیه  $\Pi$  ( $r > R$ ): سطح گوس باز هم کره‌ای است که شعاع آن  $r > R$  است (شکل 4-23). بنا به قانون گوس، داریم

$$\oint_S \mathbf{E}_{II} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (4-49)$$



شکل 4-23 سطح گوس در ناحیه‌ی  $r > R$

چون شعاع سطح گوس بزرگتر از شعاع توزیع بار است، همه‌ی بار را دربر

دارد. مقدار آن در رابطه‌ی (4-43) حساب شده است:  $q_{enc} = Q = \rho_0 \pi R^3$

روشن است که به خاطر تقارن کروی توزیع بار، میدان الکتریکی در روی

سطح گوس شعاعی و اندازه‌ی آن مقدار ثابتی است. در نتیجه، رابطه‌ی (4-49)

به صورت زیر در می‌آید

$$\oint_S \mathbf{E}_{II} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{II} (4\pi r^2) = \frac{\rho_0 \pi R^3}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E}_{II} = E_{II} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad , \quad r > R \quad (4-50)$$

همان طور که دیده می‌شود، در این ناحیه میدان به صورت  $1/r^2$  تغییر می‌کند. این را از قانون کولمب هم انتظار داشتیم، چون

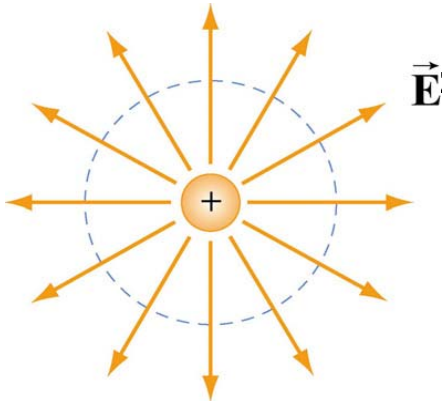
حال در بیرون توزیع بار قرار داریم و توزیع بار مانند بار نقطه‌ای جایگزیده در مرکز کره رفتار می‌کند.

• مثال‌های بالا نمونه‌هایی بودند که توزیع بار الکتریکی از تقارن کروی برخوردار بود. همان‌گونه که دیدید، در این وضعیت‌ها، سطح گوس مناسب، کره‌ای هم‌مرکز با توزیع بار است. وجود تقارن به ما اجازه می‌دهد تا میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  را در قانون گوس، از زیر علامت انتگرال خارج کنیم. با این کار انتگرال گوس بدیهی می‌شود.

تقارن دیگری که اینک می‌توانیم آن را بررسی کنیم، تقارن استوانه‌ای است. اگر توزیع بار الکتریکی تقارن استوانه‌ای داشته

باشد، گزینه‌ی مناسب برای سطح گوس، استوانه‌ای هم‌محور با توزیع بار است. مثال‌های زیر این نکته را روشن می‌کنند.

**مثال ۷-۴ میدان سیم باردار بینهایت دراز:** بر روی سیم بینهایت درازی با شعاع ناچیز، بار خطی با چگالی یکنواخت  $\lambda$  قرار دارد. میدان الکتریکی سیم را در فاصله‌ی  $r$  از سیم به دست آورید.



شکل ۲۴-۴ جهت میدان الکتریکی سیم بینهایت دراز

**حل:** در این مثال هم گام‌ها را برخواهیم شمرد: (۱) سیم بینهایت دراز تقارن استوانه‌ای دارد. (۲) بار الکتریکی به‌طور یکنواخت روی سیم توزیع شده است، بنابراین، جهت میدان الکتریکی  $\vec{E}$  همانند شکل (۲۴-۴) باید به سوی بیرون از محور تقارن سیم باشد (در این شکل، سیم بر صفحه‌ی کاغذ عمود است). در روی سطح جانبی استوانه‌ای به شعاع  $r$  و هم‌محور با سیم، اندازه‌ی میدان الکتریکی مقدار ثابتی است. بنابراین، سطح گوس را استوانه‌ای به طول  $\ell$  و شعاع  $r$  و هم‌محور با سیم برمی‌گزینیم. در شکل (۲۵-۴) سطح گوس نشان داده شده است. (۳) مقدار بار موجود در درون سطح گوس (استوانه‌ای به شعاع  $r$  و طول  $\ell$  هم‌محور با سیم) برابر  $q_{enc} = \lambda \ell$  است. (۴) همان‌گونه که در شکل (۲۵-۴) دیده می‌شود، سطح گوس سه قسمت دارد: دو سطح قاعده‌ی  $S_1$  و  $S_2$  و

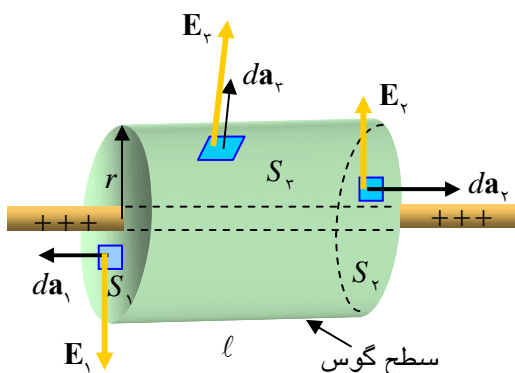
سطح جانبی  $S_3$ . شار گذرنده از سطح گوس برابر

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a}_i \\ &= \oint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a}_1 + \oint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a}_2 + \oint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{a}_3 \\ &= 0 + 0 + E_3 A_3 = E (\pi r \ell) \end{aligned} \quad (4-51)$$

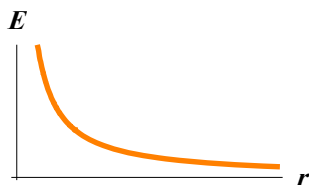
است. در اینجا  $E_3 \equiv E$  قرار دادیم. همان‌گونه که از شکل پیداست، از سطوح قاعده‌ی استوانه شاری نمی‌گذرد؛ چون جزء سطح  $da_1$  و  $da_2$  بر میدان که در راستای شعاعی است، عمود اند. (۵) با استفاده از قانون گوس داریم

$$\Phi_E = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E (\pi r \ell) = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lambda}{2\pi r} \quad (4-52)$$

این پاسخ، با نتیجه‌ای که برای مثال ۹-۲ و با رابطه‌ی (۹۵-۲) از قانون کولمب به دست آوردیم کاملاً یکسان است. توجه کنید که پاسخی به‌طوری که به طول استوانه‌ی سطح گوس بستگی ندارد و با عکس فاصله‌ی  $r$  از محور تقارن تغییر می‌کند. این رفتار در نمودار شکل (۲۶-۴) دیده می‌شود.



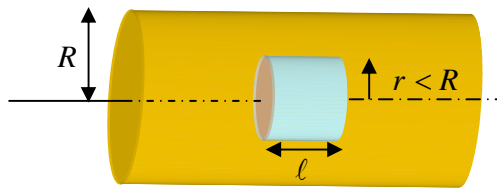
شکل ۲۵-۴ سطح گوس برای سیم بینهایت دراز با توزیع بار یکنواخت



شکل ۲۶-۴ میدان سیم بینهایت دراز

**مثال ۸-۴ توزیع بار استوانه‌ای:** چگالی بار حجمی در استوانه‌ی بسیار درازی به شعاع  $R$  با فاصله از محور استوانه متناسب

است و با  $\rho = kr$  ( $k$  مقدار ثابتی است.) داده شده است میدان الکتریکی را در درون و بیرون این توزیع بار به دست آورید.



شکل ۲۷-۴ سطح گوس برای ناحیه  $r < R$

**حل:** توزیع بار تقارن استوانه‌ای دارد. در روی استوانه‌ای به شعاع  $r$  میدان شعاعی و اندازه‌اش مقدار ثابتی است. بنابراین، سطح گوس را استوانه‌ای به شعاع  $r$  انتخاب می‌کنیم. فضا به دو ناحیه تقسیم شده است: ناحیه‌ی I ( $r < R$ ) و ناحیه‌ی II ( $r > R$ ). میدان الکتریکی دو ناحیه را جداگانه حساب می‌کنیم.

**ناحیه I:** سطح گوس را برابر شکل (۲۷-۴) استوانه‌ای به شعاع  $r < R$  و به طول  $l$  انتخاب کنید. داریم

$$\oint_S \mathbf{E}_I \cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau \quad (۴-۵۳)$$

در انتگرال سمت راست  $V$  حجمی است که سطح گوس مرزهای آن است. در مختصات استوانه‌ای جزء حجم به صورت  $d\tau = r' dr' d\phi dz$  است. بنابراین

$$\oint_{\text{سطح}} \mathbf{E} d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int (kr')(r' dr' d\phi dz) = \frac{1}{\epsilon_0} 2\pi k l \int_0^r r'^2 dr' = \frac{2}{3\epsilon_0} \pi k l r^2 \quad (۴-۵۴)$$

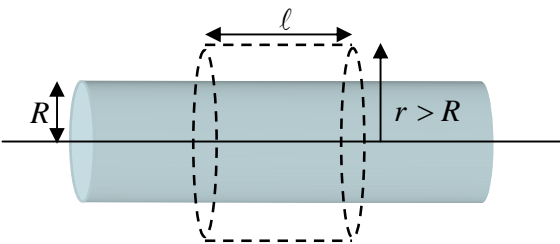
توجه داشته باشید که انتگرال روی  $d\phi$  برابر  $2\pi$  و انتگرال روی  $dz$  مساوی  $l$  است.

تقارن مسئله می‌آموزد که  $\mathbf{E}$  باید در راستای شعاع و به سمت بیرون باشد. یعنی شار خالص گذرنده از دو سطح قاعده‌ی سطح گوس صفر است. در نتیجه، فقط شار گذرنده از سطح جانبی را حساب می‌کنیم

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E \int da = E (2\pi r l) = \frac{2}{3\epsilon_0} \pi k l r^2 \Rightarrow E = \frac{1}{3\epsilon_0} k r^2$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} k r^2 \hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad r < R \quad (۴-۵۵)$$

**ناحیه II:** باز هم سطح گوس را استوانه‌ای هم‌محور با توزیع بار و به شعاع  $r > R$  و به طول  $l$  انتخاب کنید (استوانه‌ی نقطه‌چین شکل ۲۸-۴ را ببینید). بار کل در درون این استوانه‌ی نقطه‌چین



شکل ۲۸-۴ سطح گوس برای ناحیه  $r > R$

برابر

$$Q = \int \rho d\tau = \int (kr')(r' dr' d\phi dz) = 2\pi k l \int_0^R r'^2 dr' = \frac{2}{3} \pi k l R^2 \quad (۴-۵۶)$$

است. در نتیجه داریم

در نتیجه داریم

$$\oint_{\text{سطح}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{enc} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{2}{3} \pi k l R^2 \quad (۴-۵۷)$$

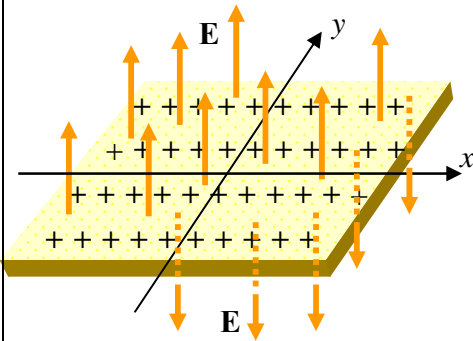
آرایه‌ی بار تقارن استوانه‌ای دارد. پس، میدان الکتریکی در همه‌جای روی سطح گوس، شعاعی است و اندازه‌ی یکسانی دارد:

$$\oint_{\text{سطح}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int |\mathbf{E}| da = \frac{2}{3\epsilon_0} \pi k l R^2 |\mathbf{E}| (2\pi r l) = \frac{2}{3\epsilon_0} \pi k l R^2 \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{k}{3\epsilon_0} \frac{R^2}{r} \hat{\mathbf{r}} \quad (۴-۵۸)$$

• اگر توزیع بار الکتریکی تقارن استوانه‌ای داشته باشد، سطح گوس مناسب همواره استوانه‌ای هم‌محور با توزیع بار است.

آخرین تقارنی که در به‌کار بردن قانون گوس مهم است، تقارن صفحه‌ای است. در مثال زیر این وضعیت را بررسی می‌کنیم.

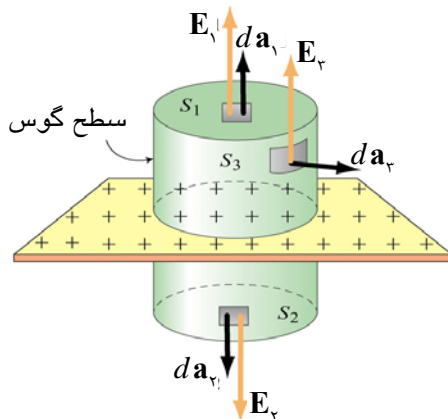
مثال ۹-۴ صفحه‌ی باردار بینهایت گسترده: صفحه‌ی بینهایت گسترده‌ای با چگالی بار سطحی یکنواخت  $\sigma$  در صفحه‌ی  $xy$



شکل ۲۹-۴ صفحه‌ی باردار بینهایت گسترده

قرار دارد. شکل (۲۹-۴). میدان الکتریکی صفحه را در همه جا به دست آورید. حل: (۱) صفحه‌ی بینهایت گسترده تقارن صفحه‌ای دارد. (۲) چون توزیع بار در روی صفحه یکنواخت است، میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  باید بر صفحه عمود و به سوی بیرون از صفحه باشد. بنابراین  $\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{k}}$  است. در روی صفحه‌های موازی با صفحه‌ی باردار، اندازه‌ی میدان مقدار ثابتی است. سطح گوس را همانند شکل (۳۰-۴) استوانه یا "قوطی کبریتی" در نظر بگیرید که نیمی از آن در بالای صفحه‌ی باردار و نیم دیگرش در زیر آن قرار گیرد. این سطح گوس از سه سطح تشکیل شده است: سطوح قاعده‌های  $S_1$ ،  $S_2$  و سطح جانبی  $S_3$ .

(می‌توانستیم سطح گوس را یک قوطی کبریت، یک مکعب مستطیل، فرض کنیم. در این صورت شش سطح خواهیم داشت که دو



شکل ۳۰-۴ سطح گوس برای توزیع بار

صفحه‌ی بینهایت گسترده

تای آنها رویه‌های بالایی و پایینی و چهار رویه‌ی دیگر چهار سطح جانبی را تشکیل می‌دهند. (۳) چون توزیع بار یکنواخت است، بار موجود در درون سطح گوس  $q_{enc} = \sigma A$  است. توجه کنید که  $A_1 = A_2 = A$  سطح قاعده‌ی بالایی و پایینی استوانه اند. (۴) شار کل گذرنده از سطح گوس برابر است با

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a}_2 + \int_{S_3} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{a}_3 \quad (۴-۵۹)$$

چون میدان  $\mathbf{E}$  همواره بر سطح باردار عمود است، پس:  $\mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{a}_3 = 0$  و در نتیجه رابطه‌ی (۴-۵۹) به صورت زیر در می‌آید

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a}_2 + \int_{S_3} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{a}_3 \quad (۴-۶۰)$$

$$= E_1 A_1 + E_2 A_2 + 0 = (E_1 + E_2) A$$

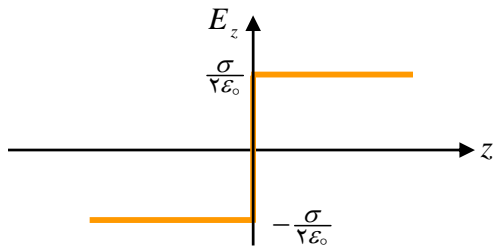
چون فاصله‌ی دو سطح قاعده‌ی بالایی و پایینی سطح گوس از صفحه‌ی باردار به یک اندازه اند، بنا به تقارن، اندازه‌ی میدان‌های  $E_1$  و  $E_2$  باید برابر باشند:  $E_1 = E_2 \equiv E$ . بنابراین، شار کل گذرنده از این سطح گوس را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Phi_E = 2AE \quad (۴-۶۱)$$

(۵) با استفاده از قانون گوس،  $\Phi_E = q_{enc} / \epsilon_0$ ، داریم

$$\Phi_E = 2AE = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (۴-۶۲)$$

پس، میدان الکتریکی صفحه‌ی باردار بینهایت گسترده در همه‌ی نقاط فضا یکنواخت است و به فاصله از صفحه‌ی باردار بستگی ندارد. رفتار میدان نسبت به فاصله از صفحه‌ی باردار در شکل (۳۱-۴) نشان داده شده است. این همان رفتاری است که پیش‌تر



شکل ۴-۳۱ نمودار میدان الکتریکی صفحه‌ی باردار بینهایت گسترده برحسب فاصله از صفحه

در مثال ۲-۱۴ دیدیم و با رابطه‌ی (۲-۱۱۶) و شکل (۲-۳۷) با استفاده از قانون کولمب به دست آوردیم. شکل برداری میدان به صورت زیر است.

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} ; & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} ; & z < 0 \end{cases} \quad (۴-۶۳)$$

توجه کنید که بازهم در اینجا گسسته بودن میدان را در گذار از

سطح باردار می‌بینیم. تفاوت میدان الکتریکی درست در زیر صفحه‌ی باردار و درست در بالای صفحه عبارت است از

$$\Delta E_z = E_{z+} - E_{z-} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (۴-۶۴)$$

مثال ۴-۱۰ میدان الکتریکی دو صفحه‌ی باردار: دو صفحه‌ی بینهایت گسترده برابر شکل (۴-۳۲) به فاصله‌ی  $d$  از یکدیگر در صفحه‌ی  $xy$  قرار دارند. چگالی بار سطحی صفحه‌ها  $+\sigma$  و  $-\sigma$  است. میدان الکتریکی را در همه‌ی نقاط فضا حساب کنید. حل: میدان یک صفحه‌ی بینهایت گسترده را در مثال ۴-۹ به دست آوردیم. چون اندازه‌ی چگالی بار صفحه‌ها یکسان است؛ میدان آنها عبارت اند از:

$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (۴-۶۵)$$

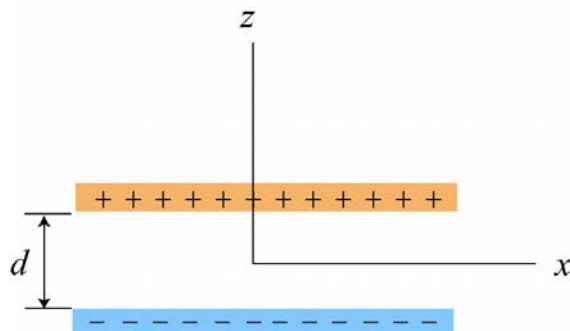
افزون براین، میدان صفحه‌ی با بار مثبت به سوی بیرون از صفحه و میدان صفحه‌ی با بار منفی به سوی صفحه است.

(شکل ۴-۳۳ را ببینید). پس، میدان‌های الکتریکی آنها عبارتند از

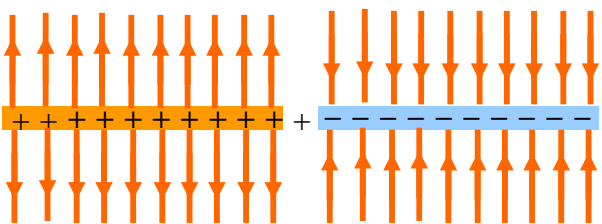
$$\mathbf{E}_+ = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} ; & z > d/2 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} ; & z < d/2 \end{cases} \quad (۴-۶۶)$$

و

$$\mathbf{E}_- = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} ; & z > -d/2 \\ +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} ; & z < -d/2 \end{cases} \quad (۴-۶۷)$$



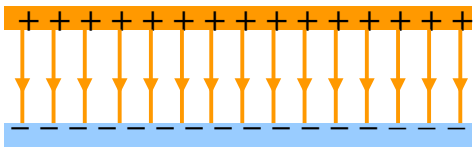
شکل ۴-۳۲ دو صفحه با بارهای ناهم علامت



شکل ۴-۳۳ میدان الکتریکی صفحه‌های با بار مثبت و منفی

با استفاده از اصل برنشه و نتیجه‌ی مثال ۴-۹، اگر آنها را با هم جمع برداری کنیم، میدان دو صفحه به صورت زیر خواهد بود

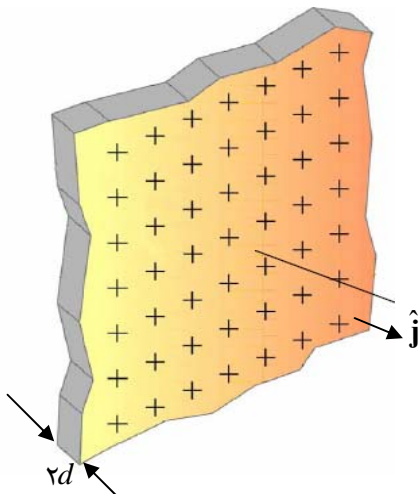
$$\mathbf{E} = \begin{cases} \circ \hat{\mathbf{k}}, & z > d/2 \\ (-\sigma/\epsilon_0) \hat{\mathbf{k}}, & d/2 > z > -d/2 \\ \circ \hat{\mathbf{k}}, & z < -d/2 \end{cases} \quad (۴-۶۸)$$



شکل ۴-۳۴ میدان دو صفحه‌ی موازی

می‌بینیم که میدان در بیرون فضای بین صفحه‌ها (یعنی در ناحیه‌های  $z > d/2$  و  $z < -d/2$ ) صفر است و در فضای بین آنها اندازه‌ی میدان دو برابر میدان هر صفحه و برابر  $E = \sigma/\epsilon_0$  است... در شکل (۴-۳۴) این وضعیت را می‌توان دید

مثال ۴-۱۱ میدان بُرش باردار: برابر شکل (۴-۳۵) برشی به ضخامت  $2d$  را در نظر بگیرید که در راستای محورهای  $x$  و  $z$  تا بینهایت گسترده است و در راستای محور  $y$  به  $y = -d$  و  $y = +d$  محدود است. چگالی بار حجمی این برش یکنواخت و برابر  $\rho$  است. میدان الکتریکی را به صورت تابعی از  $y$  (فاصله از مرکز) به دست آورید.



