

## ۲- الکترواستاتیک

## ۲-۱-۱ پیشگفتار

بنیادی‌ترین پرسش پیش روی نظریه الکترومغناطیس محاسبه‌ی نیروی است که یک بار الکتریکی یا مجموعه‌ای از بارهای الکتریکی به نام بارهای چشمه بر بار الکتریکی دیگری (بار آزمون) وارد می‌کند.

بارهای چشمه‌ای  $q_1, q_2, \dots$  را در نظر بگیرید. این بارها چه نیرویی به بار آزمون  $Q$  وارد می‌کنند؟ به بیان دیگر موقعیت بارهای چشمه به صورت تابعی از زمان  $w(t)$  داده شده‌اند. می‌خواهیم مسیر بار آزمون را بیابیم. پاسخ پرسش‌های بالا در حالت کلی چندان آسان نیست؛ زیرا نیروی وارد به بار  $Q$  نه تنها به فاصله‌ی میان  $Q$  و بارهای چشمه‌ای وابسته است، بلکه در حالت عمومی، تابع سرعت و شتاب بارهای چشمه‌ای  $q_i$  نیز است.

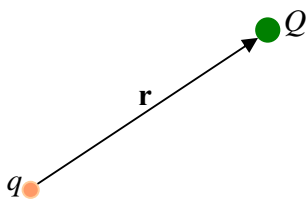
هنگامی که بار آزمون  $Q$  نیرویی را احساس می‌کند، این نیرو حامل اطلاعاتی در باره‌ی اندازه، مکان، سرعت و شتاب بارهای چشمه در لحظه‌ی ارسال آنها به بار  $Q$  است. اگر چه این اطلاعات از نوع الکترومغناطیسی اند و با سرعت نور حرکت می‌کنند، اما هنوز هم بازه‌ی زمانی هر چند کوتاه  $\Delta t$  بین ارسال خبر و دریافت آن لازم است. در این فاصله‌ی زمانی، مکان بارهای چشمه تغییر می‌کند. بنابراین، در لحظه‌ای که بار  $Q$  این اطلاعات را دریافت می‌کند، آنها مربوط به زمانی پیش‌تر و در نتیجه «کهنه» اند. بنابراین، اگر چه پرسش بنیادی ساده به نظر می‌رسد، اما پاسخ آن مشکل می‌نماید و نیازمند بسط ریاضی نظریه‌ی الکترومغناطیس است. ما نخست حالت خاصی از پرسش بنیادی بالا را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم تمامی بارهای چشمه،  $q_1, \dots, q_i$  ساکن اند. (بار آزمون می‌تواند حرکت کند). با اعمال این محدودیت الکترودینامیک به الکتروستاتیک تبدیل می‌شود. کاربردهای علمی و عملی پدیده‌های الکتروستاتیک در اشکال هندسی متفاوتی از مواد رسانا و نارسانا فراوان اند. این پدیده‌ها با بار، میدان، پتانسیل، نیرو، گشتاور و ظرفیت سرو کار دارند. شیوه‌ی عمومی یافتن ارتباط میان این کمیت‌ها برای هندسه‌های گوناگون در فصل‌های آینده بررسی خواهد شد. به طور کوتاه، این شیوه عبارت از یافتن پاسخی به یک معادله‌ی دیفرانسیل بنام معادله‌ی لاپلاس است که در شرایط مرزی صدق کند. این روش را در مورد پدیده‌های الکتروستاتیک بکار خواهیم بست، ولی در دیگر شاخه‌های فیزیک مانند جریان، گرما، ترمودینامیک و جریان الکتریکی نیز کاربرد دارد. شیوه‌ی عمومی بر پایه‌ی یک مفهوم ساده‌ی فیزیکی استوار است. این مفهوم، بدون اثبات آن، عبارت از این است که خط‌های پیوسته‌ی شار را در فضای خالی می‌توان چنان رسم کرد که در هر نقطه‌ی فضا، چگالی و جهت این خط‌ها نماینده شدت و جهت میدان باشند. پیش از آنکه ما مفهوم شار و میدان را روشن کنیم لازم است به پرسش بنیادی الکتروستاتیک برگردیم.

## ۲-۱-۲ قانون کولمب

ما در فصل ۱ به قانون کولمب پرداختیم. نیرویی که بار نقطه‌ای ساکن  $q$  به بار نقطه‌ای  $Q$  دیگری در فاصله‌ی  $r$  از خود وارد می‌کند، با قانون کولمب تعیین می‌شود:

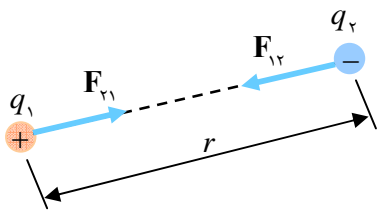
$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2-1)$$

رابطه‌ی بالا بیان ریاضی قانون کولمب است. این قانون تجربی است و تنها در مورد بارهای نقطه‌ای درست است. نیروی وارد بر بار  $Q$  با حاصل‌ضرب بارها متناسب است و با مجذور فاصله‌ی بین دو بار نسبت معکوس دارد.  $\mathbf{r}$  برداری است از بار  $q$

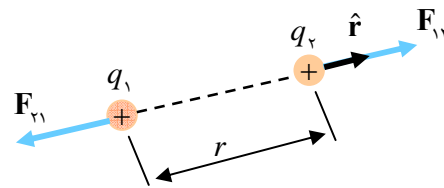


شکل ۲-۱ بردار بین دو بار نقطه‌ای

به بار آزمون  $Q$  و در شکل (۲-۱) نشان داده شده است. ثابت  $\epsilon_0$  گذردهی فضای تهی است. در یکاهای SI مقدار آن  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N.m}^2$  است. چون بارهای الکتریکی ممکن است هم علامت باشند و یا علامتشان مخالف هم باشد، نیروی  $F_{12}$  بینشان ممکن است رانشی یا ربایشی باشد. در شکل (۲-۲) نیروی بین دو بار هم علامت  $q_1$  و  $q_2$  نشان داده شده است. این نیرو رانشی است. شکل (۲-۳) نیروی ربایشی بین دو بار با علامت‌های مخالف را نشان می‌دهد. این نیرو، ربایشی است.



شکل ۲-۳ نیروی ربایشی بین دو بار



شکل ۲-۲ نیروی رانشی بین دو بار

اگر به جای بار  $q$  مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای  $q_1, q_2, \dots$  وجود داشته باشد، با استفاده از قانون کولمب و اصل برنهی، می‌توان نیروی این مجموعه‌ی بار را بر روی  $Q$  حساب کرد: بنا به اصل برنهی، برهم‌کنش میان دو بار متأثر از حضور بارهای دیگر نیست. این بدان معنی است که برای محاسبه‌ی نیرویی که از طرف مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای به بار  $Q$  وارد می‌شود، نخست نیروی  $F_1$  ناشی از بار  $q_1$  را بدون در نظر گرفتن بقیه‌ی بارها محاسبه کنیم و سپس نیروی  $F_2$  ناشی از بار  $q_2$  را به دست آوریم و الاخر .... و سرانجام این نیروها را به طور برداری جمع کنیم. آنگاه،  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$  نیروی وارد به بار  $Q$  از طرف مجموعه‌ی بارهای نقطه‌ای را به دست خواهد داد.

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{\epsilon_0} \left( \frac{q_1 \hat{\mathbf{r}}_1}{r_1^2} + \frac{q_2 \hat{\mathbf{r}}_2}{r_2^2} + \frac{q_3 \hat{\mathbf{r}}_3}{r_3^2} + \dots \right) \quad (2-2)$$

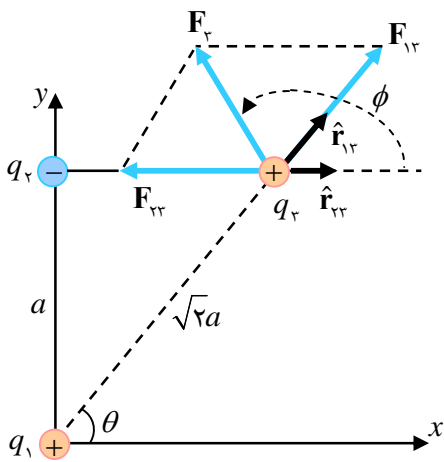
ما توجه خواننده را به نقش مهم اصل برنهی جلب می‌کنیم. اصل برنهی و قانون کولمب تنها اصولی اند که همه‌ی الکتروستاتیک برپایه‌ی آنها استوار است.

مثال ۲-۱ سامانه‌ای با سه بار: سه بار نقطه‌ای  $q_1, q_2, q_3$  برابر شکل (۲-۴) چیده شده اند.  $q_1$  در مبدا مختصات،  $q_2$  در  $(0, a)$  و  $q_3$  در نقطه‌ی  $(a, a)$  قرار دارند. اگر  $q_1 = -q_2$  باشد، چه نیرویی به بار  $q_3$  وارد می‌شود؟

حل: با استفاده از اصل برنهی، داریم

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_3}{r_{31}^2} \hat{\mathbf{r}}_{31} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}^2} \hat{\mathbf{r}}_{32} \right) \quad (2-3)$$

توجه کنید که چون  $q_2$  منفی است، جمله‌ی دوم هم منفی است. جهت بردارهای  $\hat{\mathbf{r}}_{31}$  و  $\hat{\mathbf{r}}_{32}$  متفاوت اند. برای محاسبه‌ی این جمع برداری، می‌توان بردارهای یکه را برحسب مولفه‌های کارتزی آنها نوشت و سپس نیروها را به طور برداری با هم جمع کرد. از شکل (۲-۴) پیداست که بردار یکه‌ی  $\hat{\mathbf{r}}_{32}$  را می‌توان به صورت زیر



شکل ۲-۴ سامانه‌ای با سه بار الکتریکی

$$\hat{r}_{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{i} + \hat{j}) \quad (2-4)$$

نوشت. همچنین، بردار یکه‌ی  $\hat{r}_{r} = \hat{i}$  است. بنابراین، نیروی کل وارد به بار  $q_3$  به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_r &= \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_r}{r_{1r}^2} \hat{r}_{1r} + \frac{q_2 q_r}{r_{2r}^2} \hat{r}_{2r} \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_r}{(\sqrt{2}a)^2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{i} + \hat{j}) + \frac{(-q_1) q_r}{a^2} \hat{i} \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_r}{a^2} \left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{j} \right] \end{aligned} \quad (2-5)$$

اندازه و جهت نیروی  $\mathbf{F}_r$  عبارتند از

$$F_r = \frac{q_1 q_r}{\epsilon \pi \epsilon_0 a^2} \left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{q_1 q_r}{\epsilon \pi \epsilon_0 a^2} (0, 737) \text{ N} \quad (2-6)$$

زاویه‌ای که این نیرو با محور  $x$  می‌سازد، و در نتیجه، جهت آن عبارت است از

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{F_{r,y}}{F_{r,x}} \right) = \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{2}/2}{-1 + \sqrt{2}/2} \right] = 101,3^\circ \quad (2-7)$$

توجه کنید که معادله‌ی بالا دو پاسخ دارد. پاسخ دوم،  $\phi = -28,7^\circ$ ، پذیرفتنی نیست؛ چون در این صورت مولفه‌ی  $\hat{i}$  نیرو مثبت و مولفه‌ی  $\hat{j}$  آن منفی می‌شود.

