۳- انرژی آرایه‌ی بار

۳-۱ پتانسیل و انرژی پتانسیل

قانون کولمب اساسا تمام آن چیزی است که در الکتروستاتیک وجود دارد. اگر اندازه‌ی بارها و مکان‌شان را بدانیم، نیروهای الکتریکی را می‌توانیم پیدا کنیم. همچنین، اگر بارها آزاد باشند تا تحت اثر نیروهای از نوع دیگر حرکت کنند، می‌توانیم آرایش ترازمندی را بیابیم که در آن توزیع بارها ساکن بمانند. در این نگاه، قانون‌های حرکت نیوتون هم همه‌ی آن چیزی است که مکانیک را می‌سازند. در مکانیک و الکتروستاتیک، با شناساندن مفهوم‌های دیگر، توان محاسباتی و فهم خود را افزایش می‌دهیم. یکی از مهم‌ترین مفهوم‌ها، انرژی است.

انرژی در الکتروستاتیک مفهوم سودمندی است، چون نیروهای الکتریکی پایستار اند. وقتی بارها را در میدان الکتریکی به حرکت درمی‌آورید، انرژی مصرف شده را می‌توانید بازیافت کنید. همه چیز کاملا برگشت‌پذیر است.

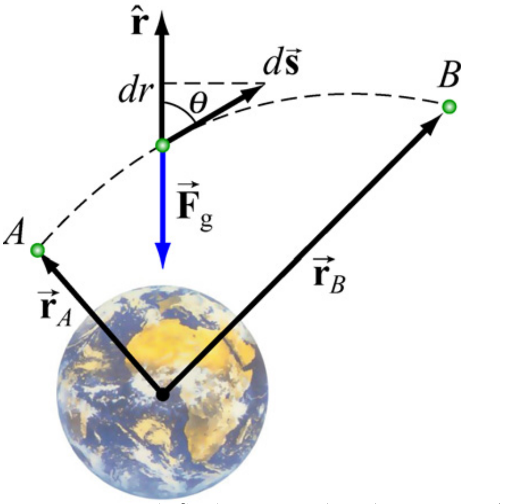
زمین به جسمی به جرم m که در فاصله‌ی r از مرکز آن قرار دارد، نیروی گرانش وارد می کند. اگر زمین را کره‌ی همگن در نظر بگیریم، این نیرو عبارت است از

$$\mathbf{F}_g = -G\frac{Mm}{r^۲}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۳-۱)$$

که در آن $G = ٦,٦٧\times ۱۰^{-۱۱}\ \mathrm{N.m^۲/kg^۲}$ ثابت جهانی گرانش و M جرم زمین است. بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ در راستای شعاع و برون سو است. میدان گرانش $\mathbf{g}$ این نیرو عبارت است ازنیروی گرانش در واحد جرم و برابر است با

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = \frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۳-۲)$$

توجه کنید که $\mathbf{g}$ فقط به M ، جرمی که میدان را به وجود می‌آورد، و r (فاصله از M) بستگی دارد. در نزدیکی‌های سطح زمین میدان گرانشی $\mathbf{g}$ به تقریب ثابت و اندازه‌اش $g = GM/r_E^۲ \approx ۹,۸۱\mathrm{m/s^۲}$ است که در آن r_E شعاع زمین است. حالا جسمی را در نظر بگیرید که در میدان گرانش زمین برابر شکل (۳-۱) از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B جابه‌جا می‌شود. کار نیروی گرانش برای این جابه‌جایی برابر



شکل ۳-۱ جابه‌جایی در میدان گرانش زمین

$$W_g = \int \mathbf{F}_g \cdot d\,\mathbf{s} = \int_{r_A}^{r_B}\left(-\frac{GMm}{r^2}\right)dr$$

$$= \left[\frac{GMm}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = GMm\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right) \qquad (۳-۳)$$

است. این نتیجه نشان می‌دهد که W_g مستقل از مسیر است و فقط به نقاط انتهایی A و B بستگی دارد. تمایز بین کاری که میدان گرانش انجام می‌دهد، W_g، و کاری که عامل خارجی مانند شخص شما انجام می‌دهید و جسم را جابه‌جا می‌کنید، W_{Ext}، در اینجا اهمیت دارد. این دو کار در یک علامت منفی اختلاف دارند: $W_g = -W_{Ext}$

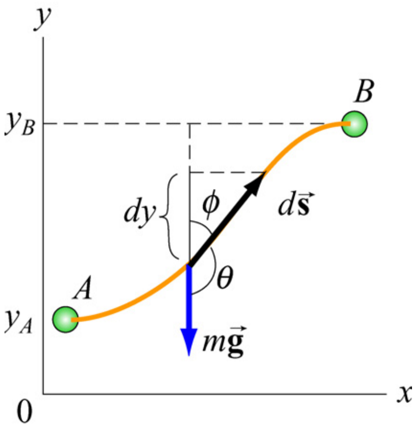
کاری که گرانش در جابه‌جایی جسمی از ارتفاع y_A تا ارتفاع y_B (شکل ۳-۲) انجام می‌دهد برابر

$$W_g = \int \mathbf{F}_g \cdot d\,\mathbf{s} = \int_A^B mg\cos\theta ds = -\int_A^B mg\cos\phi ds = -\int_{y_A}^{y_B} mg\, dy = -mg\,(y_B - y_A) \tag{۳-٤}$$

است. بازهم می‌بینیم که نتیجه مستقل از مسیر حرکت است و تنها تابعی از تغییر ارتفاع، $(y_B - y_A)$، است. در مثال بالا اگر مسیر حرکت مسیر بسته‌ای باشد، یعنی جسم از نقطه‌ی A آغاز به حرکت کند و پس از پیمودن مسیری دوباره به همان نقطه‌ی A بازگردد، کار کل نیروی گرانش صفر می‌شود و گوییم نیروی گرانش پایستار است. به طور عمومی‌تر: اگر انتگرال خط نیروی $\mathbf{F}$ روی مسیر بسته صفر شود، گوییم نیروی $\mathbf{F}$ **پایستار** است: به بیان ریاضی، اگر

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{۳-٥}$$

آنگاه $\mathbf{F}$ نیروی پایستار است. این تعریف از نیروهای پایستار برای منظور ما بسنده است. در سه بعد، اگرچه این شرط لازم است اما کافی نیست. در جای خود ما به این موضوع خواهیم پرداخت [۱] .



شکل ۲-۳ جابه‌جایی جرم m از A به B

وقتی با نیروهای پایستار سروکار داریم، بهتر است از مفهوم انرژی پتانسیل، U ، استفاده کنیم. تغییر انرژی پتانسیل جسمی که تحت تاثیر نیروی پایستار $\mathbf{F}$ از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B جابه‌جا می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -W \tag{۳-٦}$$

W مقدار کاری است که نیرو بر روی جسم انجام داده است. برای نیروی گرانش $W = W_g$ است. با توجه به رابطه‌ی (۳-۳) انرژی پتانسیل را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$U_g = -\frac{GMm}{r} + U_0 \tag{۳-۷}$$

$U_\circ$ ثابت دلخواهی است که مقدارش به گزینه‌ی نقطه‌ی مرجع بستگی دارد. بهتر است نقطه‌ی مرجع را همواره چنان برگزید که در آنجا $U_\circ$ صفر است (یا نقطه‌ی مرجع را جایی انتخاب کنید که مقدار $U_\circ$ را در آن نقطه می‌دانید.) در گرانش (اگر در بینهایت بار الکتریکی وجود نداشته باشد،در الکتروستاتیک هم) بینهایت را نقطه‌ی مرجع برمی‌گزینیم : $U_\circ(r=\infty) = 0$. چون U_g به گزینه‌ی نقطه‌ی مرجع بستگی دارد، فقط اختلاف انرژی پتانسیل، ΔU، معنی فیزیکی دارد و کمیت اندازه پذیر است. در نزدیکی سطح زمین که میدان گرانشی $\mathbf{g}$ به تقریب ثابت است، اگر جسمی از سطح زمین تا ارتفاع h جابه‌جا شود انرژی پتانسیل‌اش به اندازه‌ی $\Delta U_g = -mgh$ تغییر می‌کند و کار نیروی گرانش در این جابه‌جایی برابر $W_g = -mgh$ است .

مفهوم دیگری که به انرژی پتانسیل نزدیک است، "**پتانسیل**" است. از اختلاف انرژی پتانسیل گرانشی ΔU_g می‌توان پتانسیل گرانشی را به صورت زیر تعریف کرد.

$$\Delta V_g \equiv \frac{\Delta U_g}{m} = -\int_A^B \left(\mathbf{F}_g / m\right)\cdot d\mathbf{s} = -\int_A^B \mathbf{g}\cdot d\mathbf{s} \tag{۳-۸}$$

از نظر فیزیکی، ΔV_g برابر است با منهای کار در واحد جرم گرانش در جابه‌جایی جسم از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B.

نیرو و میدان الکتروستاتیکی بسیار شبیه نیرو و میدان گرانشی است. نیروی الکتروستاتیک با قانون کولمب داده می‌شود و به

---

[۱] برای توضیح بیشتر برای مثال نگاه کنید به: فیزیکِ یک، فیروز آرش، انتشارات نوپردازان، ۱۳۹۱.

صورت عکس مجذور فاصله است. افزون براین، نیروی الکتروستاتیکی $\mathbf{F}_e$ هم پایستار است.
همانند میدان گرانشی $\mathbf{g}$، برای میدان الکتروستاتیکی $\mathbf{E}$ هم می‌توان اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه‌ی A و B را به صورت زیر تعریف کرد.

$$\Delta V = -\int_A^B \left(\mathbf{F}_e / q_\circ\right) \cdot d\mathbf{s} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{۳-۹}$$

که در آن $q_\circ$ بار آزمون است. اختلاف پتانسیل ΔV مقدار کار در واحد بار است که برای جابه‌جایی بار آزمون $q_\circ$ از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B، بدون تغییر انرژی جنبشی آن، هزینه می‌شود. بازهم توجه کنید که پتانسیل الکتریکی با انرژی پتانسیل الکتریکی فرق دارد. این دو کمیت با رابطه‌ی زیر به هم مربوط اند.

$$\Delta U = q_\circ \Delta V \tag{۳-۱۰}$$

در یکاهای SI یکای پتانسیل الکتریکی ولت (V) است

$$۱V = ۱\text{J/C} \tag{۳-۱۱}$$

هنگامی که با سامانه‌های اتمی سروکار داریم، ژول یکای بسیار بزرگی است و به کار بردنش دشوار است. مقیاس سودمند در این مواقع الکترون ولت (eV) است. یک الکترون ولت مقدار انرژی است که الکترون در گذار از اختلاف پتانسیل یک ولت به دست می‌آورد (یا از دست می‌دهد).

$$۱eV = \left(۱{,}۶\times۱۰^{-۱۹}\ \text{C}\right)\left(۱\,\text{V}\right) = ۱{,}۶\times۱۰^{-۱۹}\ \text{J} \tag{۳-۱۲}$$

نکته: درستی قانون کولمب، پتانسیل الکتریکی و جرم فوتون– قانون کولمب می‌گوید نیرو به صورت $۱/r^۲$ تغییر می‌کند. از کجا بدانیم که قانون کولمب دقیقا به صورت $۱/r^۲$ است و ، مثلا، $۱/r^{۲{,}۰۰۰۱}$ یا $۱/r^{۱{,}۹۹۹۱}$ نیست؟ از فیزیک مقدماتی می‌دانیم که اگر نیرو به صورت $۱/r^۲$ باشد، انرژی پتانسیل مربوط به آن به صورت $۱/r$ است. پس، پرسش را می‌توان در قالب پتانسیل طرح کرد: از کجا معلوم که انرژی پتانسیل به صورت $1/r$ تغییر می‌کند. انرژی پتانسیل برای نیروی کولمب به‌صورت زیر است.