شکل ۴-۳۵ برش بینهایت گسترده

حل بنابه تقارن (مسئله تقارن صفحه‌ای دارد) در صفحه  $xz$  (صفحه‌ای که ضخامت برش را به دو نیم تقسیم می‌کند) میدان صفر است. بنابراین، سطح گوس را استوانه یا قوطی کبریتی مانند شکل (۴-۳۶) در نظر بگیرید که یک قاعده آن در صفحه  $xz$  و قاعده‌ی دیگر آن در فاصله‌ی  $y$  از مرکز است. روشن است که از قاعده‌ی سمت چپ شار الکتریکی نمی‌گذرد، چون میدان در آنجا صفر است. بنا به تقارن، شار گذرنده از سطح جانبی هم صفر است. پس، فقط باید شار گذرنده از سطح قاعده‌ی سمت راست را حساب کنیم. فرض کنید مساحت سطح قاعده  $A$  است از قانون گوس داریم:

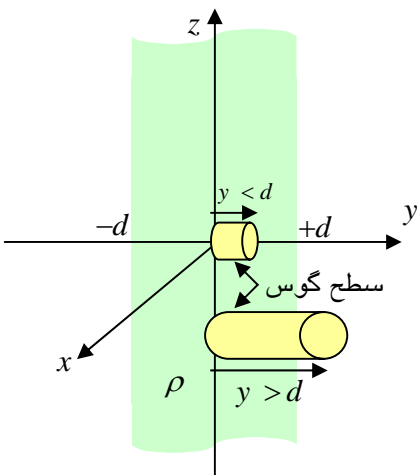
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{enc} = \frac{1}{\epsilon_0} A y \rho \Rightarrow EA = \frac{1}{\epsilon_0} A y \rho$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} y \hat{\mathbf{j}}; \quad |y| < d \quad (4-69)$$

در ناحیه‌ی  $y > d$  بار موجود در درون سطح گوس برابر  $q_{enc} = \rho A d$  است و در نتیجه میدان در این ناحیه عبارت است از

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{enc} = \frac{\rho A d}{\epsilon_0} \Rightarrow EA = \frac{\rho A d}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} d \hat{\mathbf{j}}; \quad y > d \quad (4-70)$$



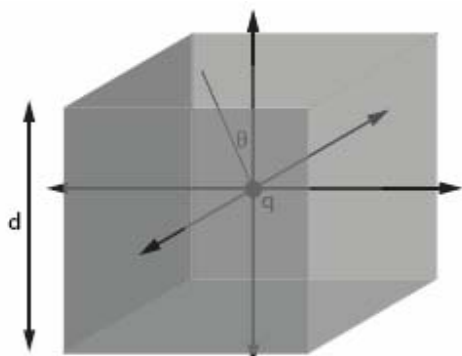
شکل ۴-۳۶ نمای روبرو از برش بینهایت گسترده

**نکته:** مثال‌های بالا نشان می‌دهند که وقتی با تقارن‌های استوانه‌ای و صفحه‌ای سروکار داریم، توزیع بار استوانه‌ای و صفحه‌ای باید تا بینهایت ادامه داشته باشند تا این تقارن‌ها برقرار باشند. در عمل البته این شرایط فراهم نیست ولی می‌توان از آنها برای استوانه‌های دراز و صفحه‌های گسترده استفاده کرد و پاسخ تقریبی به دست آورد. ♣

در این بخش نشان دادیم که چگونه می‌توان از شکل انتگرالی قانون گوس برای یافتن میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار با تقارن‌های معین استفاده کرد. در جدول زیر، این روش برای توزیع بار خطی، سطحی و حجمی جمع‌آوری شده است.

سامانه	توزیع بار خطی بینهایت	توزیع بار سطحی بینهایت	کره با بار حجمی یکنواخت
شکل			
تقارن	استوانه‌ای	صفحه‌ای	کروی
تعیین جهت E			
ناحیه‌های فضا	$r > 0$	$z < 0$ و $z > 0$	$r \leq a$ و $r \geq a$
سطح گوس			
شار	$\Phi_E = E(\pi r l)$	$\Phi_E = EA + EA = 2EA$	$\Phi_E = E(\pi r^2)$
بار $q_{enc}$	$q_{enc} = \lambda l$	$q_{enc} = \sigma A$	$q_{enc} = \begin{cases} Q(r/a)^3; & r \leq a \\ Q; & r > a \end{cases}$
قانون گوس: $\Phi_E = q_{enc}/\epsilon_0$	$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	$E = \begin{cases} \frac{Qr}{\epsilon\pi\epsilon_0 a^3}; & r \leq a \\ \frac{Q}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^2}; & r \geq a \end{cases}$

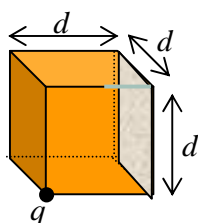
مثال ۴-۱۲ باز هم شار بار نقطه‌ای واقع در مرکز یک مکعب: مثال ۴-۱ را با استفاده از قانون گوس دوباره حل کنید: بار



شکل ۴-۳۷ شار گذرنده از یک سطح مکعب ناشی از بار نقطه‌ای در مرکز

نقطه‌ای  $q$  برابر شکل (۴-۳۷) در مرکز مکعبی به ضلع  $d$  قرار دارد. شار گذرنده از یک رویه‌ی مکعب را به دست آورید.

حل: استفاده از قانون گوس، برای یافتن شار  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$  گذرنده از هر سطح مکعب ساده ترین شیوه است. با توجه به تقارن مکعب، می‌دانیم که شار گذرنده از هر یک از رویه‌ها باهم برابرند. شار کل گذرنده از سطح بسته‌ی مکعب  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$  برابر  $q/\epsilon_0$  است. بنابراین، شار گذرنده از یک رویه‌ی، یک ششم سار کل است که برابر  $q/6\epsilon_0$  است. این همان پاسخ مثال ۴-۱ است



شکل ۴-۳۸ بار در گوشه‌ی مکعب

مثال ۴-۱۳ باز هم شار بار نقطه‌ای واقع در یک گوشه‌ی مکعب: مثال ۴-۲ را با استفاده از قانون گوس دوباره حل کنید: بار  $q$  برابر شکل (۴-۳۷) در یک گوشه‌ی مکعبی به ضلع  $d$  قرار دارد. شار گذرنده از رویه‌ی روبروی مکعب را به دست آورید.

حل: در قانون گوس همواره به یک سطح بسته، سطح گوس، نیاز داریم که بار در درون آن قرار دارد. قانون گوس چیزی در باره‌ی شکل سطح گوس نمی‌گوید. اما

همان طور که دیدیم، اگر مسئله تقارن داشته باشد، میدان در همه‌ی نقاط روی سطح گوس مقدار ثابتی می‌شود. از این نکته

برای حل مسئله استفاده می‌کنیم. برابر شکل (۴-۳۹) اگر ۸ مکعب یکسان را

کنار هم قرار دهیم، یک سطح بسته‌ی مکعبی به دست می‌آید که بار  $q$  در

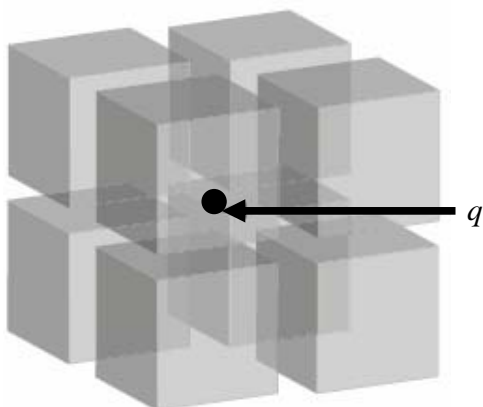
مرکز آن قرار دارد. این سطح بسته از ۲۴ سطح مربع شکل به ضلع  $d$

تشکیل شده است. بنا به قانون گوس، شار گذرنده از سطح بسته  $q/\epsilon_0$

است. بنابراین، شار گذرنده از یک سطح مکعب بزرگ  $1/24$  آن است. پس،

پاسخ مسئله  $q/24\epsilon_0$  است؛ همان پاسخی است که در مثال ۴-۲ به دست

آوردیم.



شکل ۴-۳۹ بار نقطه‌ای در گوشه‌ی مکعب

### \*\* ۴-۳-۳ شکل دیفرانسیلی قانون گوس

با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس (نگاه کنید به پیوست این فصل) می‌توان قانون گوس را به شکل دیفرانسیلی نوشت: بنا به قضیه دیورژانس، برای هر میدان برداری خوش رفتار  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  که در حجم  $V$  تعریف شده باشد، داریم

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}) d\tau \quad (4-71)$$

انتگرال سمت چپ رابطه‌ی (4-71) روی سطح بسته‌ی  $S$  گرفته می‌شود. سطح  $S$  مرزهای حجم  $V$  است. میدان برداری  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  می‌تواند، میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  باشد.

حال قانون گوس را برای توزیع بار حجمی در نظر بگیرید. از رابطه‌های (4-17) و (4-25) داریم

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{enc}} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau \quad (4-72)$$

اینک، قضیه‌ی دیورژانس، رابطه‌ی (4-71)، را در انتگرال سمت چپ رابطه‌ی (4-72) به کار ببرید. به دست می‌آید

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}) d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{enc}} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau \Rightarrow \int_V (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}) d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau \quad (4-73)$$

در رابطه‌ی بالا، ما جزء حجم خاصی را برنگزیدیم و بنابراین، رابطه‌ی (4-73) برای هر جزء حجمی برقرار است، در نتیجه می‌توان نوشت

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (4-74)$$

رابطه‌ی (4-74) شکل دیفرانسیلی قانون گوس است. در مسئله‌هایی که میدان الکتریکی داده شده باشد و بخواهیم توزیع بار الکتریکی به وجود آورنده‌ی میدان را به دست آوریم، شکل دیفرانسیلی قانون گوس سودمند می‌شود. با وجود این، در بیشتر مسئله‌های الکتروستاتیک، توزیع بار الکتریکی معلوم است و هدف یافتن میدان الکتریکی آن است. در این مسئله‌ها کار کردن با شکل دیفرانسیلی قانون گوس آسان نیست. چون میدان الکتریکی یک کمیت برداری است و برای یافتن آن دانستن دیورژانس میدان (آنگونه که در رابطه (4-74) دیده می‌شود) به تنهایی کافی نیست، بلکه تاو یا کرل میدان هم باید داده شود. بنابراین، رابطه‌ی (4-74) به تنهایی برای یافتن  $\mathbf{E}$  بسنده نیست. در این گونه مسئله‌ها شکل انتگرالی قانون گوس، رابطه‌ی (4-17)، مناسب و اقتصادی‌تر است؛ چون کار کردن با کمیت‌های عددی، مانند شار میدان الکتریکی، آسان‌تر از کار کردن با کمیت‌های برداری است. افزون بر این، در شکل انتگرالی قانون گوس بارهای نقطه‌ای، خطی، سطحی و حجمی به صورت طبیعی‌تری ظاهر می‌شوند.

در مثال‌های زیر با روش استفاده از رابطه‌ی (4-74) در مسئله‌های الکتروستاتیک آشنا می‌شویم

**مثال 14-4 محاسبه‌ی بار از میدان الکتریکی:** میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا در مختصات کروی به صورت  $\mathbf{E} = kr^2 \hat{\mathbf{r}}$  داده شده است که در آن  $k$  مقدار ثابتی است.

(الف): چگالی بار  $\rho$  را به دست آورید.

(ب): بار کل موجود در درون کره‌ای به شعاع  $R$  و به مرکز مبدا مختصات را با دو شیوه‌ی (1) با استفاده از قانون گوس و (2) به طور مستقیم، حساب کنید.

**حل:** (الف): با توجه به رابطه‌ی (4-74) و این که میدان الکتریکی فقط مولفه‌ی شعاعی دارد، داریم

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 kr^2) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (kr^4) = 4\epsilon_0 kr^2 \quad (4-75)$$

(ب) روش (1): با استفاده از شکل انتگرالی قانون گوس می‌توان نوشت

$$Q = \epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \epsilon_0 (kR^2)(\epsilon\pi R^2) = \epsilon\pi\epsilon_0 kR^2 \quad (4-76)$$

روش (۲): با انتگرال گیری مستقیم. با استفاده از رابطه‌ی (۴-۷۵) به دست می‌آید:

$$Q = \int \rho d\tau = \int_0^R (\epsilon\epsilon_0 k r^2)(\epsilon\pi r^2 dr) = \epsilon\pi\epsilon_0 k \int_0^R r^4 dr = \epsilon\pi\epsilon_0 kR^2 \quad (4-77)$$

**نکته:** از شکل دیفرانسیلی قانون گوس تنها هنگامی می‌توان استفاده کرد که  $\rho$  متناهی و تابع پیوسته‌ای از مختصات فضایی باشد. اگر این شرط برقرار نباشد (مانند وضعیتی که بار به صورت نقطه‌ای و گسسته است یا وضعیتی که بارهای نقطه‌ای گسسته روی خط یا سطح توزیع شده است) دیورژانس  $\mathbf{E}$  به سمت بینهایت میل می‌کند. از نظر فیزیکی این بدان معنی است که شار الکتریکی محدودی از جزء حجم بسیار کوچکی خارج و واگرا می‌شود. پس، اگر توزیع بارهای نقطه را در نظر بگیریم با میل کردن و نزدیک شدن به مکان بار نقطه‌ای خواهیم داشت

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \rightarrow \infty \quad (4-78)$$

اما می‌دانیم که شار ناشی از بار نقطه‌ای بینهایت نیست بلکه مقدار آن محدود است. یعنی

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4-79)$$

شاید بپرسید که چگونه می‌توان برای بار نقطه‌ای توزیع پیوسته نوشت و دیورژانس میدان آن را حساب کرد. پاسخ آن در یک نکته‌ی فنی نهفته است و نیازمند آشنایی با تابع دلتای دیراک<sup>◇</sup> است. در اینجا مجال پرداختن به آن نیست. اگر بار نقطه‌ای  $q$  در مکان  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  باشد، آنگاه با توجه به تعریف تابع دلتای دیراک می‌توان چگالی آن را به صورت زیر نوشت

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4-80)$$

تابع  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  به ازای تمام نقاط  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$  صفر و برای  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  مقدارش بینهایت است. تابع دلتای دیراک با انتگرال آن تعریف می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau = 1 \quad (4-81)$$

و از ویژگی‌های خاصی برخوردار است. دو نمونه‌ی مهم از ویژگی‌های تابع دلتای دیراک عبارتند از

$$\int f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = f(\mathbf{r}') \quad (4-82)$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (4-83)$$

برای مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای در مکان‌های  $\mathbf{r}_i$ ، چگالی توزیع بار را می‌توان به صورت زیر برحسب تابع دلتا نوشت

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \quad (4-84)$$

از این رابطه می‌توان توزیع خطی مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای گسسته در مکان‌های  $x_i$  را به صورت زیر نوشت

$$\lambda(x') = \sum_i q_i \delta(x' - x_i) \quad (4-85)$$

و اگر بارهای نقطه‌ای در روی سطح  $xy$  توزیع شوند، چگالی آن عبارت است از

<sup>◇</sup> Dirac's Delta Function

$$\sigma(\mathbf{r}') = \sum_i q_i \delta(x' - x_i) \delta(y' - y_i) \quad (\text{ع-۸۶})$$

پس، چگالی بار برای یک بار نقطه‌ای در مکان  $(x_1, y_1)$  عبارت است از  $\sigma(\mathbf{r}') = q \delta(x' - x_1) \delta(y' - y_1)$ . بنابراین، رابطه‌ی (ع-۷۸) برای یک بار نقطه‌ای جایگزیده در مکان  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  به صورت زیر درمی‌آید

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{ع-۸۷})$$

مثال ۱۵-۴ انتگرال تابع دلتا: انتگرال  $\int_0^2 x^2 \delta(x-2) dx$  را حساب کنید.

حل: با توجه به رابطه‌ی (ع-۸۲) داریم  $\int_0^2 x^2 \delta(x-2) dx = 2^2 = 8$ . اگر حد بالای انتگرال به جای ۳ صفر بود پاسخ انتگرال صفر می‌شد.

از شکل دیفرانسیلی قانون گوس، رابطه‌ی (ع-۷۴)، دیده می‌شود که در هر ناحیه‌ی فضا که چگالی بار صفر است (یا بار وجود ندارد) دیورژانس میدان الکتریکی هم صفر است.

شکل دیفرانسیلی قانون گوس، رابطه‌ی (ع-۷۴)، با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس و شکل انتگرالی قانون گوس به دست آمد. دیورژانس میدان الکتریکی یکی از ویژگی‌های سرشتی میدان الکتریکی را توصیف می‌کند (ویژگی سرشتی دیگر آن با کرل میدان توصیف می‌شود). در فصل ۲ میدان الکتریکی حاصل از یک توزیع بار را با استفاده از قانون کولمب به دست آوردیم و با رابطه‌ی (۲-۸۰) نشان دادیم. پرسش این است که آیا دیورژانس رابطه‌ی (۲-۸۰) هم به نتیجه‌ی (ع-۷۴) می‌انجامد و ویژگی سرشتی میدان الکتریکی را نمایان می‌کند؟ بهترین راه آزمودن آن محاسبه‌ی مستقیم دیورژانس رابطه‌ی (۲-۸۰) است. بگذارید همین کار را انجام دهیم و دوباره شکل دیفرانسیلی قانون گوس را به دست آوریم. توجه کنید که بررسی الکتروستاتیک را ما با دو اصل قانون کولمب و اصل برنهی آغاز کردیم. در واقع، هیچ چیز دیگری تاکنون بر این دو اصل نیفزودیم. بنابراین، آزمون پیش‌رو می‌تواند بر اعتبار رویکرد ما به الکتروستاتیک بیفزاید.

اجازه دهید رابطه‌ی (۲-۸۰) را یک بار دیگر و اندکی با جزییات بیشتر بنویسیم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau \quad (\text{ع-۸۸})$$

که در آن  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  است. یادآوری می‌کنم که بردار  $\mathbf{r}$  مکانی را نشان می‌دهد که در آنجا می‌خواهیم میدان را حساب کنیم و  $\mathbf{r}'$  بردار مکان بارهای چشمه است که میدان را به وجود می‌آورند. در رابطه‌ی (۲-۸۰) انتگرال‌گیری روی حجمی بود که توزیع بار را دربر داشت. در رابطه‌ی (ع-۸۸) این حجم با حجم تمام فضا ( $\infty$ ) جایگزین شده است. این جایگزینی رابطه‌ی (۲-۸۰) را تغییر نمی‌دهد، چون در فضای اضافی، ورای حجمی که بار را احاطه کرده است،  $\rho = 0$  است. هم‌چنین، توجه کنید که وابستگی میدان  $\mathbf{E}$  به  $\mathbf{r}$  در بردار  $\mathbf{r}$  نهفته است. بنابراین، داریم

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\infty} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau \quad (\text{ع-۸۹})$$

پس، مسئله به محاسبه‌ی  $\vec{\nabla} \cdot (\hat{\mathbf{r}}/r^2)$  کاهش می‌یابد. شناسه‌ی دیورژانس فقط به فاصله‌ی شعاعی  $r$  وابسته است و در نتیجه محاسبه‌ی آن در مختصات کروی ساده‌تر است. داریم

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0 \quad (4-90)$$

این محاسبه اگرچه ساده بود، اما یک ایراد جدی دارد: چون به  $r^2$  تقسیم شده است، در  $r = 0$  تکیه است و مقدارش بینهایت می‌شود. به بیان دیگر، دیورژانس  $\hat{\mathbf{r}}/r^2$  در همه جا صفر است به جز در  $r = 0$  که مقدارش بینهایت است. با وجود این، انتگرال  $\hat{\mathbf{r}}/r^2$  روی هر حجمی که  $r = 0$  را دربر دارد، مقدار ثابتی است (نگاه کنید به رابطه‌ی (4-88)). این درست همان شرایطی است که تابع دلتای دیراک را تعریف می‌کند. در نتیجه، برای این که این رفتار را به حساب بیاوریم، آن را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = \epsilon \pi \delta(\mathbf{r}) \quad (4-91)$$

پس،

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \int \epsilon \pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (4-92)$$

که همان رابطه‌ی (4-74) و شکل دیفرانسیلی قانون گوس است.

مثال ۱۶-۴ باز هم محاسبه‌ی توزیع بار: توزیع بار مربوط به هر یک از میدان‌های الکتریکی زیر را حساب کنید:

$$\mathbf{E} = k (rx \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} - rz \hat{\mathbf{k}}) \quad (الف) \quad (k \text{ مقدار ثابتی است})$$

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{C}{r^2} \hat{\mathbf{r}} & ; r \leq a \\ \frac{Cr}{a^2} \hat{\mathbf{r}} & ; r \leq a \end{cases} \quad (ب) \quad (C \text{ مقدار ثابتی است})$$

حل: (الف)

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 k \left[ \frac{\partial}{\partial x} (rx) + \frac{\partial}{\partial y} (y) - \frac{\partial}{\partial z} (rz) \right] = 0 \quad (4-93)$$

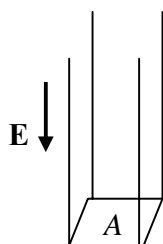
(ب)

$$\rho(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r)$$

$$\Rightarrow \rho(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{C}{r^2} \right) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (C) = 0 ; r > a \quad (4-94)$$

$$\rho = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{Cr}{a^2} \right) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Cr^3}{a^2} \right) = \frac{3Cr \epsilon_0}{a^2} ; r < a \quad (4-95)$$

مثال ۱۷-۴ بار الکتریکی هوای بالای سطح زمین: در روزهایی که هوا عادی است میدان الکتریکی در بالای سطح زمین با رابطه‌ی  $\mathbf{E} = -(ae^{-\alpha z} + be^{-\beta z}) \hat{\mathbf{z}}$  داده می‌شود که در آن  $a, b, \alpha, \beta$  مقادیر ثابت و مثبت اند و  $z$  ارتفاع از سطح زمین است. چگالی بار  $\rho(z)$  را به صورت تابعی از ارتفاع به دست آورید. بار کل موجود در یک ستون عمودی با سطح مقطع  $A$  از  $z = 0$  تا  $z = \infty$  را حساب کنید. شکل (4-40) را ببینید.