برای سامانه‌ای با  $N$  بار، رابطه‌ی (۲-۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

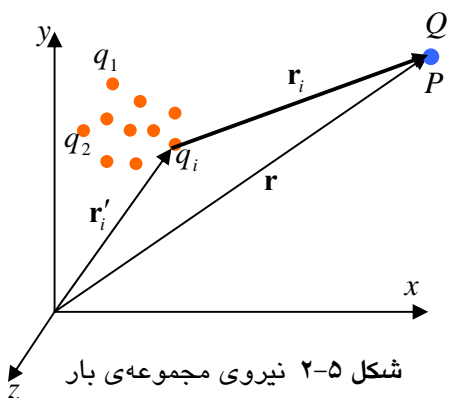
$$\mathbf{F}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (2-8)$$

که در آن نیروی بین بارهای  $i$ -ام و  $j$ -ام است. بنابه اصل برنهی اگر بارها ساکن باشند، این نیروها مستقل از یکدیگر اند.

## ۲-۲ میدان الکتریکی

نیروی الکتروستاتیکی (نیروی الکتریکی بین بارهای ساکن) همانند نیروی گرانش، نیروی "کنش از راه دور" است. این نیرو بین بارهایی که در تماس مستقیم نیستند وجود دارد. در توجیه مفهوم کنش از راه دور، گویم یکی از بارها میدانی در فضای پیرامون خود ایجاد می‌کند و این میدان به بار دیگر اثر می‌کند. در اینجا نخست میدان الکتریکی را تعریف می‌کنیم و سپس به تفسیر فیزیکی آن می‌پردازیم.

فرض کنید مجموعه‌ی بارهای نقطه‌ای ساکن  $q_1, q_2, \dots, q_n$  برابر شکل (۲-۵) در فاصله‌های  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_n$  از بار  $Q$  قرار دارند. نیروی کل که به بار  $Q$  وارد می‌شود بنا به اصل برنهی عبارت است از



شکل ۲-۵ نیروی مجموعه‌ی بار

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{\epsilon\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \quad (2-9)$$

اگر میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  بارهای چشمه‌ای را در نقطه‌ی  $P$  (یعنی در مکان بار آزمون  $Q$ ) به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \quad (2-10)$$

آنگاه نیروی وارد به بار  $Q$  به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{F} = Q \mathbf{E} \quad (2-11)$$

توجه کنید که  $\mathbf{E}(P)$  تابعی از مکان نقطه  $P = (x, y, z)$  است؛ چون  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_i$  تابع نقطه‌ی  $P$  است. مکان نقطه‌ی  $P$  با بردار مکان  $\mathbf{r}$  داده شده است. چون بارهای چشمه‌ای ساکن اند بردار مکان آنها،  $\mathbf{r}'_i$ ، کاملاً شناخته شده است. در رابطه (۲-۱۰) هیچ نشانی از بار آزمون  $Q$  وجود ندارد. بنابراین، میدان الکتریکی یک کمیت برداری است که اندازه و جهت آن در هر نقطه‌ی مانند  $P$  با آرایش بارهای چشمه مشخص می‌شود. از نظر فیزیکی  $\mathbf{E}(P)$  نیرو در واحد بار است که به بار آزمون در نقطه  $P$  وارد می‌شود.

میدان یک کمیت یا مفهوم فیزیکی بنیادی است. حتی بنیادی‌تر از نیروست. در واقع نیرو نمود میدان است. برای هر نیرویی در طبیعت میدانی وجود دارد. برای مثال میدان گرانش را در نظر بگیرید. ما نیروی گرانش را می‌شناسیم و می‌دانیم که اجسام به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند؛ مانند نیروی ربایش بین زمین و خورشید. برای این که تفاوت میان نیرو و میدان را روشن‌تر کنیم بهتر است به مثال زیر توجه کنیم:

پارچه‌ی چارگوشی را در نظر بگیرید که چهار نفر گوشه‌های آن را گرفته و به صورت افقی در فضا نگه داشته‌اند. حال اگر سنگ‌ریزه‌ای را در یکی از گوشه‌های این پارچه قرار دهید چه اتفاقی خواهد افتاد؟ تجربه می‌آموزد که سنگ ریزه در مکان خود باقی خواهد ماند. حال اگر وزنه‌ی سنگین‌تری را در میان این پارچه قرار دهید، این وزنه انحنایی در پارچه ایجاد خواهد کرد و سنگ‌ریزه در این انحنا خواهد سُرید و به سمت وزنه جذب خواهد شد. بدین ترتیب، به وجود نیروی گرانش بین وزنه و سنگ ریزه پی می‌بریم. به این پدیده می‌توانیم بنیادی‌تر ببینیم: حضور وزنه در فضا (پارچه) خاصیتی را به فضا القاء می‌کند. در مثال بالا این خاصیت، ایجاد خمیدگی در فضا یا پارچه است که سبب تغییر هندسه‌ی فضای اطراف وزنه شده است. این خاصیت یا هندسه‌ی جدید و ایجاد خمیدگی در فضا، میدان است. در مثال بالا آن را میدان گرانش می‌نامیم.

نقش سنگ ریزه آشکارسازی این میدان یا هندسه‌ای است که به فضا القاء شده است. نیرویی که در این میدان به سنگ ریزه وارد می‌شود، نمایش وجود میدان است. همین تصور را در مورد سایر نیروها و میدان‌ها هم می‌توان داشت: حضور بار الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا ویژگی‌های آن فضا را دگرگون می‌کند و خاصیت جدیدی که مربوط به بار الکتریکی است به فضا القاء می‌کند. تجسم این دگرگونی در فضا، میدان الکتریکی است. به همین ترتیب بار رنگ و بار ضعیف میدان‌های رنگ و ضعیف ایجاد می‌کنند.

همان‌گونه که گفتیم، مجموعه‌ای از بارها در هر نقطه‌ای مانند  $P$  میدان الکتریکی  $\mathbf{E}(P)$  ایجاد می‌کنند. اندازه و جهت  $\mathbf{E}(P)$  مستقل از بود یا نبود بار آزمون  $Q$  در نقطه‌ی  $P$  است. میدان  $\mathbf{E}$  و نیروی  $\mathbf{F}$  با رابطه‌ی (۲-۱۱) به هم مربوط اند؛ اما در تعریف میدان، رابطه‌ی (۲-۱۰)، بار  $Q$  ظاهر نشده است. برای گریز از این تناقض ظاهری می‌توان  $Q$  را بسیار کوچک پنداشت و در

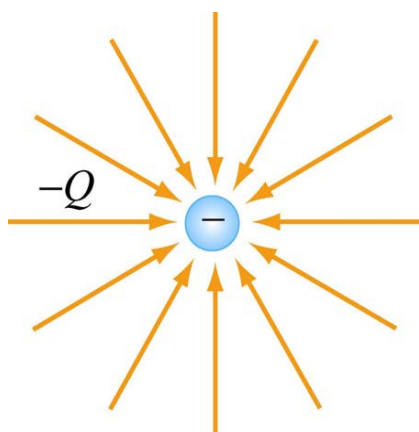
نتیجه اطمینان حاصل کرد که حضور بار آزمون  $Q$  در فضا، مکان بارهای چشمه‌ای را تغییر نمی‌دهد. بنابراین، میدان  $E(P)$  در نقطه‌ای مانند  $P$  با بردار مکان  $\mathbf{r}$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{E}(P) = \lim_{Q \rightarrow \circ} \frac{\mathbf{F}}{Q} \quad (2-12)$$

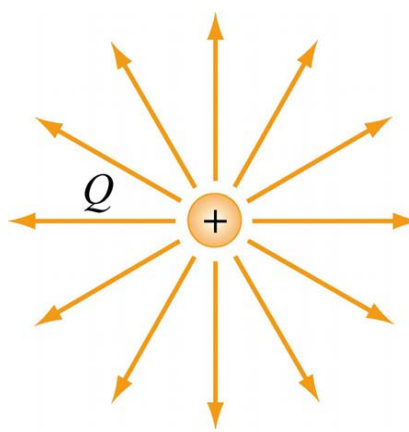
با این حال، در طبیعت بار کوچک‌تر از  $e$  (بار الکترون) وجود ندارد! در نتیجه، گزینه‌ی  $Q \rightarrow \circ$  راه‌گزینه‌ی درستی به نظر نمی‌آید. در واقع، اگر رابطه‌ی (2-10) را بدون اشاره به بار آزمون، به‌عنوان تعریف میدان  $\mathbf{E}$  بپذیریم، مشکلی پیش نمی‌آید و لازم هم نیست که چشمه در حال سکون باشد. اگر وارد کردن بار جدیدی سبب جابه‌جایی بارهای چشمه بشود، این بدان معنی است که میدان تغییر کرده است و اگر بخواهیم نیروی وارد به بار جدید را حساب کنیم، باید از میدان جدید استفاده کنیم. میدان الکتریکی  $E(P)$  یک تابع برداری برحسب مکان است؛ یک میدان برداری است. یکای میدان الکتریکی در سامانه‌ی یکاهای SI نیوتون بر بار واحد یا نیوتون بر کولمب  $n/C$  است. پس از آنکه در فصل ۳ مفهوم پتانسیل را شناسانیم، میدان را با یکای دیگر، اما کاملاً هم‌ارز، ولت بر متر در یکاهای SI بیان خواهیم کرد.