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r} \tag{۳-۱۳}$$

پیش از آنکه نتایج تجربی را بازگو کنیم، توجه کنید که بنابه نظریه‌ی نسبیت ونظریه‌ی میدان‌ها انرژی پتانسیل باید به‌صورت

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qQ \frac{e^{-kr}}{r} \tag{۳-۱۴}$$

باشد که در آن ثابت k صفر و یا یک عدد مثبت است. رابطه‌ی (۳-۱۴) **پتانسیل یوکاوا*** نام دارد. اگر $k = ۰$ باشد رابطه‌های (۳-۱۳) و (۳-۱۴) یکی می‌شوند. بنابراین پرسش ما این است که آیا k صفر است؟ نتایج آزمایش ویلیامز، فالرو هیل [۲] بر روی رساناها نشان داد که پتانسیل با $۱/r^{۱\pm۱{,}۵\times۱۰^{-۱۶}}$ متناسب است.
این نتیجه کاملا با $۱/r$ سازگار است. اگر دقیق‌تر نگاه کنیم، باید بگوئیم که هر انحرافی در رفتار پتانسیل از $۱/r$ باید به‌صورت یک تابع نمایی همانند رابطه‌ی (۳-۱۴) باشد و نه تغییر در توان r. ویلیامز و همکارانش با تحلیل داده‌های تجربی و بازنویسی خطای آزمایش به‌صورت نمایی، حد بالای ثابت k را از مرتبه‌ی $k < ۳\times۱۰^{-۱۰}\ \text{cm}^{-۱}$ یافتند. حال اگر $k > ۰$ باشد، در فاصله

---

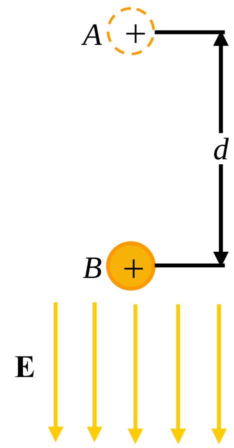
* Yukawa potential
[۲] E. R. Williams, J. E. Faller, and H. A. Hill, Phys. Rev. Lett. 26 (1971) 71.

های کوتاه ($e^{-kr} \approx ۱$) قانون کولمب تقریب بسیار خوبی برای واقعیت است ولی برای فاصله‌های بزرگ (یعنی $e^{-kr} \ll ۱$) دیگر تقریب خوبی نیست و نمی‌توان آن را مانند یک اصل به کار برد. برای مثال، هنگامی که $e^{-kr} \approx e^{-1}$ است (فاصله $r \approx ۱/k$ باشد)، قانون کولمب دیگر قابل استفاده نیست. برای فاصله‌های بزرگتر از $r \approx ۱/k$، عامل نمایی در رابطه‌ی (۳-۱۴) به افت سریع تابع پتانسیل می‌انجامد، به طوری که در فاصله‌ی $r = ۳/k$ تابع پتانسیل تقریباً صفر می‌شود. کمیت $۱/k$ برد پتانسیل نام دارد. توجه کنید که برد پتانسیل کولمب برای $k = ۰$ بینهایت است. یافته‌های تجربی نشان می‌دهد که برای فاصله‌های کمتر از $۱/۳\times۱۰^{-۱۰}\ \text{cm}^{-۱} \approx ۱۰^{۹}\ \text{cm}$ قانون کولمب تقریب خوبی برای واقعیت است. درآزمایش دیگری، با استفاده از ماهواره، میدان مغناطیسی زمین و مشتری را اندازه‌گیری کرده‌اند. (قانون کولمب چه ربطی به میدان مغناطیسی دارد؟ اگر قانون کولمب تعدیل شود لازم است که نیروی مغناطیسی نیز به همان اندازه تعدیل شود). اندازه‌گیری میدان مغناطیسی مشتری توسط سفینه **پایونر-۱۰** نشان می‌دهد که $k < ۲\times۱۰^{-۱۱}\ \text{cm}^{-۱}$ است. این نتیجه به مراتب از نتیجه‌ی آزمایش ویلیامز و همکاران بهتر است. اگر به میدان مغناطیسی کهکشان راه شیری توجه کنیم این میدان در فاصله‌ی چندین هزار سال نوری هنوز قابل اندازه‌گیری است و به ما اجازه می‌دهد که نتیجه بگیریم: $k < ۱\times۱۰^{-۲۲}\ \text{cm}^{-۱}$ که البته می‌توان آن را صفر پنداشت. مقدار k به **جرم** فوتون مربوط است $(m = \hbar k/c)$ و حد بالای k جرم فوتون را مقدار $m < ۳\times۱۰^{-۶۰}\text{gr}$ نشان می‌دهد!♣

۳-۲ پتانسیل الکتریکی در میدان یکنواخت

ذره ای با بار الکتریکی $+q$ درمیدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E} = E_۰\left(-\hat{\mathbf{j}}\right)$ در راستای میدان حرکت می‌کند، شکل (۳-۳). چون مسیر ذره از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B با میدان $\mathbf{E}$ موازی است، اختلاف پتانسیل بین نقطه‌ی A و نقطه‌ی B عبارت است از

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -E_۰\int_A^B ds = -E_۰ d < ۰ \tag{۳-۱۵}$$



شکل ۳-۳ حرکت بار q در جهت میدان $\mathbf{E}$

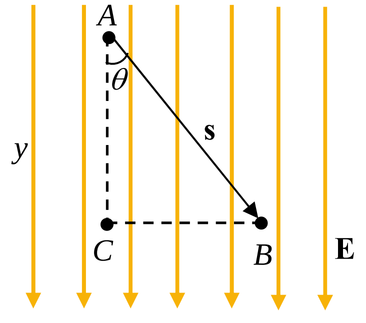
یعنی در مقایسه با نقطه‌ی A ، نقطه‌ی B در پتانسیل پایین‌تری قرار دارد. در واقع، جهت خط‌های میدان الکتریکی همیشه از پتانسیل بیش‌تر به پتانسیل کم‌تر است. تغییر انرژی پتانسیل $\Delta U = U_B - U_A = -qE_۰ d$ است. چون $q > ۰$ است ، پس $\Delta U < ۰$ است: انرژی پتانسیل بار مثبت با حرکت در جهت میدان کاهش می‌یابد. اگر مسیر ذره از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B با جهت میدان الکتریکی موازی نباشد، بلکه همانند شکل (۳-۴) با آن زاویه‌ی θ بسازد، چه کنیم؟ در این حالت اختلاف پتانسیل به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{s} = -E_۰ s\cos\theta = -E_۰ y \tag{۳-۱۶}$$

توجه کنید که در شکل (۳-۴) جهت افزایش y روبه پایین است. بازهم می‌بینیم که حرکت در جهت میدان $\mathbf{E}$ پتانسیل را کاهش می‌دهد. اگر مسیر حرکت به صورت $A \to C \to B$ می‌شد، پتانسیل بار چقدر تغییر می‌کرد؟ اختلاف پتانسیل در این حالت دو بخش دارد

$$\Delta V = \Delta V_{CA} + \Delta V_{BC} \tag{۳-۱۷}$$

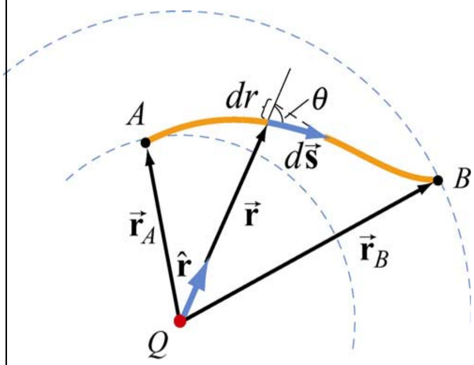
وقتی از A به C می‌رویم، تغییر پتانسیل برابر $\Delta V_{CA}=-E_\circ y$ است؛ امادر حرکت از C به B چون مسیر حرکت به میدان $\mathbf{E}$ عمود است، تغییر پتانسیل $\Delta V_{CB}=\circ$ است. پس، نتیجه همان است که در رابطه‌ی (۳-۱۶) حساب شد. یعنی، نتیجه مستقل از مسیر است و این با پایستار بودن میدان $\mathbf{E}$ سازگار است. در مسیر $A\to C\to B$ کارمیدان $\mathbf{E}$ فقط دربخش AC که موازی خط میدان است، غیر صفر است. نقطه‌های B و C در پتانسیل یکسان قرار دارند: $V_B=V_C$. این بدان معنی است که برای جابه‌جایی بار q از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C کاری انجام نمی‌گیرد، چون $\Delta U=q\Delta V$ است. در واقع همه‌ی نقاط خط راستی که B را به C وصل می‌کند، روی "خط هم‌پتانسیل" قرار دارند. توصیف کامل‌تر "هم‌پتانسیل" را به بخش ۳-۵ واگذار می‌کنیم.



شکل ۳-٤ اختلاف پتانسیل در میدان یکنواخت

۳-۳ پتانسیل الکتریکی بار نقطه‌ای

بار الکتریکی نقطه‌ای Q را در مبداء مختصات تصور کنید. این بار میدان الکتریکی $E=\left(Q/4\pi\varepsilon_\circ r^2\right)\hat{\mathbf{r}}$ تولید می‌کند. $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه‌ای از بار به سوی نقطه‌ی میدان است؛ به شکل (۳-۵) نگاه کنید. می‌خواهیم اختلاف پتانسیل بین دو نقطه را در این میدان حساب کنیم. از شکل(۳-۵) پیداست که $\hat{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{s}=ds\cos\theta=dr$ است. پس داریم



شکل ۳-۵ اختلاف پتانسیل دو نقطه در میدان یک بار نقطه‌ای

$$\Delta V=V_B-V_A=-\int_A^B\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\hat{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{s}$$

$$=-\int_A^B\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right) \qquad (۳-۱۸)$$

باز هم می‌بینیم که اختلاف پتانسیل ΔV فقط به نقاط انتهایی بستگی دارد و مستقل از مسیر است.

همانند گرانش، در اینجا هم فقط اختلاف پتانسیل الکتریکی از نظر فیزیکی معنی دارد و کمیت اندازه پذیر است. کافی است نقطه‌ی مرجعی انتخاب و پتانسیل را در آن نقطه صفر فرض کرد. در عمل بینهایت را نقطه‌ی مرجع انتخاب می‌کنند و پتانسیل آن را صفر فرض می‌کنند (اگر در بینهایت بار الکتریکی وجود نداشته باشد.) بنابراین، پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی P به‌صورت زیر در می‌آید

$$V(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{Q}{r} \qquad (۳-۱۹)$$

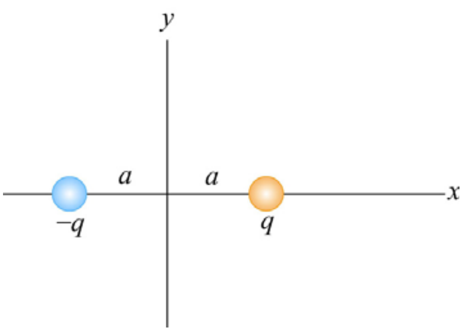
که در آن r فاصله‌ی بار Q تا نقطه‌ی P است.