شکل ۴-۴۰ ستونی از هوا

حل: از شکل دیفرانسیلی قانون گوس داریم  $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}$ . بنابراین،

$$\rho(z) = \epsilon_0 (\alpha a e^{-az} + \beta b e^{-az}) \quad (\epsilon-96)$$

با استفاده از شکل انتگرالی قانون گوس و با توجه به شکل (۴-۴۰) دیده می‌شود که در روی سطح جانبی  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0$  (خط‌های میدان از سطح جانبی نمی‌گذرد، شار میدان در روی سطح‌های جانبی شکل (۴-۴۰) صفر است، چون میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  و بردار یکه‌ی سطح در روی آنها برهم عمودند). در روی سطح بالایی ستون هوا، میدان  $\mathbf{E} = 0$  (چون میدان به طور نمایی با ارتفاع فروافت می‌کند) است. پس،

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = -E(z=0)A = (a+b)A = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{\text{enc}} = \epsilon_0 (a+b)A \quad (\epsilon-97)$$

مثال ۱۸-۴ میدان استوانه‌ای باردار: مثال ۸-۴ را با استفاده از شکل دیفرانسیلی قانون گوس حل کنید. (توجه کنید که پیش‌تر گفتیم دیورژانس میدان برداری به تنهایی برای یافتن میدان کافی نیست؛ بلکه کرل میدان را نیز باید بدانیم. اما در این مثال چون میدان الکتریکی همواره در یک جهت است این نگرانی موردی ندارد و ما آن را بدهکار تقارن مسئله هستیم).

حل: دیورژانس در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (\epsilon-98)$$

محور  $z$  را در امتداد محور استوانه در نظر بگیرید. با توجه به تقارن مسئله  $E_z = E_\phi = 0$  اند (میدان تنها در راستای شعاعی است) و  $E_r$  فقط تابعی از  $r$  است؛ در نتیجه مشتق جزئی به مشتق کل تبدیل می‌شود.

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) + 0 + 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE_r) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(r) \quad (\epsilon-99)$$

این معادله دیفرانسیل را می‌توان با انتگرال‌گیری مستقیم حل کرد:

$$\int_{r=0}^r d(rE_r) = \int_{r=0}^r \frac{r'}{\epsilon_0} \rho(r') \Rightarrow rE_r - [rE_r]_{r=0} = \int_{r=0}^r \frac{r'}{\epsilon_0} \rho(r') dr' \quad (\epsilon-100)$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{[rE_r]_{r=0}}{r} + \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r r' (kr') dr'$$

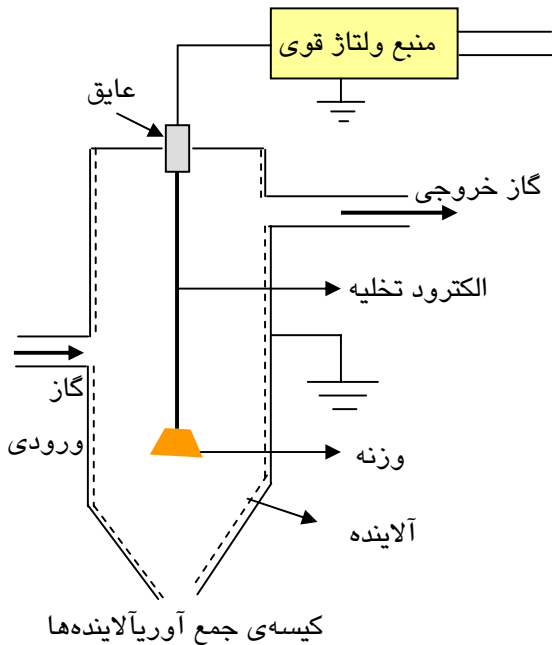
چون چگالی بار الکتریکی در  $r=0$  صفر است، شرط مرزی  $[rE_r]_{r=0} = 0$  مناسب است، زیرا در این صورت  $E_r(r)$  تابعی است که تکینگی ندارد. پس:

$$E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r kr'^2 dr' = \frac{1}{3\epsilon_0} kr^2 \quad (\epsilon-101)$$

که همان پاسخ رابطه‌ی (۴-۵۵) است و میدان الکتریک را در ناحیه‌ی درون استوانه به دست می‌دهد.

#### ۴-۴ یک کاربرد عملی: پالایشگاه الکترواستاتیک

پالایشگاه الکترواستاتیک وسیله‌ای است که می‌توان با استفاده از آن گاز، هوا و برخی شاره‌ها را از آلاینده‌های ریز زدود. این دستگاه، ذرات آلاینده را باردار می‌کند و سپس آنها را توسط میدان الکتریکی از گاز، هوا و یا شاره جدا می‌کند. از این وسیله در کارگاه‌ها برای پالایش هوا و در معیارهای کوچکتر برای پالایش هوای منازل استفاده می‌شود. در شکل (۴-۴۱) یک نمونه از



شکل ۴-۴۱ شمای پالایشگاه الکترواستاتیک

این دستگاه نشان داده شده است. این وسیله از یک استوانه بیرونی متصل به زمین تشکیل شده است و یک سیم با ولتاژ زیاد محور آن را تشکیل می‌دهد. گاز آلوده از یک انتها وارد می‌شود و ذرات آلاینده در بدنه متصل به زمین استوانه ته‌نشین می‌شوند و بالاخره گاز پالایش شده از انتهای دیگر خارج می‌شود. این وسیله به گونه زیر عمل می‌کند: با افزایش ولتاژ هاله‌ای از ذرات در اطراف سیم مرکزی تشکیل می‌شود. در هاله یون‌های مثبت و منفی تولید می‌شوند. یون‌های با یک علامت به سمت سیم جذب می‌شوند و یون‌های با علامت مخالف به سوی بیرون رانده می‌شوند. یون‌های رانده شده به ذرات آلاینده می‌چسبند و آنها را به سوی استوانه می‌برند. ولتاژ باید به اندازه کافی زیاد باشد تا بتواند هاله را حفظ کند، اما نباید آن قدر زیاد باشد که جرقه ایجاد کند. هاله را می‌توان با اعمال ولتاژ مثبت یا منفی ایجاد کرد. اما هاله‌ای که یون‌های رانده شده‌اش منفی است، کارایی بیشتری دارد و آستانه‌ی جرقه زنی آن بالاتر است. تشکیل

هاله‌ی منفی توسط الکترون‌های آزاد در اطراف سیم مرکزی آغاز می‌شود. اعمال میدان الکتریکی قوی در نزدیکی سیم مرکزی این الکترون‌های آزاد را می‌راند و از سیم مرکزی دور می‌کند. الکترون‌ها با مولکول‌های گاز برخورد می‌کنند. برخورد سبب تولید یون‌های مثبت و الکترون‌های آزاد بیشتری می‌شود. یون‌های مثبت جذب سیم می‌شوند. برخورد آنها با سیم، الکترون‌های بیشتری را آزاد می‌کند و با حرکت الکترون‌ها به سمت بیرون، یعنی ناحیه‌ای که میدان الکتریکی ضعیف‌تر است، به مولکول‌های گاز می‌چسبند و یون‌های منفی تشکیل می‌دهند. این یون‌های منفی در ناحیه بیرون هاله انباشته می‌شوند و حرکت آنها به سمت استوانه، جریان هاله‌ای ایجاد می‌کند.

برای پالایشگاه الکترواستاتیک استوانه‌ای، میدان الکتریکی را در ناحیه بیرون هاله که تنها یک نوع یون وجود دارد، می‌توان به آسانی حساب کرد. در مثال ۱۸-۴ و در رابطه (۴-۹۹) دیدیم که

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE_r) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \quad (4-102)$$

در اینجا  $\rho(r)$  چگالی بارهای حجمی است که یون‌ها به وجود آورده‌اند و میدان الکتریکی هم تنها در راستای شعاع است. حرکت یون‌ها در میدان الکتریکی در اثر برخوردهای پی‌درپی شان با مولکول‌های گاز در طول مسیر، کند می‌شود. به‌طور تجربی، سرعت سوق میانگین یون‌ها با شدت میدان متناسب است:

$$v = bE \quad (4-103)$$

که در آن  $b$  ثابت سوق است.

بار موجود در یک پوسته استوانه‌ای به طول  $l$ ، شعاع  $r$  و ضخامت  $dr$  برابر  $dq = \rho l(2\pi r dr)$  است.

دربازه زمانی  $dt$  این مقدار بار به طور شعاعی از سطح استوانه‌ای به شعاع  $r$  می‌گذرند و در واحد طول استوانه جریان الکتریکی  $i$  تولید می‌کند (در آینده خواهیم دید که جریان الکتریکی با  $i \equiv dq/dt$  تعریف می‌شود). پس،

$$i \equiv \frac{\lambda dq}{dt} = \int \pi r \rho \frac{dr}{dt} = \int \pi r \rho v = \int \pi r \rho b E \quad (4-104)$$

برای جریان یکنواخت بارها،  $i$  مقداری ثابت و مستقل از  $r$  است. بنابراین، می‌توان  $\rho$  را از رابطه (4-102) حذف کرد. داریم

$$\frac{\lambda}{r} \frac{d}{dr}(rE) = \frac{i}{\int \pi \epsilon_0 b} \left( \frac{\lambda}{rE} \right) \Rightarrow (rE) d(rE) = \frac{i}{\int \pi \epsilon_0 b} r dr \quad (4-105)$$

با انتگرال‌گیری از نقطه‌ای که درست در پس‌هاله است ( $r = r_1$ ,  $E = E_1$ ) تا فاصله  $r$ ، خواهیم داشت:

$$E^2 = E_1^2 \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 + \frac{i}{\int \pi \epsilon_0 b} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \quad (4-106)$$

به‌ازای  $r$  و  $i$  بزرگ، میدان الکتریکی به مقدار ثابتی میل می‌کند و تقریب بسیار خوبی برای مقاصد عملی به‌دست می‌دهد.

$$E = \left( \frac{\lambda}{\int \pi \epsilon_0 b} \right)^{1/2} \quad (4-107)$$

#### ۴-۵ قضیه‌ی ارنشاو

قضیه ارنشاو نتیجه‌ای سودمندی از قانون گوس است و می‌توان آن را به‌صورت زیر بیان کرد:

**قضیه ۴-۱:** در ناحیه‌ای از فضا که چگالی بار صفر است، نمی‌توان یک بار آزمون را فقط با نیروهای الکترواستاتیکی در ترازمندی پایدار نگه داشت.

بیان هم‌ارز این است که بگوییم: با پیکربندی الکترواستاتیکی نمی‌توان برای بار آزمون شرایط ترازمندی پایدار ایجاد کرد. این بدان معنی است که می‌توان یک بار نقطه‌ای را در ترازمندی ناپایدار نگه داشت. برای مثال، یک بار نقطه‌ای را در نظر بگیرید که درست در نیم‌راه بین دو بار الکتریکی برابر ساکن قرار دارد. البته به باری که در این مکان است، نیروی خالص صفر وارد می‌شود و در نتیجه، در حالت ترازمندی است. این ترازمندی ناپایدار است. اندک اختلال در این ترازمندی سبب می‌شود که بار دیگر به مکان ترازمندی اولیه‌اش برنگردد.

قضیه‌ی ارنشاو را به زبان پتانسیل هم بیان خواهیم کرد. در اینجا با استفاده از برهان خلف آن را ثابت خواهیم کرد. یعنی فرض می‌کنیم در نقطه  $P$  با شرایط زیر، خلاف قضیه درست است:

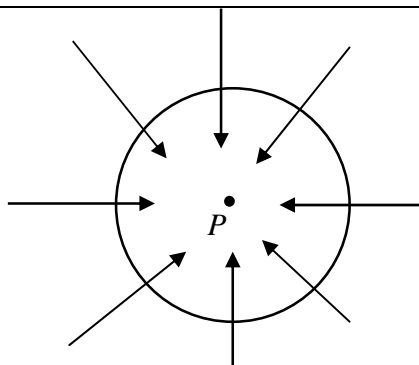
(۱) در ناحیه‌ی کوچکی در همسایگی نقطه‌ی  $P$  هیچ بار الکتریکی، به‌جز بار آزمون، وجود ندارد.

(۲) در نقطه‌ی  $P$  میدان الکتریکی  $\mathbf{E} = 0$  است؛ چون نقطه‌ی  $P$  نقطه‌ی ترازمندی است (در آنجا نیروی الکتریکی خالص صفر است).

۳- فرض کنید در نقطه‌ی  $P$  بار آزمون مثبت در ترازمندی پایدار است. در فاصله‌ی اندکی از نقطه‌ی  $P$  جهت میدان همانند شکل (4-41) به سوی نقطه‌ی  $P$  است. اگر بار آزمون منفی باشد جهت میدان برون سو است.

**اثبات:** اگر شکل انتگرالی قانون گوس را برای ناحیه‌ی کوچکی در همسایگی نقطه‌ی  $P$  به‌کار ببریم، شرط‌های (۲) و (۳) لازم می‌دارند که در درون سطح گوس بار الکتریکی وجود داشته باشد. اما این نتیجه شرط نخست را نقض می‌کند. بنابراین، قضیه

♦ Earnshaw's Theorem



شکل ۴-۴۲ شرط ترازمندی پایدار بار مثبت

اثبات می‌شود. (توجه کنید که ما حالت بدیهی  $E = 0$  در همه جا را در نظر نگرفتیم). خط‌های میدان در شکل (۴-۴۲) خطوط میدان بار نقطه‌ای در  $P$  است. اما در نقطه‌ی  $P$  باری وجود ندارد (توجه داشته باشید که بار آزمون اختلالی در میدان حاصل از بارهای دیگر ایجاد نمی‌کند بنابراین، تا جایی که به این قضیه مربوط می‌شود میدان  $E$  را بار آزمون در نقطه‌ی  $P$  ایجاد نکرده است.) و در نتیجه، خط‌های میدان این آرایه نمی‌توانند وجود داشته باشند. میدان الکتریکی باید در بعضی جهت‌ها به سوی  $P$  و در جهت‌های دیگر بدور از  $P$  باشد.

قضیه‌ی ارنشاو را به زبان پتانسیل هم می‌توان بیان کرد. در فصل ۳ دیدیم که پتانسیل  $V$  به صورت  $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  تعریف می‌شود. چون با دور شدن از نقطه‌ی  $P$  پتانسیل  $V$  افزایش یا کاهش پیدا می‌کند (بسته به این که در چه سویی از نقطه‌ی  $P$  دور شویم)، می‌توان نتیجه گرفت که:

در ناحیه‌ای از فضا که تهی از بار الکتریکی است، پتانسیل بیشینه یا کمینه ندارد.

که بیان قضیه‌ی ارنشاو به زبان پتانسیل است.

مثال ۴-۱۹ ترازمندی پایدار بار: بار مثبت  $Q$  در فاصله  $d$  از بالای یک صفحه‌ی تخت بینهایت گسترده با چگالی بار سطحی  $\sigma$  قرار دارد.

(الف): رابطه‌ای برداری برحسب مختصات  $(x, y, z)$  برای میدان الکتریکی این آرایه بیابید. (مکان بار  $Q$  را در  $x = y = 0$  و  $z = d$  برگزینید).

(ب): مختصات  $(x, y, z)$  نقطه‌ای را پیدا کنید که در آن نقطه یک بار آزمون در ترازمندی است. آیا ترازمندی در این نقطه پایدار است یا ناپایدار؟

حل (الف): میدان الکتریکی را صفحه‌ی باردار و بار  $Q$  به وجود می‌آورند. بنابراین، میدان الکتریکی جمع برداری میدان‌های صفحه،  $\mathbf{E}_0 = (\sigma/2\epsilon_0)\hat{\mathbf{z}}$  و میدان بار  $Q$  است. پس داریم

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{z}}{z} \quad (4-108)$$

$$\mathbf{E}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + (z-d) \hat{\mathbf{z}}}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \quad (4-109)$$

بنابراین، نیروی وارد به بار آزمون عبارت است از

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}}}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} + \left\{ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(z-d)}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \right\} \hat{\mathbf{z}} \quad (4-110)$$

(ب): در حالت ترازمندی  $\mathbf{E} = 0$  است. در نتیجه، باید داشته باشیم:

$$E_x = 0 \Rightarrow x = 0 ; E_y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$E_z = 0 \Rightarrow \frac{Q}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{1}{(d-z)^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow z = d - \sqrt{\frac{Q}{2\pi\sigma}} ; d^2 > \frac{Q}{2\pi\sigma} \quad (4-111)$$

بنابه قضیهی ارنشاو، ترازمندی بار در این نقطه ناپایدار است. به‌ازای  $d^2 < Q/2\pi\sigma$  نقطه‌ی ترازمندی وجود ندارد.

#### ۴-۶ رساناها

##### ۴-۶-۱ تعریف

مواد پیرامون ما از اتم‌ها و مولکول‌ها ساخته شده‌اند. مواد را می‌توان برحسب ویژگی‌هایشان دسته‌بندی کرد. جسم سخت بر این اساس تعریف می‌شود که فاصله‌ی دو نقطه‌ی آن همواره مقدار ثابتی است. در مقابل، شاره این ویژگی را ندارد و فاصله‌ی بین مولکول‌های آن (بین دو نقطه‌ی محیط شاره) ثابت نیست. می‌توان اجسام را بر اساس رسانندگی گرمایی‌شان دسته‌بندی کرد. در این درس می‌خواهیم مواد را بر پایه‌ی ساختار اتمی و مولکولی آنها و واکنش‌شان در برابر میدان الکتریکی دسته‌بندی کنیم.

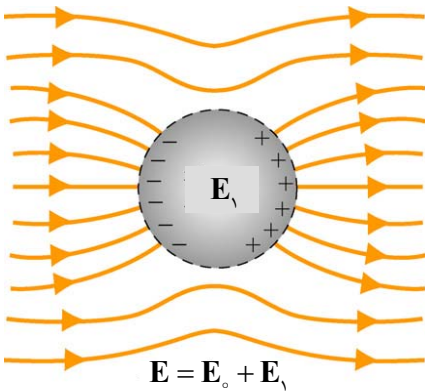
در موادی مانند شیشه یا کاغذ، الکترون‌ها به اتم‌ها وابسته‌اند. پیوند میان اتم و الکترون‌های به‌گونه‌ای است که الکترون نمی‌تواند آزادانه حرکت کند. حداکثر حرکتی که الکترون‌ها، بدون جدا شدن از اتم خود، می‌توانند داشته باشند، نوسان‌های جزئی حول اتم است. این‌گونه مواد را مواد نارسانا یا عایق می‌نامند. در مقابل، گروه دیگری از مواد وجود دارد که ساختار اتمی و مولکولی‌شان اجازه می‌دهد تا به ازای هر اتم یا مولکول یک یا دو الکترون از آن جدا و آزادانه در گوشت ماده حرکت کنند. این الکترون‌ها به اتم و مولکول خاصی وابسته نیستند (در رساناهای مایع مانند آب نمک، یون‌ها آزادند تا حرکت کنند). این دسته از مواد را رسانا می‌نامند. اگر این محیط‌های رسانا تحت تاثیر میدان الکتریکی بیرونی قرار گیرند در آنها جریان بار الکتریکی به وجود می‌آید. رسانای آرمانی محیطی است که بینهایت الکترون کاملاً آزاد دارد. اگرچه در واقعیت رسانای آرمانی وجود ندارد ولی بعضی مواد به رسانای آرمانی بسیار نزدیک‌اند. با این تعریف رسانا، می‌توانیم ویژگی‌های رسانای آرمانی را بررسی کنیم. رساناها ویژگی‌های الکتریکی خاصی دارند که در زیر آنها را برخواهیم شمرد. تعریف بالا از رسانا هنگامی که با این ویژگی‌ها همراه شود تعریف درستی خواهد بود.

##### ۴-۶-۲ ویژگی‌های الکتریکی رسانا

###### ۱: میدان الکتریکی در درون رسانا صفر است.

منظور ما از درون رسانا "گوشت" رساناست و نه فضایی که توسط یک رسانا احاطه شده است. فضایی که در درون یک سطح کروی فلزی احاطه شده است "درون رسانا" نیست و لزومی ندارد که میدان در آنجا صفر باشد ولی حتماً میدان در درون یک گوی فلزی توپر صفر است. چرا؟ اگر کره‌ی رسانای توپری را در میدان الکتریکی خارجی  $E_0$  قرار دهید (لازم نیست که رسانا شکل کروی داشته باشد، هر قطعه‌ی رسانا، با هر شکل، همان رفتار را از خود نشان می‌دهد. گزینه‌ی کره در اینجا برای نشان دادن برخی نکات آشناست). میدان الکتریکی  $E_0$  به بارهای الکتریکی آزاد رسانا نیرو وارد خواهد شد. این نیرو بارهای آزاد مثبت را در راستای میدان وادار به حرکت خواهد کرد و آنها را به سمت راست و بارهای منفی را به سمت چپ خواهد راند. (در عمل تنها بارهای منفی - الکترون‌ها - جابه‌جا می‌شوند ولی با نبود بار منفی در سمت راست، بار خالص در

آنجا جا مثبت می‌شود. به عبارت دیگر نبود بار منفی در سمت راست معادل وجود بار مثبت در آن سمت است.) هنگامی که این بارها به لبه‌های رسانا می‌رسند، در آنجا انباشته می‌شوند: بارهای مثبت در لبه‌ی سمت راست و بارهای منفی در لبه‌ی سمت



شکل ۴-۳ کوی رسانا در میدان الکتریکی خارجی

چپ قرار می‌گیرند. این بارهای القایی\* یا بارهای پیوندی† میدان خودشان،  $E_1$ ، را در خلاف جهت میدان خارجی  $E_0$  به وجود می‌آورند (شکل ۴-۳ را ببینید). با انباشته شدن بارها در دو سو، میدان  $E_1$  قوی‌تر می‌شود تا این که با  $E_0$  برابر شود. یعنی میدان بارهای القایی می‌کوشد تا میدان اولیه‌ی  $E_0$  را حذف کند. انباشت بارها در دو طرف رسانا ادامه می‌یابد تا این که حذف شدن میدان‌ها کامل و میدان الکتریکی برآیند در درون رسانا دقیقاً صفر شود. این فرآیند خیلی سریع است. پس، در حضور میدان خارجی  $E_0$  بارهای مثبت و منفی آزاد رسانا، آرایش خود را چنان تغییر می‌دهند که از نفوذ میدان الکتریکی به درون رسانا جلوگیری کنند. در ترازمندی الکتروستاتیکی، میدان الکتریکی در گوشت رسانا،  $E_{in} = E_0 + E_1 = 0$ ، باید صفر شود. در بیرون رسانا میدان الکتریکی  $E_1$  ناشی از بارهای القایی مانند میدان یک دوقطبی الکتریکی است و میدان کل در بیرون از "گوشت" رسانا برابر  $E_{Out} = E_0 + E_1$  است که صفر نیست.