### ۲-۲-۱ خط‌های میدان

بار الکتریکی میدان الکتریکی تولید می‌کند. میدان الکتریکی بر بارهای دیگر اثر می‌گذارد و به آنها نیرو وارد می‌کند. همان‌طور

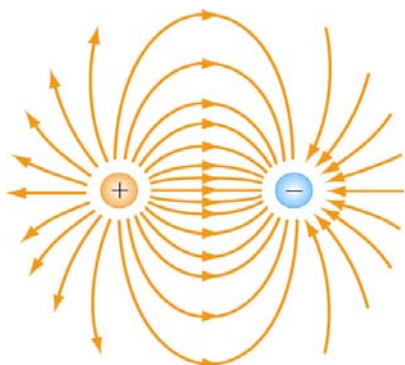


شکل ۲-۷ خط‌های میدان بار نقطه‌ای منفی



شکل ۲-۶ خط‌های میدان بار نقطه‌ای مثبت

که در فصل ۱ گفتیم، میدان الکتریکی را می‌توان با خط‌های میدان نشان داد. خط‌های میدان از بار مثبت آغاز (شکل ۲-۶) و به بار منفی پایان می‌گیرند (شکل ۲-۷). خط‌های میدان هرگز از فضای تهی آغاز نمی‌شوند و در فضای تهی هم پایان نمی‌گیرند؛ از بار آغاز و به بار ختم می‌شوند. خط‌های میدان در راستای میدان الکتریکی‌اند و چگالی خط‌های میدان در هر نقطه با شدت میدان الکتریکی در آن نقطه متناسب است. بار تنها در همه سو به طور یکسان خط میدان گسیل می‌کند. اگر در دور و بر، بار دیگری وجود نداشته باشد، این خط‌های میدان پایان نمی‌گیرند و در نتیجه روی سطحی به شعاع  $r$  و به مساحت  $4\pi r^2$  پخش می‌شوند. بنابراین، چگالی خط‌های میدان و در نتیجه شدت میدان و نیروی الکتریکی به صورت  $1/r^2$  کاهش می‌یابد. دلیل بنیادی نیروی کولمب هم که به صورت  $1/r^2$  تغییر می‌کند، همین است. توجه کنید که خط‌های میدان شعاعی‌اند. جهت آنها برای بار مثبت به سوی بیرون از بار و برای بار منفی به سوی بار است. برای یک جفت بار مساوی و ناهم‌نام (دوقطبی الکتریکی) خط‌های میدان در شکل (۲-۸) نشان داده شده است. با توجه به نکات زیر می‌توان طرح خط‌های میدان را به دست آورد:



شکل ۸-۲ خط‌های میدان یک جفت بار

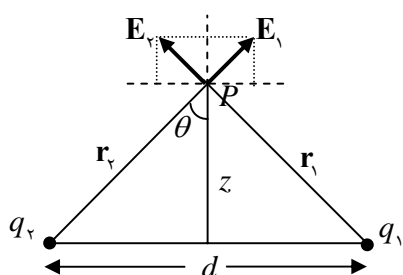
- ۱- تقارن: به ازای هر نقطه در بالای خط راستی که دو بار را به هم وصل می‌کند، نقطه‌ی متناظری در پایین این خط راست وجود دارد. بنابراین، طرح باید نسبت به این خط متقارن باشد.
- ۲- میدان نزدیک: در فاصله‌های خیلی نزدیک به یکی از بارها، میدان آن بار چیره است و بنابراین، خط‌های میدان شعاعی اند و تقارن کروی دارند.
- ۳- میدان دور: در فاصله‌های دور از سامانه‌ی بارها، طرح خط‌های میدان باید همانند خط‌های میدان یک بار تنها با اندازه‌ی  $Q = \sum_i Q_i$  باشد. بنابراین، خط‌های میدان باید شعاعی و به سوی بیرون باشند؛ مگر این که  $Q = 0$  باشد.
- ۴- نقطه‌ی تهی: نقطه‌ای که در آن  $E = 0$  است و هیچ خط میدانی از آن نمی‌گذرد. ویژگی‌های خط‌های میدان را می‌توان به صورت زیر برشمرد:

- جهت بردار میدان  $E$  در هر نقطه به خط میدان مماس است.
  - تعداد خط‌های میدان گذرنده از واحد سطحی که بر خط میدان عمود است با اندازه‌ی میدان الکتریکی در آن ناحیه متناسب است.
  - خط‌های میدان باید از بارهای مثبت (یا از بینهایت) آغاز شوند و به بارهای منفی (یا در بینهایت) پایان یابند.
  - تعداد خط‌هایی که از بار مثبت آغاز می‌شوند یا به بار منفی منتهی می‌شوند، باید با اندازه‌ی بار متناسب باشد.
  - دو خط میدان هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند؛ چون در این صورت در نقطه‌ی تلاقی، میدان دو جهت پیدا می‌کند.
- با توجه به تعریف میدان الکتریکی در رابطه‌ی (۱۲-۲) و قانون کولمب، میدان الکتریکی در فاصله‌ی  $r$  از یک بار نقطه‌ای برابر

$$E = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (2-13)$$

است. با استفاده از اصل برهم‌نهی، میدان الکتریکی مجموعه‌ای از بارها به صورت زیر نوشته می‌شود

$$E = \sum_i E_i = \sum_i \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (2-14)$$



شکل ۹-۲ میدان‌های دو بار هم‌نام

مثال ۲-۲ میدان دو بار: دو بار هم‌نام و هم اندازه‌ی  $q$  به فاصله‌ی  $d$  از همدیگر قرار دارند.

(الف): میدان الکتریکی را در فاصله‌ی  $z$  از وسط خطی که این دو بار را به هم می‌پیوندند، بیابید.

(ب): بار سمت راست را به  $-q$  تبدیل کنید و مسئله را دوباره حل کنید.

حل: (الف) میدان هریک از بارها در نقطه‌ی  $P$  عبارت است از

$$E_i = \frac{q_i}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (2-15)$$

جهت هر یک از میدان‌های  $E_1$  و  $E_2$  در شکل (۹-۲) نشان داده شده است. از تقارن مسئله پیداست که مولفه‌های افقی میدان‌های  $E_1$  و  $E_2$  یکدیگر را حذف می‌کنند و میدان برآیند فقط در جهت قائم مولفه‌ی غیر صفر دارد. میدان کل در نقطه  $P$  از برنهمش

$\mathbf{E}_\gamma$  و  $\mathbf{E}_\lambda$  به دست می‌آید و داریم

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\lambda + \mathbf{E}_\gamma = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{q_\lambda}{r_\lambda^2} (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) + \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{q_\gamma}{r_\gamma^2} (-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) \quad (2-16)$$

چون  $q_\lambda = q_\gamma = q$  و  $r_\lambda^2 = r_\gamma^2 \equiv r^2 = (z^2 + (d/2)^2)$  اند، رابطه‌ی (2-16) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} [(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) + (-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}})] = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r^2} \hat{\mathbf{k}} \quad (2-17)$$

اندازه‌ی میدان در راستای عمودی،  $E_z$  برابر

$$E_z = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r^2} \cos\theta \quad (2-18)$$

است.  $\cos\theta$  مولفه‌ی عمودی را به دست می‌دهد و ضریب 2 به خاطر وجود دو میدان برای دو بار الکتریکی است.

$$r^2 = \sqrt{z^2 + (d/2)^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r} \quad \text{چون}$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2qz}{(z^2 + (d/2)^2)^{3/2}} \quad (2-19)$$

**نکته:** آزمودن پاسخ برای حالت‌های خاص - هر گاه امکان پذیر باشد - اعتماد به درستی پاسخ را بیشتر می‌کند. در این مثال، حالت خاصی را در نظر بگیرید که  $z \gg d$  است؛ یعنی مکان نقطه‌ی  $P$  خیلی از بارها فاصله دارد. از چنین فاصله‌ی دوری (در مقایسه با جدایی بارها) این دو بار همانند بار واحد در فاصله‌ی  $z$  به نظر خواهند رسید. مقدار این بار واحد برابر  $2q$  است. پس، در چنین حالت خاصی پاسخ روشن است:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2q}{z^2} \hat{\mathbf{k}} \quad (2-20)$$

پاسخ عمومی (2-19) نیز به‌ازای  $d \rightarrow 0$  به این پاسخ می‌انجامد.

(ب): در این حالت، مولفه‌های عمودی یکدیگر را حذف می‌کنند. در نتیجه

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r^2} \sin\theta \hat{\mathbf{x}} \quad (2-21)$$

چون  $\sin\theta = (d/2)/r$  است، پس خواهیم داشت

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(z^2 + (d/2)^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{x}} \quad (2-22)$$

و برای حالت خاص  $z \gg d$  اگر در مخرج کسر از  $d$  در برابر  $z$  چشم پوشی کنیم، میدان به صورت زیر در می‌آید.

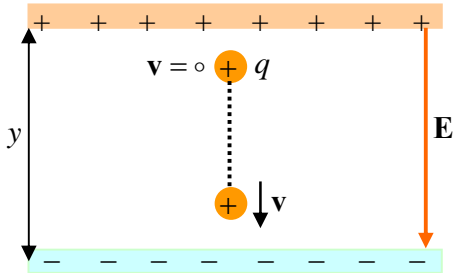
$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{qd}{z^2} \hat{\mathbf{x}} \quad (2-23)$$

که این میدان یک دو قطبی است و در بخش 3-2 به آن خواهیم پرداخت.

**مثال 3-2 نیروی وارد به ذره‌ی باردار در میدان الکتریکی:** دو صفحه‌ی تخت موازی را که بارهای ناهم‌نام دارند، برابر شکل (2-10) در نظر بگیرید. بار  $q$  در فضای بین صفحه‌ها، برابر شکل، حرکت می‌کند. فرض کنید میدان در بین صفحه‌ها به صورت  $\mathbf{E} = -E_y \hat{\mathbf{j}}$  است ( $E_y > 0$ ). ما در آینده نشان خواهیم داد که میدان در بین صفحه‌های بینهایت گسترده با بارهای ناهم‌نام

یکنواخت است). فرض کنید که بار از صفحه‌ی مثبت با سرعت  $v_0 = 0$  رها می‌شود. سرعت و انرژی جنبشی بار در لحظه‌ی برخورد به صفحه‌ی با بار منفی چیست؟ فاصله‌ی دو صفحه از هم  $y$  است.