اگر بیش از یک بار نقطه‌ای وجود داشته باشد، هر باری پتانسیل مربوط به خود را تولید می‌کند و با استفاده از اصل برهم‌نهی پتانسیل در یک نقطه‌ی فضا از جمع پتانسیل‌های بارها در آن نقطه به‌دست می‌آید

$$V(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\sum_i\frac{q_i}{r_i} \qquad (۳-۲۰)$$

r_i فاصله‌ی بار i-ام تا نقطه‌ای است که پتانسیل در آن نقطه محاسبه می‌شود.

مثال ۱-۳ پتانسیل دو بار نقطه‌ای: در شکل (۶-۳) بار نقطه‌ای $+q$ در $x=a$ وبار نقطه‌ای $-q$ در $x=-a$ قرار دارند. پتانسیل الکتریکی این سامانه را در نقطه‌ی دلخواهی در روی محور x به‌دست آورید و نمودار آن را بکشید.



شکل ۶-۳ دوقطبی الکتریکی

حل: پتانسیل الکتریکی را با استفاده از اصل برنهی می‌توان به‌دست آورد. در نقطه‌ای روی محور x داریم

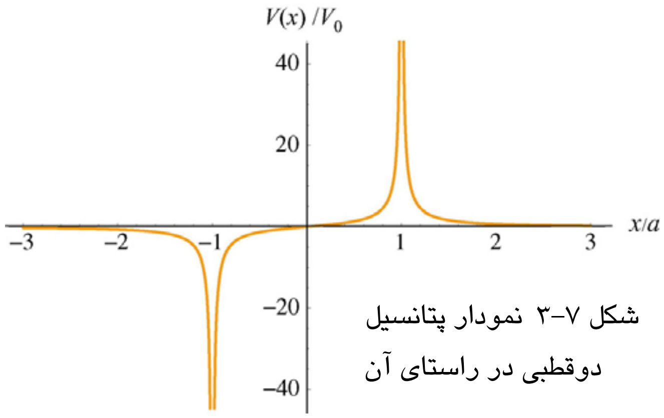
$$V(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|x-a|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{|x+a|}$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|x-a|}-\frac{1}{|x+a|}\right] \qquad (۳-۲۱)$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{V(x)}{V_0}=\frac{1}{\left|\frac{x}{a}-1\right|}-\frac{1}{\left|\frac{x}{a}+1\right|} \qquad (۳-۲۲)$$

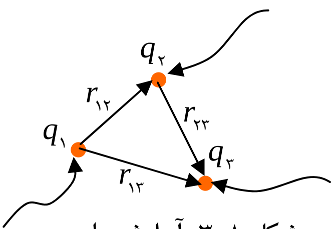
که در آن $V_0=q/4\pi\varepsilon_0 a$ است. نمودار آن در شکل (۷-۳) دیده می‌شود. همان طور که از شکل پتانسیل دیده می‌شود، $V(x)$ در $x/a=\pm 1$ واگرا می‌شود. اینها نقاطی اند که بارها در آنجا قرار دارند.



شکل ۷-۳ نمودار پتانسیل دوقطبی در راستای آن

۱-۳-۳ انرژی پتانسیل مجموعه‌ی بارها

در این بخش می‌خواهیم کار لازم برای ایجاد آرایه‌ای از بارهای نقطه‌ای را حساب کنیم. برای این کار، بدون این که بارها شتاب داشته باشند (یعنی در پایان فرایند جابه‌جایی بارها در حال سکون اند)، آنها را یک به یک از بینهایت به مکان‌های مورد نظر می‌آوریم. کار لازم برای جابه‌جایی هر بار را حساب می‌کنیم و سپس آنها رابا هم جمع می‌کنیم تا کار کل به‌دست بیاید. برای آوردن بار نخست، q_1، به نقطه‌ای مانند P_1 کار لازم صفر است زیرا هنوز میدانی وجود ندارد که مجبور باشیم برای چیره شدن به آن کار انجام دهیم: $W_1=0$. حال بار q_2 را از بینهایت به نقطه‌ی P_2 می‌آوریم (شکل ۸-۳). اینک مجبوریم کار انجام دهیم، چون بار q_1 در فضای پیرامون خود میدان ایجاد کرده است و بار q_2 در این میدان جابه‌جا می‌شود. مقدار کار لازم برای این که بار q_2 را از بینهایت به نقطه‌ی P_2 منتقل کنیم برابر $W_2=q_2V_1(P_2)$ است که در آن V_1 پتانسیل حاصل از بار q_1 در نقطه‌ی P_2 (جایی که می‌خواهیم بار q_2 را قرار دهیم) است.



شکل ۸-۳ آرایش بار

$$U_{۱۲} = W_{۲} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}} q_{۲}\left(\frac{q_{۱}}{r_{۱۲}}\right) \qquad (۳-۲۳)$$

$r_{۱۲}$ فاصله‌ی بین بارهای $q_{۱}$ و $q_{۲}$ است. اگربارهای $q_{۱}$ و $q_{۲}$ هم علامت باشند، کار انجام شده برای چیره شدن به نیروی رانشی بین آنها مثبت است؛ بنابراین در این حالت $U_{۱۲} > ۰$ است. اگر بارها ناهم‌نام باشند، به خاطر نیروی ربایشی بین آنها $U_{۱۲} < ۰$ است. برای این که بار سوم، $q_{۳}$ ، را به سامانه اضافه کنیم، کار لازم عبارت است از

$$W_{۳} = q_{۳}\left(V_{۱} + V_{۲}\right) = \frac{q_{۳}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{q_{۱}}{r_{۱۳}} + \frac{q_{۲}}{r_{۲۳}}\right) \qquad (۳-۲۴)$$

بنابراین، انرژی پتانسیل این آرایش باری برابر

$$U = W_{۱} + W_{۲} + W_{۳} = ۰ + \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{q_{۱}q_{۲}}{r_{۱۲}} + \frac{q_{۳}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{q_{۱}}{r_{۱۳}} + \frac{q_{۲}}{r_{۲۳}}\right) = U_{۱۲} + U_{۱۳} + U_{۲۳} \qquad (۳-۲۵)$$

است. این رابطه نشان می‌دهد که انرژی کل، جمع انرژی‌های جفت بارهاست.

$$U = \sum_{i} W_{i} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\left(\frac{q_{۱}q_{۲}}{r_{۱۲}} + \frac{q_{۱}q_{۳}}{r_{۱۳}} + \frac{q_{۱}q_{۴}}{r_{۱۴}} + ... + \frac{q_{۲}q_{۳}}{r_{۲۳}} + \frac{q_{۲}q_{۴}}{r_{۲۴}} + ... + \frac{q_{۳}q_{۴}}{r_{۳۴}} + ...\right) \qquad (۳-۲۶)$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت کوتاه‌تری نوشت:

$$W = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\sum_{i=۱}^{N}\sum_{\substack{j=۱\\ j>i}}^{N}\frac{q_{i}q_{j}}{r_{ij}} \qquad (۳-۲۷)$$

شرط $j > i$ برای دوری شمارش دوباره است. برای این که این شرط را بفهمید، به رابطه‌ی (۲۶-۳) توجه کنید. در صورت کسرهای آن زیرنویس q ها به ترتیب افزایشی نوشته شده‌اند (و بنابراین، مثلاً $q_{۳}q_{۲}$ نداریم) . افزون بر این، هیچ دو زیرنویسی در یک کسر یکسان نیستند (یعنی $q_{i}q_{i}$ وجود ندارد). شرط $j > i$ از به حساب آوردن این گونه جمله‌ها جلوگیری می‌کند. چون نگهداشتن حساب ترتیب‌ها دشوار است، بهتر است هر دو نوع جمله‌های $q_{i}q_{j}$ و $q_{j}q_{i}$ (مانند $q_{۲}q_{۳}$ و $q_{۳}q_{۲}$) را در جمع (۲۷-۳) به حساب آوریم. با این کار، هر جمله را آگاهانه دو بار می‌شماریم. پس باید جمع را به دو تقسیم کنیم. در نتیجه، خواهیم داشت

$$U = W = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{N}\sum_{\substack{j=۱\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_{i}q_{j}}{r_{ij}} = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{N}q_{i}\left(\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\sum_{\substack{j=۱\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_{j}}{r_{ij}}\right) = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{N}q_{i}V\left(r_{i}\right) \qquad (۳-۲۸)$$

کمیت درون پرانتز، $V(r_{i})$ ، در رابطه‌ی (۲۸-۳) پتانسیل کل در مکان $\mathbf{r}_{i}$ (مکان بار i-ام) است که همه‌ی بارها، به جز بار i-ام، در آن نقطه تولید می‌کنند.

در رابطه‌ی (۲۸-۳) دیگر لازم نیست ترتیب افزایشی را در نظر بگیریم. اما هنوز شرط $i = j$ باقی است. چون جمله‌های مانند $q_{i}q_{i}/r_{ii}$ به برهم‌کنش بار iام با خودش مربوط است (و مقدار آن بینهایت است، چون $r_{ii} = ۰$ است) و به آن **خود ـ انرژی**[*] می‌گویند. در عمل ما نگران این موضوع نیستیم. خودـ انرژی مقداری ثابت (بینهایت) است و افزودن مقدار ثابت به انرژی را می‌توان نادیده گرفت، زیرا تنها جمله‌هایی در انرژی مهم اند که با تغییر مکان بارها تغییر کنند.

رابطه‌ی (۲۸-۳)، مقدار کار لازم برای سامان دادن به آرایه‌ای از بارهای نقطه‌ای است. اگر آرایه ازهم پاشیده شود، همین مقدار کار را باز پس خواهیم گرفت. این مقدار انرژی است که در آرایه ذخیره شده است و آن را انرژی پتانسیل آرایه می‌گویند.

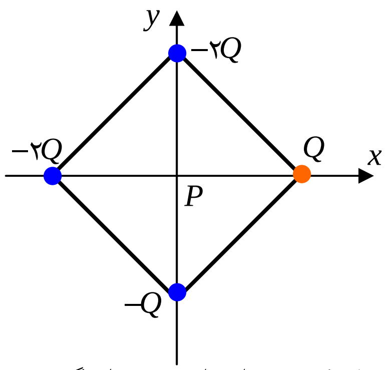
---
[*] self-energy

مثال ۲-۳ چهار بار در چهار گوشه‌ی مربع: چهار بار $-2Q$ ، $-2Q$ ، Q و $-Q$ برابر شکل (۹-۳) در چهار گوشه‌ی مربع به ضلع a قرار دارند. نقطه‌ی P در مبداء مختصات است

(الف): مولفه‌های x و y میدان $\mathbf{E}$ را در نقطه‌ی P پیدا کنید.