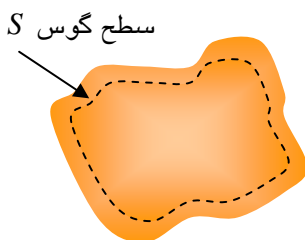
۲: چگالی بار الکتریکی خالص در درون رسانا صفر است.

این گزاره نتیجه‌ی مستقیم قانون گوس است. چون  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$  است، اگر در درون رسانا  $\mathbf{E} = 0$  باشد آنگاه  $\rho = 0$  است. توجه داشته باشید که این ویژگی بدان معنی نیست که در درون رسانا بار وجود ندارد، بلکه به این معنی است که در هر نقطه‌ی درون رسانا مقدار بارهای مثبت و منفی دقیقاً با هم برابرند و در نتیجه چگالی بار خالص در درون رسانا صفر است.

۳: بارهای اضافی در سطح رسانا پخش می‌شوند.

پیش از این که به دلیل این گزاره بیردازیم بهتر است منظور خود را از "بار اضافی" توضیح دهیم. یک رسانا مانند هر ماده‌ی معمولی از نظر بار الکتریکی بی‌بار است، چون اتم از نظر باری خنثی است. اما می‌توان آن را به روش‌های گوناگون باردار کرد: می‌توان بار الکتریکی به آن افزود یا اتم‌های آن را یونیده کرد. چون چگالی بار الکتریکی خالص باید در گوشت رسانا صفر باشد، پس از آنکه در گوشت رسانا این وضعیت به وجود آمد، آنگاه هر بار اضافی باقی‌مانده (که ممکن است مثبت یا منفی باشد) در سطح رسانا پخش می‌شود.

یک دلیل ساده این است که چون بارها در حجم (یا گوشت) رسانا نمی‌تواند باقی بماند، جایی جز سطح آن وجود ندارد. اما این دلیل چندان خوبی نیست، می‌توان دلیل بهتری را بیان کرد. فرض کنید در



شکل ۴-۴ سطح گوس در درون رسانا

درون رسانا بار خالص اضافی وجود دارد. در درون رسانا سطح گوسی برابر شکل (۴-۴) را در نظر بگیرید. بنا به قانون گوس

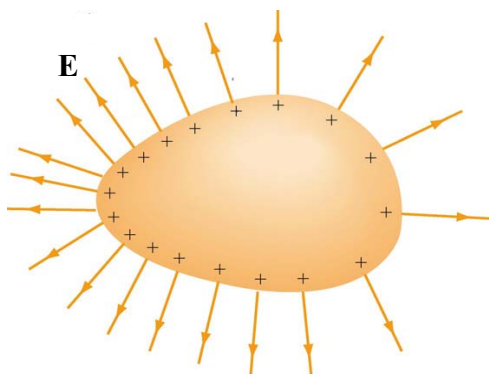
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (4-112)$$

چون سمت راست این رابطه صفر نیست ( $q_{enc} \neq 0$ ) بنابراین، میدان هم در

\* induced charges  
† bound charges

درون رسانا صفر نخواهد بود و این با ویژگی نخست رسانا ناسازگار است. در نتیجه بارهای اضافی به ناگزیر باید در سطح رسانا توزیع شوند. دلیل دیگر از پیکربندی انرژی به دست می‌آید. هر سامانه‌ی آزاد دینامیکی وقتی پایدار است که انرژی اش در کمینه‌ی ممکن باشد. توزیع بار در سطح رسانا این حالت را فراهم می‌کند. آنچه را که ویژگی ۳ بیان می‌کند این است که انرژی الکتروستاتیکی جسمی با بار کل  $Q$  و با شکل خاصی وقتی کمینه است که بارها به طور یکنواخت در روی سطح آن توزیع شوند. پس از آنکه محاسبه‌ی انرژی آرایه‌ی باری را آموختیم، در فصل ۵ نشان خواهیم داد که در کره‌ای به شعاع  $r$  و بار کل  $Q$  اگر تمامی بار در سطح آن توزیع شود انرژی کمتر از وقتی است که همان بار در حجم کره توزیع شود.

۴ در تمام نقاط روی سطح رسانا میدان الکتریکی  $E$  بر سطح رسانا عمود است. به بیان دیگر مولفه‌ی مماسی میدان در سطح رسانا صفر است



شکل ۴-۴۵ میدان الکتریکی بر سطح رسانا عمود است

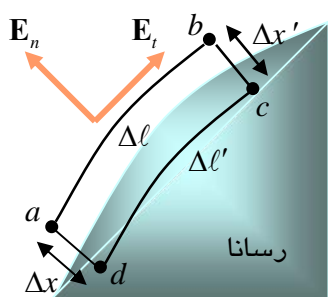
این وضعیت در شکل (۴-۴۵) نشان داده شده است. اگر میدان در آغاز مولفه‌ی مماس بر رسانا داشته باشد، این مولفه سبب می‌شود که بارهای الکتریکی رسانا آرایش خود را تغییر دهند تا مولفه‌ی مماسی را در روی سطح رسانا حذف کنند. با این کار از نفوذ میدان به درون رسانا جلوگیری می‌کنند تا در درون رسانا میدان صفر باقی بماند. اگر میدان بر سطح رسانا عمود باشد، بارها نمی‌توانند شارش داشته باشند؛ چون به جسم رسانا محدود اند.

اینک بگذارید نشان دهیم که مولفه‌ی مماسی میدان در سطح رسانا صفر است. دیدیم که میدان الکتریکی در گوشت رسانای منزوی صفر است و بنا

به قانون گوس، بارهای اضافی (مانند بارهایی که به آن تزریق شده باشند) در سطح رسانا توزیع می‌شوند. انتگرال خط  $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  را در روی خم بسته‌ی شکل (۴-۴۶) در نظر بگیرید. چون میدان الکتریکی یک میدان پایستار است، انتگرال خط آن روی خم بسته‌ی  $abcd$  صفر است:

$$\oint_{abcd} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_t (\Delta\ell) - E_n (\Delta x') + 0 (\Delta\ell') + E_n (\Delta x) = 0 \quad (4-113)$$

$E_n$  مولفه‌ی عمودی و  $E_t$  مولفه‌ی مماسی میدان اند و قسمت  $ab$  را موازی با  $E_t$  برگزیدیم. ضرب  $\Delta\ell'$  در رابطه‌ی بالا به



شکل ۴-۴۶ مولفه‌های مماسی و عمودی میدان در بیرون رسانا

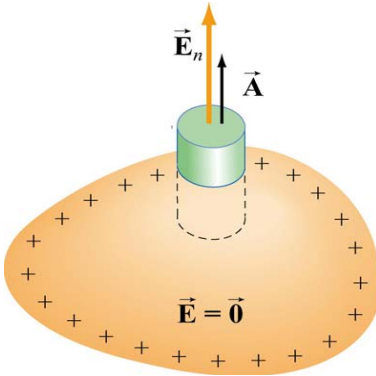
این دلیل صفر است که پاره مسیر  $cd$  در درون رساناست و در آنجا میدان صفر است.

در حالت حدی  $\Delta x \rightarrow 0$  و  $\Delta x' \rightarrow 0$  (یعنی در سطح رسانا) جمله‌های دوم و چهارم صفر می‌شوند:  $E_n (\Delta x) = E_n (\Delta x') = 0$ . چون  $\Delta\ell$  طولی محدود و غیر صفر است، نتیجه می‌گیریم که مولفه‌ی مماسی میدان،  $E_t$ ، باید در سطح رسانا صفر باشد. این نتیجه بدان معنی است که سطح رسانایی که در ترازمندی الکتروستاتیک است، یک سطح هم‌پتانسیل است. برای اثبات این ادعا، دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  را در روی سطح یک رسانا در نظر بگیرید. چون مولفه‌ی مماسی در سطح رسانا صفر است،  $E_t = 0$ ، اختلاف پتانسیل بین این دو نقطه هم صفر است. یعنی داریم

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4-114)$$

(چون  $\mathbf{E}$  بر  $d\mathbf{s}$  عمود است.) و بنابراین،  $V_A = V_B$  و دو نقطه در پتانسیل یکسان قرار دارند.

تاکنون نشان دادیم که میدان در گوشت رسانا صفر است و مقدار آن در بیرون رسانا به شکل جسم رسانا و بارهای روی آن بستگی دارد. میدان الکتریکی درست در روی رسانا چگونه است؟ از شکل انتگرالی قانون گوس می‌توان استفاده و میدان الکتریکی را درست در بیرون رسانا حساب کرد: سطح گوس استوانه‌ای را در شکل (4-47) در نظر بگیرید. بخشی از این سطح گوس در درون رسانا قرار دارد. در آنجا میدان صفر است. شار گذرنده از این سطح گوس را حساب کنید. داریم



شکل 4-47 سطح گوس برای محاسبه‌ی میدان درست در بیرون سطح رسانا

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E_n A + (\circ) \cdot A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4-115)$$

این نتیجه به شکل جسم رسانا بستگی ندارد.

همانند مثال‌های صفحه‌ی بینهایت گسترده و پوسته‌ی کروی، دیده می‌شود که در اینجا هم مولفه‌ی عمودی میدان در روی سطح رسانا گسسته است؛ یعنی اندازه‌ی میدان الکتریکی درست در زیر سطح صفر و درست در بیرون آن  $\sigma/\epsilon_0$  است:

$$\Delta E_n = E_n^{(+)} - E_n^{(-)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - 0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4-116)$$

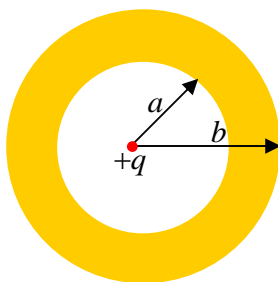
اما مولفه‌ی افقی میدان از این گسستگی رنج نمی‌برد. مولفه‌ی افقی میدان درست در زیر و درست در بالای سطح رسانا صفر است.

این‌ها ویژگی‌های رسانا بودند. تمامی ابزار محاسباتی میدان الکتریکی (قانون کولمب، قانون گوس) را که تاکنون آموخته‌ایم، با در نظر گرفتن این ویژگی‌ها، در محیط‌های رسانا هم صادق اند.

### 3-6-4 بارهای القایی

یک پوسته‌ی کروی کلفت رسانا به شعاع درونی  $a$  و شعاع بیرونی  $b$  را در نظر بگیرید. پوسته از نظر بار الکتریکی خنثی است.

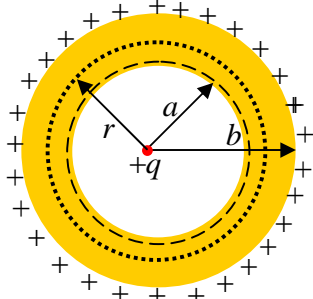
بار نقطه‌ای  $+q$  را در مرکز پوسته‌ی کروی (کاواک) قرار دهید (شکل 4-48). بار  $+q$  در درون کاواک میدان الکتریکی ایجاد می‌کند و در نتیجه، پوسته‌ی رسانا در این میدان الکتریکی قرار دارد. میدان الکتریکی سبب می‌شود که بخشی از بارهای منفی موجود در گوشت رسانا به سمت سطح درونی پوسته حرکت و در روی آن انباشته شوند تا از نفوذ میدان به درون رسانا جلوگیری شود (البته انباشت بار در روی سطح درونی تا هنگامی ادامه می‌یابد که میدان در رسانا صفر شود). بنابراین، در گوشت رسانا مقداری بار مثبت خالص پدید می‌آید (بارهای اضافی). چون در گوشت رسانا  $\rho = 0$  است، بارهای مثبت خالص هم مجبورند روی سطح بیرونی پوسته انباشته شوند. بارهایی که به این ترتیب



شکل 4-48 پوسته‌ی رسانا و بار  $+q$  در مرکز آن

در سطح درونی و بیرونی رسانا جمع می‌شوند، بارهای القایی نامیده می‌شوند در شکل (4-49) بارهای القایی نشان داده

شده اند. پرسش: در روی هر یک از سطح‌های درونی و بیرونی پوسته‌ی رسانای کروی چه مقدار بار القایی وجود دارد؟ اگر یک سطح گوس کروی به شعاع  $a < r < b$  را در نظر بگیریم، می‌بینیم که بارهای موجود در درون آن عبارت از بار  $+q$  که در مرکز است و بارهای القایی  $q'$  که در سطح درونی رسانا انباشته شده اند. با توجه به قانون گوس می‌توان نوشت



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{enc}} = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q') \quad (4-117)$$

که در آن  $q'$  بار کل القایی در سطح درونی پوسته است. چون میدان در گوشت رسانا صفر است، انتگرال سمت چپ رابطه‌ی بالا هم برابر صفر است و در نتیجه

$$0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{enc}} = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q') \Rightarrow q' = -q \quad (4-118)$$

شکل ۴۹-۴ پوسته‌ی رسانا و

بار  $+q$  در مرکز آن

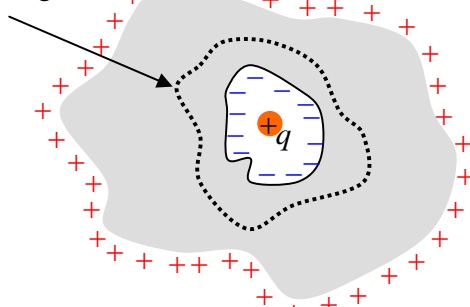
و چگالی بارهای القایی در روی سطح درونی (کره‌ای به شعاع  $a$ ) پوسته برابر است با

$$\sigma_a = -\frac{q}{\epsilon \pi a^2} \quad (4-119)$$

این مقدار باری است که در پوسته جابه‌جا و در سطح درونی آن توزیع شده است تا از نفوذ میدان الکتریکی بار  $+q$  به گوشت رسانا جلوگیری کند. این فرایند سبب می‌شود که به همین اندازه بار مثبت در پوسته پدید بیاید. این بارهای اضافی در سطح بیرونی پوسته توزیع می‌شوند. پس، چگالی بارهای القایی در سطح بیرونی پوسته‌ی رسانا عبارت است از

$$\sigma_b = +\frac{q}{\epsilon \pi a^2} \quad (4-120)$$

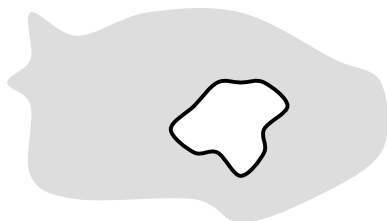
سطح گوس



شکل ۵۰-۴ رسانا و کاواک

مثال ۲۰-۴ رسانای باردار و کاواک: رسانایی همانند شکل (۵۰-۴) دارای بار خالص  $+Q$  است. در این رسانا کاواکی وجود دارد و در درون کاواک بار  $q$  قرار دارد. چه مقدار بار در سطح بیرونی رسانا وجود دارد؟

حل: میدان الکتریکی در گوشت رسانا باید صفر باشد. بنابراین، بار کل درون سطح گوس در شکل (۵۰-۴) هم باید صفر شود. این بدان معنی است که بار  $-q$  در دیواره‌های کاواک القاء شده است. چون بار رسانا برابر  $Q$  است، پس بار کل در روی سطح بیرونی رسانا  $Q + q$  است.

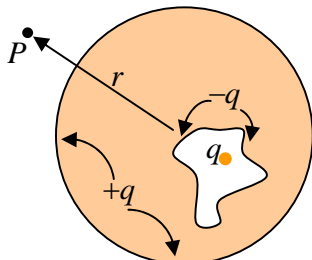


شکل ۵۱-۴ رسانایی با کاواک تهی

یکی از ویژگی‌های شگفت‌انگیز رساناها این است که اگر در درون رسانا کاواک خالی وجود داشته باشد، (مانند شکل (۵۱-۴)) میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  هم در درون کاواک صفر است. این واقعیت مستقل از این است که شکل کاواک و رسانا چگونه اند و رسانا چگونه باردار شده است. این ویژگی را می‌توان با استفاده از قضیه ارنشاو نشان داد. کافی است قضیه را در مورد کاواک به کار ببریم. چون کاواک تهی است؛ قضیه‌ی ارنشاو می‌گوید در این ناحیه پتانسیل نمی‌تواند

بیشینه یا کمینه داشته باشد. دیواره‌های کاواک سطح هم‌پتانسل اند، چون در گوشت رسانا  $E = 0$  است. بنابراین، اگر پتانسیل در فضای کاواک متفاوت از مقدار آن در دیواره‌ها باشد، باید در نقطه‌ای به بیشینه یا کمینه‌ی خود برسد. اما این وضعیت با قضیه‌ی ارنشاو در تناقض قرار می‌گیرد. پس، پتانسیل باید در همه جای کاواک مقدار ثابتی باشد. بنابراین، میدان در درون کاواک خالی  $E = -\nabla V = 0$  است. بدیهی است که در روی دیواره‌های کاواک هم توزیع بار سطحی نمی‌تواند وجود داشته باشد. اگر رسانا باردار باشد، این بارها باید در روی سطح بیرونی رسانا توزیع شوند تا میدان الکتریکی در همه جای آن، از جمله در درون کاواک، صفر شود. توجه کنید که این وضعیت فقط برای کاواک خالی از بار الکتریکی درست است. در مثال‌های ۱۹-۴ و ۲۰-۴ این وضعیت وجود نداشت و در سطح درونی رسانا هم بار القایی وجود داشت. بگذارید این نکته را اندکی بیشتر توضیح بدهم. فرض کنید در درون کاواک شکل (۵۱-۴) رسانای باردار  $A$  را قرار داده باشیم؛ در این صورت میدان الکتریکی در درون کاواک دیگر صفر نیست و همان‌گونه که در آغاز این بخش دیدیم در روی دیواره‌های کاواک (سطح درونی رسانای اصلی) مقداری بار سطحی القاء می‌شود، همان‌طور که روی سطح بیرونی رسانای اصلی بار سطحی القاء می‌شود. میدان درون کاواک را می‌توان ترکیب دو میدان دانست: (۱)  $E_{ext}$  که تمام بارهای خارج از کاواک، از جمله بارهای القایی روی سطح بیرونی رسانای اصلی و سایر بارها که ممکن است در خارج رسانا وجود داشته باشند، به وجود می‌آورند. (۲)  $E_{int}$  که بارهای موجود در روی رسانای  $A$  واقع در داخل کاواک و بارهای القایی روی سطح کاوک ایجاد می‌کنند. اما، چون همواره  $E_{ext}$  صفر است (زیرا این میدان نمی‌تواند از گوشت رسانا گذشته و به کاواک برسد) پس مشاهده می‌کنیم که میدان در درون کاواک دقیقاً همانند میدان حاصل از بارهای موجود در روی رسانای  $A$  است. یعنی رسانای  $A$  از اثر بارها و میدان‌های خارجی حفاظت شده است. به بیان دیگر رسانای اصلی سپری برای محافظت رسانای  $A$  از اثرهای الکتریکی میدان‌های بیرونی است. دقیقاً به این دلیل است که ابزار حساس الکتریکی و الکترونیکی در جعبه‌های فلزی جا سازی می‌شوند. برای نمونه جعبه‌ی کامپیوترهای شخصی را از جنس فلز انتخاب می‌کنند. در مکان‌هایی که آذرخش وجود دارد، بهتر است که خود را در درون اتومبیل، از خطر صاعقه محافظت کنیم تا اینکه در فضای آزاد باشیم (البته اگر صاعقه به بدنه‌ی اتومبیل برخورد کند ممکن است آن را تا حد سوزان گرم کند ولی برق گرفتگی نخواهیم داشت، اما خطر سوختگی و کباب شدن وجود دارد).

مایکل فاراده\* در سال ۱۸۳۸ با آزمایشی وجود سپر الکتروستاتیک را به نمایش گذاشت. او قفس فلزی با سطح چهار مترمربع ساخت و آن را بر روی پایه‌های عایق قرار داد. سپس فاراده در درون قفس قرار گرفت و با ایجاد تخلیه‌ی جرقه‌ای با ولتاژ بالا، قفس را باردار کرد. حتی با چنان ولتاژ بالا، فاراده در درون قفس میدان الکتریکی نیافت. درون قفس با جنس رسانای دیواره‌ها از اثر میدان‌ها و بارهای الکتریکی بیرونی در امان مانده است.



شکل ۵۲-۴ میدان رسانا با کاواک ناتهی

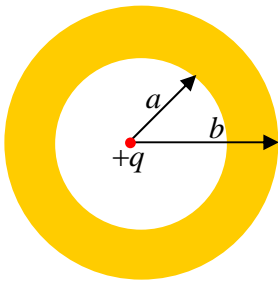
مثال ۲۱-۴ کره‌ی رسانا با کاواک ناتھی: در شکل (۵۲-۴) کره‌ی رسانای بدون بار الکتریکی نشان داده شده است. در درون کره، کاواکی به شکل دلخواه وجود دارد. درون کاواک بار  $q$  قرار دارد. میدان الکتریکی را در بیرون کره (در نقطه‌ی  $P$ ) حساب کنید؟

حل: در نگاه نخست شاید به نظر برسد که پاسخ به شکل کاواک و مکان بار  $+q$  در درون آن بستگی دارد. اما این نظر نادرست است. پاسخ  $(q/\epsilon\pi\epsilon_0 r^2)\hat{r}$  است.

\* Michael Faraday

این پاسخ به شکل کاواک و مکان بار درون آن بستگی ندارد. رسانا تمام اطلاعات مربوط به ماهیت کاواک را از ما (برای بیرون کره) می‌پوشاند و تنها بار کل درون کاواک را آشکار می‌کند. چگونه؟ بار  $+q$  در درون کاواک بار  $-q$  را روی دیواره‌ی کاواک القاء می‌کند. این بار القایی چنان توزیع می‌شود که میدان آن، در تمام نقاط بیرون کاواک (یعنی در درون رسانا) اثر میدان بار  $+q$  را از بین ببرد. چون رسانا بار خالص ندارد، بارهای اضافی  $+q$  مجبورند در سطح بیرونی کره به‌طور یکنواخت توزیع شوند. این توزیع یکنواخت است زیرا آثار غیر تقارنی بار نقطه‌ای  $+q$  توسط بار القایی  $-q$  در سطح کاواک از بین می‌رود. بنابراین، آنچه باقی می‌ماند میدان بارهای اضافی  $+q$  در روی سطح بیرونی کره است که میدان آن همان‌گونه که گفته شد و از قانون گوس برمی‌آید، برابر  $\hat{r}(q/\epsilon\pi\epsilon_0 r^2)$  است.