حل: به ذره نیروی کولمبی  $F_e = qE$  و به سوی پایین وارد می‌شود. بین بار  $q$ ، که این نیرو به آن وارد می‌شود، و بارهای روی صفحه‌ها که چشمه‌ی میدان الکتریکی اند، تمایز وجود دارد. به این تمایز توجه کنید: اگرچه خود بار  $q$  هم چشمه‌ی میدان



الکتریکی است و میدان تولید می‌کند، اما بنابه قانون سوم نیوتون نمی‌تواند به خودش نیرو وارد کند.  $E$  میدانی است که فقط از بارهای "چشمه" در روی صفحه‌ها ناشی می‌شود. بنابه قانون دوم نیوتون، نیروی برآیند به شتاب‌دار شدن بار  $q$  می‌انجامد. شتاب بار عبارت است از

$$a = \frac{F_e}{m} = \frac{qE}{m} = -\frac{qE_y}{m} \hat{j} \quad (2-24)$$

چون مقدار این شتاب ثابت است، داریم

$$v^2 - v_0^2 = 2|a_y|y \Rightarrow v = \sqrt{2|a_y|y} = \sqrt{\frac{2yqE_y}{m}} \quad (2-25)$$

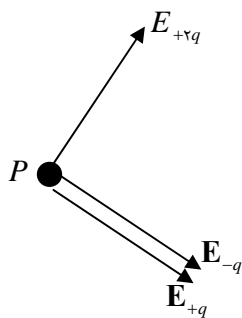
انرژی جنبشی ذره در هنگام برخورد با صفحه‌ی پایین، برابر است با

$$T = mv_y / 2 = qE_y y \quad (2-26)$$

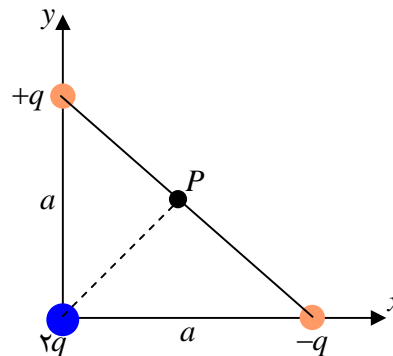
مثال ۲-۴ سه بار در سه گوشه‌ی مثلث: سه بار  $q$ ،  $2q$  و  $-q$  برابر شکل (۲-۱۱) در سه گوشه‌ی مثلث متساوی‌الساقین به ضلع  $a$  و با زاویه‌ی راس  $90^\circ$  قرار دارند. جهت و اندازه‌ی میدان الکتریکی را در نقطه‌ی  $P$  (نیم راه بین بارهای  $q$  و  $-q$ ) به دست آورید.

حل: مسئله را با رسم میدان‌های الکتریکی بارها آغاز می‌کنیم. در شکل (۲-۱۲) این میدان‌ها نشان داده شده اند. بنا به اصل برنهی، میدان الکتریکی کل برابر است با

$$E(P) = E_{+q}(P) + E_{-q}(P) + E_{2q}(P) \quad (2-27)$$

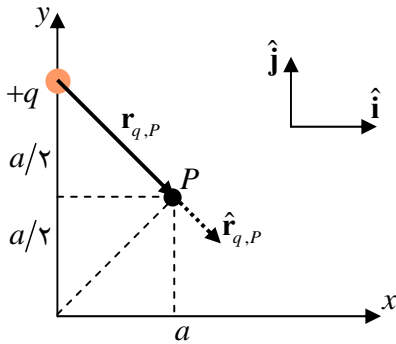


شکل ۲-۱۲ میدان بارها در نقطه‌ی  $P$



شکل ۲-۱۱ سه بار در سه راس

با محاسبه‌ی میدان بار  $+q$  آغاز می‌کنیم:



شکل ۲-۱۳ میدان بار +q در نقطه‌ی P

$$\mathbf{E}_{+q}(P) = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r_{+q,P})^2} \hat{\mathbf{r}}_{+q,P} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r_{+q,P})^2} \mathbf{r}_{+q,P} \quad (2-28)$$

توجه کنید که بردار  $\mathbf{r}_{+q,P}$  از بار  $q$  آغاز می‌شود و در  $P$  پایان می‌گیرد. با توجه به شکل (۲-۱۳) این بردار را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\mathbf{r}_{+q,P} = (a/2)\hat{\mathbf{i}} - (a/2)\hat{\mathbf{j}} \quad (2-29)$$

اندازه‌ی بردار  $\mathbf{r}_{+q,P}$  عبارت است از

$$r_{+q,P} = |\mathbf{r}_{+q,P}| = \left( (a/2)^2 + (a/2)^2 \right)^{1/2} = a/\sqrt{2} \quad (2-30)$$

بنابراین، داریم

$$\mathbf{E}_{+q}(P) = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r_{+q,P})^2} \mathbf{r}_{+q,P} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{q \left( (a/2)\hat{\mathbf{i}} - (a/2)\hat{\mathbf{j}} \right)}{\left( a/\sqrt{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{2}q}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})}{a^2} \quad (2-31)$$

با توجه به شکل (۲-۱۲) دیده می‌شود که میدان الکتریکی بار  $-q$  هم به همین صورت است:

$$\mathbf{E}_{+q}(P) = \mathbf{E}_{-q}(P) \quad (2-32)$$

اینک میدان بار  $+2q$  را در نقطه‌ی  $P$  به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E}_{2q}(P) = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2q}{(r_{2q,P})^2} \hat{\mathbf{r}}_{2q,P} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2q}{(r_{2q,P})^2} \mathbf{r}_{2q,P} \quad (2-33)$$

بردار  $\mathbf{r}_{2q,P}$  از بار  $+2q$  آغاز می‌شود و در  $P$  پایان می‌گیرد. از شکل (۲-۱۴) می‌توان نوشت

$$\mathbf{r}_{2q,P} = (a/2)\hat{\mathbf{i}} + (a/2)\hat{\mathbf{j}} \quad (2-34)$$

اندازه‌ی آن برابر است با

$$r_{2q,P} = |\mathbf{r}_{2q,P}| = \left( (a/2)^2 + (a/2)^2 \right)^{1/2} = a/\sqrt{2} \quad (2-35)$$

بنابراین، میدان بار  $2q$  عبارت است از

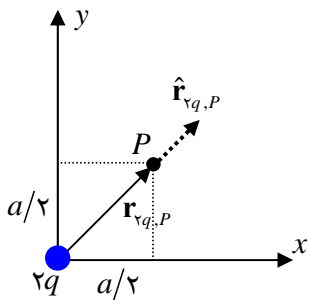
$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{2q}(P) &= \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2q}{(r_{2q,P})^2} \mathbf{r}_{2q,P} \\ &= \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2q \left( (a/2)\hat{\mathbf{i}} + (a/2)\hat{\mathbf{j}} \right)}{\left( a/\sqrt{2} \right)^2} = \frac{2\sqrt{2}q}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})}{a^2} \end{aligned} \quad (2-36)$$

پس، از جمع برداری سه میدان بالا خواهیم داشت

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_{+q}(P) + \mathbf{E}_{-q}(P) + \mathbf{E}_{2q}(P) = 2\mathbf{E}_{+q}(P) + \mathbf{E}_{2q}(P) \quad (2-37)$$

یا

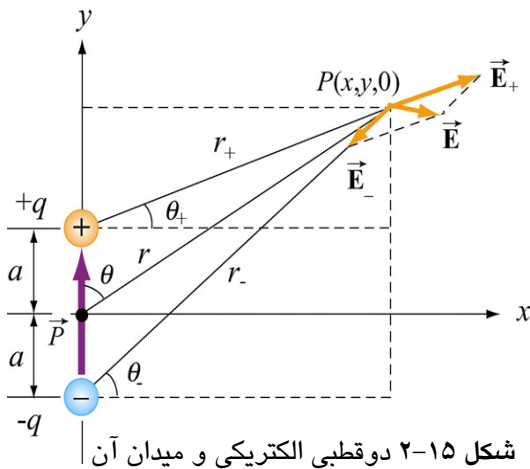
$$\mathbf{E}(P) = 2 \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{q(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})}{a^2} + \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2\sqrt{2}q(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})}{a^2} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon\sqrt{2}q}{a^2} \hat{\mathbf{i}} \quad (2-38)$$



شکل ۲-۱۴ میدان بار  $2q$  در

نقطه‌ی  $P$

### ۲-۳ میدان الکتریکی دوقطبی الکتریکی



شکل ۲-۱۵ دوقطبی الکتریکی و میدان آن

دوقطبی الکتریکی شامل دو بار الکتریکی برابر و ناهم‌نام است که به فاصله‌ی  $2a$  از یکدیگر قرار دارند و در شکل (۲-۱۵) نشان داده شده است. گشتاور دوقطبی الکتریکی  $\mathbf{p}$  برداری است از بار  $-q$  به بار  $+q$  (در جهت  $+y$  در شکل ۲-۱۵) و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{p} = 2qa \hat{\mathbf{j}} \quad (2-39)$$

اندازه‌ی گشتاور دوقطبی الکتریکی  $p = 2qa$  است ( $q > 0$ ).

برای سامانه‌ای با  $N$  بار هم که جمع بارها صفر باشد، می‌توان بردار گشتاور دوقطبی الکتریکی تعریف کرد. این‌گونه:

$$\mathbf{p} \equiv \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i \quad (2-40)$$

که در آن بردار مکان بار  $i$ -ام است. نمونه‌های دوقطبی الکتریکی مولکول‌های  $\text{H}_2\text{O}$ ،  $\text{CO}$ ،  $\text{HCl}$  و هر مولکول قطبی دیگر است. به طور کلی، هر مولکولی را که مرکز بارهای مثبت و منفی آن برهم منطبق نباشد به تقریب می‌توان یک دوقطبی الکتریکی فرض کرد. در فصل مربوط به دی‌الکتریک‌ها نشان خواهیم داد که با اعمال میدان الکتریکی خارجی به مولکول ناقطبی، می‌توان به آن گشتاور دوقطبی القاء کرد.

#### ۲-۳-۱ میدان الکتریکی دوقطبی الکتریکی

میدان الکتریکی دوقطبی الکتریکی شکل (۲-۱۵) چیست؟ با توجه به شکل می‌توان مولفه‌ی  $x$  میدان الکتریکی را در نقطه‌ی  $P(x, y, 0)$  به صورت زیر نوشت

$$E_x = \frac{q}{\epsilon\pi\epsilon_0} \left( \frac{\cos\theta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\theta_-}{r_-^2} \right) = \frac{q}{\epsilon\pi\epsilon_0} \left( \frac{x}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right) \quad (2-41)$$

که در آن

$$r_{\pm}^2 = r^2 + a^2 \mp 2ra \cos\theta = x^2 + (y \mp a)^2 \quad (2-42)$$

هم‌چنین مولفه‌ی  $y$  میدان عبارت است از

$$E_y = \frac{q}{\epsilon\pi\epsilon_0} \left( \frac{\sin\theta_+}{r_+^2} - \frac{\sin\theta_-}{r_-^2} \right) = \frac{q}{\epsilon\pi\epsilon_0} \left( \frac{y-a}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{y+a}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right) \quad (2-43)$$

مولفه‌های میدان، رابطه‌های (۲-۴۱) و (۲-۴۳)، برای دوقطبی الکتریکی آرمانی، یعنی در حالت حدی  $r \gg a$ ، شکل ساده‌تر زیر را پیدا می‌کنند

$$E_x = \frac{3p}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^3} \sin\theta \cos\theta, \quad E_y = \frac{p}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2\theta - 1) \quad (2-44)$$