(ب): پتانسیل الکتریکی V را در نقطه‌ی P حساب کنید. فرض کنید پتانسیل در بینهایت، صفر است $V_\infty = 0$

(پ): بار دیگری به اندازه‌ی $+9Q$ را به آرامی از بینهایت به نقطه‌ی P در وسط قاب می‌آوریم. چه مقدار کار لازم است؟



شکل ۹-۳ چهار بار در چهار گوشه‌ی مربع

حل (الف):

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-2Q}{\left(a/\sqrt{2}\right)^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{Q}{\left(a/\sqrt{2}\right)^2}(-\hat{\mathbf{i}})\right] = \frac{-6Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{i}} \qquad (۳-۲۹)$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-Q}{\left(a/\sqrt{2}\right)^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{-2Q}{\left(a/\sqrt{2}\right)^2}(-\hat{\mathbf{j}})\right] = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{\mathbf{j}} \qquad (۳-۳۰)$$

(ب):

$$V = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum q_i}{a/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[-2Q - 2Q - Q + Q\right] = \frac{-4\sqrt{2}Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \qquad (۳-۳۱)$$

(پ):

$$W = qV = (9Q)\cdot V = \frac{-36\sqrt{2}Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \qquad (۳-۳۲)$$

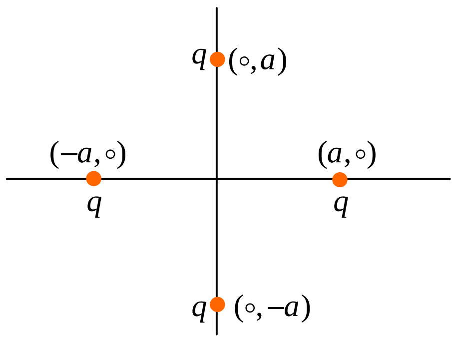
کار منفی است، چون بار خودبه خود به مبداء می‌رود. درست مانند دانه‌ی تسبیحی که در روی سیمی از بینهایت تا صفحه قاب می‌لغزد. برای این جابه‌جایی کار لازم نیست، بلکه برای بازگرداندنش به بینهایت باید کار انجام داد.

مثال ۳-۳ بازهم چهار بار نقطه‌ای: چهار بار یکسان با مقدار q برابر شکل (۱۰-۳) در صفحه‌ی xy قرار دارند.

(الف): پتانسیل الکتریکی V را در مبداء $(x, y) = (0,0)$ حساب کنید. فرض کنید پتانسیل در بینهایت صفر است.

(ب): فرض کنید $V(z)$ پتانسیل نقطه‌ای در روی محور z با مختصات $(0,0,z)$ است. برای $z > 0$ تابع پتانسیل $V(z)$ را حساب کنید.

(پ): کار کل لازم برای سامان دادن این آرایه را حساب کنید.



شکل ۱۰-۳ چهار بار در صفحه‌ی xy

حل: **(الف)** با استفاده از اصل برهم‌نهی داریم

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{4}\frac{q_i}{a}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q}{a} \qquad (3-33)$$

(ب): فاصله‌ی هر بار تا نقطه‌ی $(0,0,z)$ برابر $r=\sqrt{z^2+a^2}$ است. بنابراین، با استفاده از اصل برهم‌نهی داریم

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{4}\frac{q_i}{r_i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q}{\sqrt{z^2+a^2}} \qquad (3-34)$$

(پ):

$$W=\sum_{i=1}^{4}\sum_{\substack{j=1\\ j>i}}^{4}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq}{2a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qq}{\sqrt{2}a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qq}{\sqrt{2}a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq}{2a}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[2\frac{q^2}{2a}+2\frac{2q^2}{\sqrt{2}a}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q^2}{a}+\frac{4q^2}{\sqrt{2}a}\right] \qquad (3-35)$$

مثال ۴-۳ انرژی و پتانسیل سه بار: بار $3Q$ در نقطه‌ی $(0,a)$، بار $-Q$ در $(-a,0)$ و بار $2Q$ $2Q$ در نقطه‌ی $(a,0)$قرار دارند.

(الف): انرژی پتانسیل الکتریکی، U ، این آرایه‌ی باری را حساب کنید.

(ب): پتانسیل الکتریکی، V، را در نقطه‌ی $(0,0)$ به‌دست آورید. فرض کنید در بینهایت پتانسیل صفر است.

(پ): بار چهارمی به اندازه‌ی $3Q$ را به آرامی از بینهایت به نقطه‌ی $(0,0)$می‌آوریم. برای این منظور چه مقدار کار باید انجام گیرد؟

حل: **(الف)**

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-Q)(2Q)}{2a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-Q)(3Q)}{\sqrt{2}a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(2Q)(3Q)}{\sqrt{2}a}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-1\right) \qquad (3-36)$$

(ب):

$$V(P)-V(\infty)=V(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{a}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{a} \qquad (3-37)$$

(پ):

$$W=\Delta U=(3Q)\left[V(P)-V(\infty)\right]=(3Q)\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{a}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{12Q^2}{a} \qquad (3-38)$$

۲-۳-۳ پتانسیل توزیع پیوسته‌ی بار

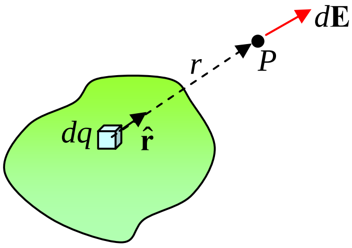
اگر توزیع بار پیوسته باشد، می‌توان آن را به اجزاء کوچک با بار dq تقسیم کرد و پتانسیل هر جزء بار را در نقطه‌ی مورد نظر حساب و سپس بر روی آنها جمع بست. ما در این‌جا حالت عمومی توزیع حجمی بار را در نظر خواهیم گرفت. توزیع بار حجمی شکل (۱۱-۳) را در نظر بگیرید. این یک توزیع بار موضعی است، یعنی بار به ناحیه‌ی معینی از فضا محدود است و تا بینهایت ادامه ندارد. بنابراین، می‌توان پتانسیل را در بینهایت صفر پنداشت. پتانسیلی را که جزء بار dq در نقطه‌ی P

به فاصله‌ی r از آن تولید می‌کند، عبارت است از

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} \qquad (۳-۳۹)$$

با انتگرال‌گیری از dV پتانسیل کل حاصل از توزیع بار در نقطه‌ی P به‌دست می‌آید.

$$V(P) = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} \qquad (۳-۴۰)$$



شکل ۱۱-۳ توزیع پیوسته‌ی بار

توجه کنید که انتگرال روی بار dq گرفته می‌شود و r فاصله‌ی هر جزء بار تا نقطه‌ی P است و بنابراین، مقدار **ثابتی نیست**.

برای توزیع بار حجمی $dq = \rho\, d\tau$ است که اگر در رابطه‌ی (۳-۴۰) جایگزین کنیم خواهیم داشت

$$V(P) = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho}{r}d\tau \qquad (۳-۴۱)$$

انتگرال اینک روی حجمی گرفته می‌شود که بار در آن حجم توزیع شده است. اگر توزیع بار سطحی یا خطی باشد رابطه‌ی (۳-۴۱) به صورت زیر در می‌آید

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\sigma}{r}da \quad \text{(توزیع سطحی)} \quad \text{و} \quad V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L\frac{\lambda}{r}d\ell \quad \text{(توزیع خطی)} \qquad (۳-۴۲)$$

۳-۴ به‌دست آوردن میدان الکتریکی از پتانسیل الکتریکی

در رابطه‌ی (۳-۹) ارتباطی بین میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و پتانسیل الکتریکی V برقرار شد: $\Delta V = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$. اگر فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B کوچک و برابر $d\mathbf{s}$ باشد، رابطه‌ی (۳-۹) به شکل دیفرانسیلی زیر درمی‌آید.

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad (۳-۴۳)$$

در مختصات کارتزی $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{i}} + E_y\hat{\mathbf{j}} + E_z\hat{\mathbf{k}}$ و $d\mathbf{s} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$ اند که اگر در رابطی (۳-۴۳) جایگزین کنیم، خواهیم داشت

$$dV = -\left(E_x\hat{\mathbf{i}} + E_y\hat{\mathbf{j}} + E_z\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}\right) = -E_x dx - E_y dy - E_z dz \qquad (۳-۴۴)$$

از این رابطه برمی‌آید که

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (۳-۴۵)$$

اینک به جاست که عملگر **گرادیان** را در مختصات کارتزی به صورت زیر تعریف کنیم

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۳-۴۶)$$

با این تعریف، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{i}} + E_y\hat{\mathbf{j}} + E_z\hat{\mathbf{k}} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)V = -\nabla V$$

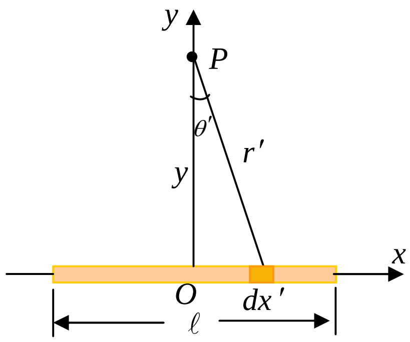
$$\Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla V \qquad (۳-۴۷)$$

توجه کنید که عملگر گرادیان روی کمیت اسکالر (پتانسیل V) اثر می‌کند و کمیت برداری میدان الکتریکی ($\mathbf{E}$) تولید می‌کند. از نظر ریاضی می‌توان گفت که میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ برابر است با منهای گرادیان پتانسیل الکتریکی V. از نظر فیزیکی معنی علامت منها این است که اگر بار الکتریکی مثبتی را در جهتی مانند x جابه‌جا کنیم و V با این جابه‌جایی افزایش یابد ($\partial V/\partial x > ۰$)مولفه‌ی میدان الکتریکی در خلاف جهت حرکت بار غیرصفر است ($-E_x \neq ۰$). در مورد گرانش هم همین طور است: اگر جرمی را به اندازه‌ی h از سطح زمین دور کنیم و پتانسیل گرانشی افزایش پیدا کند، نیروی گرانش باید به سوی پایین باشد. اگر توزیع بار تقارن کروی داشته باشد، میدان الکتریکی آن تابعی از فاصله‌ی شعاعی، r ، از توزیع بار خواهد شد؛ یعنی $\mathbf{E} = E_r\hat{\mathbf{r}}$. در این صورت $dV = -E_r dr$ است. اگر $V(r)$ را بدانیم، می‌توانیم میدان $\mathbf{E}$ را به صورت زیر به‌دست آوریم

$$\mathbf{E} = E_r\hat{\mathbf{r}} = -\left(\frac{dV}{dr}\right)\hat{\mathbf{r}} \qquad (۳-٤۸)$$

برای مثال، دیدیم که پتانسیل الکتریکی بار نقطه‌ای q برابر $V(r) = q/٤\pi\varepsilon_\circ r$ است. با استفاده از رابطه‌ی بالا، میدان این بار نقطه‌ای به‌دست می‌آید و برابر $\mathbf{E} = \left(q/4\pi\varepsilon_0 r^2\right)\hat{\mathbf{r}}$ است .

مثال ۵-۳ پتانسیل و میدان میله‌ی باردار: میله‌ای به طول ℓ با چگالی بار خطی یکنواخت λ را برابر شکل (۱۲-۳) در نظر بگیرید. پتانسیل این توزیع بار را در نقطه‌ی P به فاصله‌ی y از وسط میله به دست آورید. با استفاده از نتیجه‌ی خود، میدان الکتریکی میله را در نقطه‌ی P حساب کنید.