مثال ۲۲-۴ میدان الکتریکی پوسته‌ی رسانای کروی: پوسته‌ی کروی شکل (۴-۵۳) را در نظر بگیرید. شعاع درونی و بیرونی آن به ترتیب  $a$  و  $b$  است. در مرکز پوسته بار  $+q$  قرار دارد. میدان الکتریکی را در ناحیه‌های (الف):  $r < a$ ، (ب):  $a < r < b$  و (پ):  $r > b$  حساب کنید.



شکل ۴-۵۳ پوسته‌ی رسانا و بار  $+q$  در مرکز آن

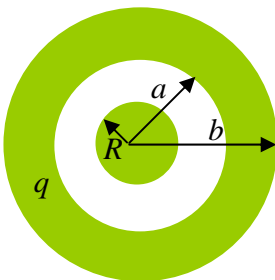
حل: پاسخ مسئله با استفاده از قانون گوس به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} ; \quad r < a \quad (۴-۱۲۱)$$

$$\mathbf{E} = 0, \quad a < r < b \quad \text{درون رسانا} \quad (۴-۱۲۲)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}, \quad r > b \quad (۴-۱۲۴)$$

مثال ۲۳-۴ کره‌ی رسانای توپر و پوسته‌ی کُلفت: کره‌ی فلزی به شعاع  $R$  دارای بار  $q$  است. این کره با یک پوسته‌ی کروی فلزی ضخیم به شعاع درونی  $a$  و شعاع بیرونی  $b$  در بر گرفته شده است (شکل ۴-۵۴).



شکل ۴-۵۴ کره‌ی باردار

و پوسته‌ی رسانا

پوسته‌ی فلزی بدون بار است.

(الف): میدان الکتریکی را در همه جا به‌دست آورید.

(ب): چگالی بار سطحی  $\sigma$  را در  $R$ ،  $a$  و  $b$  حساب کنید.

حل (الف): در ناحیه‌ی  $r < R$  (درون کره‌ی رسانا) میدان صفر است.

در ناحیه‌ی  $R < r < a$  بنا به قانون گوس داریم  $\hat{r}(q/\epsilon\pi\epsilon_0 r^2)$ .

در درون پوسته،  $a < r < b$ ، باز هم  $\mathbf{E} = 0$  است، چون این ناحیه گوشت رساناست.

سرانجام، میدان الکتریکی در ناحیه‌ی  $r > b$  بنا به قانون گوس  $\mathbf{E} = \hat{r}(q/\epsilon\pi\epsilon_0 r^2)$  است.

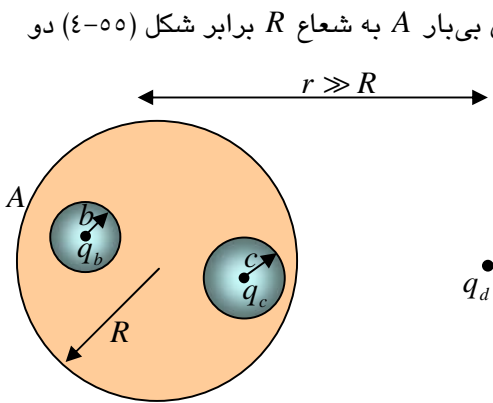
(ب): بار  $q$  به‌طور یکنواخت روی سطح کره‌ی به شعاع  $R$  توزیع می‌شود. بنابراین  $\sigma_R = q/\epsilon\pi R^2$  است. با استفاده از قانون

گوس و با توجه به مثال‌های ۲۱-۴ و ۲۰-۴ بارهای القایی در سطوح درونی و بیرونی پوسته عبارتند از

$$\sigma_a = -\frac{q}{\epsilon\pi a^2}, \quad \sigma_b = \frac{q}{\epsilon\pi b^2} \quad (۴-۱۲۵)$$

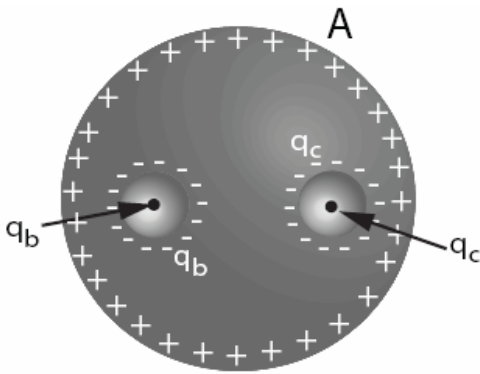
نکته: توجه کنید که جمع کل بارهای القایی همواره صفر است. در این مثال، بار کل القایی در روی سطح داخلی پوسته برابر

مثال ۲۴-۴ دو کاواک باردار در درون کره‌ی رسانا: در درون کره‌ی رسانای بی‌بار  $A$  به شعاع  $R$  برابر شکل (۵۵-۴) دو کاواک کروی با شعاع‌های  $b$  و  $c$  ایجاد شده است. در مرکز هر یک این کاواک‌ها بارهای نقطه‌ای  $q_b$  و  $q_c$  قرار دارد.  
 (الف): چگالی بارهای سطحی  $\sigma_b$ ،  $\sigma_c$  و  $\sigma_R$  را به دست آورید.  
 (ب): میدان الکتریکی در بیرون رسانا چیست؟  
 (پ): میدان الکتریکی را در درون هر یک از کاواک‌ها حساب کنید.  
 (ت): چه نیرویی به  $q_b$  و  $q_c$  وارد می‌شود؟  
 (ج): اگر بار  $q_a$  را به رسانا نزدیک کنیم کدام یک از پاسخ‌های بالا تغییر خواهد کرد؟



شکل ۵۵-۴ دو کاواک در یک رسانای کروی

(ج): فرض کنید در فاصله‌ی دور  $r$  ( $r \gg R$ ) بار نقطه‌ای  $q_a$  قرار دارد. چه نیرویی به کره‌ی  $A$  و هر یک از بارهای  $q_b$ ،  $q_c$  و  $q_d$  وارد می‌شود. کدام نیرو تقریبی است و به این که  $r$  خیلی دور است بستگی دارد؟



شکل ۵۶-۴ بارهای القایی

حل (الف): بارهای  $q_b$  و  $q_c$  (فرض کنید هر دو مثبت اند) در روی دیواره‌های کاواک‌های خود بارهای  $-q_b$  و  $-q_c$  القاء می‌کنند. چون رسانای  $A$  بی‌بار است، در سطح بیرونی آن هم به اندازه‌ی  $q_b + q_c$  بار القاء می‌شود. این بارهای القایی در شکل (۵۶-۴) دیده می‌شوند. بنابراین، چگالی بارها عبارتند از

$$\sigma_b = -\frac{q_b}{4\pi b^2}, \quad \sigma_c = -\frac{q_c}{4\pi c^2} \quad (۱۲۶-۴)$$

$$\sigma_R = \frac{q_b + q_c}{4\pi R^2}$$

(ب) و (پ): میدان‌های الکتریکی از قانون گوس قابل محاسبه اند. داریم

$$\mathbf{E}_{r>R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_b + q_c}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{E}_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_b}{r_b^2} \hat{\mathbf{r}}_b, \quad \mathbf{E}_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_c}{r_c^2} \hat{\mathbf{r}}_c \quad (۱۲۷-۴)$$

توجه کنید که  $\mathbf{r}$  برداری از مرکز کره‌ی رسانا تا نقطه‌ای در بیرون آن است.  $\mathbf{r}_b$  و  $\mathbf{r}_c$  بردارهایی از مرکز کاواک‌ها تا نقطه‌ای در درون آنها است.

(ت): به بارهای  $q_b$  و  $q_c$  نیرو وارد نمی‌شود، چون رسانایی که آنها را احاطه کرده است اجازه نمی‌دهد تا میدان به درون کاواک‌ها نفوذ کند.

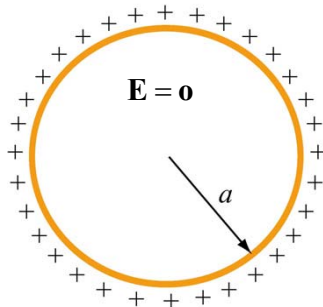
(ج):  $\sigma_R$  تغییر می‌کند اما  $\sigma_b$  و  $\sigma_c$  تغییر نمی‌کنند.  $\mathbf{E}_{r>R}$  تغییر می‌کند اما  $\mathbf{E}_b$  و  $\mathbf{E}_c$  تغییر نمی‌کنند. نیروی وارد به  $q_b$  و  $q_c$  هنوز هم صفر اند.

(ج): اگر  $r$  خیلی بزرگ باشد، می‌توان از بارهایی که  $q_d$  روی کره‌ی  $A$  القاء می‌کند، چشم پوشید. همانند بخش (ت)، به بارهای  $q_b$  و  $q_c$  نیرو وارد نمی‌شود؛ چون در درون رسانا میدان صفر است و میدان بار  $q_d$  نمی‌تواند در آن نفوذ کند. رسانا بارهای  $q_b$  و  $q_c$  را از یکدیگر و نیز آنها را از اثر  $q_d$  در امان نگه می‌دارد. اگر رسانا آرمانی و کامل باشد این پاسخ دقیق است. نیروی وارد به  $A$  و  $q_d$  با هم برابر و در جهت عکس یکدیگر اند. اندازه‌ی آن عبارت است از

$$F_A = F_{q_d} = \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{q_d (q_b + q_c)}{r^2} \quad (\text{ع-}128)$$

این پاسخ فقط هنگامی درست است که  $r$  خیلی بزرگ باشد. در فاصله‌های کوتاه  $r$ ، بار  $q_d$  باعث می‌شود که در سطح کره‌ی  $A$  توزیع بار تغییر کند.

مثال ۲۵-۴ پتانسیل الکتریکی پوسته‌ی کروی رسانا: پوسته‌ی فلزی کروی شکل به شعاع  $a$  شکل (۵۷-ع) را در نظر بگیرید.



شکل ۵۷-ع پوسته‌ی کروی با بار  $Q$  و شعاع  $a$

بار الکتریکی پوسته  $Q$  است.

(الف): پتانسیل الکتریکی را در همه جا حساب کنید.

(ب): انرژی پتانسیل آرایه را به دست آورید.

حل (الف): میدان الکتریکی در بیرون پوسته ( $r > a$ ) با استفاده از قانون گوس به دست می‌آید و ما آن را پیش‌تر به دست آورده‌ایم. میدان الکتریکی در ناحیه‌ی درون پوسته ( $r < a$ ) هم بنا به قانون گوس صفر است (چون در این ناحیه بار وجود ندارد). بنابراین، داریم

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon \pi \epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} ; & r > a \\ 0 ; & r < a \end{cases} \quad (\text{ع-}129)$$

پتانسیل الکتریکی را با استفاده از رابطه‌ی (۹-۳) می‌توان به دست آورد

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{ع-}130)$$

نسبت به بینهایت (مبداء پتانسیل:  $V(\infty) = 0$ ) برای  $r > a$  داریم

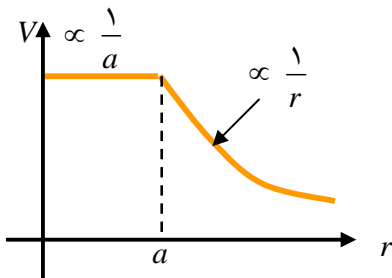
$$V(r) - V(\infty) = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (\text{ع-}131)$$

پتانسیل در ناحیه‌ی درون پوسته،  $r < a$ ، عبارت است از

$$V(r) - V(\infty) = - \int_{\infty}^a dr E_{r>a} - \int_a^r E_{r<a} dr = - \int_{\infty}^a \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{a} \quad (\text{ع-}132)$$

در شکل (۵۸-ع) نمودار تغییرات پتانسیل رسم شده است

(ب): به انرژی پتانسیل  $U$  می‌توان همانند کار لازم برای سامان دادن این آرایه اندیشید. برای این که پوسته‌ی کروی را باردار کنیم، باید یک عامل خارجی بارها را از بینهایت به روی سطح پوسته منتقل کند. فرض کنید در یک لحظه، مقدار بار موجود در



شکل ۵۸-ε پتانسیل الکتریکی پوسته

روی پوسته  $q$  است. در این لحظه، پتانسیل در روی سطح کره  $V_i = q / \epsilon \pi \epsilon_0 a$  است. این پتانسیل نهایی نیست، بلکه پتانسیل لحظه‌ای است. پس، برای این که جزء بار بعدی  $dq$  را از بینهایت به سطح پوسته منتقل کنیم، عامل خارجی باید کار

$$dW = V_i dq = \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \right) dq \quad (۴-۱۳۳)$$

را انجام بدهد. در نتیجه، کار کل لازم برای این که پوسته را به بار نهایی اش  $Q$  برسانیم، برابر است با

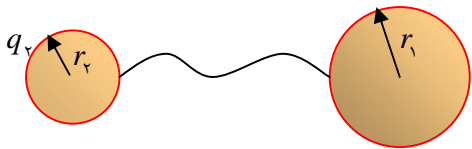
$$W = \int_0^Q dq \frac{q}{\epsilon \pi \epsilon_0 a} = \frac{Q^2}{2\pi \epsilon_0 a} \quad (۴-۱۳۴)$$

چون پتانسیل نهایی پوسته،  $V = Q / \epsilon \pi \epsilon_0 a$  و  $W = U$  اند، رابطه‌ی بالا را می‌توان ساده‌تر نوشت:

$$U = \frac{1}{2} QV \quad (۴-۱۳۵)$$

مقایسه‌ی نتیجه‌ی بالا با کار لازم برای انتقال بار نقطه‌ای  $Q$  از بینهایت به نقطه‌ای که پتانسیل در آن نقطه  $V$  است، جالب است. کار لازم برای آوردن بار نقطه‌ای  $Q$  از بینهایت به نقطه‌ای که پتانسیل سایر بارها در آن نقطه  $V$  است، برابر  $W = QV$  است. پس، برای بار نقطه‌ای انرژی پتانسیل  $U = QV$  است.

حال دو کره‌ی فلزی به شعاع‌های  $r_1$  و  $r_2$  را در نظر بگیرید که همانند شکل (۵۹-ε) با سیم نازکی به هم وصل اند. بین این دو



شکل ۵۹-ε دو کره‌ی رسانای متصل به هم

دو کره بار شارش پیدا می‌کنند تا این که ترازمندی برقرار شود و پتانسیل در روی هر دو کره یکسان شود (توجه کنید که سطح رسانا یک سطح هم‌پتانسیل است):  $V_1 = V_2 = V$ . فرض کنید در حالت ترازمندی، بارهای روی کره‌ها  $q_1$  و  $q_2$  اند. از اثر سیم چشم‌پوشی کنید. از شرط هم‌پتانسیل بودن سطح رساناها نتیجه می‌گیریم که

$$V = \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} = \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} \Rightarrow \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \quad (۴-۱۳۶)$$

اگر کره‌ها از هم دور باشند، توزیع بار روی آنها یکنواخت می‌شود. میدان الکتریکی آنها را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E_1 = \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}, \quad E_2 = \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \quad (۴-۱۳۷)$$

که در آن  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  چگالی یار سطحی روی کره‌هاست. از رابطه‌های (۴-۱۳۷) به دست می‌آید:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (۴-۱۳۸)$$

چون چگالی بار سطحی به طور وارون با شعاع متناسب است، نتیجه می‌گیریم که چگالی بار سطحی  $\sigma$  در ناحیه‌های با شعاع خمش کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. بنابراین، میدان الکتریکی در نقاط تیز روی سطح رسانا قوی‌تر است. طراحی میله‌ی برق‌گیر بر این اساس است. به همین دلیل است که در روی برگ درخت‌های با نوک تیز، گرد و خاک بیشتری جمع می‌شود.

#### ۴-۶-۴ نیروی الکتریکی وارد بر بار سطحی در روی رسانا و فشار الکتروستاتیکی

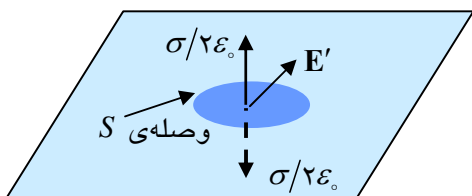
در بخش ۲-۶-۴ و در رابطه‌ی (۱۱۶-۴) دیدیم که در روی سطح رسانایی با چگالی بار سطحی یکنواخت  $\sigma$ ، مولفه‌ی مماسی میدان الکتریکی صفر است و بنابراین، در گذار از سطح رسانا، این مولفه‌ی میدان پیوسته است (یعنی درست در بالا و درست در پایین سطح رسانا مولفه‌ی مماسی میدان یکسان و برابر صفر است)؛ در حالی که مولفه‌ی عمودی میدان الکتریکی رفتار گسسته دارد. اختلاف مولفه‌ی عمودی میدان درست در زیر سطح و درست در بالای سطح رسانا برابر  $\Delta E_n = \sigma/\epsilon_0$  است. این وضعیت فقط به رساناها محدود نیست. آن را در هنگام بررسی میدان پوسته‌ی کروی با توزیع بار سطحی  $\sigma$  (رابطه‌ی (۲۷-۴)) و در بررسی میدان حاصل از صفحه‌ی تخت گسترده (رابطه‌ی (۶۴-۴)) هم دیدیم.

برای مثال، پوسته‌ی کروی به شعاع  $r_0$  را در نظر بگیرید که توزیع بار سطحی آن  $\sigma$  است. همان‌گونه که پیش‌تر دیدیم، میدان در همه جای درون این پوسته صفر است. اندازه‌ی میدان درست در بیرون آن  $\sigma/\epsilon_0$  و جهتش عمود بر سطح کره است. اختلاف میدان درست در زیر توزیع بار و درست در بالای آن  $\Delta E_n = (\sigma/\epsilon_0) - 0 = \sigma/\epsilon_0$  است.

در مورد صفحه‌ی بینهایت گسترده با چگالی بار سطحی  $\sigma$  هم همین‌طور است. میدان الکتریکی در بالای صفحه  $(\sigma/2\epsilon_0)\hat{\mathbf{k}}$  و در زیر صفحه  $(-\sigma/2\epsilon_0)\hat{\mathbf{k}}$  است. باز هم اختلاف میدان در دو طرف صفحه برابر  $\Delta E = (\sigma/2\epsilon_0)\hat{\mathbf{k}} - (-\sigma/2\epsilon_0)\hat{\mathbf{k}} = \sigma/\epsilon_0\hat{\mathbf{k}}$  است. روشن است که در این حالت، بنا به تقارن، میدان فقط مولفه‌ی عمودی دارد. بنابراین، می‌دانیم که  $\Delta E_n = \sigma/\epsilon_0$  است. در هر سه مورد، پوسته‌ی کروی، صفحه‌ی گسترده و سطح رسانا، قانون گوس برقرار است: میدان الکتریکی  $E$  در گذار از یک سو به سوی دیگر لایه‌ی باردار به اندازه‌ی  $\sigma/\epsilon_0$  تغییر می‌کند.

به بارهایی که در روی پوسته‌ی کروی، یا صفحه‌ی و یا سطح رسانا توزیع شده اند چه نیروی الکتریکی وارد می‌شود؟ در نگاه نخست، این پرسش شاید گیج‌کننده به نظر بیاید، چون میدان الکتریکی  $E$  را همین بارها تولید کرده اند.

در روی سطح رسانای باردار ناحیه‌ی کوچکی را برابر شکل (۶۰-۴) در نظر بگیرید. به این وصله‌ی کوچک  $S$  چه نیرویی وارد



می‌شود؟ فرض کنید که مساحت وصله  $dA$  است و بار موجود در روی آن را  $dq = \sigma dA$  بنامید. نیروی وارد به بار  $dq$  دو منشأ دارد: نیرویی که بقیه‌ی بارهای روی سطح رسانا به وصله‌ی  $S$  وارد می‌کنند و نیرویی که بارهای موجود در خود وصله‌ی  $S$  به  $dq$  وارد می‌کند. عامل دوم البته صفر است.

شکل ۶۰-۴ نیروی در روی رسانا

نیروی رانش کولمبی بین بارهای هم‌نام وصله نمونه‌ی دیگری از قانون سوم

نیوتون است؛ وصله نمی‌تواند به خودش نیرو وارد کند. این، مسئله‌ی ما را ساده می‌کند و اجازه می‌دهد تا میدان الکتریکی  $E$  ناشی از تمامی بارهای روی سطح رسانا را (از جمله، میدان ناشی از بارهای وصله را) در محاسبه‌ی نیروی  $dF$  وارد بر بار  $dq$  به کار ببریم. پس، نیروی وارد بر بارهای وصله‌ی  $S$  را می‌توان به صورت  $dF = Edq = E\sigma dA$  نوشت. اما برای  $E$  چه مقداری را باید به کار ببریم؟ در بیرون رسانا (یا در بیرون پوسته‌ی کروی) میدان یک مقداری دارد و در درون رسانا (یا در درون پوسته) مقدار آن صفر است.