که در آنها  $\sin\theta = x/r$  و  $\cos\theta = y/r$  و  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  اند. چون به دست آوردن رابطه‌ی (۲-۴۴) آموزنده است، در اینجا آن را نشان می‌دهیم. برای این کار مخرج‌های  $E_x$  و  $E_y$  را بسط تیلور می‌دهیم. نخست توجه کنید که

$$\left[ x^2 + (y \pm a)^2 \right]^{-3/2} = \left[ x^2 + y^2 + a^2 \pm 2ay \right]^{-3/2} = r^{-3} \left[ 1 + \frac{a^2 \pm 2ay}{r^2} \right]^{-3/2} \quad (2-45)$$

در حد  $r \gg a$  از بسط تیلور  $s \equiv (a^2 \pm 2ay)/r^2$  استفاده می‌کنیم. داریم

$$(1+s)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}s + \frac{15}{8}s^2 - \dots \quad (2-46)$$

که اگر در رابطه‌های (2-41) و (2-43) قرار دهیم، مولفه‌های  $E_x$  و  $E_y$  به صورت زیر در می‌آیند

$$E_x = \frac{q}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{3xya}{r^3} + \dots, \quad E_y = \frac{q}{\epsilon\pi\epsilon_0} \left( -\frac{2a}{r^3} + \frac{3y^2a}{r^5} \right) \quad (2-47)$$

در اینجا از مرتبه‌های بالاتر،  $O(s^2)$ ، چشم پوشی کردیم. بنابراین، میدان الکتریکی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} = \frac{q}{\epsilon\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{2a}{r^3} \hat{\mathbf{j}} + \frac{3ya}{r^5} (x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}) \right] = \frac{p}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^3} \left[ \frac{3yx}{r^2} \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{3y^2}{r^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{j}} \right] \quad (2-48)$$

در اینجا از تعریف گشتاور دوقطبی الکتریکی  $p \equiv 2qa$  استفاده کردیم. حال اگر از  $\sin \theta = x/r$  و  $\cos \theta = y/r$  استفاده کنیم و رابطه‌ی بالا را برحسب مختصات قطبی بنویسیم، خواهیم داشت

$$E_x = \frac{3p}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \cos \theta, \quad E_y = \frac{3p}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^3} (\cos^2 \theta - 1) \quad (2-49)$$

که همان رابطه‌ی (2-44) است.

در مختصات قطبی رابطه‌ی (2-49) را به صورت  $\mathbf{E}(r, \theta) = E_r \hat{\mathbf{r}} + E_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$  هم می‌توان نوشت که در آن

$$E_r = \frac{3p \cos \theta}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2-50)$$

این رابطه‌ها از رابطه‌ها (2-48) به دست می‌آیند. داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \theta) &= \frac{p}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^3} \left[ 3 \sin \theta \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + (\cos^2 \theta - 1) \hat{\mathbf{j}} \right] \\ &= \frac{p}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^3} \left[ 3 \cos \theta (\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}) + \sin \theta \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + (\cos^2 \theta - 1) \hat{\mathbf{j}} \right] \\ &= \frac{p}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^3} \left[ 3 \cos \theta (\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}) + \sin \theta (\cos \theta \hat{\mathbf{i}} - \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) \right] \end{aligned} \quad (2-51)$$

در بالا از اتحاد مثلثاتی  $(\cos^2 \theta - 1) = -\sin \theta$  استفاده کردیم. چون بردارهای یکه‌ی مختصات قطبی،  $\hat{\mathbf{r}}$  و  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ، عبارتند از

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} - \sin \theta \hat{\mathbf{j}} \quad (2-52)$$

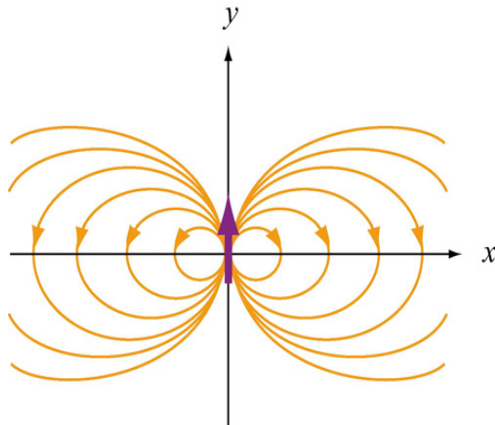
بنابراین، میدان الکتریکی، رابطه‌ی (2-51)، در مختصات قطبی به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \frac{p}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^3} \left[ 3 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \quad (2-53)$$

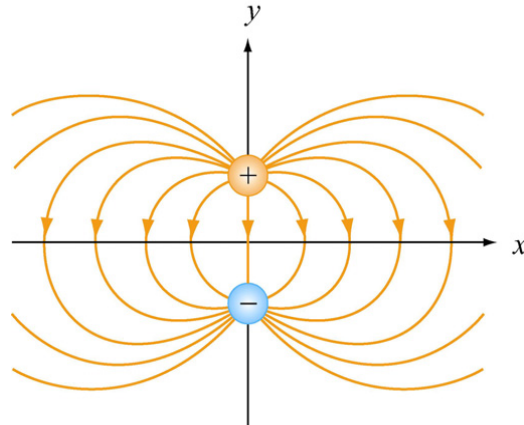
نکته‌ی مهمی که باید به آن توجه کرد این است که میدان الکتریکی دوقطبی الکتریکی با افزایش  $r$  به صورت  $1/r^3$  کاهش پیدا می‌کند؛ در حالی که میدان بار نقطه‌ای به صورت  $1/r^2$  است. این رفتار برای میدان دوقطبی دور از انتظار نیست؛ چون بار کل دوقطبی صفر است و بنابراین، در فاصله‌های دور باید هم سریع‌تر از  $1/r^2$  افت پیدا کند. اندازه‌ی  $\mathbf{E}$  برابر است با

$$E = (E_r^2 + E_\theta^2)^{1/2} = \frac{p}{\epsilon\pi\epsilon_0 r^3} (\sqrt{3} \cos^2 \theta + 1)^{1/2} \quad (2-54)$$

در شکل (۲-۱۶) خط‌های میدان الکتریکی یک دوقطبی الکتریکی غیر آرمانی و در شکل (۲-۱۷) خط‌های میدان یک دوقطبی آرمانی نقطه‌ای نشان داده شده‌اند.



شکل ۲-۱۷ خط‌های میدان دوقطبی آرمانی



شکل ۲-۱۶ خط‌های میدان دوقطبی غیر آرمانی

سرانجام این که چون  $\sqrt{3}pr \cos \theta = \sqrt{3} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$  است، با اندک عملیات جبری رابطه‌ی (۲-۴۹) را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \left( -\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{\sqrt{3}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right) \quad (2-55)$$

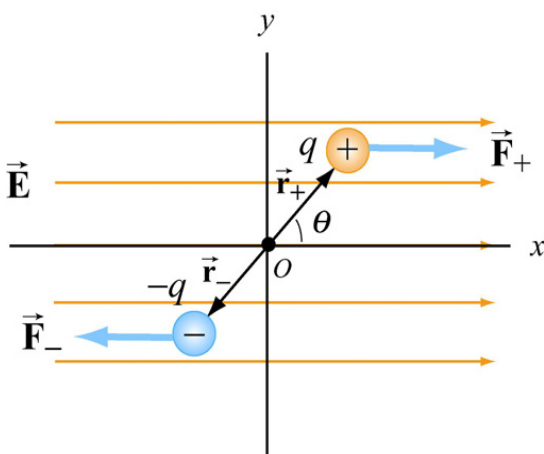
این شکل میدان در سه بعد هم که  $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}$  است، برقرار است.

### ۲-۳-۲ دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی

اگر یک دوقطبی الکتریکی چنان در میدان الکتریکی یکنواخت  $\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{i}}$  قرار گیرد که همانند شکل (۲-۱۸) بردار گشتاور آن بامحور  $x$  زاویه بسازد، دوقطبی الکتریکی چه رفتاری خواهد داشت؟ از شکل (۲-۱۸) پیداست که بردار یکه‌ی در جهت  $\mathbf{p}$  به صورت  $\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}$  است. بنابراین، داریم

$$\mathbf{p} = \sqrt{3}qa(\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) \quad (2-56)$$

نیرویی که از طرف میدان به هر یک از بارهای دوقطبی وارد می‌شود برابر و در جهت خلاف هم اند. بنابراین، نیروی برآیند وارد به دوقطبی  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = 0$  است. اگرچه نیروی کل صفر است، اما چون نیروها جفت اند، میدان الکتریکی به دوقطبی گشتاور غیر صفر وارد می‌کند. این گشتاور نسبت به وسط دوقطبی، نقطه‌ی  $O$ ، عبارت است از



شکل ۲-۱۸ دوقطبی الکتریکی در میدان یکنواخت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+ + \mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_- = (a \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + a \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) \times (F_+ \hat{\mathbf{i}}) + (-a \cos \theta \hat{\mathbf{i}} - a \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) \times (-F_- \hat{\mathbf{i}}) \\ &= a \sin \theta F_+ (-\hat{\mathbf{k}}) + a \sin \theta F_- (-\hat{\mathbf{k}}) = \tau a F \sin \theta (-\hat{\mathbf{k}})\end{aligned}\quad (2-57)$$

که در آن از  $F_+ = F_- \equiv F$  استفاده کردیم. جهت گشتاور،  $(-\hat{\mathbf{k}})$ ، به سوی درون صفحه است. این گشتاور دوقطبی الکتریکی را **ساعتگرد** می‌چرخاند و بردار  $\mathbf{p}$  را در جهت میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  قرار می‌دهد. چون  $F = qE$  است، پس اندازه‌ی گشتاور برابر

$$\tau = \tau a (qE) \sin \theta = (\tau a q) E \sin \theta = pE \sin \theta \quad (2-58)$$

است. در نتیجه، رابطه‌ی عمومی گشتاور وارد به دوقطبی الکتریکی واقع در میدان یکنواخت  $\mathbf{E}$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (2-59)$$

بنابراین، دیده می‌شود که ضرب خارجی گشتاور دوقطبی الکتریکی و میدان  $\mathbf{E}$  با گشتاوری که از سوی میدان الکتریکی به دوقطبی وارد می‌شود، برابر است.