شکل ۱۲-۳ توزیع بار خطی روی میله

حل: جزء طول dx' را همانند شکل (۱۲-۳) در روی میله برگزینید. بار موجود در این جزء طول $dq = \lambda dx'$ است. مکان این چشمه‌ی بار در $(x',۰)$ و مکان نقطه‌ی P در $(۰,y)$ است. فاصله‌ی dx' تا P برابر $r' = \left(x'^۲ + y^۲\right)^{۱/۲}$ است. پتانسیل این جزء بار در نقطه‌ی P عبارت است از

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{\left(x'^2 + y^2\right)^{1/2}} \qquad (۳-٤۹)$$

اگر بینهایت را جایی فرض کنیم که پتانسیل صفر است، پتانسیل کل میله در نقطه‌ی P برابر است با

$$V = \int dV = \frac{\lambda}{٤\pi\varepsilon_\circ}\int_{-\ell/۲}^{\ell/۲}\frac{dx'}{\sqrt{x'^۲ + y^۲}} = \frac{\lambda}{٤\pi\varepsilon_\circ}\ell n\left[x' + \sqrt{x'^۲ + y^۲}\right]\Big|_{-\ell/۲}^{\ell/۲} = \frac{\lambda}{٤\pi\varepsilon_\circ}\ell n\left[\frac{(\ell/۲) + \sqrt{(\ell/۲)^۲ + y^۲}}{-(\ell/۲) + \sqrt{(\ell/۲)^۲ + y^۲}}\right] \qquad (۳-۵۰)$$

در محاسبه‌ی انتگرال بالا از قاعده‌ی زیر استفاده شد

$$\int\frac{dx'}{\sqrt{x'^۲ + y^۲}} = \ell n\left(x' + \sqrt{x'^۲ + y^۲}\right) \qquad (۳-۵۱)$$

نمودار پتانسیل $V(y)/V_\circ$ در شکل (۱۳-۳) برحسب تابعی از y/ℓ نشان داده شده است که در آن $V_\circ = \lambda/٤\pi\varepsilon_\circ$ است. در حد $y \gg \ell$ پتانسیل بالا به صورت زیر در می‌آید:

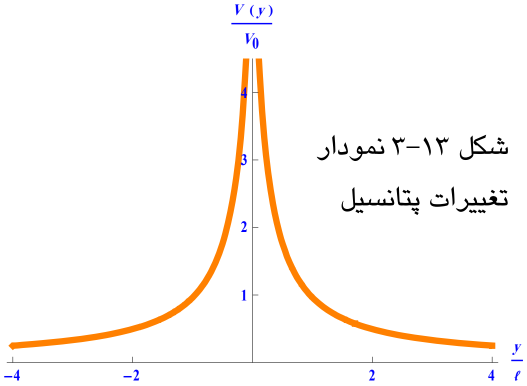
$$V=\frac{\lambda}{\text{٤}\pi\varepsilon_\circ}\ell n\left[\frac{(\ell/\text{٢})+(\ell/\text{٢})\sqrt{\text{١}+(\text{٢}y/\ell)^{\text{٢}}}}{-(\ell/\text{٢})+(\ell/\text{٢})\sqrt{\text{١}+(\text{٢}y/\ell)^{\text{٢}}}}\right]=\frac{\lambda}{\text{٤}\pi\varepsilon_\circ}\ell n\left[\frac{\text{١}+\sqrt{\text{١}+(\text{٢}y/\ell)^{\text{٢}}}}{-\text{١}+\sqrt{\text{١}+(\text{٢}y/\ell)^{\text{٢}}}}\right] \qquad (\text{٣–٥٢})$$

$$\approx\frac{\lambda}{\text{٤}\pi\varepsilon_\circ}\ell n\left(\frac{\text{٢}}{\text{٢}y^{\text{٢}}/\ell^{\text{٢}}}\right)=\frac{\lambda}{\text{٤}\pi\varepsilon_\circ}\ell n\left(\frac{\ell^{\text{٢}}}{y^{\text{٢}}}\right)=\frac{\lambda}{\text{٢}\pi\varepsilon_\circ}\ell n\left(\frac{\ell}{y}\right) \qquad (\text{٣–٥٣})$$

میدان الکتریکی مربوط به پتانسیل رابطه‌ی (٣–٥٠) ، به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\frac{\ell/2}{\sqrt{(\ell/2)^2+y^2}} \qquad (\text{٣–٥٤})$$

این همان میدانی است که در فصل ٢ برای مثال ٩–٢ به‌دست آوردیم (رابطه‌ی ٩٣–٢ را ببینید).

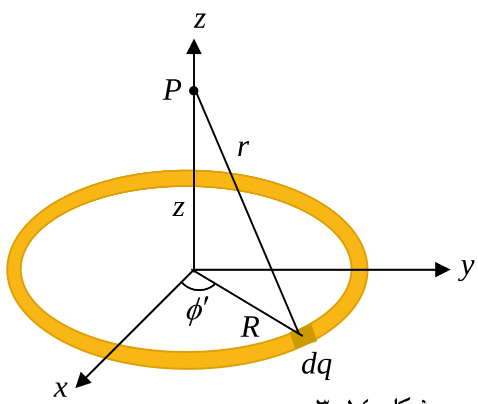


شکل ١٣–٣ نمودار تغییرات پتانسیل

مثال ۶–٣ پتانسیل حلقه در روی محور آن: حلقه‌ای به شعاع R با چگالی بار خطی یکنواخت λ را برابر شکل (١٤–٣) در نظر بگیرید. پتانسیل را در فاصله‌ی z از مرکز حلقه و در روی محور آن به دست آورید. با استفاده از $\mathbf{E}=-\nabla V$ مولفه‌ی z میدان الکتریکی را حساب کنید.

حل: جزء طول $d\ell=Rd\phi'$ را برابر شکل در روی حلقه برگزینید. بار موجود در این جزء طول $dq=\lambda d\ell=\lambda Rd\phi'$ است. پتانسیل آن در نقطه‌ی P عبارت است از

$$dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\,d\phi'}{\sqrt{R^2+z^2}} \qquad (\text{٣–٥٥})$$



شکل ١٤–٣ : حلقه‌ی با بار خطی یکنواخت و شعاع R

پتانسیل الکتریکی کل حلقه در نقطه‌ی P با انتگرال گیری از رابطه‌ی (٣–٥٥) به‌دست می‌آید

$$V=\int dV=\frac{\text{١}}{\text{٤}\pi\varepsilon_\circ}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^{\text{٢}}+z^{\text{٢}}}}\oint d\phi'$$

$$=\frac{\text{١}}{\text{٤}\pi\varepsilon_\circ}\frac{\text{٢}\pi\lambda R}{\sqrt{R^{\text{٢}}+z^{\text{٢}}}}=\frac{\text{١}}{\text{٤}\pi\varepsilon_\circ}\frac{Q}{\sqrt{R^{\text{٢}}+z^{\text{٢}}}} \qquad (\text{٣–٥٦})$$

که در آن $Q=\text{٢}\pi R\lambda$ بار کل حلقه است. در حد $z\gg R$ حلقه همانند بار نقطه‌ای Q با پتانسیل $(1/4\pi\varepsilon_0)(Q/z)$ خواهد بود. به روشنی دیده می‌شود که رابطه‌ی (٣–٥٦) به این مقدار کاهش می‌یابد. کافی است که در مخرج کسر از $R^{\text{٢}}$ درمقایسه با $z^{\text{٢}}$ چشم‌پوشی کنیم. به‌دست می‌آید

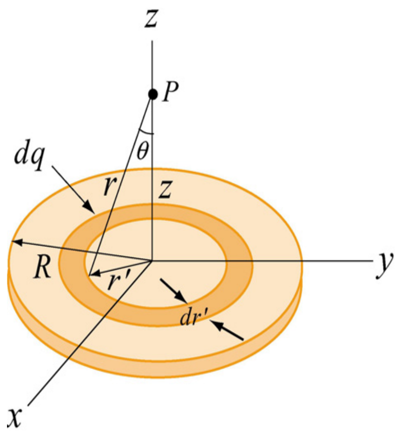
$$V\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z} \qquad (\text{٣–٥٧})$$

مولفه‌ی z میدان الکتریکی مربوط به پتانسیل رابطه‌ی (٣–٥٦) عبارت است از

$$E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\text{١}}{\text{٤}\pi\varepsilon_\circ}\frac{Q}{\sqrt{R^{\text{٢}}+z^{\text{٢}}}}\right)=\frac{\text{١}}{\text{٤}\pi\varepsilon_\circ}\frac{Qz}{(R^{\text{٢}}+z^{\text{٢}})^{\text{٣}/\text{٢}}} \qquad (\text{٣–٥٨})$$

که با پاسخ مثال ۱۲–۲ در فصل ۲ (رابطه‌ی ۱۰۸–۲) همخوانی کامل دارد.

مثال ۷–۳ پتانسیل قرص باردار: قرصی به شعاع R و چگالی بار سطحی σ برابر شکل (۱۵–۳) در صفحه‌ی xy قرار دارد. پتانسیل الکتریکی را در فاصله‌ی z از مرکز قرص و در روی محور آن به‌دست آورید.



شکل ۱۵–۳ قرص باردار با چگالی σ

حل: جزء بار را به‌صورت حلقه‌ای به شعاع r' و ضخامت dr' همانند شکل (۱۵–۳) در نظر بگیرید. بار موجود روی این حلقه $dq = \sigma da = \sigma\left(2\pi r' dr'\right)$ است. نقطه‌ی P در روی محور به فاصله‌ی z از صفحه‌ی قرص است. فاصله‌ی نقطه‌ای در روی حلقه‌ی جزء بار تا نقطه‌ی P برابر $r = \left(r'^{۲} + z^{۲}\right)^{۱/۲}$ است. بنابراین، پتانسیل حلقه در نقطه‌ی P عبارت است از

$$dV = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\frac{dq}{r} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\frac{\sigma\left(۲\pi r' dr'\right)}{\sqrt{r'^{۲}+z^{۲}}} \qquad (۳–۵۹)$$

چون قرص از حلقه‌های هم‌مرکز تودرتو ساخته می‌شود، بنابراین، جمع پتانسیل‌های حلقه‌ها، پتانسیل کل قرص را به‌دست می‌دهد. پس، داریم

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\int_{۰}^{R}\frac{۲\pi r' dr'}{\sqrt{r'^{۲}+z^{۲}}} = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_{۰}}\left[\sqrt{r'^{۲}+z^{۲}}\right]_{۰}^{R} = \frac{\sigma}{۲\varepsilon_{۰}}\left[\sqrt{R^{۲}+z^{۲}} - |z|\right] \qquad (۳–۶۰)$$

در حالت حدی $|z| \gg R$ می‌توان نوشت

$$\sqrt{R^{۲}+z^{۲}} = |z|\left(۱+\frac{R^{۲}}{z^{۲}}\right)^{۱/۲} = |z|\left(۱+\frac{R^{۲}}{۲z^{۲}}+\cdots\right) \qquad (۳–۶۱)$$

و پتانسیل به‌صورت زیر درمی‌آید

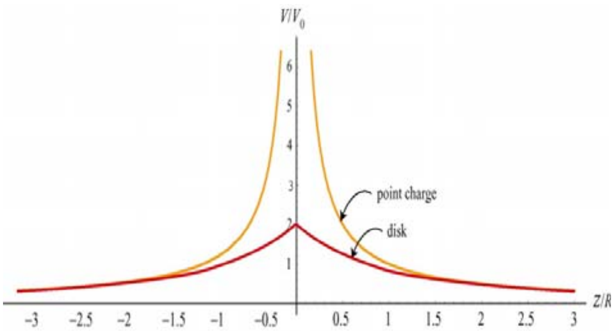
$$V \approx \frac{\sigma}{۲\varepsilon_{۰}}\frac{R^{۲}}{۲|z|} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\frac{\sigma(\pi R^{۲})}{|z|} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\frac{Q}{|z|} \qquad (۳–۶۲)$$

که در آن $Q = \sigma\pi R^{۲}$ بار کل روی قرص است. همانگونه که انتظار داشتیم، پتانسیل الکتریکی در فاصله‌های دور از قرص، همانند پتانسیل حاصل از بار نقطه‌ای Q می‌شود. در شکل (۱۶–۳) پتانسیل ناشی از قرص و بار نقطه‌ای باهم مقایسه شده است. $V_0 = Q/4\pi\varepsilon_0 R$. توجه کنید که پتانسیل در مرکزقرص، یعنی به ازای $z = 0$ عبارت است از

$$V_c = \frac{\sigma R}{۲\varepsilon_{۰}} = \frac{Q}{\pi R^{۲}}\frac{R}{۲\varepsilon_{۰}} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\frac{۲Q}{R} = ۲V_{۰} \qquad (۳–۶۳)$$

که برابر است با مقدار کار لازم برای این که بار نقطه‌ای Q را از بینهایت به مرکز قرص بیاوریم. اینک می‌توان میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P به‌دست آورد

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] \qquad (۳–۶۴)$$



شکل ۱۶–۳ مقایسه‌ی پتانسیل ناشی از قرص باردار و بار نقطه‌ای

که با نتیجه‌ی (۱۱۰-۲) در مثال ۱۴-۲ یکسان است. در حد $R \gg Z$ رابطه‌ی بالا به $\sigma/2\varepsilon_0$ کاهش می‌یابد که میدان الکتریکی صفحه‌ی بینهایت گسترده است.