برای این که به این پرسش پاسخ بدهیم، میدان الکتریکی را در مکان دلخواهی در روی وصله‌ی  $S$  به صورت جمع برداری میدان ناشی از بارهای روی وصله‌ی  $S$  و میدان الکتریکی بقیه‌ی بارهای روی سطح رسانا می‌نویسیم

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_S + \mathbf{E}' \quad (۱۳۹-۴)$$

$\mathbf{E}_S$  میدان بارهای روی وصله‌ی  $S$  و  $\mathbf{E}'$  میدان بقیه‌ی بارهاست. بنا به قانون سوم نیوتون، وصله‌ی  $S$  نمی‌تواند به خودش

نیرو وارد کند. بنابراین، نیروی وارد بر آن را باید میدان  $E'$  فراهم کند. فرض کنید وصله‌ی  $S$  به اندازه‌ای کوچک است که می‌توان آن را تخت فرض کرد. بنا به قانون گوس، میدان الکتریکی وصله درست در بالا و درست در زیر آن عبارت است از

$$\mathbf{E}_S = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} & ; z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} & ; z < 0 \end{cases} \quad (4-140)$$

بنابراین، با توجه به اصل برنهی، میدان الکتریکی در بالای سطح رسانا عبارت است از

$$\mathbf{E}_{z>} = \left( \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \hat{\mathbf{k}} + \mathbf{E}' \quad (4-141)$$

هم‌چنین در زیر سطح رسانا، میدان الکتریکی برابر است با

$$\mathbf{E}_{z<} = -\left( \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \hat{\mathbf{k}} + \mathbf{E}' \quad (4-142)$$

نکته‌ی مهم این است که نیرو را میدان  $E'$  به وصله وارد می‌کند و این میدان در روی سطح وصله گسستگی ندارد؛ اگر وصله‌ی  $S$  را بپریم و دور بیندازیم، میدان  $E'$  در سوراخ به وجود آمده گسسته نیست (چون در ایجا دیگر بار سطحی وجود ندارد تا گسستگی ایجاد کند). اگر رابطه‌های (4-141) و (4-142) را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{z>} + \mathbf{E}_{z<}) = \mathbf{E}_{\text{avg}} \quad (4-143)$$

$\mathbf{E}_{\text{avg}}$  میدان میانگین است. میانگین‌گیری در واقع به معنی حذف میدان وصله‌ی  $S$  است. میدان الکتریکی یک رسانا در بالای

سطح آن  $\mathbf{E}_{z>} = (\sigma/\epsilon_0) \hat{\mathbf{k}}$  و در زیر سطح  $\mathbf{E}_{z<} = 0$  است و در نتیجه داریم

$$\mathbf{E}_{\text{avg}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} + 0 \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} \quad (4-144)$$

پس، نیروی وارد به وصله‌ی  $S$  برابر

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{\text{avg}} = (\sigma A) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\sigma^2 A}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}} \quad (4-145)$$

است که در آن  $A$  مساحت سطح وصله‌ی  $S$  است. (برای اثبات فیزیکی و واقعی‌تر رابطه‌ی (4-145) نکته‌ی ۱ را در پایان این بخش ببینید.)

این نیرو درست همان چیزی است که لازم است تا بارهای الکتریکی روی سطح رسانا را جابه‌جا کند و آن را به حالت ترازمندی برساند. در این حالت ترازمندی است که میدان الکتریکی درست در بیرون رسانا برابر  $\sigma/\epsilon_0$  و در گوشت آن صفر است. توجه کنید که این نیرو همواره (و مستقل از این که علامت بار  $\sigma$  در روی سطح رسانا چیست) می‌کوشد وصله‌ی  $S$  را به سوی میدان الکتریکی براند.

با استفاده از این نتیجه می‌توان فشار الکتروستاتیکی وارد به وصله‌ی  $S$  را به صورت زیر تعریف کرد: می‌دانیم که فشار  $P$  با نیرو در واحد سطح تعریف می‌شود. پس،

$$P \equiv \frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (4-146)$$

است.  $E$  اندازه‌ی میدان الکتریکی درست در بالای وصله است. فشار به وسیله‌ی میدان الکتریکی منتقل می‌شود.

مثال ۲۶-۴ نیروی رانش بین نیم‌کره‌ها: کره‌ای رسانا به شعاع  $R$  دارای بار کل  $Q$  است. نیروی رانش بین "نیم‌کره‌ی شمالی" و "نیم‌کره‌ی جنوبی" آن را حساب کنید.

حل: میدان در درون کره صفر است و در بیرون آن برابر

$$E_{r>R} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (۴-۱۴۷)$$

است. بنابراین، میدان میانگین در روی سطح آن عبارت است از

$$E_{\text{avg}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{r} \quad (۴-۱۴۸)$$

و چگالی بار سطحی برابر  $\sigma = Q/\epsilon\pi R^2$  است. بنا به تقارن مسئله، نیروی وارد

بر نیم‌کره‌ی شمالی در راستای محور  $z$  است (شکل ۶۱-۴ را ببینید). نیرو در

واحد سطح  $f_z$  برابر  $f_z = \sigma(E_{\text{avg}})$  است. در نتیجه، نیروی کل که به نیم‌کره‌ی

شمالی وارد می‌شود، برابر است با

$$\begin{aligned} F_z &= \int f_z da = \int \left( \frac{Q}{\epsilon\pi R^2} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \right) \cos\theta (R^2 \sin\theta d\theta d\phi) \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \left( \frac{Q}{\epsilon\pi R} \right)^2 \pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{\epsilon R} \right)^2 \left( \frac{1}{2} \sin^2\theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{\epsilon R} \right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi R^2 \epsilon_0} \end{aligned} \quad (۴-۱۴۹)$$

نکته‌ی ۱: در رابطه‌ی (۴-۱۴۴) نشان دادیم که میدان در روی یک سطح باردار را می‌توان با میانگین میدان‌ها درست در بالا و

درست در زیر سطح جایگزین کرد. برای این که بتوانیم عمل میانگین‌گیری را توجیه کنیم، حالت عمومی‌تری را در نظر بگیرید

که تصویری واقعی‌تری هم از سطح باردار به دست می‌دهد. ضخامت لایه‌ی بار واقعی، صفر نیست. بارها ممکن است در

بخش‌های مختلف لایه به شکل‌های گوناگون توزیع شده باشد، اما هنوز هم بار کل در واحد سطح،  $\sigma$ ، در همه‌ی بخش‌های لایه

یکسان باشد. بنابراین، میدان الکتریکی را در یک طرف لایه‌ی باردار واقعی  $E_1$  بنامید (به جای این که مثلاً در درون پوسته‌ی

نازک کروی، میدان را صفر فرض کنید). در طرف دیگر لایه‌ی باردار، میدان را  $E_2$  بنامید. در این صورت، به‌ازای هر  $\sigma$ ، شرطی

که قانون گوس اعمال می‌کند، عبارت از  $E_2 - E_1 = \sigma/\epsilon_0$  است.

حال بگذارید با دقت بیشتر به درون لایه نگاه کنیم. در درون لایه‌ی باردار، میدان از یک سو به سوی دیگر، به طور پیوسته از

$E_1$  به  $E_2$  تغییر می‌کند. در درون لایه توزیع بار حجمی وجود دارد. اگر یک رویه‌ی لایه در  $x = 0$  و رویه‌ی دیگری در

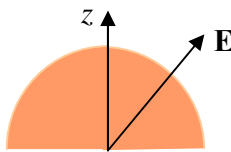
$x = x_0$  باشد، چگالی بار حجمی هم می‌تواند تابع  $x$  باشد. آن را  $\rho(x)$  بنامید. حال زیرلایه‌ی بسیار نازک‌تری به ضخامت

$dx \ll x_0$  را در درون لایه‌ی باردار اصلی در نظر بگیرید. بار در واحد سطح موجود در این زیرلایه‌ی بسیار نازک  $\rho dx$  است.

اگر سطح آن  $A$  باشد، نیروی وارد به زیرلایه‌ی بسیار نازک عبارت است از

$$dF = E \rho dx \cdot A \quad (۴-۱۵۰)$$

پس، نیروی کل که در واحد سطح به لایه‌ی باردار وارد می‌شود، برابر است با جمع (یا درست‌تر، انتگرال) نیروهای جزیی که به



شکل ۶۱-۴ محور  $z$  و میدان الکتریکی

هر زیرلایه‌ی سازنده‌ی لایه‌ی اصلی وارد می‌شود:

$$\frac{F}{A} = \int_0^{x_0} E \rho dx \quad (4-151)$$

اما قانون گوس (با  $E_v - E_1 = \sigma/\epsilon_0$ ) می‌گوید که تغییر میدان  $E$  در زیرلایه، یعنی  $dE$ ، برابر  $\rho dx/\epsilon_0$  است. بنابراین، در معادله‌ی (4-150) می‌توان  $\rho dx$  را با  $\epsilon_0 dE$  جایگزین کرد. با این جایگزینی انتگرال بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{F}{A} = \int_{E_1}^{E_v} \epsilon_0 E dE = \frac{\epsilon_0}{2} (E_v^2 - E_1^2) = \frac{\epsilon_0}{2} (E_v + E_1)(E_v - E_1) \quad (4-152)$$

چون  $E_v - E_1 = \sigma/\epsilon_0$  است، نیرو در واحد سطح را در رابطه‌ی (4-152) می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{2} (E_1 + E_v) \sigma \quad (4-153)$$

ما به پیمان خود پای‌بند بودیم و نشان دادیم که به ازای هر  $\sigma$  معینی نیرو در واحد سطح وارد به لایه‌ی باردار با میانگین میدان‌ها در دو سطح لایه تعیین می‌شود و تا زمانی که سطح مورد نظر در مقایسه با مساحت کل کوچک است، مستقل از ضخامت لایه و تغییرات چگالی بار  $\rho(x)$  در درون لایه است. ♣

**نکته‌ی ۲:** در مثال ۲۶-۴ کره‌ی رسانا را در نظر گرفتیم که بار کل آن  $Q$  بود. این بار البته در روی سطح کره توزیع می‌شود. جهت میدان در روی کره برون‌سو است (رابطه‌ی (4-148) را نگاه کنید). پس، نیروی وارد به جزء بار در روی کره (چه مثبت و چه منفی) هم به سوی بیرون است. این را از رابطه‌ی (4-149) می‌دانیم. بنابراین، انتظار داریم بارها از روی کره کنده و در هوا پخش شوند. چون بارها از سطح کره کنده نمی‌شوند، باید نیرویی درون‌سو وجود داشته باشد که نیروی برون‌سو را خنثی کند. ما یک چنین نیرویی را که حامل‌های بار را در جایشان نگه می‌دارد، در معادله‌هایمان وارد نکردیم. گفتن این که این نیرو از نوع "غیرالکتریکی" است، گمراه‌کننده است. چون نیروهای ربایشی و رانشی الکتریکی نیروهای چیره در ساختار اتم‌ها و به طور کلی‌تر در به‌هم چسبانی ماده است. تفاوت آنها در این است که این نیروها فقط در فاصله‌های کوتاه، از مرتبه‌ی فاصله‌های بین اتمی و بین مولکولی، اثر گذار اند. در این مقیاس فاصله، فیزیک به داستان تک ذره تبدیل می‌شود. بگذارید با مثالی این را روشن کنم. بادکنک پلاستیکی با شعاع  $1\text{m}$  را در نظر بگیرید که  $10^{-8}\text{C}$  بار الکتریکی به طور یکنواخت در روی سطح بیرونی توزیع شده است. چگالی بار الکتریکی این سطح  $\sigma = (10^{-8}\text{C})/(\pi(1\text{m})^2) = 3.18 \times 10^{-9}\text{C/m}^2$  است. نیروی برون‌سو در واحد سطح باردار از رابطه‌ی (4-145) به دست می‌آید (با توجه به مقدار  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{C}^2/\text{Nm}^2$ ) و برابر است با

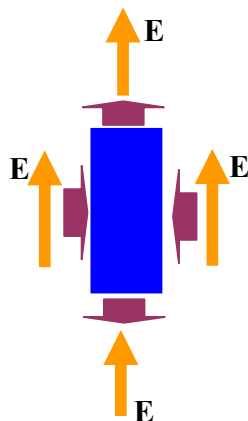
$$\frac{dF}{dA} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{(3.18 \times 10^{-9}\text{C/m}^2)^2}{2(8.85 \times 10^{-12}\text{C}^2/\text{Nm}^2)} = 5.64 \times 10^{-4}\text{N/m}^2 \quad (4-154)$$

اگر اندکی دقت کنید و توجه کنید که بار هر الکترون  $1.602 \times 10^{-19}\text{C}$  است، می‌بینید که  $10^{-8}\text{C}$  بار که بر روی بادکنک قرار دادیم، معادل حدود  $6 \times 10^{10}$  الکترون است که بادکنک چسبانده‌ایم. این تعداد الکترون، یعنی  $50$  میلیون الکترون اضافی در هر سانتی‌متر مربع پلاستیک بادکنک. به خاطر این فشردگی انباشت الکترون، ناصافی در توزیع بار قابل مشاهده نیست. اما، اگر می‌توانستیم به یکی از این الکترون‌های اضافی نگاه کنیم، آن را در فاصله‌ی  $10^{-7}\text{m}$  از نزدیک‌ترین همسایه‌اش می‌یافتیم. در مقیاس اتمی  $10^{-7}\text{m}$  فاصله‌ی بسیار زیادی است. این الکترون در یک مولکول موضعی پلاستیک به دام می‌افتد. دامی که سرشت آن الکتریکی است. مولکول پلاستیک هم به مولکول بعدی چسبیده است و این زنجیره ادامه دارد. اگر بخواهید الکترون را بکشید و از مولکول جدا کنید، نیرو به تمامی بخشی از پلاستیک انتقال پیدا می‌کند. البته، اگر نیروی کشش شما خیلی بزرگ

باشد، می‌تواند الکترون را از مولکولی که به آن جسییده است جدا کند. برای این کار به میدان الکتریکی نیاز دارید که هزاران بار قوی‌تر از میدان الکتریکی این آزمایش است. ❁

#### ۴-۷ کشش و فشار الکتریکی

در بخش ۴-۶-۴ فشاری را که میدان الکتریکی به یک سطح رسانا منتقل می‌کند، به دست آوردیم. در حالت عمومی‌تر، سطح رسانای بسته‌ای (یک جعبه‌ی فلزی پنداری) مانند شکل (۶۲-۴) را در یک میدان الکتریکی تصور کنید. فرض کنید میدان الکتریکی یکنواخت و به سوی بالاست. اگر به سطح بالایی این جعبه‌ی پنداری نگاه کنید، می‌بینید که در آنجا میدان الکتریکی بر سطح عمود است و جهتش به سوی بیرون از سطح است. در واژگان نظریه‌ی میدان فاراده، گوییم میدان کششی را در راستای خود به این سطح منتقل می‌کند و آن را به سوی بالا می‌کشد. درست مثل این است که به این سطح ریسمانی بسته باشیم و آن را با ریسمان به بالا بکشیم.



شکل ۶۲-۴ جعبه‌ی پنداری در میدان الکتریکی

همچنین، اگر به سطح پایینی جعبه نگاه کنیم، می‌بینیم که در روی این سطح میدان الکتریکی با بردار عمود بر این سطح پادموازی است. در واژگان فاراده، باز هم گوییم که میدان الکتریکی کششی در راستای خود به این سطح منتقل می‌کند و آن را به سوی پایین می‌کشد. درست مانند این که ریسمانی به این سطح بسته باشیم تا آن را به پایین بکشیم (تعیین واقعی جهت نیرو به این سادگی نیست و نیازمند شناختن تانسور تنش مکسول است). توجه کنید که این هم کششی موازی با بردار عمود بر سطح پایینی جعبه است. پس،

فرق نمی‌کند که میدان موازی یا پادموازی با بردار عمود بر سطح باشد. در هر دو حالت، کشش در یک سو است. در سطح سمت چپ جعبه، میدان الکتریکی بر بردار عمود بر سطح برون‌سو عمود است. در زبان واژگان فاراده گوییم میدان فشاری به سطح منتقل می‌کند و آن را به سوی راست هل می‌دهد. به همین ترتیب، میدان الکتریکی در سطح سمت راست جعبه در راستای عمود بر بردار سطح برون‌سو است و به این سطح فشاری در جهت چپ منتقل می‌کند و آن را به سوی چپ هل می‌دهد. توجه کنید که واژه‌ی کشش را برای حالتی به کار بردیم که تنش انتقالی میدان، موازی یا پادموازی بردار برون‌سوی عمود بر سطح بود. از واژه‌ی فشار را برای حالتی استفاده کردیم که تنش انتقالی میدان بر بردار برون‌سوی سطح عمود است. اندازه‌ی این فشارها و کشش‌ها در روی سطح‌های مختلف جعبه برابر  $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$  است. یکای این کمیت نیرو بر سطح یا فشار است. این کمیت، همچنین چگالی انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی است (فصل ۵ را ببینید)، چون یکای انرژی در واحد حجم هم یکای فشار است.

برای این که نمونه‌ای برای تنش انتقالی میدان الکتریکی و تبادل انرژی بین میدان و ذرات آورده باشیم، حرکت ذره‌ی باردار را در میدان الکتریکی یکنواخت بررسی می‌کنیم.

#### ۴-۸ حرکت ذره‌ی باردار در میدان الکتریکی یکنواخت

ذره‌ای با بار  $q > 0$  را در نظر بگیرید که در میدان الکتریکی یکنواخت حرکت می‌کند. فرض کنید میدان الکتریکی  $\mathbf{E} = -E \hat{\mathbf{k}}$  است و ذره حرکت خود را در راستای محور  $z$  و رو به بالا آغاز کند. به ذره نیروی ثابت و رو به پایین  $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = -qE \hat{\mathbf{k}}$

وارد می‌شود و سرانجام ذره را وادار به توقف می‌کند (فرض کنید سرعت ذره در  $z = 0$  به صفر می‌رسد) و سپس، به حرکت رو به پایین ادامه می‌دهد. حرکت ذره و میدان‌های همراه آن در شکل‌های (۶۳-۴) نشان داده شده‌اند. با زبان تنش‌های انتقالی از سوی میدان، حرکت ذره را چگونه می‌توان توصیف کرد؟

توصیف فاراده از نیروی روبه پایین که به بار وارد می‌شود و شکل (۶۳-۴ ب) نمود می‌یابد، باید از این قرار باشد: یک

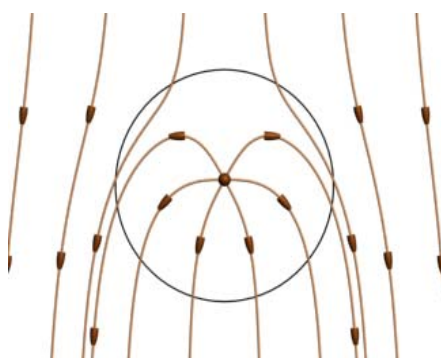


(ب)



(الف)

شکل ۶۳-۴ حرکت ذره‌ی باردار در میدان الکتریکی یکنواخت: (الف) آرایش میدان کل وقتی که بار در روی محور  $z$  - و دور از دید است. (ب): آرایش میدان کل، وقتی که ذره پیش از حرکت به سوی پایین، در مبداء به حال سکون در می‌آید. سطح کروی مجازی پیرامون ذره‌ی باردار تصور کنید که بار در مرکز آن است، مانند شکل (۶۴-۴). خط‌های میدان که نیمه‌ی



شکل ۶۴-۴ حرکت ذره‌ی باردار در میدان

یکنواخت رو به پایین

پایینی این سطح را می‌شکافند و از آن می‌گذرند، به سطح تنشی موازی میدان منتقل می‌کنند. این تنش، ذره را از طرف پایین به زیر می‌کشد. خط‌های میدان در سمت بالای کره‌ی فرضی، فشاری را به سطح منتقل می‌کنند که بر خودشان عمود است. این تنش، بار را از طرف بالا به سوی پایین هل می‌دهد. اثر برآیند این دو تنش، نیرویی به سوی پایین است که به بار وارد می‌شود. از شکل (۶۳-۴ ب) پیداست که وقتی بار به سوی بالا حرکت می‌کند، خط‌های میدان در پیشاپیش بار فشرده‌تر می‌شوند و در پشت‌سر نامتراکم‌اند. این آرایش میدان، به بار متحرک نیرویی در جهت پایین منتقل می‌کند و در شکل پیداست.

آرایش میدان، همچنین به بارهایی که میدان یکنواخت را تولید کرده‌اند، نیرویی در جهت بالا منتقل می‌کند. ما آن را در شکل نمی‌بینیم. حرکت برآیند روبه بالای بار در این آرایش میدانی، مانند حرکت ذره‌ی نقطه‌ای در یک محیط مقاوم مانند آب یا هواست. تنش‌ها در اثر پیش‌روی ذره پدید می‌آیند.

به زبان انرژی هم می‌توان وضعیت را توصیف کرد: وقتی بار به سوی بالا حرکت می‌کند، انرژی جنبشی بار متحرک کاهش می‌یابد. این مقدار انرژی در میدان الکتروستاتیکی فشرده انباشته می‌شود. وقتی که ذره رو به پایین حرکت می‌کند، وارون این فرایند روی می‌دهد. افزون بر این، خط‌های میدان هم با گذشت زمان حرکت می‌کنند. حرکت خط‌های میدان در جهت شارش انرژی است. از شکل (۶۳-۴ ب) به روشنی دیده می‌شود که وقتی حرکت بار کند می‌شود، انرژی الکترومغناطیسی از بار به محیط شارش پیدا می‌کند. وقتی بار در جهت رو به پایین حرکت می‌کند، شتابیده می‌شود و شارش انرژی الکترومغناطیسی از محیط به سوی بار است. در این حالت، میدان انرژی خود را آزاد می‌کند.

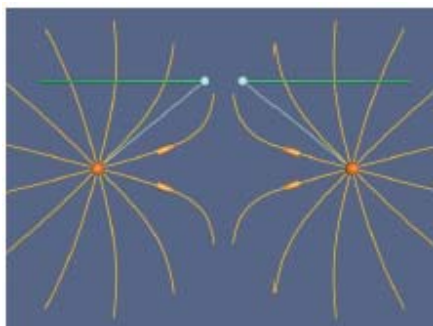
پایستگی تکانه چه می‌شود؟ وقتی بار از ناحیه‌ی  $z$  های منفی وارد میدان می‌شود، پس از مدتی جهت خود را تغییر می‌دهد و

به سوی ناحیه‌ی  $z$  های منفی برمی‌گردد. در این فرایند، تکانه چگونه پایسته می‌ماند؟

البته تکانه پایسته است؛ چون تکانه‌ی در جهت  $+z$  از بار در حال حرکت به بارهایی که میدان یکنواخت الکتریکی را به وجود آورده‌اند (و در شکل دیده نمی‌شود) منتقل می‌شود. از آرایش میدان در شکل (۶۳-۴) این وضعیت به روشنی پیداست. تنش میدان که بار را به پایین هل می‌دهد، همراه با تنش دیگری است که بارهای به وجود آورنده‌ی میدان یکنواخت را به سوی بالا هل می‌دهد.