### ۳-۳-۲ انرژی پتانسیل دوقطبی الکتریکی

وقتی دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی قرار بگیرد، از سوی میدان به آن گشتاور وارد می‌شود. میدان الکتریکی از طریق گشتاوری که به دوقطبی وارد می‌کند، آن را می‌چرخاند. مقدار کاری که میدان الکتریکی برای چرخاندن دوقطبی الکتریکی به اندازه‌ی زاویه‌ی کوچک  $d\theta$  انجام می‌دهد، عبارت است از

$$dW = -\tau d\theta = -pE \sin \theta d\theta \quad (2-60)$$

علامت منها به این معنی است که گشتاور با هرگونه افزایش  $\theta$  مخالفت می‌کند. پس، کار کل میدان الکتریکی برای چرخاندن دوقطبی از زاویه‌ی  $\theta_0$  به زاویه‌ی  $\theta$  برابر است با

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} (-pE \sin \theta) d\theta = pE (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (2-61)$$

بنابراین، وقتی  $\cos \theta > \cos \theta_0$  باشد، کار میدان الکتریکی مثبت است. تغییر انرژی پتانسیل،  $\Delta U$ ، دوقطبی برابر است با منهای کار میدان الکتریکی:

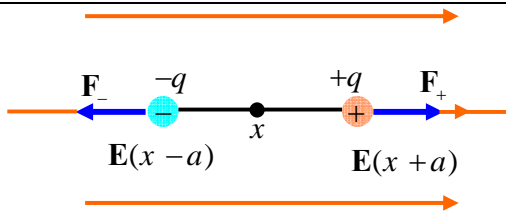
$$\Delta U = U - U_0 = -W = -pE (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (2-62)$$

که در آن  $U_0 = -pE \cos \theta_0$  انرژی پتانسیل اولیه‌ی دوقطبی در نقطه‌ی مرجع است. نقطه‌ی مرجع را ما در  $\theta_0 = \pi/2$  انتخاب می‌کنیم تا  $U_0 = 0$  باشد. بنابراین، انرژی پتانسیل دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی

$$U = -pE \cos \theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (2-63)$$

است. وقتی انرژی پتانسیل سامانه‌ای کمینه باشد، سامانه در حالت ترازمندی پایدار است. برای دوقطبی این وضعیت هنگامی پدید می‌آید که گشتاور دوقطبی،  $\mathbf{p}$ ، و میدان  $\mathbf{E}$  هم جهت باشند تا انرژی پتانسیل کمینه  $U_{\min} = -pE$  شود. اگر  $\mathbf{p}$  و  $\mathbf{E}$  پادمازای باشند، انرژی پتانسیل سامانه بیشینه‌ی مقدار خود،  $U_{\max} = +pE$ ، را خواهد داشت و سامانه ناپایدار خواهد بود. اگر دوقطبی الکتریکی در میدان ناپیکنواخت قرار گیرد، افزون بر گشتاور، به آن نیروی غیر صفر نیز وارد می‌شود و حرکت سامانه آمیزه‌ای از حرکت شتاب‌دار و چرخش خواهد شد.

فرض کنید در شکل (۲-۱۹) میدان الکتریکی  $\mathbf{E}_+$  در مکان بار  $+q$  با میدان الکتریکی  $\mathbf{E}_-$  در مکان بار  $-q$  فرق دارد (یعنی میدان ناپیکنواخت است). فرض کنید دوقطبی الکتریکی بسیار کوچک است. در این صورت میدان‌ها را حول  $x$  می‌توان بسط داد.



شکل ۱۹-۲ نیروی وارد به دوقطبی

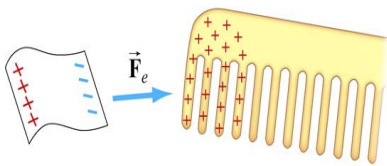
$$E_+(x+a) \approx E(x) + a \left( \frac{dE}{dx} \right), \quad (2-64)$$

$$E_-(x-a) \approx E(x) - a \left( \frac{dE}{dx} \right)$$

و بنابراین، نیروی وارد به دوقطبی به صورت زیر در می آید

$$\mathbf{F}_e = q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 2qa \left( \frac{dE}{dx} \right) \hat{\mathbf{i}} = p \left( \frac{dE}{dx} \right) \hat{\mathbf{i}} \quad (2-65)$$

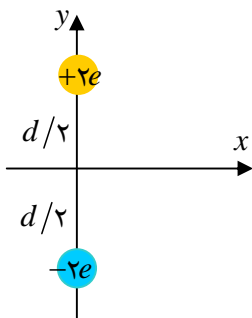
ربایش بین ریزه‌های کاغذ و شانه‌ای که با شانه کردن مو باردار شده است، نمونه‌ای از نیروی غیر صفر است که به دوقطبی وارد می‌شود. کاغذ، گشتاورهای دوقطبی الکتریکی القایی دارد (در



شکل ۲۰-۲ رایش الکتریکی بین شانه و کاغذ

فصل مربوط به دی‌الکتریک‌ها به آن خواهیم پرداخت). شانه باردار است و میدان الکتریکی دارد. اما به خاطر شکل نامنظم شانه، میدان آن یکنواخت نیست (شکل ۲۰-۲).

مثال ۵-۲ دوقطبی در میدان یکنواخت: دوقطبی شکل (۲-۲۱) از دو بار  $q_1 = +2e$  و  $q_2 = -2e$  تشکیل شده است. بارها در روی محور  $y$  و به فاصله‌ی  $d$  از هم قرار دارند.



(الف): جهت و اندازه‌ی گشتاور دوقطبی  $\mathbf{p}$  آن را حساب کنید.

(ب): در میدان الکتریکی ثابت  $\mathbf{E} = (E_x \hat{\mathbf{i}} + E_z \hat{\mathbf{j}})$  به این دوقطبی چه گشتاوری وارد می‌شود؟

انرژی پتانسیل دوقطبی چیست؟

حل: (الف) گشتاور دوقطبی  $\mathbf{p} = q_1 \mathbf{r}_1 + q_2 \mathbf{r}_2$  است که در آن برداری از مبدا به سوی

بار  $q_i$  است. برای این مثال داریم  $\mathbf{r}_1 = (d/2) \hat{\mathbf{j}}$  و  $\mathbf{r}_2 = -(d/2) \hat{\mathbf{j}}$ . بنابراین، گشتاور

دوقطبی عبارت است از

$$\mathbf{p} = (2e)(d/2) \hat{\mathbf{j}} + (-2e)(-d/2) \hat{\mathbf{j}} = 2ed \hat{\mathbf{j}} \quad (2-66)$$

شکل ۲۱-۲ دوقطبی الکتریکی

می‌بینیم که جهت گشتاور دوقطبی  $\hat{\mathbf{j}}$  و از بار منفی به سوی بار مثبت است. اندازه‌ی آن  $|\mathbf{p}| = 2ed$  است. (ب):

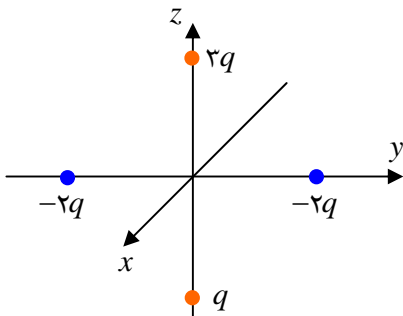
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = (2ed) \hat{\mathbf{j}} \times (E_x \hat{\mathbf{i}} + E_z \hat{\mathbf{j}}) = -2ed E_x \hat{\mathbf{k}} \quad (2-67)$$

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -(2ed) \hat{\mathbf{j}} \cdot (E_x \hat{\mathbf{i}} + E_z \hat{\mathbf{j}}) = -2ed E_z$$

مثال ۶-۲ دوقطبی چهار بار: چهار بار الکتریکی برابر شکل (۲-۲۲) قرار دارند. فاصله‌ی هر بار از مبدا مختصات  $d$  است. گشتاور دوقطبی این آرایه را حساب کنید.

حل:

$$\mathbf{p} = (2qd - qd) \hat{\mathbf{k}} + (-2qd - 2q(-d)) \hat{\mathbf{j}} = 2qd \hat{\mathbf{k}} \quad (2-68)$$



شکل ۲-۲۲ آرایه‌ای با چهار بار

حل:

$$\mathbf{p} = (2qd - qd)\hat{\mathbf{k}} + (-2qd - 2q(-d))\hat{\mathbf{j}} = 2qd\hat{\mathbf{k}} \quad (2-68)$$

مثال ۲-۷ بار الکتریکی و دوقطبی: یک دوقطبی آرمانی (نقطه‌ای) با گشتاور

دوقطبی  $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{k}}$  برابر شکل (۲-۲۳) در مبدا مختصات قرار دارد.

(الف): به بار نقطه‌ای  $q$  جایگزیده در  $(a, 0, 0)$  چه نیرویی وارد می‌شود

(ب): به بار نقطه‌ای  $q$  جایگزیده در  $(0, 0, a)$  چه نیرویی وارد می‌شود؟

حل: (الف) دوقطبی در فضای پیرامون خود میدان الکتریکی تولید می‌کند.

در مختصات قطبی این میدان با رابطه‌ی (۲-۵۰) یا رابطه‌ی (۲-۵۳) داده شده است. زاویه‌ی بین  $\mathbf{p}$  و مکان بار  $q$  در این حالت

$\theta = 90^\circ$  است. از رابطه‌ی (۲-۵۳) دیده می‌شود که

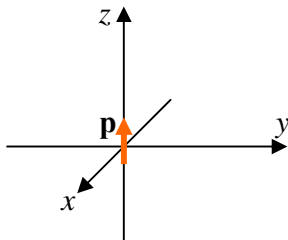
$$\mathbf{E}(r, \theta) = \frac{p}{\epsilon\pi\epsilon_0 a^2} [\gamma \cos 90^\circ \hat{\mathbf{r}} + \sin 90^\circ \hat{\boldsymbol{\theta}}]$$

$$= \frac{p}{\epsilon\pi\epsilon_0 a^2} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{p}{\epsilon\pi\epsilon_0 a^2} (-\hat{\mathbf{k}})$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = q\mathbf{E} = -\frac{pq}{\epsilon\pi\epsilon_0 a^2} \hat{\mathbf{k}} \quad (2-69)$$

(ب): در این حالت  $\theta = 0^\circ$  است و از رابطه‌ی (۲-۵۳) داریم

$$\mathbf{E} = \frac{p}{\epsilon\pi\epsilon_0 a^2} [\gamma \cos 0^\circ \hat{\mathbf{r}} + \sin 0^\circ \hat{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{p}{\epsilon\pi\epsilon_0 a^2} (\gamma \hat{\mathbf{r}}) = \frac{\gamma p}{\epsilon\pi\epsilon_0 a^2} \hat{\mathbf{k}} \quad (2-70)$$



شکل ۲-۲۳ دوقطبی آرمانی در مبدا

#### ۲-۴ توزیع پیوسته بار

تعریف ما از میدان الکتریکی، رابطه‌ی (۲-۱۰) بر حسب بارهای چشمه‌ای نقطه‌ای و گسسته‌ی  $qi$  بود. ولی بارهای گسسته‌ی نقطه‌ای تنها آرایه‌ی باری نیستند. بیشتر وقت‌ها با توزیع پیوسته بار الکتریکی در یک ناحیه از فضا روبرو خواهیم شد. چگونه

می‌توان میدان حاصل از چنین توزیع پیوسته بار الکتریکی را حساب کرد؟ توجه کنید که قانون کولمب و اصل برنهی تنها

ابزارهای محاسباتی اند که در دسترس ماست و می‌دانیم که قانون کولمب تنها برای بارهای نقطه‌ای - و گسسته - درست و قابل استفاده است نه برای بار پیوسته.