مثال ۸-۳ میدان الکتریکی از پتانسیل الکتریکی: فرض کنید پتانسیل ناشی از یک توزیع بار الکتریکی در مختصات کارتزی به صورت زیر داده شده است

$$V(x,y,z) = Ax^2y^2 + Bxyz \tag{۳-۶۵}$$

که در آن A و B مقادیر ثابت اند. میدان الکتریکی این توزیع بار را به‌دست آورید.

حل: میدان الکتریکی را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۴۵-۳) به دست آورد. داریم

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2Axy^2 - Byz, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -2Ax^2y - Bxz, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -Bxy \tag{۳-۶۶}$$

بنابراین، میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \left(-2Axy^2 - Byz\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(2Ax^2y + Bxz\right)\hat{\mathbf{j}} - Bxy\,\hat{\mathbf{k}} \tag{۳-۶۷}$$

مثال ۹-۳ انرژی پتانسیل کره: حجم کره‌ای به شعاع a با چگالی بار حجمی یکنواخت ρ انباشته شده است. انرژی پتانسیل U کره را بیابید. یعنی مقدار کاری که برای ساختن آن لازم است. کره‌ی توپُر را با برهم چیدن لایه‌ی نازک بسازید و از این واقعیت استفاده کنید که میدان الکتریکی در بیرون یک توزیع بار کروی با میدان ناشی ازیک بار نقطه‌ای جایگزیده در مرکز کره و با مقدار بار برابر بار کل کره برابر است. بار کل کره را Q بنامید و نشان دهید که می‌توان انرژی آن را به‌صورت $\frac{3}{5}\left(Q^2/4\pi\varepsilon_0 a\right)$ نوشت.

حل: بار مو.جود در کره‌ای به شعاع r برابر $q = \left(4\pi r^3/3\right)\rho$ است. میدان الکتریکی آن در بیرون کره با میدان الکتریکی بار نقطه‌ای به همین مقدار که در مرکز کره قرار دارد یکی است. پوسته‌ی بعدی به ضخامت dr که به این کره بیافزایید. بار این پوسته برابر $dq = \left(4\pi r^2 dr\right)\rho$ است. کار لازم برای آوردن این بار dq (که انرژی پتانسیل پوسته در اثر وجود کره است) برابر است با

$$dW = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot dq}{r} = \frac{\left(4\pi r^3/3\right)\rho\cdot\left(4\pi r^2\right)\rho}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(4\pi\rho\right)^2}{3}r^4 dr \tag{۳-۶۸}$$

برای تکمیل کره و رساندن شعاع آن از $r=0$ به $r=a$ پوسته‌های بعدی را به آن می‌افزاییم. کار لازم برای آن

$$W = \int_0^a \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(4\pi\rho\right)^2}{3}r^4 dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(4\pi\rho\right)^2}{3}\frac{a^5}{5} \tag{۳-۶۹}$$

وقتی کره تکمیل شد، بارش برابر $Q = 4\pi a^3/3$ می‌شود. بنابراین، $4\pi\rho = 3Q/a^3$ است. انرژی پتانسیل U راکه همان کار W است می‌توان به صورت $\frac{3}{5}\left(Q^2/4\pi\varepsilon_0 a\right)$ نوشت. توجه کنید که بعد کمیت $Q^2/4\pi\varepsilon_0 a$ بعد انرژی است. توجه کنید که ما نگران خود- انرژی پوسته‌ها نازک نیستیم، چون با استفاده از تحلیل ابعادی دیده می‌شود که این انرژی با $\left(dq\right)^2$ متناسب است و در نتیجه، کمیت کوچکی از مرتبه‌ی دوم است و می‌توان آن را نادیده گرفت.

مثال ۹-۳ پتانسیل دو قطبی الکتریکی: دوقطبی الکتریکی شکل (۱۷-۳) را در راستای محور y در نظر بگیرید و پتانسیل الکتریکی آن را در نقطه‌ی P واقع در صفحه‌ی xy پیدا کنید. ار نتیجه‌ی خود استفاده کنید و میدان الکتریکی متناظر را به دست آورید.

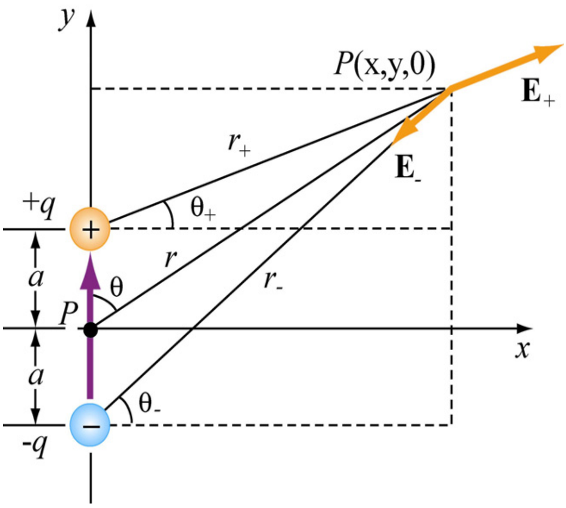
حل: پتانسیل را با استفاده از اصل برنهش می‌توان به صورت زیر نوشت

$$V=\sum_i V_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{q}{r_+}-\frac{q}{r_-}\right) \qquad (۳-۷۰)$$

که در آن $r_\pm^{۲}=r^{۲}+a^{۲}\mp ۲ra\cos\theta$ اند. در حالت حدی $r\gg a$ داریم

$$\frac{۱}{r_\pm}=\frac{۱}{r}\left[۱+\left(\frac{a}{r}\right)^{۲}\mp ۲\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta\right]^{-۱/۲}$$

$$=\frac{۱}{r}\left[۱-\frac{۱}{۲}\left(\frac{a}{r}\right)^{۲}\pm\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta+\cdots\right] \qquad (۳-۷۱)$$



شکل ۱۷-۳ پتانسیل و میدان دو قطبی الکتریکی

و در نتیجه، پتانسیل دوقطبی الکتریکی را می‌توان با این تقریب به صورت زیر نوشت

$$V=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r}\left[۱-\frac{۱}{۲}\left(\frac{a}{r}\right)^{۲}+\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta-۱+\frac{۱}{۲}\left(\frac{a}{r}\right)^{۲}+\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta+\cdots\right]$$

$$\approx\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r}\frac{۲a\cos\theta}{r}=\frac{p\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۲}}=\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۲}} \qquad (۳-۷۲)$$

که در آن $\mathbf{p}=۲aq\,\hat{\mathbf{j}}$ گشتاور دوقطبی الکتریکی است. به روشنی دیده می‌شود که این پتانسیل تابعی از فاصله‌ی شعاعی r و زاویه‌ی قطبی θ است. به بیان دیگر، این پتانسیل برحسب متغیرهای مختصات کروی نوشته شده است. عملگر گرادیان در مختصات کروی به صورت زیر است

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}+\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad (۳-۷۳)$$

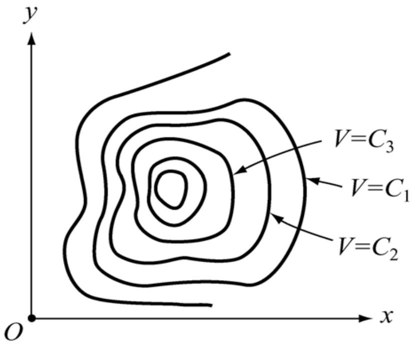
چون پتانسیل تابعی از r و θ است، میدان الکتریکی هم مولفه‌هایی در راستای $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ خواهد داشت. با استفاده از $\mathbf{E}=-\overrightarrow{\nabla V}$ داریم

$$E_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{۲p\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۳}}\ ,\qquad E_\theta=-\frac{۱}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{p\sin\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ r^{۳}}\ ,\qquad E_\phi=۰ \qquad (۳-۷۴)$$

این همان میدان است که در فصل ۲ و در رابطه‌ی (۵۰-۲) به دست آوردیم.

۵-۳ گرادیان و هم‌پتانسیل‌ها:

فرض کنید پتانسیل الکتریکی سامانه‌ای در دو بعد $V(x,y)$ است. خم‌هایی که با $V(x,y)$های ثابت تعریف می‌شوند، خم های هم‌پتانسیل نام دارند. نمونه‌ای از این خم‌های هم‌پتانسیل در شکل (۱۸-۳) نشان داده شده است. این خم‌ها نمایش



شکل ۱۸–۳ خم‌های هم‌پتانسیل

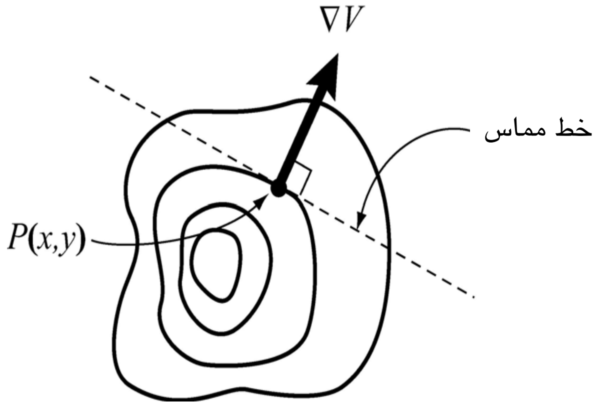
$V(x,y)=c_i$ اند که در آن c_i مقادیر ثابت اند. خم‌های هم پتانسیل در سه بعد، صفحه‌های هم پتانسیل اند که با تابع ثابت = $V(x,y,z)$ تعریف می‌شوند. چون $\mathbf{E}=-\overrightarrow{\nabla V}$ است، می‌توان نشان داد که در هر نقطه، جهت میدان $\mathbf{E}$ همواره در آن نقطه بر هم‌پتانسیل عمود است. این قضیه را در زیر برای دو بعد ثابت می‌کنیم. تعمیم آن به سه بعد سرراست است.

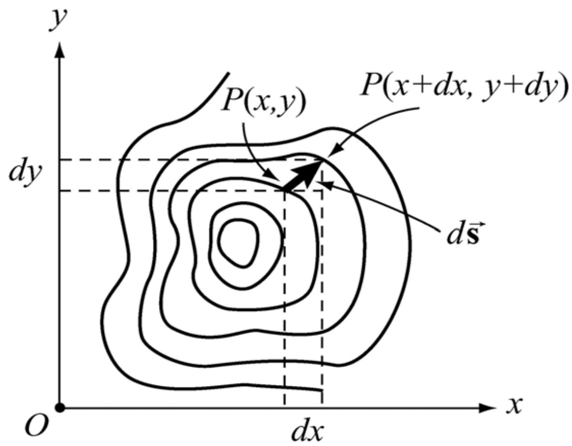
قضیه‌ی ۱–۳ میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ در هر نقطه بر هم‌پتانسیل در آن نقطه عمود است.