#### • آونگ بارهای هم‌نام و ناهم‌نام

این مثال دیگری از فرایند های الکترومغناطیسی است که می‌توان آن را با واژگان تنش توصیف کرد. فرض کنید دو بار الکتریکی از دو آونگ آویزانند. نقطه‌ی آویز آونگ‌ها را می‌توان به یکدیگر نزدیک و یا از هم دور کرد. نخست، حالتی را در نظر بگیرید که بارها هم‌نام اند و بنابراین، یکدیگر را می‌رانند. در شکل (۶۵-۴) وضعیتی نشان داده شده است که عاملی خارجی

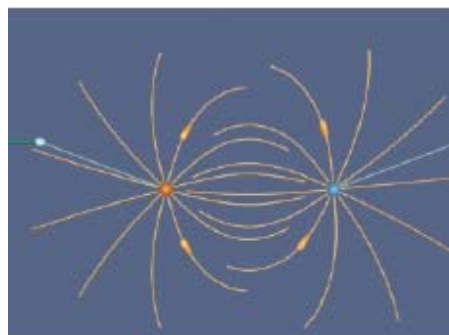


شکل ۶۴-۴ دو بار هم‌نام آویزان از دو آونگ

می‌کوشد نقاط آویز آونگ‌ها را به هم نزدیک کند. نیروی گرانش بارها را به سوی پایین می‌کشد و نیروی رانش الکتروستاتیکی می‌کوشد آنها را در راستای خط واصل‌شان از هم دور کند. در این وضعیت، رفتار میدان‌های الکتریکی چنان است که تنش الکتروستاتیکی در جهت عمود بر میدان منتقل می‌شود. عامل خارجی می‌کوشد بارها را به هم نزدیک کند، اما فشار الکتروستاتیکی می‌کوشد بارها را از هم دور نگه دارد. وقتی می‌خواهیم نقطه‌های آویز آونگ‌ها را به هم نزدیک کنیم، تنشی که عمود بر میدان منتقل می‌شود، می‌کوشد بارها را دور از هم نگه دارد. (در شکل بالا خط‌های

میدان را آگاهانه ادامه نداده ایم تا تصویر گویاتر باشد.) حال به وضعیتی توجه کنید که بارها ناهم‌نام اند و عامل خارجی می‌کوشد نقاط آویز آونگ‌ها را به هم نزدیک کند. عامل خارجی با این کار می‌کوشد بارها را به هم نزدیک کند. این وضعیت در

شکل (۶۵-۴) دیده می‌شود. چون بارها ناهم‌نام اند، یکدیگر را می‌ربایند. نیروی گرانش آنها را به سوی پایین می‌کشد. نیروی الکتروستاتیک بارها را در راستای خط واصل‌شان به سوی یکدیگر می‌راند. رفتار میدان‌های الکتریکی در این وضعیت، نمونه‌ای از تنش است که موازی میدان منتقل می‌شود. کشش می‌کوشد دو بار ناهم‌نام را به یکدیگر نزدیک کند. وقتی نقاط آویز آونگ‌ها را به هم نزدیک می‌کنیم، کشش که موازی میدان الکتریکی منتقل می‌شود، بارها را به سوی هم می‌راند.



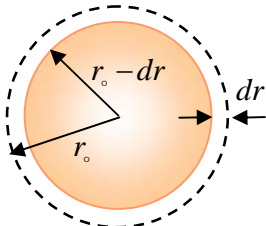
شکل ۶۵-۴ دو آونگ یا بارهای ناهم‌نام

#### ۹-۴ انرژی میدان الکتریکی

پیش‌تر گفتیم که میدان الکتریکی را می‌توان حالتی از ماده پنداشت که انرژی و تکانه دارد. تاکنون با میدان الکتریکی چندین نوع توزیع بار آشنا شدیم و آموختیم که، دست‌کم در بنیاد، میدان الکتریکی هر توزیع بار را حساب کنیم، در بخش پایانی این فصل می‌پرسیم، انرژی مربوط به یک میدان الکتریکی چیست؟ در فصل ۵ این موضوع را با گستردگی و جزییات بیشتر بررسی خواهیم کرد. با این حال، ما ادعا کردیم که قانون کولمب به همراه اصل برنهم تنها ابزاری هستند که برای بررسی پدیده‌های

الکتریکی (دست‌کم، الکتروستاتیکی) لازم داریم. البته، از این دو مفهوم استفاده کردیم و قانون گوس را هم به جعبه ابزار خود افزودیم. پس، کاملاً به‌جاست که پرسش بالا را بپرسیم. در این‌جا پرسش را به یاری یک مثال پاسخ خواهیم داد. اثبات عمومی را به فصل ۵ واگذار می‌کنیم.

یک پوسته‌ی کروی به شعاع  $r_0$  را در نظر بگیرید که بار سطحی آن  $\sigma$  و یکنواخت است. فرض کنید پوسته را اندکی می‌فشارید.



شکل ۶۶-۴ پوسته‌ی فشرده

همانند شکل (۶۶-۴) شعاع آن به  $r_0 - dr$  کاهش پیدا می‌کند. در این کار، برای چیره شدن به نیروی رانشی  $\sigma^2/2\epsilon_0$  در هر مترمربع باید کار انجام دهیم. چون مقدار جابه‌جایی  $dr$  است، کار لازم برای فشردن پوسته  $dU = (\sigma^2/2\epsilon_0)(2\pi r_0^2 dr) = (\pi r_0^2 \sigma^2/\epsilon_0) dr$  است. این بدان معنی است که انرژی لازم برای چیدمان بارها در این وضعیت، افزایش یافته است (منظور من همان انرژی  $U$  است که در فصل ۳ به آن پرداختیم. انرژی لازم برای این که بارها را از بینهایت بیاوریم و در جایشان قرار دهیم). پس، داریم

$$dU = \frac{\pi r_0^2 \sigma^2}{\epsilon_0} dr \quad (۴-۱۵۵)$$

به تغییر میدان الکتریکی توجه کنید: پیش از فشردن، میدان در درون پوسته‌ی به ضخامت  $dr$  صفر بود، اما حالا  $E = \sigma/\epsilon_0$  شده است. در فضای بیرون  $r_0$  میدان تغییر نکرده است، همان است که پیش از فشردن پوسته وجود داشت. در عمل، میدانی به شدت  $E = \sigma/\epsilon_0$  تولید کردیم که ناحیه‌ای با حجم  $\epsilon_0 \pi r_0^2 dr$  را پر کرده است. این کار با هزینه کردن انرژی رابطه‌ی (۴-۱۵۵) انجام گرفت. اگر در رابطه‌ی (۴-۱۵۵) به جای  $\sigma$  قرار دهیم  $\sigma = \epsilon_0 E$ ، خواهیم داشت

$$dU = \frac{\pi r_0^2 (\epsilon_0 E)^2}{\epsilon_0} dr = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \pi r_0^2 dr \quad (۴-۱۵۶)$$

این رابطه، نمونه‌ای از یک قضیه‌ی کلی است که در فصل ۵ آن را ثابت خواهیم کرد. در اینجا فقط آن را بیان می‌کنم: انرژی پتانسیل مجموعه‌ای از بارهای الکتریکی (یعنی کار لازم برای سامان دادن بارها) را با نسبت دادن انرژی  $d\tau (\epsilon_0 E^2/2)$  به هر جزء حجم  $d\tau$  و انتگرال‌گیری بر روی تمام فضایی که میدان وجود دارد، می‌توان از میدان الکتریکی به‌دست آورد.

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{all space}} E^2 d\tau \quad (۴-۱۵۷)$$

که در آن  $E^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$  یک کمیت اسکالر است. این مقدار انرژی در میدان الکتریکی ذخیره می‌شود. چون میدان الکتریکی یک میدان پایستار است، همه‌ی این انرژی را می‌توان باز یافت. می‌توان به  $\epsilon_0 E^2/2$  همانند چگالی انرژی (با یکای  $\text{J/m}^3$ ) اندیشید.

**مثال ۲۷-۴ انرژی پتانسیل کره‌ی همگن:** بار کل  $Q$  در حجم کره‌ای به شعاع  $R$  به‌طور یکنواخت توزیع شده است. چقدر انرژی در کره ذخیره شده است؟

**حل:** میدان الکتریکی در درون و بیرون کره غیر صفر است. ما آنها را در مثال ۳-۴ حساب کردیم. بنابراین، معادله‌ی (۴-۱۵۷) شامل دو دو انتگرال است: یکی برای بیرون کره و دیگری برای ناحیه‌ی درون کره. میدان در ناحیه‌ی درون،  $r < R$ ، برابر  $\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$  و در ناحیه‌ی بیرون کره  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  است (حل مثال ۳-۴ را نگاه کنید). بنابراین، از رابطه‌ی (۴-۱۵۷) داریم:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \int_0^R \left( \frac{Qr}{\epsilon\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \epsilon\pi r^2 dr + \int_R^\infty \left( \frac{Q}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \epsilon\pi r^2 dr \right] = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q^2}{2\epsilon\pi\epsilon_0 R} = \frac{3}{2} \frac{Q^2}{\epsilon\pi\epsilon_0 R} \quad (\epsilon-158)$$

**نکته:** معادله (۱۵۷) را نمی‌توان برای یک بار نقطه‌ای به کار برد. برای دیدن این نکته، بار  $q$  را در مبداء مختصات قرار دهید. در نزدیکی مبداء  $r^\epsilon = q^\epsilon / (\epsilon\pi\epsilon_0)^\epsilon$  است. چون  $d\tau = \epsilon\pi r^\epsilon dr$  است، رفتار انتگرالنده به صورت  $E^\epsilon d\tau \propto dr/r^\epsilon$  می‌شود و در حد  $r \rightarrow 0$ ، مقدار انتگرال در رابطه (۱۵۷) بینهایت می‌شود. این به ما می‌گوید که برای انباشتن بار  $q$  در حجم صفر بینهایت انرژی لازم است. این درست است، اما سودمند نیست. در دنیای واقعی با ذره‌های مانند الکترون و پروتون سروکار داریم. این ذره‌ها به اندازه‌ای کوچک اند که برای خیلی از منظورها از ابعاد آنها چشم‌پوشی می‌کنیم و وقتی برهم‌کنش آنها را با یکدیگر بررسی می‌کنیم، آنها را به صورت ذره‌ی نقطه‌ای فرض می‌کنیم. چه مقدار انرژی برای ساختن این ذره‌ها هزینه شده است؟ پاسخ این پرسش را نمی‌توان با الکترومغناطیس کلاسیک داد. در اینجا، ما ذره‌ها را پیش ساخته فرض می‌کنیم و فقط کار لازم برای جابه‌جایی آنها را حساب می‌کنیم.

#### ۴-۹ پیوست ۱: اثبات قضیه‌ی دیورژانس

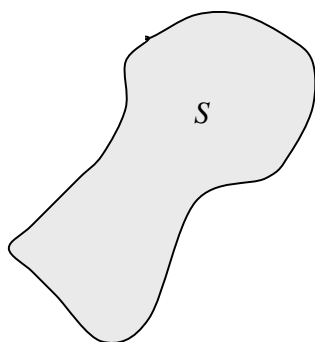
##### ۴-۹-۱ تعریف دیورژانس

در این پیوست نگاه دیگری به دیورژانس می‌اندازیم و قضیه دیورژانس را اثبات می‌کنیم. فرض کنید میدان برداری  $\mathbf{F}$  داده شده است و می‌خواهیم شار  $\Phi$  گذرنده‌ی این میدان را از سطح بسته‌ی  $S$  در شکل (۶۷-۴) حساب کنیم:

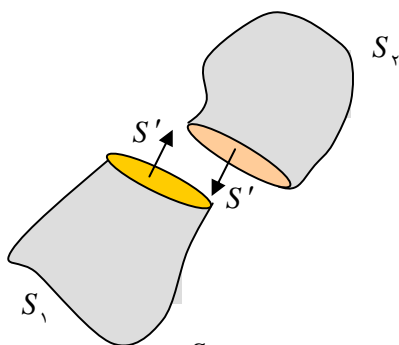
$$\Phi = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \quad (\epsilon-159)$$

اجازه دهید این سطح را همانند در شکل (۶۸-۴) به دو بخش تقسیم کنیم (برای روشنی بیشتر، در شکل (۶۸-۴) این دو بخش را جدا از هم نشان داده ایم اما، در واقع، آنها به هم چسبیده اند).

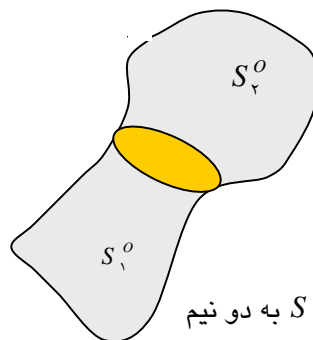
پیش از این که چیزی را حساب کنیم، بهتر است مطمئن شویم که معنی سطوح مختلف را در این شکل‌ها می‌فهمیم. در شکل (۶۷-۴) دو سطح  $S_1^0$  و  $S_2^0$  را داریم که نیمه‌های بالایی و پایینی سطح  $S$  در شکل (۶۷-۴) اند. توجه کنید که سطوح  $S_1^0$  و  $S_2^0$  سطح‌های بسته نیستند. افزون بر سطوح  $S_1^0$  و  $S_2^0$  دو سطح دیگر هم وجود دارند که در شکل (۶۹-۴) آنها را با  $S'$  نشان داده‌ایم. مساحت این دو سطح یکسان است اما جهت آنها مخالف یکدیگر است. سطح‌های  $S_1$  و  $S_2$  سطح‌های بسته اند که مرکزهای دو نیمه‌ی سطح  $S$  اند. حال می‌توان شار  $\Phi$  را حساب کرد.



شکل ۶۷-۴ یک سطح بسته



شکل ۶۹-۴ دو نیمه‌ی سطح  $S$



شکل ۶۸-۴ تقسیم سطح  $S$  به دو نیم

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_{S_1^o} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} + \int_{S_2^o} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \\
 &= \int_{S_1^o} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} + \int_{S_2^o} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} + \int_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} - \int_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \\
 &= \left( \int_{S_1^o} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} + \int_{S_2^o} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \right) + \left( \int_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} + \int_{S'} \mathbf{F} \cdot (-d\mathbf{a}) \right) \quad (\text{۴-۱۶۰}) \\
 &= \oint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} + \oint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \equiv \Phi_1 + \Phi_2
 \end{aligned}$$

توجه کنید که در سطر اول، سطح  $S$  را به دو سطح  $S_1^o$  و  $S_2^o$  تقسیم کرده‌ایم. در سطر دوم انتگرال روی سطح  $S'$  را یک بار افزودیم و یک بار کم کردیم و در سطر سوم آنها را چنان دسته بندی کردیم که سطح‌های بسته‌ی  $S_1$  و  $S_2$  را بسازند. در سطر آخر شار گذرنده از سطح‌های بسته‌ی  $S_1$  و  $S_2$  را تعریف کردیم.

می‌توان این کار را ادامه داد و حجم‌هایی را که سطح‌های بسته‌ی  $S_1$  و  $S_2$  احاطه کرده اند به حجم‌های کوچک‌تر و کوچک‌تر تقسیم کرد. هر بار که این کار را انجام دهیم، زوج سطح‌هایی مانند  $S'$  پدید می‌آید که جهت‌گیریشان یکدیگر را حذف می‌کند. با این کار، شار کل گذرنده از سطح اصلی  $S$  به مجموعه‌ای از شارها تقسیم می‌شود که از سطح این حجم‌های کوچک می‌گذرند:

$$\Phi = \sum_{i=1}^S \Phi_k \quad (\text{۴-۱۶۱})$$

پس، می‌توان حجم  $V$  را (که سطح بسته‌ی  $S$  مرزهای آن است) به حجم‌های کوچک‌تر تقسیم کرد و شار گذرنده از سطح  $S$ ، با جمع شارهای گذرنده از سطح این حجم‌های جزئی برابر است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که شار کل باید با حجم  $V$  متناسب باشد. از این رو، دیورژانس میدان  $\mathbf{F}$  را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}}{V} \quad (\text{۴-۱۶۲})$$

به بیان دیگر، در حد  $V \rightarrow 0$ ، دیورژانس عبارت از شار گذرنده از سطحی است که مرزهای حجم  $V$  است تقسیم بر  $V$ .

## ۴-۷-۲ قضیه‌ی بنیادی دیورژانس

حال که دیورژانس را تعریف کردیم، اینک به اثبات قضیه‌ی بسیار مهمی می‌پردازیم. این قضیه نام‌های مختلفی دارد: قضیه‌ی

گوس، قضیه‌ی گرین و یا قضیه‌ی دیورژانس. ما از نام قضیه‌ی دیورژانس استفاده خواهیم کرد  
 قضیه ۲-۴: انتگرال دیورژانس تابع برداری مانند  $\mathbf{F}$  در ناحیه‌ای به حجم  $V$  با انتگرال تابع در سطحی بسته‌ای که مرزهای  
 حجم  $V$  است، برابر است:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) d\tau = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \quad (۴-۱۶۳)$$

جزء حجم  $d\tau$  و بردار جزء سطح  $d\mathbf{a}$  اند.  
 اثبات: نقطه‌ی آغاز ما رابطه‌ی (۴-۱۵۲) است.

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=1}^S \Phi_k \Rightarrow \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i \\ &= \sum_{i=1}^N V_i \frac{\oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \\ &= \sum_{i=1}^N V_i (\nabla \cdot \mathbf{F}) \\ &= \int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) d\tau \end{aligned} \quad (۴-۱۵۵)$$

به بیان دیگر، شار میدان برداری  $\mathbf{F}$  گذرنده از سطح بسته‌ی  $S$  با انتگرال  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  روی حجمی که سطح  $S$  احاطه می‌کند، برابر  
 است

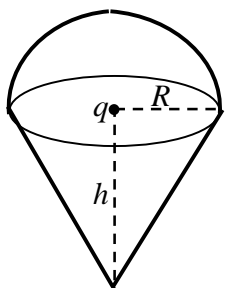
آزمون‌های کوتاه چند گزینه‌ای

۱- قرص تختی به شعاع  $R$  و بتوزیع بار سطحی یکنواخت داریم. می‌خواهیم میدان الکتریکی ناشی از آن را در نقطه‌ی دلخواهی در فضا بیابیم. کسی پیشنهاد می‌کند که از سطح گوسی به شکل کره‌ی استفاده کنیم که قرص را دربردارد و با آن هم‌مرکز است. کدام گزاره در این مورد درست است؟

(الف): قانون گوس برای کره درست است و می‌توان با استفاده از آن به‌سادگی میدان  $E$  را در هر نقطه‌ای حساب کرد.

(ب): قانون گوس برای کره درست است، اما نمی‌توان از آن برای یافتن میدان  $E$  را در هر نقطه‌ای استفاده کرد.

(پ): قانون گوس برای کره درست نیست.



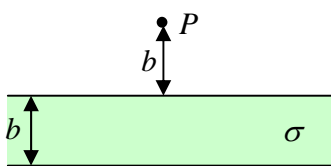
۲- قاعده‌ی قیفی برابر شکل با نیم‌کره‌ای پوشانده شده است. بار  $q$  در مرکز قاعده‌ی قیف (مرکز نیم‌کره) قرار دارد. ارتفاع قیف  $h$  و شعاع قاعده‌ی آن  $R$  است. شار الکتریکی گذرنده از قیف برابر است با

(الف): صفر      (ب):  $q/2\pi\epsilon_0$       (پ):  $q/2\epsilon_0$       (ت):  $q/\epsilon_0$       (ج):  $\frac{\pi R \sqrt{h^2 + R^2}}{2\pi R^2} \frac{q}{\epsilon_0}$

۳- روبانی از بار به پهنای  $b$ ، به طول بینهایت دراز و کلفتی ناچیز (در جهت عمود بر صفحه) در شکل نشان داده شده است.

چگالی بار سطحی روبان  $\sigma$  است. نقطه‌ی  $P$  به فاصله‌ی  $b$  از روبان قرار دارد. کدام یک

از گزینه‌های زیر میدان را در نقطه‌ی  $P$  توصیف می‌کند.



(الف):  $\frac{\sigma(\ln 2)}{\epsilon_0}$       (ب):  $\frac{\sigma b(\ln 2)}{2\pi\epsilon_0}$       (پ):  $\frac{\sigma(\ln 2)}{2b\pi\epsilon_0}$

(ت):  $\frac{\sigma^2 b(\ln 2)}{2\pi\epsilon_0}$       (ج):  $\frac{\sigma^2(\ln 2)}{2b\pi\epsilon_0}$

۴- دو پوسته‌ی استوانه‌ی هم‌محور به طول  $L$  و شعاع‌های  $R_1$  و  $R_2$  (با  $R_1 < R_2 \ll L$ ) و بچگالی بارهای سطحی  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  را در نظر بگیرید. در کدام یک از حالت‌های زیر پوسته‌ها در پتانسیل یکسان قرار دارند؟

(الف):  $\sigma_1 = \sigma_2$       (ب):  $\sigma_1 = -\sigma_2$       (پ):  $\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$       (ت):  $\sigma_1 = 0$       (ج):  $\sigma_2 = 0$

۵- بار حجمی نایکنواخت  $\rho(r) = \rho_0 R/r$  در کره‌ای به شعاع  $R$  و در بازه‌ی  $r \leq R$  توزیع شده است. کدام گزاره رفتار

میدان الکتریکی را در درون کره ( $r < R$ ) به درستی توصیف می‌کند؟

(الف):  $E(r) \propto \sqrt{r^2}$       (ب):  $E(r) \propto \sqrt{r}$       (پ): مقدار ثابت  $E(r) =$

(ت):  $E(r) = r$       (ج):  $E(r) = r^2$

۶- دو پوسته‌ی کروی به شعاع‌های  $R_1$  و  $R_2$  به فاصله‌ی خیلی دور از هم قرار دارند. اگر  $R_2 > R_1$  است. اگر بار روی پوسته‌ها به گونه‌ای باشند که پتانسیل پوسته‌ها (نسبت به بینهایت) باهم برابر باشند، میدان‌های الکتریکی را درست در بیرون پوسته‌ها مقایسه کنید.

(الف): میدان‌ها برابرند      (ب): در همسایگی پوسته‌ی بزرگ، میدان بزرگ‌تر است

(پ): در همسایگی کره‌ی کوچک میدان بزرگ‌تر است      (ت): برای پاسخ دادن به پرسش به اطلاعات دیگری نیاز است.

۷- میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا به صورت زیر است

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{a}{r^2} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \hat{\mathbf{r}} & ; \quad r \leq R \\ 0 & ; \quad r > R \end{cases}$$

که در آن  $a$  و  $R$  مقادیر ثابتی اند. کدام یک از گزاره‌های زیر توصیف دقیق‌تر توزیع باری است که به این میدان می‌انجامد؟  
(الف): بار نقطه‌ای منفی  $q = \epsilon\pi\epsilon_0 a$  جایگزیده در مبداء مختصات بعلاوه‌ی پوسته‌ی کروی به شعاع  $R$  با توزیع باری سطحی

یکنواخت  $\sigma = -q / \epsilon\pi R^2$ .