**نام‌گذاری:** اگر بار به طور پیوسته و در یک بعد (بر روی یک خط یا خم) توزیع شده باشد آن را **توزیع بار خطی** می‌گوییم

شکل (۲-۲۴ ب). چگالی توزیع بار خطی مقدار بار موجود در واحد طول است. آن را با حرف یونانی  $\lambda$  نشان خواهیم داد.

اگر بار در سطح یک رویه توزیع شود آنگاه **توزیع بار سطحی** داریم. چگالی بار سطحی مقدار بار موجود در واحد سطح

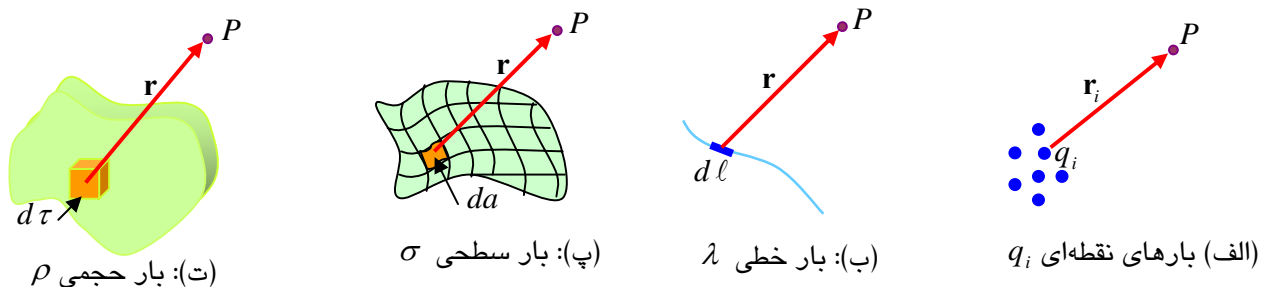
است. آن را با حرف  $\sigma$  نشان خواهیم داد. (شکل ۲-۲۴ پ)

اگر بار در حجم توزیع شده باشد آن را **توزیع بار حجمی** می‌نامیم. چگالی بار حجمی مقدار بار موجود در واحد حجم است و

با حرف  $\rho$  نشان خواهیم داد. (شکل ۲-۲۴ ت)

برای این‌که بتوانیم قانون کولمب را برای توزیع پیوسته بار بکار ببریم، آن را به اجزاء بسیار ریز تقسیم می‌کنیم و هر جزء را

همانند یک بار نقطه‌ای در نظر می‌گیریم. در شکل (۲-۲۴) جزء بار  $dq$  برای هر یک از توزیع‌های بالا نشان داده شده است. اگر هر جزء بار را  $dq$  بنامیم، آنگاه برای توزیع بارهای نقطه‌ای شکل (۲-۲۴ الف)، برای توزیع بار خطی شکل (۲-۲۴ ب)، برای توزیع بار سطحی شکل (۲-۲۴ پ)، و برای توزیع حجمی بار در شکل (۲-۲۴ ت)  $dq = \lambda d\ell$ ،  $dq = \sigma da$ ،  $dq = \rho d\tau$  خواهند بود که در آنها به ترتیب،  $d\ell$  جزء طول،  $da$  جزء سطح و  $d\tau$  جزء حجم اند.



چگالی بار خطی در حدی که  $d\ell$  در مقایسه با طول خم و فاصله‌اش تا نقطه‌ی میدان بسیار کوچک باشد به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\lambda(\mathbf{r}') = \frac{dq}{d\ell} \quad (۲-۷۱)$$

که در آن  $\mathbf{r}'$  بردار مکان جزء بار  $dq$  نسبت به مبدا مختصات است. در سامانه‌ی یکاهای SI یکای  $\lambda$  کولمب بر متر (C/m) است. بار کل روی خم  $L$  را می‌توان به صورت انتگرال نوشت

$$Q = \int_L \lambda(\mathbf{r}') d\ell' \quad (۲-۷۲)$$

به همین ترتیب می‌توان چگالی بار سطحی را تعریف کرد. در حدی که جزء سطح  $da$  بسیار کوچک است داریم

$$\sigma(\mathbf{r}') = \frac{dq}{da} \quad (۲-۷۳)$$

در سامانه‌ی یکاهای SI یکای  $\sigma$  کولمب بر مترمربع (C/m<sup>2</sup>) است. بار کل موجود در سطح  $S$  عبارت است از

$$Q = \iint_S \sigma(\mathbf{r}') da \quad (۲-۷۴)$$

و سرانجام، چگالی بار حجمی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho(\mathbf{r}') = \frac{dq}{d\tau} \quad (۲-۷۵)$$

یکای  $\rho$  در سامانه‌ی یکاهای SI کولمب بر مترمکعب (C/m<sup>3</sup>) است. بار موجود در حجم  $V$  برابر است با

$$Q = \iiint_V \rho(\mathbf{r}') d\tau \quad (۲-۷۶)$$

چگالی توزیع بار،  $\lambda$ ،  $\sigma$  و  $\rho$  تابع مکان اند و در حالت کلی مقدار ثابتی نیستند. اگر چگالی توزیع بار به مکان بستگی نداشته باشد، توزیع بار را **توزیع یکنواخت** می‌نامیم

توجه کنید که از این پس، همواره انتگرال‌های دوگانه و سه‌گانه را با یک علامت انتگرال نشان خواهیم داد.

اینک می‌توانیم قانون کولمب را برای توزیع پیوسته‌ی بار هم تعمیم دهیم. کافی است در رابطه‌ی (۲-۱۰) علامت جمع روی بارهای نقطه‌ای را به علامت جمع پیوسته یا انتگرال تبدیل کنیم و به جای  $q_i$  از  $dq$  مربوط به توزیع بار استفاده کنیم. بنابراین،

$$\sum_{i=1}^n q_i \sim \int_L \lambda d\ell \sim \int_S \sigma da \sim \int_V \rho d\tau \quad (2-77)$$

انتگرال‌ها روی خم  $\ell$ ، سطح  $S$  و حجم  $V$  گرفته می‌شوند که شامل توزیع بار خطی، توزیع بار سطحی و توزیع بار حجمی اند. پس، میدان حاصل از یک توزیع بار خطی با چگالی بار  $\lambda$  در نقطه‌ی  $P$  عبارت است از

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \lambda d\ell \quad (2-78)$$

و برای توزیع بارهای سطحی داریم

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \sigma da \quad (2-79)$$

و سرانجام، میدان یک توزیع بار حجمی با چگالی  $\rho$  در نقطه‌ی  $P$  با انتگرال زیر داده می‌شود

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \rho d\tau \quad (2-80)$$

به معنی  $r$  در این رابطه‌ها توجه کنید.  $r$  در رابطه‌های (۲-۷۸) - (۲-۸۰) فاصله‌ی جزء بار (یعنی فاصله از  $d\ell$ ،  $da$  و  $d\tau$  در شکل (۲-۲۴)) تا نقطه‌ی  $P$  است و از یک جزء به جزء دیگر تغییر می‌کند. اگر مختصات جزء بار یا چشمه  $(x', y', z')$  و مختصات نقطه‌ی  $P = (x, y, z)$  باشند، آنگاه در دستگاه مختصات کارتری داریم

$$\mathbf{r} = (x - x')\hat{\mathbf{i}} + (y - y')\hat{\mathbf{j}} + (z - z')\hat{\mathbf{k}} \quad (2-81)$$

و اندازه‌ی آن،  $r$ ، برابر

$$r = \left[ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2} \quad (2-82)$$

است. بردار یکه‌ی  $\hat{\mathbf{r}}$  عبارت است از  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ .

بنابراین، میدان حاصل از توزیع بار حجمی  $\rho$  در نقطه  $P = (x, y, z)$  عبارت است از

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(x - x')\hat{\mathbf{i}} + (y - y')\hat{\mathbf{j}} + (z - z')\hat{\mathbf{k}}}{\left[ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{3/2}} \rho(x', y', z') dx' dy' dz' \quad (2-83)$$

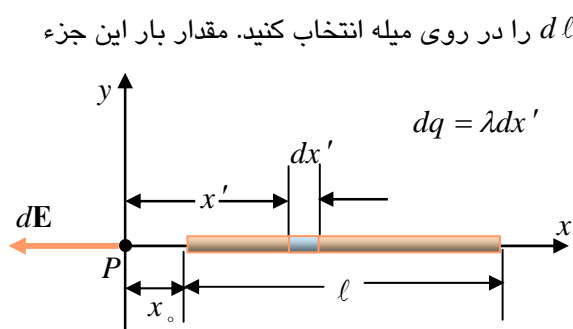
توزیع بار  $\rho$  فقط تابع مکان بار است و انتگرال‌گیری روی فضای است که شامل بار است. بنابراین، در رابطه‌ی (۲-۸۳) داریم  $d\tau = dx' dy' dz'$ . در این رابطه و نیز در رابطه‌های (۲-۷۹) - (۲-۸۰) در واقع انتگرال‌ها چندگانه (سه گانه و دوگانه) اند، اما برای سادگی آنها را با یک علامت انتگرال نشان دادیم.

**نکته‌ی ۱:** در معادله‌های (۲-۷۸) - (۲-۸۰) نقطه‌ی  $P(x, y, z)$  نقطه‌ی ثابتی است، اما متغیرهای انتگرال‌گیری،  $x', y', z'$ ، در تمام فضایی که بار وجود دارد تغییر می‌کنند. با این کار سهم همه‌ی اجزاء بار را در میدان الکتریکی جمع می‌کنند. به بیان دیگر، چگالی بار الکتریکی  $\lambda$ ،  $\sigma$  و  $\rho$  توابعی از متغیرهای انتگرال‌گیری اند. برای مثال  $\rho = \rho(x', y', z')$  است. جهت بردار یکه‌ی  $\hat{\mathbf{r}}$  از  $(x', y', z')$  به  $(x, y, z)$  است. ♣

**نکته‌ی ۲:** در همسایگی یک بار نقطه‌ای میدان الکتریکی به صورت  $1/r^2$  رفتار می‌کند و با نزدیک شدن به بار نقطه‌ای ( $r \rightarrow 0$ )

بینهایت می‌شود. در نتیجه، میدان الکتریکی در مکان بار نقطه‌ای بی‌معنی می‌شود. به هر حال، چشمه‌ی فیزیکی تولید کننده‌ی میدان تمرکز بار الکتریکی در حجم صفر نیست، بلکه توزیعی در حجم محدود است. بنابراین، تکنیکی ریاضی را در زبان بار نقطه‌ای نادیده خواهیم گرفت. میدان حاصل از توزیع پیوسته، مانند  $\rho(x', y', z')$ ، که در جایی بینهایت نیست، در دسر تکنیکی هم ندارد. می‌توان آن را در معادله‌ی (۲-۸۰) به کار برد و میدان را در هر نقطه‌ای در درون توزیع بار حساب کرد. انتگرال در  $r = 0$  بینهایت نمی‌شود، چون در این حد، جزء حجم در صورت کسر با  $r^2 dr$  متناسب است. به بیان دیگر، اگر  $\rho$  در همه‌جا متناهی باشد، میدان هم در همه‌جا، حتی در درون و در مرزهای توزیع بار، متناهی خواهد بود. ♣

**مثال ۲-۸** میدان الکتریکی در روی محور یک میله‌ی راست: بار مثبت  $Q$  به طور یکنواخت بر روی میله‌ای به طول  $l$  توزیع شده است. چگالی بار  $\lambda$  است. میله برابر شکل (۲-۲۵) روی محور  $x$  قرار دارد. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی  $P$  به فاصله‌ی  $x_0$  از یک انتهای میله حساب کنید.