اثبات: با توجه به شکل (۱۹–۳) ، فرض کنید در نقطه‌ی $P(x,y)$ پتانسیل $V(x,y)$ است. پتانسیل در نقطه‌ی همسایه $P(x+dx,y+dy)$ را $V(x+dx,y+dy)$ بنامید. تغییر پتانسیل بین این دو نقطه‌ی همسایه برابر است با

$$dV=V(x+dx,y+dy)-V(x,y)$$
$$=\left[V(x,y)+\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\cdots\right]-V(x,y)\approx\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy \qquad (۳–۷۵)$$

اگر در دوبعد بردار جابه‌جایی را با $d\mathbf{s}=dx\,\hat{\mathbf{i}}+dy\,\hat{\mathbf{j}}$ نشان دهیم، می توان dV را به صورت زیر نوشت





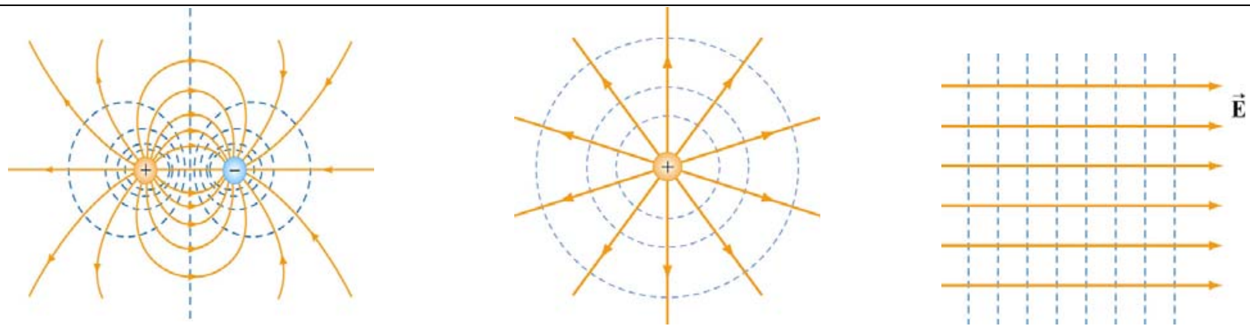
شکل ۱۹–۳ تغییر V در جابه‌جایی از یک هم‌پتانسیل به هم‌پتانسیل همسایه

$$dV=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot\left(dx\,\hat{\mathbf{i}}+dy\,\hat{\mathbf{j}}\right)=(\nabla V)\cdot d\mathbf{s}=-\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad (۳–۷۶)$$

اگر جابه‌جایی $d\mathbf{s}$ در امتداد هم‌پتانسیلی باشد که از نقطه‌ی $P(x,y)$ می‌گذرد، آنگاه $dV=0$ است؛ چون جابه‌جایی روی مسیری انجام می‌گیرد که پتانسیل در همه‌ی نقاط مسیر یکسان است. یعنی در امتداد آن هم‌پتانسیل، $\mathbf{E}\perp d\mathbf{s}$ است. در شکل (۲۰–۳) نمونه‌هایی از هم‌پتانسیل ها و میدان نشان داده شده اند. در سه بعد، هم‌پتانسیل‌ها سطوح خواهند بود. از رابطه‌ی (۷۶–۳) دیده می‌شود که وقتی $\overrightarrow{\nabla V}$ با $d\mathbf{s}$ موازی شود، dV بیشینه مقدار خود را خواهد داشت

$$Max\left(\frac{dV}{ds}\right)=|\nabla V| \qquad (۳–۷۷)$$

از نظر فیزیکی این بدان معنی است که $\overrightarrow{\nabla V}$ همواره در جهتی است که تغییر V نسبت به جابه‌جایی بیشینه است. برای فهمیدن این نکته، دره ای را در نظر بگیرید. یالی که بیشترین شیب را دارد، جهت $\overrightarrow{\nabla V}$ است.



شکل ۲۰-۳ میدان الکتریکی و خم‌های هم‌پتانسیل. از راست به چپ: میدا ثابت، میدان بار نقطه‌ای و میدان دوقطبی

ویژگی‌های هم‌پتانسیل‌ها را می‌توان به صورت زیر جمع‌بندی کرد:

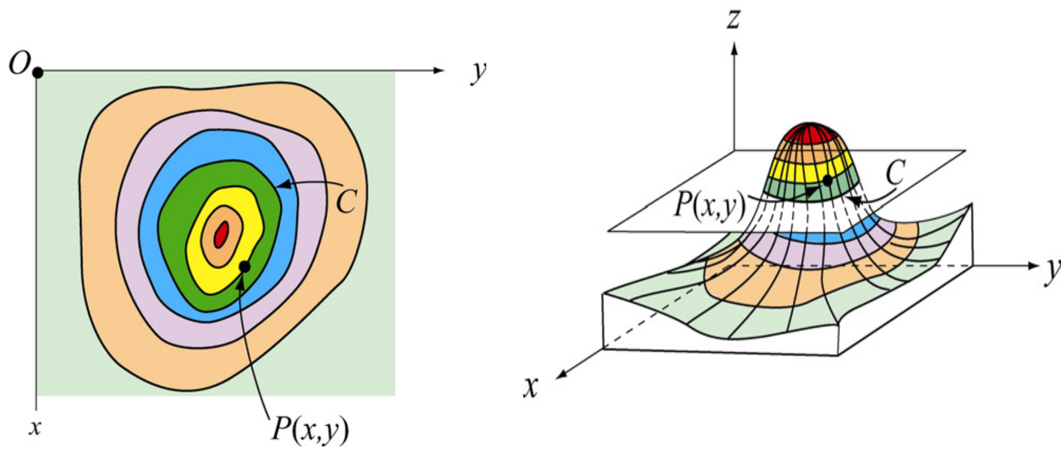
(۱) خط‌های میدان بر هم‌پتانسیل‌ها عمود و جهت آن از پتانسیل بالا به سوی پتانسیل پایین‌تر است.

(۲) بنابه تقارن، سطح‌های هم‌پتانسیل مربوط به بار نقطه‌ای مجموعه‌ی کره‌های هم‌مرکز اند. سطوح هم‌پتانسیل مربوط به میدان الکتریکی ثابت، صفحه‌های عمود بر خط‌های میدان است.

(۳) میدان الکتریکی مولفه‌ی مماس برسطح هم‌پتانسیل ندارد، چه در غیر این صورت، برای جابه‌جایی بار در روی سطح هم‌پتانسیل باید کار انجام داد.

(٤) کار لازم برای جابه‌جایی بار در روی سطح هم‌پتانسیل صفر است.

مانسته‌ی گرانشی هم‌پتانسیل را می‌توان با نقشه‌ی برجسته در شکل (۲۱-۳) نشان داد. هر خم بسته در این نقشه، ارتفاع معینی



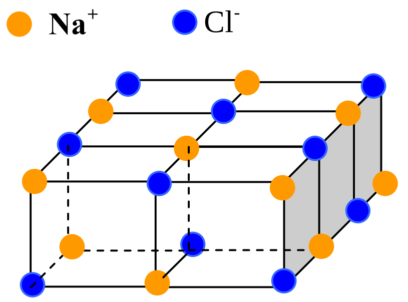
شکل ۲۱-۳ هم‌پتانسیل‌های گرانشی و نقشه‌ی برجسته

از سطح دریا را نشان می‌دهد. به طور ریاضی، آن را با ثابت $= z = f\,(x\,,y\,)$ نشان می‌دهند. چون پتانسیل گرانشی در نزدیکی سطح زمین به صورت $V_g = gz$ است، این خم‌ها هم‌پتانسیل‌های گرانشی اند.

۶-۳ یک کاربرد عملی : انرژی بلور یونی

محاسبه‌ی انرژی پیوندی در فیزیک اتمی و فیزیک حالت جامد اهمیت زیادی دارد. در این‌جا با استفاده از یافته‌های این فصل می‌خواهیم انرژی پیوندی الکتروستاتیک بلورهای یونی را حساب کنیم. بلور یونی مانند سدیم کلراید یک شبکه‌ی سه بعدی است

که یون‌های مثبت Na^{+} و Cl^{-} همانند شکل (۲۲-۳) یک در میان در گوشه‌های شبکه قرار دارند. با دانشی که به‌دست آورده‌ایم می توانیم انرژی لازم برای از هم گسستن بلور و تجزیه‌ی آن به یون‌هایش را حساب و با مقدار تجربی مقایسه کنیم.

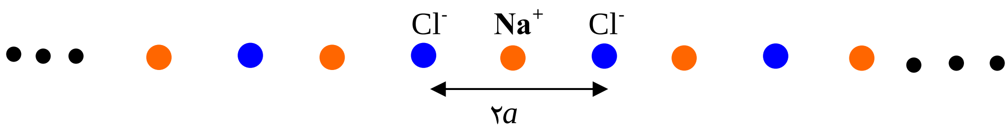


شکل ۲۲-۳ شبکه‌ی بلور سدیم کلراید

ما با این تقریب آغاز میکنیم که توزیع بار هر یک از یون‌ها کروی است و با یون‌های همسایه‌اش هم‌پوشانی ندارد. بنابراین، انرژی پتانسیل برهم‌کنش یک یون با یک یون همسایه عبارت است از

$$U = \frac{\pm e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ} R} \qquad (۳-۷۸)$$

در این رابطه، R فاصله‌ی بین دو یون و e بار الکتریکی یون است. توجه کنید که یک یون منفی هم با یون منفی و هم با یون مثبت برهم‌کنش می‌کند. همچنین، یون مثبت با یون‌های مثبت و یون‌های منفی برهم‌کنش می‌کند. بنابراین، در رابطه‌ی بالا علامت مثبت برای برهم‌کنش یون‌های همنام و علامت منفی برای برهم‌کنش بین بارهای ناهمنام است. برای این که انرژی پتانسیل کل را حساب کنیم باید در رابطه‌ی (۷۸-۳) روی همه‌ی یون‌های بلور جمع ببندیم. یک چنین محاسبه‌ای را برای بلور یک بعدی انجام می‌دهیم. نخست یک یون Na^{+} را در بلور به عنوان یون مرجع در نظر می‌گیریم (شکل (۲۳-۳) را نگاه کنید. انرژی پتانسیل برهم‌کنش یون مرجع را با همه‌ی یون‌هایی که روی خط بینهایت دراز قرار دارند، حساب می‌کنیم. چون شبکه‌ی ما یک بعدی است، از اثرهای سطحی در این محاسبه چشم‌پوشی می‌کنیم.