(ب): بار نقطه‌ای مثبت  $q = \epsilon\pi\epsilon_0 a$  جایگزیده در مبداء مختصات بعلاوه‌ی پوسته‌ی کروی به شعاع  $R$  با توزیع باری سطحی

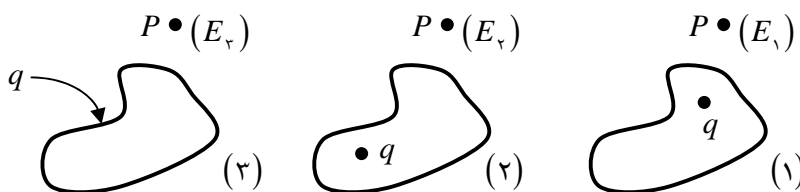
یکنواخت  $\sigma = -q / \epsilon\pi R^2$ .

(پ): بار نقطه‌ای مثبت  $q = \epsilon\pi\epsilon_0 a$  جایگزیده در مبداء مختصات بعلاوه‌ی کروه‌ای به شعاع  $R$  با بار منفی  $\rho = -3q / \epsilon\pi R^2$  که به طور یکنواخت در حجم کره توزیع شده است.

(ت): بار نقطه‌ای منفی  $-q = -\epsilon\pi\epsilon_0 a$  جایگزیده در مبداء مختصات بعلاوه‌ی کروه‌ای به شعاع  $R$  با بار مثبت  $\rho = 3q / \epsilon\pi R^2$  که به طور یکنواخت در حجم کره توزیع شده است.

(ج): با اصلاحات داده شده نمی‌توان بار تولید کننده‌ی میدان را تعیین کرد.

۸- پوسته‌ی رسانا در هر سه وضعیت زیر یکسان است. در وضعیت‌های (۱) و (۲) پوسته بدون بار است و بار  $q$  در فضای تهی آن جاسازی شده است. در وضعیت (۳) بار  $q$  بر روی رسانا قرار دارد. اگر  $E_1, E_2, E_3$  اندازه‌ی میدان‌های الکتریکی در نقطه‌ی  $P$  باشند، کدام گزاره درست است؟



(الف):  $E_1 > E_2 > E_3$

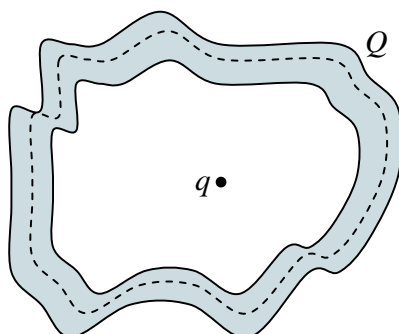
(ب):  $E_1 < E_2 < E_3$

(پ):  $E_1 = E_2 > E_3$

(ت):  $E_1 = E_2 < E_3$

(ج):  $E_1 = E_2 = E_3$

۹- بار  $q$  در فضای تهی درون یک پوسته‌ی کلفت رسانا قرار دارد (گوشت رسانا در شکل با رنگ خاکستری نشان داده شده

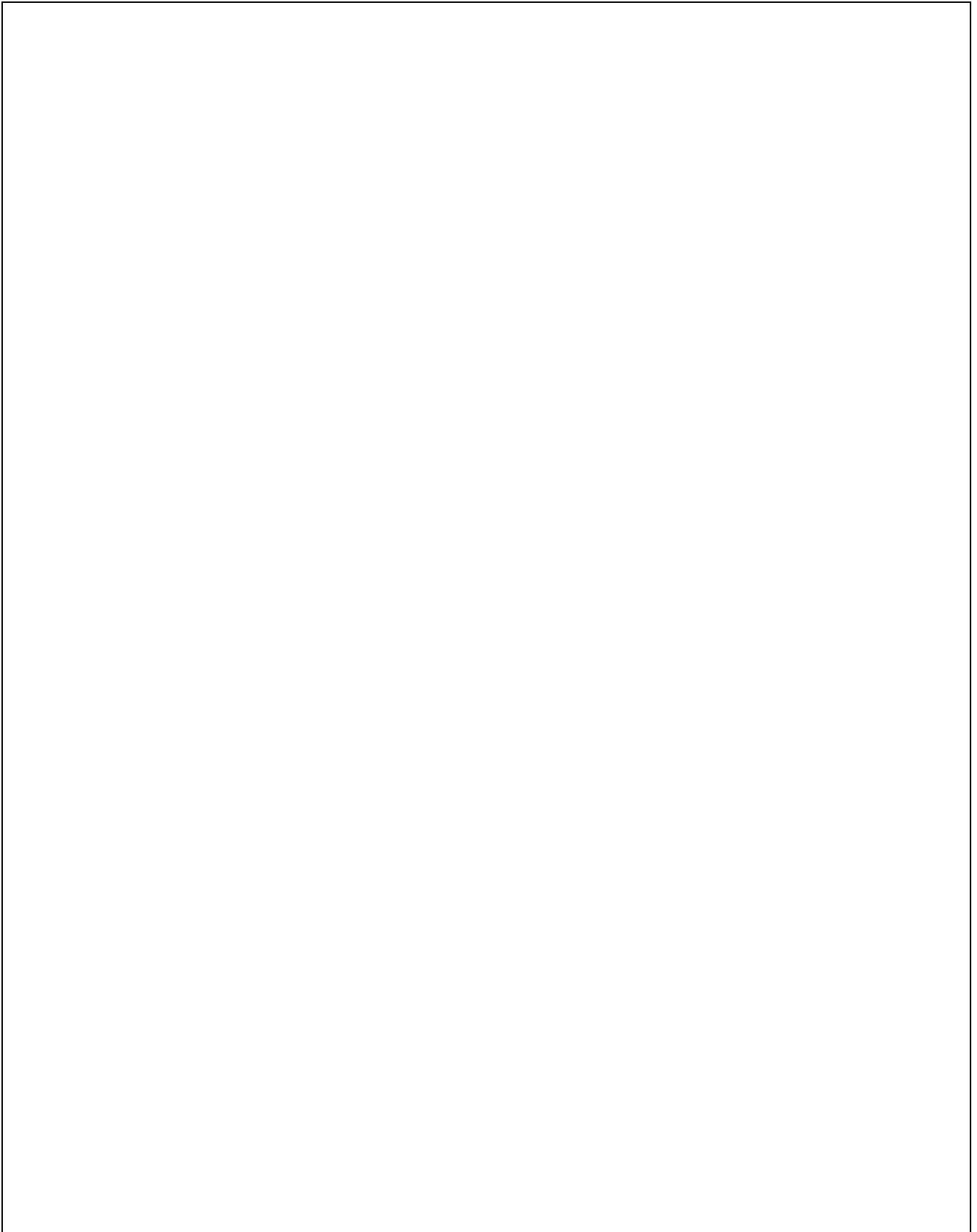


است). بار کل رسانا  $Q$  است. بارهای  $q$  و  $Q$  هر دو مثبت اند. صفحه‌ای با نقطه‌چین در گوشت رسانا رسم شده است. اگر  $\Phi$  شار الکتریکی گذرنده از این سطح باشد:

(الف):  $\Phi = 0$  (ب):  $0 < \Phi < q / \epsilon_0$  (پ):  $q / \epsilon_0$

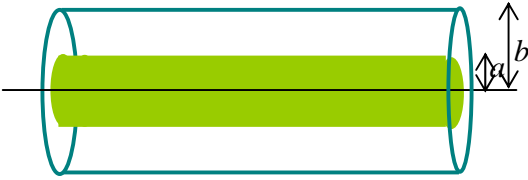
(ت):  $q / \epsilon_0 < \Phi < (q + Q) / \epsilon_0$  (ج):  $\Phi = (q + Q) / \epsilon_0$

(ج): (الف) و (ب) هر دو (ت) و (ج) هر دو



## مسئله‌ها

۴-۱ دو استوانه‌ی هم مرکز بسیار دراز به شعاع‌های  $a$  و  $b$  ( $b > a$ ) و طول  $L$  را در نظر بگیرید. بار  $+Q$  به طور یکنواخت در



شکل ۴-۷۰ دو استوانه‌ی تودرتو

حجم استوانه‌ی درونی و بار  $-Q$  بر روی سطح استوانه‌ی بیرونی توزیع شده است. ناحیه‌ی  $a < r < b$  تهی است. شکل (۴-۷۰) را ببینید.

(الف): این آرایش چه تقارنی دارد، جهت میدان الکتریکی چیست؟

(ب): برای هر یک از ناحیه‌های  $r < a$ ،  $a < r < b$ ، و  $r > b$  چه سطح

گوسی برمی‌گزینید و از چه متغیری برای پارامتری کردن سطح گوس

انتخابی خود استفاده می‌کنید؟ حدود تغییرات این متغیر برای هر ناحیه چیست؟

(پ): برای ناحیه‌ی  $r < a$ ، شار گذرنده از سطح گوس انتخابی را حساب کنید. پاسخ شامل میدان الکتریکی در آن ناحیه هم

است که هنوز نمی‌شناسیم.

(ت): بار کل که در درون سطح گوس انتخابی شما برای ناحیه‌ی  $r < a$  وجود دارد چقدر است؟

(ج): برای ناحیه‌ی  $r < a$ ، میدان الکتریکی  $E$  را حساب کنید.

(چ): گام‌های بالا را برای یافتن میدان الکتریکی در ناحیه‌ی  $a < r < b$  به صورت تابعی از  $r$  تکرار کنید.

(ح): نمودار تغییرات میدان الکتریکی را بر حسب پارامتری که برای سطح گوس برگزیده اید، برای هر سه ناحیه رسم کنید.

(خ): اختلاف پتانسیل بین  $r = a$  و  $r = \infty$ ؛ یعنی  $\Delta V = V(a) - V(\infty)$  را حساب کنید.

(د): اختلاف پتانسیل بین  $r = a$  و  $r = b$ ؛ یعنی  $\Delta V = V(b) - V(a)$  را حساب کنید.

۴-۲ شار گذرنده از یک دایره: بار نقطه‌ای  $q$  در مبدا مختصات قرار دارد. دایره‌ای در فاصله‌ی

$l$  از بار  $q$  قرار دارد و برابر شکل (۴-۷۰) نسبت به مبدا مختصات با زاویه‌ی  $2\theta$  گشوده شده

است. شار گذرنده از دایره را در نظر بگیرید. چون به جز بار  $q$  واقع در مبدا باری دیگری

وجود ندارد، شار هر سطحی که با دایره مقید است و در سمت راست مبدا مختصات قرار دارد

باید یکسان باشد. این شار را برای دو سطح زیر حساب کنید.

(الف): سطح تخت دایره

(ب): عرق‌چین کروی که قاعده‌اش دایره است (مرکز مره در مبدا مختصات است).

۴-۳ قانون گوس و دو بار نقطه‌ای: (الف) دو بار نقطه‌ای  $q$  در روی محور  $x$  و در مکان‌های  $x = \pm l$  قرار دارند. در نقاط

نزدیک به مبدا مختصات و در روی محور  $x$  مولفه‌ی  $E_x$  میدان را حساب کنید. سپس در نقاط نزدیک به مبدا مختصات و در

روی محور  $y$  مولفه‌ی  $E_y$  میدان را بیابید. برای  $x \ll l$  و  $y \ll l$  تقریب‌های مناسبی را به کار ببرید

(ب): استوانه‌ی کوچکی را در نظر بگیرید که مرکزش در مبدا مختصات است و محورش بر محور  $x$  منطبق است. شعاع

قاعده‌ی استوانه  $r_0$  و طول آن  $2x_0$  است. با استفاده از نتیجه‌ی بخش (الف)، نشان دهید که شار گذرنده از استوانه صفر است.

این نتیجه‌ای است که قانون گوس آن را دیکته می‌کند.

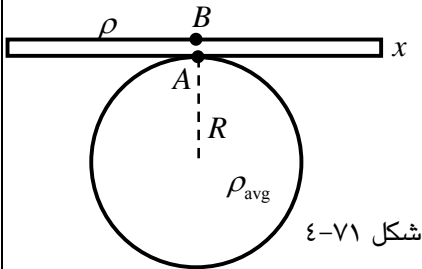
۴-۴ مقایسه‌ی سه جسم: میدان الکتریکی را در نقطه‌ای بر روی سطح (۱) کره‌ای به شعاع  $R$ ، (۲) استوانه‌ی بینهایت درازی به

شعاع  $R$  و (۳) برشی به ضخامت  $2R$  که دو بعد دیگرش تا بینهایت گسترده است، حساب و با هم مقایسه کنید. چگالی بار

جمعی هر سه جسم یکسان و برابر  $\rho$  است. از نظر فیزیکی توضیح دهید که چرا نسبت بزرگی میدان الکتریکی به گونه‌ای

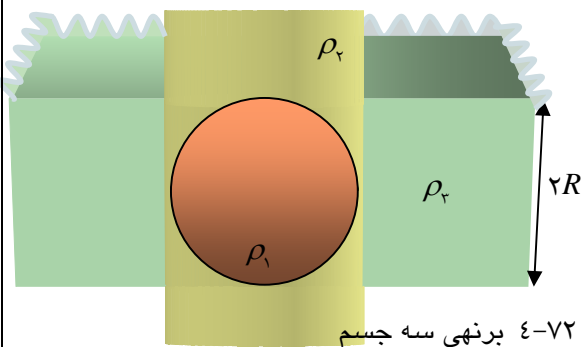
است که از محاسبه‌ی خود به دست می‌آورد.

۴-۵ صفحه‌ی روی کره: صفحه‌ی تخت بسیار بزرگی به ضخامت  $x$  و با چگالی بار حجمی  $\rho$  را در نظر بگیرید. این صفحه با کره‌ای به شعاع  $R$  و چگالی بار حجمی  $\rho_0$  برابر شکل (۴-۷۱) در تماس است. نقطه‌ی  $A$  را محل تماس بنامید. نقطه‌ی  $B$  مقابل نقطه‌ی  $A$  در روی بالایی صفحه است. نشان دهید که اگر  $\rho > (2/3)\rho_0$  باشد، میدان الکتریکی کل روبه بالا (یعنی میدان ناشی از صفحه و کره) در نقطه‌ی  $B$  بزرگتر از نقطه‌ی  $A$  است. فرض کنید که  $x \ll R$  است.



شکل ۴-۷۱

۴-۶ برنهی سه جسم: کره‌ای به شعاع  $R$ ، استوانه‌ی بینهایت دراز با شعاع قاعده‌ی  $R$  و برشی بینهایت گسترده به ضخامت



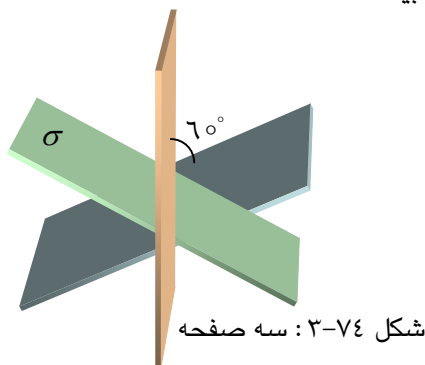
شکل ۴-۷۲ برنهی سه جسم

$2R$  را برابر شکل (۴-۷۲) در نظر بگیرید. چگالی بار حجمی یکنواخت آن‌ها را به ترتیب  $\rho_1$ ،  $\rho_2$  و  $\rho_3$  بنامید. محور استوانه در راستای محور  $z$  است. برش بینهایت گسترده بر محور  $z$  عمود است و ضخامت آن از  $z = -R$  تا  $z = R$  است. بنابراین، هر جا که این سه جسم هم‌پوشانی داشته باشند، چگالی بارها باهم جمع می‌شوند. برای این که میدان الکتریکی در همه‌جای کره صفر باشد، چگالی بارها چه رابطه‌ای باید داشته باشند؟

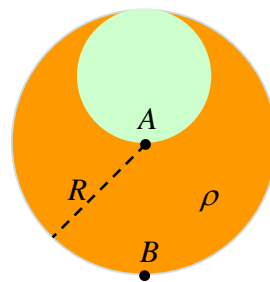
(راهنمایی: میدان الکتریکی یک کمیت برداری است، بهتر است با مولفه‌های آن کار کنید.)

۴-۷ دو کره: در شکل (۴-۷۳) کره‌ای به شعاع  $R$  با چگالی بار یکنواخت  $\rho$  نشان داده شده است. در این کره کاواکی کروی به شعاع  $R/2$  ایجاد شده است. میدان الکتریکی را در نقاط  $A$  و  $B$  حساب کنید.

۴-۸ سه صفحه‌ی بینهایت: سه صفحه بینهایت گسترده هر یک با چگالی بار سطحی  $\sigma$  برابر شکل (۴-۷۴) با زاویه‌ی  $60^\circ$  یکدیگر را قطع کرده اند. میدان الکتریکی حاصل را در همه‌ی نقاط فضا بیابید.



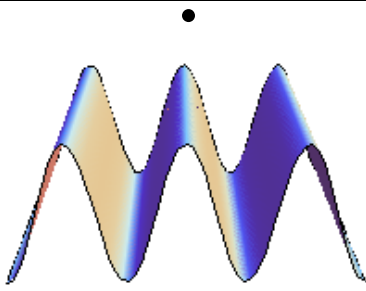
شکل ۴-۷۴: سه صفحه



شکل ۴-۷۳ دو کره

۴-۹ صفحه‌ی موج‌دار: این مسئله با محاسبه‌ی طولانی‌تر و شاید پیچیده‌تر همراه است. اما تمرین خوبی برای حسابان برداری است. انتگرال نهایی را نمی‌توان با توابع معمولی حساب کرد، اما با بررسی حالت‌های حدی  $a$  خیلی کوچک، یا  $b$  خیلی کوچک و یا هر دو به نتیجه‌ی جالبی خواهید رسید.

میدان الکتریکی حاصل از یک صفحه بینهایت گسترده‌ی موج‌دار با چگالی بار سطحی یکنواخت  $\sigma$  را در نقطه‌ی  $(0,0,P)$



شکل ۷۵-۴ صفحه‌ی موج‌دار

به‌دست آورید. معادله‌ی سطح با  $z = a \cos(by)$  داده شده است و در شکل (۷۵-۴) نشان داده شده است. این سطح با دستور زیر در *Mathematica* رسم شده است:

```
Plot3D[Cos[x], {x, -3 Pi, 3 Pi}, {y, -0.1, 0.1},
Mesh -> None, Ticks -> None, Boxed -> True,
ImageSize -> 200, Axes -> None]
```

۴-۱۰ **مربای الکترون:** کره‌ای به شعاع  $a$  را در نظر بگیرید که با بار منفی به طور

یکنواخت در حجم کره توزیع شده است. مقدار بار معادل بار دو الکترون است. در این ژله‌ی بار منفی دو پروتون قرار دارد. فرض کنید با وجود پروتون‌ها توزیع بار منفی در

کره یکنواخت باقی می‌ماند. پروتون‌ها در کجا باید قرار گیرند تا نیروی وارد به هر یک از آنها صفر باشد؟ (این آرایش به طور شگفت‌انگیزی، کاریکاتور واقعی از مولکول هیدروژن به‌دست می‌دهد. علت نرمیدن ابر الکترونی بر روی پروتون‌ها را فقط با مکانیک کوانتومی می‌توان توضیح داد!)

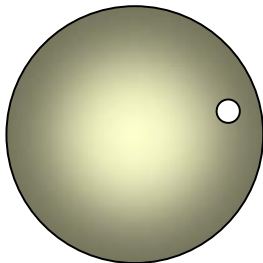
۴-۱۱ **نیروهای وارد به سه صفحه:** سه صفحه‌ی نارسانای موازی  $A$ ،  $B$  و  $C$  داریم. صفحه‌ی  $A$  در بالا،  $B$  در وسط و صفحه‌ی  $C$  در زیر صفحه‌ی  $B$  است. چگالی بار صفحه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  به ترتیب  $-\epsilon_0$ ،  $7\epsilon_0$  و  $-3\epsilon_0$  است. اندازه‌ی نیروی الکتریکی وارد به هر صفحه را بیابید.

۴-۱۲ **نیروی دو نیم‌کره:** کره‌ی  $Q$  در حجم کره‌ای به شعاع  $R$  به‌طور یکنواخت توزیع شده است. نیرویی که بارهای نیم‌کره‌ی جنوبی به نیم‌کره‌ی شمالی وارد می‌کند چیست؟

۴-۱۳ **پوسته‌ی سوراخ، دوباره:** این مسئله همان مسئله‌ی ۲۶-۲ است. در فصل ۲ انتگرال‌گیری مستقیم را برای حل آن

پیشنهاد کردیم و گفتیم که روش‌های دیگری هم وجود دارد. اینک می‌توانید با آموزه‌های همین فصل هم آن را حل کنید.

۴-۱۴ **پوسته‌ی سوراخ:** در شکل (۷۶-۴) یک پوسته‌ی کروی به شعاع  $a$  و با چگالی بار سطحی  $\sigma$  نشان داده شده است. از این پوسته، بخش کوچکی به شکل دایره و به شعاع  $b \ll a$  بریده شده است. اندازه و جهت میدان الکتریکی را در مرکز این سوراخ حساب کنید. این مسئله را با چند روش می‌توان حل کرد.



شکل ۷۶-۴ پوسته با سوراخ

۴-۱۴ **میدان توزیع بار:** (الف) برشی مستطیل شکل در راستای  $y$  و  $z$  بینهایت گسترده است. در راستای  $x$  ضخامت آن  $l$

است. با چگالی بار یکنواخت آن  $\rho$  است. از  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$  استفاده کنید و نشان دهید که میدان الکتریکی در درون برش به صورت  $E_x = \rho x / \epsilon_0 + A$  است. مفهوم فیزیکی  $A$  چیست؟

(ب): شعاع کره‌ای با چگالی بار حجمی یکنواخت  $\rho$  برابر  $R$  است. از  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$  استفاده کنید و نشان دهید که میدان

الکتریکی در ناحیه‌ی درون آن به صورت  $E_r = \rho r / 2\epsilon_0 + B/r^2$  است. توصیف فیزیکی جمله‌ی  $B/r^2$  چیست؟

(پ): با توجه به این که در دو چیدمان بالا چگالی بار یکسان بود و در هر دو از رابطه‌ی یکسان  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$  استفاده شد، چرا دو پاسخ متفاوت برای این دو چیدمان به‌دست آمد؟