شکل ۲۳-۳ شبکه‌ی یک بعدی ساده‌ی بینهایت دراز

دو یون Cl^{-} به فاصله‌ی $R = a$ از یون مرجع Na^{+} وجود دارند و دو یون Na^{+} در فاصله‌ی $R = ۲a$ از یون مرجع Na^{+} قرار دارند و.... بنابراین، انرژی این مجموعه عبارت است از

$$U_{ref} = -\frac{۲e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ} a}\left(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\cdots\right) \qquad (۳-۷۹)$$

ضریب ۲ در بیرون پرانتز به این خاطر است که در سمت راست و چپ یون مرجع دو یون یکسان وجود دارد. سری رابطه‌ی (۷۹-۳) به کندی همگرا می‌شود. اگر آن را با بسط سری زیر مقایسه کنیم، می‌توانیم سری رابطه‌ی (۷۹-۳) را جمع ببندیم

$$\ell n\left(۱+x\right) = x - \frac{x^{۲}}{۲} + \frac{x^{۳}}{۳} - \frac{x^{۴}}{۴} + \cdots \qquad (۳-۸۰)$$

برای $x = ۱$ این سری همانند سری رابطه‌ی (۷۹-۳) است. بنابراین، داریم

$$U_{\text{ref}} = -\frac{۲e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ} a}\,\ell n\, ۲ = -۱{,}۳۸۶\frac{۲e^{۲}}{۴\pi\varepsilon_{\circ} a} \qquad (۳-۸۱)$$

اگر یون مرجع را یون Cl^{-} هم برمی‌گزیدیم، انرژی مرجع همین مقدار می‌شد. این گونه محاسبه برای شبکه‌ی سه بعدی پیچیده تر است، اما محاسبه‌های عددی مقدار زیر را به دست می‌دهند

$$U_{ref} = -۱{,}۷۴۷۶\left(e^{۲}/۴\pi\varepsilon_{\circ} a\right) \qquad (۳-۸۲)$$

چون در شبکه‌ی بینهایت گسترده، مکان هر یون Na^+ با مکان هر یون Cl^- هم‌ارز است، انرژی پتانسیل کل با جمع بستن روی رابطه‌ی (۸۲–۳) برای هر یون مرجع ممکن و تقسیم آن بر ۲ به‌دست می‌آید. (تقسیم بر ۲ کردن به این خاطر است که در یک چنین جمع بستن، انرژی پتانسیل هر جفت دوبار شمارده می‌شود.) اگر تعداد یون‌های بلور $۲N$ باشد (N یون Na^+ و N یون Cl^-) انرژی پتانسیل کل برابر

$$U = \left(\frac{۱}{۲}\right)(۲N)U_{ref} \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{N} = U_{ref} \tag{۳–۸۳}$$

می‌شود. ثابت شبکه‌ی $NaCl$ برابر $۲a = ۵,۶۳ \times ۱۰^{-۱۰}\ \mathrm{m}$ است. نتیجه‌ی محاسبه‌ی نظری ما در رابطه‌های (۸۲–۳) و (۸۳–۳) برحسب الکترون ولت، برابر $U/N = -۸,۹۴\ \mathrm{eV}$ است. (از $۱\mathrm{eV} = ۱,۶ \times ۱۰^{-۱۹}\ \mathrm{J}$ برای تبدیل یکای انرژی از ژول به الکترون ولت استفاده شد.) مقدار اندازه‌گیری شده $U/N = -۷,۹۳\ \mathrm{eV}$ است. اختلاف جزیی بین مقدار نظری و تجربی به این خاطر است که توزیع بار یون‌ها باهم هم‌پوشانی دارند و نیز توزیع آنها کاملا کروی نیست. این هر دو اثر را ما نادیده گرفتیم.

پرسش‌های مفهومی

۱– فرق بین پتانسیل الکتریکی و انرژی پتانسیل الکتریکی چیست؟

۲– میدان الکتریکی یکنواختی موازی محور x است. در چه جهتی می‌توان یک بار الکتریکی را بدون انجام دادن کار جابه‌جا کرد؟

۳– چرا سطوح هم‌پتانسیل همواره بر خطهای میدان الکتریکی عمود اند؟

۴– میدان الکتریکی در درون پوسته‌ی کروی توخالی صفر است. آیا از این واقعیت می توان نتیجه گرفت که پتانسیل هم در درون کره صفر است؟

۵– اگر ذره‌ای با بار منفی را در یک میدان الکتریکی قرار دهید

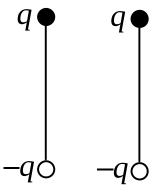
(**الف**): بار الکتریکی از پتانسیل الکتریکی بالاتر به پتانسیل الکتریکی پایین‌تر واز انرژی پتانسیل الکتریکی پایین‌تر به انرژی پتانسیل الکتریکی بالاتر حرکت خواهد کرد.

(**ب**): بار الکتریکی از پتانسیل الکتریکی بالاتر به پتانسیل الکتریکی پایین‌تر واز انرژی پتانسیل الکتریکی بالاتر به انرژی پتانسیل الکتریکی پایین‌تر حرکت خواهد کرد.

(**پ**): بار الکتریکی از پتانسیل الکتریکی پایین‌تر به پتانسیل الکتریکی بالاتر واز انرژی پتانسیل الکتریکی پایین‌تر به انرژی پتانسیل الکتریکی بالاتر حرکت خواهد کرد.

(**ت**): بار الکتریکی از پتانسیل الکتریکی پایین‌تر به پتانسیل الکتریکی بالاتر واز انرژی پتانسیل الکتریکی بالاتر به انرژی پتانسیل الکتریکی پایین‌تر حرکت خواهد کرد.

۷– دو دوقطبی در فاصله‌ی بینهایت دوری از هم اند. کار لازم برای آوردن آنها به مکان‌هایی که در شکل دیده می‌شود، برابر است با

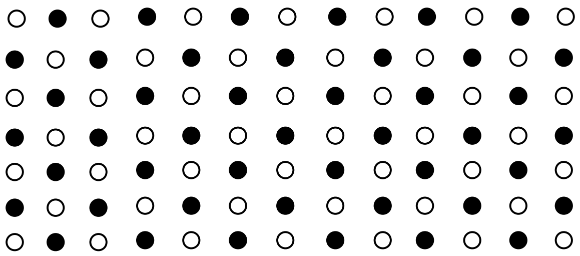


(الف): صفر (ب): مثبت است. (پ): منفی است.

(ت): علامت کار به طول (غیر صفر و برابر) دوقطبی‌ها بستگی دارد.

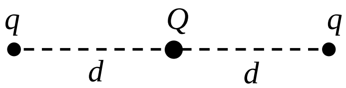
مسئله‌ها

۳-۱ هشت وجهی: سه پروتون و سه الکترون در راس‌های یک هشت وجهی منتظم به ضلع a قرار دارند. می‌خواهیم انرژی سامانه را به‌دست آوریم، یعنی کار لازم برای ساختن این آرایه را با آوردن بارها از فاصله‌های دور از هم حساب کنید. دو آرایه‌ی متفاوت وجود دارد آنها را تعیین کنید. انرژی هر یک از آرایه‌ها را بیابید.


شکل ۲٤-۳ بلور یونی دو بعدی

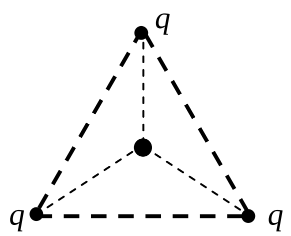
۳-۲ انرژی پتانسیل بلور دو بعدی: بلور یونی دو بعدی صفحه‌ای است که بارهای مساوی و ناهم‌نام به طور متناوب به فاصله‌ی a از یکدیگر چیده شده اند. از یک برنامه‌ی کامپیوتری استفاده کنید و انرژی پتانسیل بر واحد یون را برای بلور دو بعدی بینهایت گسترده حساب کنید. شکل (۲۷-۳) را ببینید.

۳-۳ **(الف)**: ترازمند با انرژی صفر: دو بار نقطه‌ای q برابر شکل (۲۵-۳) به فاصله‌ی d از بار نقطه‌ای Q قرار دارند. به ازای چه مقداربرای Q این سامانه در ترازمندی است؟ یعنی نیروی وارد به هر بار صفر است (این ترازمندی ناپایدار است می‌توان آن را با نگاه کردن به جابه‌جایی عمودی Q به روشنی دید.)



شکل ۲۵-۳ سه بار ترازمند

(ب): در شکل (۲٦-۳) سه بار q در سه راس یک مثلث متساوی‌اضلاع قرار دارند. پرسش بخش (الف) را برای این آرایه پاسخ دهید.



شکل ۲٦- ۳ چهار بار ترازمند

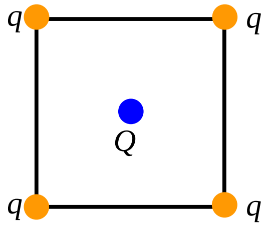
(پ): برای هر دو حالت نشان دهید که انرژی کل سامانه‌ها صفر است.

(ت): با توجه به نتیجه‌گیری بالا، درستی گزاره‌ی "انرژی پتانسیل هر مجموعه‌ی بارهای الکتریکی در حالت ترازمندی صفر است." را ثابت کنید. راهنمایی: هدف این است که نشان دهید برای بردن بارها به بینهایت کار کل صفر است. چون نیروی الکتروستاتیک پایستار است، کافی است نشان دهید که برای یک مسیر خاص بارها کار صفر است و در واقع یک مسیر خاصی وجود دارد که نتیجه را به روشنی نشان می‌دهد[۲] .

۳-۴ **نوسان بار در صفحه‌ی حلقه:** حلقه‌ای به شعاع R و چگال بار خطی یکنواخت λ را در نظر بگیرید. ذره‌ای با بار مثبت q و جرم m در مرکز حلقه در حال سکون است. به ذره تلنگر کوچکی وارد می‌کنیم. اگر بار مثبت q مقید به حرکت در صفحه‌ی حلقه باشد، نشان دهید که حرکتش نوسانی است. برای نوسان‌های کوچک بسامد حرکت را بیابید. راهنمایی: انرژی پتانسیل ذره را هنگامی‌که در فاصله‌ی اندک r از مرکز حلقه است،حساب کنید و سپس بر روی حلقه انتگرال بگیرید. شما نیاز دارید از بسط تیلور $1/\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon/2-3\varepsilon^2/8$ استفاده کنید

۳-۵ **پایدار یا ناپایدار:** چهار ذره برابر شکل (۲۷-۳) در چهار گوشه‌ی مربع ثابت شده‌اند. بار الکتریکی هر ذره q است. در مرکز مربع بار ناهمنام Q قرار دارد. به ازای چه مقدار Q این سامانه در ترازمندی پایدار است؟ این همان مسئله‌ی ۱۱-۲ در

[۲] Crosignani, B, and Di Porto, P. “Energy of a charge system in an equilibrium configuration,” *American Journal of Physics*, **45**, 876 (1977).



شکل ۲۷-۳ چهار بار و یک بار

فصل ۲ است. در آنجا پاسخ را با استفاده از نیرو به‌دست آوردید. اینک مسئله را با استفاده از انرژی حل کنید. برتری این روش این است که نیازی به مولفه‌های نیرو نیست. با این حال، اگر دقت نکنید، ریاضیات ممکن است پیچیده شود. اگر از نرم افزار *Mathematica* استفاده کنید، مسئله اسان‌تر می‌شود: تصور کنید که بار $-Q$ را به مقدار جزئی به نقطه‌ی همسایه‌ی (x, y) جابه‌جا می‌کنید. با استفاده از دستور `Series` انرژی این بار را در مکان جدیدش در پایین‌ترین مرتبه‌ی غیربدیهی x و y حساب کنید. اگر انرژی، دست‌کم در یک جهت جابه‌جایی، کاهش پیدا کند، ترازمندی ناپایدار است. ترازمندی نسبت به جابه‌جایی عمود بر صفحه‌ی مربع پایدار است، در صفحه‌ی مربع چه رخ می‌دهد؟ (*توجه:* اگر مسئله‌ی ۱۱-۲ را حل نکرده‌اید، بهتر است نخست آن را حل کنید و سپس به این مسئله بپردازید.)