شکل ۲-۲۵ میدان میله در راستای آن

**حل:** چگالی بار خطی یکنواخت و برابر  $\lambda = Q/l$  است. جزء طول  $dx' = dl$  را در روی میله انتخاب کنید. مقدار بار این جزء طول  $dq = \lambda dx'$  است. چون بار میله مثبت است، جهت میدان این جزء بار در نقطه‌ی  $P$  به سوی  $-\hat{i}$  است. جهت بردار یکه از چشمه به نقطه‌ی  $P$  عبارت است از  $\hat{r} = -\hat{i}$ . بنابراین، میدان جزء بار  $dq$  در نقطه‌ی  $P$  برابر است با

$$dE = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2} (-\hat{i})$$

$$= -\frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q dx'}{l x'^2} \hat{i} \quad (2-84)$$

با انتگرال گرفتن بر روی همه‌ی طول میله (جایی که بار وجود دارد)، میدان کل در نقطه‌ی  $P$  به دست می‌آید (این انتگرال‌گیری کار برد اصل برنهی است).

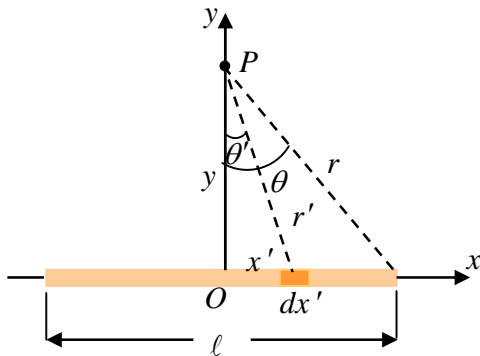
$$\mathbf{E} = \int dE = -\frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \int_{x_0}^{x_0+l} \frac{dx'}{x'^2} \hat{i} = -\frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0+l} \right) \hat{i} = -\frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x_0(l+x_0)} \hat{i} \quad (2-85)$$

**حالت حدی:** اگر نقطه‌ی  $P$  در فاصله‌ی بسیار دور از انتهای میله باشد،  $x_0 \gg l$ ، باشد، در مخرج رابطه‌ی بالا از  $l$  در برابر  $x_0$  می‌توان چشم پوشی کرد. رابطه‌ی (۲-۸۵) به تقریب به صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{E} \approx -\frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x_0^2} \hat{i} \quad (2-86)$$

این نتیجه دور از انتظار نیست؛ چون از فاصله‌ی دور توزیع بار به صورت یک بار نقطه‌ای  $Q$  به نظر می‌رسد و تمایز بین توزیع پیوسته‌ی بار و بار نقطه‌ای از بین می‌رود.

**مثال ۲-۹** میدان الکتریکی میله در راستای عمود بر آن: شکل (۲-۲۶) میله‌ای به طول  $l$  را نشان می‌دهد که بار کل  $Q$  به طور یکنواخت بر روی آن توزیع شده است. چگالی بار خطی،  $\lambda$  است. میدان الکتریکی را در فاصله‌ی  $y$  از وسط میله حساب کنید.



شکل ۲-۲۶ میدان میله در نقطه‌ای روی محور

حل: در اینجا هم روش مثال ۸-۲ را برمی‌گزینیم. مقدار بار موجود در جزء طول  $d\ell = dx'$  برابر  $dq = \lambda dx'$  است. میدان این جزء بار در نقطه‌ی  $P$  عبارت است از

$$dE = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r'^2} \hat{r}' = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \hat{r}' \quad (2-87)$$

با استفاده از تقارنی که در این مسئله وجود دارد و در شکل (۲-۲۷) نشان داده شده است، می‌توان دید که مولفه‌ی  $x$  میدان الکتریکی حذف می‌شود. بنابراین، کافی است که مولفه‌ی  $y$  میدان را حساب کنیم

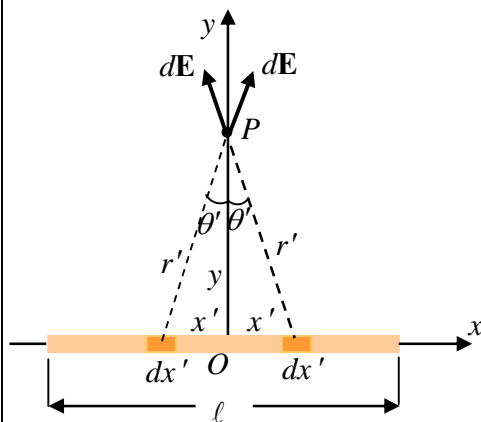
$$dE_y = dE \cos \theta' \quad (2-88)$$

با توجه به شکل می‌بینیم که

$$\cos \theta' = \frac{y}{r'} = \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}} \quad (2-89)$$

بنابراین، داریم

$$dE_y = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \left( \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}} \right) = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda y dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} \quad (2-90)$$



شکل ۲-۲۷ نمایش تقارن توزیع بار

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۲-۹۰) در روی میله، میدان کل به دست می‌آید

$$E_y = \int dE_y = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\lambda y dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda y}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} \quad (2-91)$$

اگر از تغییر متغیر  $x' = y \tan \theta'$  استفاده کنیم. خواهیم داشت:  $dx' = y \sec^2 \theta' d\theta'$  و بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} &= \int_{-\theta}^{\theta} \frac{y \sec^2 \theta'}{y^2 (\sec^2 \theta' + 1)^{3/2}} = \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\sec^2 \theta'}{(\tan^2 \theta' + 1)^{3/2}} = \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\sec^2 \theta'}{\sec^3 \theta'} \\ &= \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sec \theta'} = \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \cos \theta' d\theta' = \frac{2 \sin \theta}{y^2} \end{aligned} \quad (2-92)$$

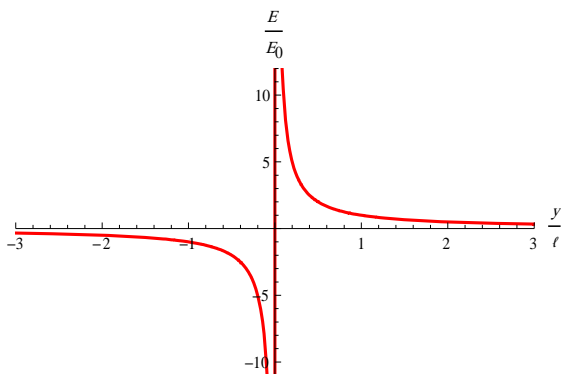
که با جاگذاری در رابطه‌ی (۲-۹۱) به دست می‌آید:

$$E_y = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda \sin \theta}{y} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{y} \frac{l/2}{\sqrt{y^2 + (l/2)^2}} \quad (2-93)$$

حالت‌های حدی: در حدی که فاصله‌ی نقطه‌ی  $P$  از میله بسیار دور است ( $y \gg l$ ) می‌توان در مخرج کسر از  $l/2$  در برابر  $y$  چشم‌پوشی کرد. رابطه‌ی بالا آنگاه به صورت زیر در می‌آید

$$E_y \approx \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{y} \frac{l/2}{y} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{y^2} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q}{y^2} \quad (2-94)$$

در فاصله‌های خیلی دور ( $y \gg l$ ) میله همانند بار نقطه‌ای با مقدار بار  $Q = \lambda l$  به نظر می‌رسد و بنا به قانون کولمب، میدان

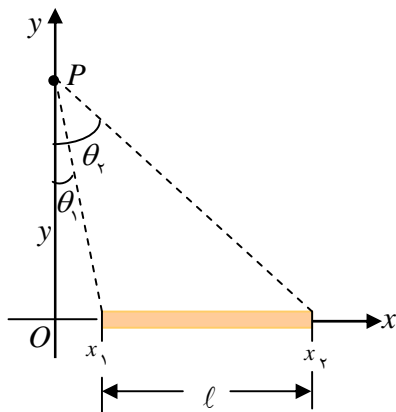


شکل ۲-۲۸ میدان میله بر حسب  $y/l$

بار نقطه‌ای در فاصله‌ی  $y$  همان پاسخ رابطه‌ی (۲-۹۴) است. در حد  $l \gg y$  رابطه‌ی (۲-۹۳) به رابطه‌ی زیر کاهش می‌یابد

$$E_y \approx \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{2\lambda}{y} \quad (2-95)$$

در این حد، سامانه همانند سیم بینهایت دراز است و از تقارن استوانه‌ای برخوردار است. در فصل ۴، نشان خواهیم داد چگونه می‌توان رابطه‌ی (۲-۹۵) را دوباره به دست آورد. در شکل (۲-۲۸) رفتار سرشتی  $E_y/E_0$  با  $(E_0 = Q/(\epsilon \pi \epsilon_0 l^2))$  بر حسب  $y/l$  نشان داده شده است. رابطه‌ی (۲-۹۵) میدان سیم بینهایت دراز با چگالی بار خطی یکنواخت  $\lambda$  است.



شکل ۲-۲۹ میدان میله در نقطه‌ای دور از محور

مثال ۲-۱۰ میدان الکتریکی میله در نقطه‌ای بیرون محور: میله‌ای به طول  $l$  با چگالی بار خطی  $\lambda$  و بار کل  $Q$  روی محور  $x$  قرار دارد. میدان الکتریکی آن را در نقطه‌ی  $P$  به فاصله‌ی  $y$  از محور میله به دست آورید. شکل (۲-۲۹) را ببینید.

حل: این مسئله را هم با همان روش دو مثال پیش می‌توان حل کرد. جزء طول  $dx'$  را برابر شکل (۲-۳۰) در روی میله در نظر بگیرید. بار موجود در این جزء طول  $dq = \lambda dx'$  است. میدان الکتریکی آن در نقطه‌ی  $P$  عبارت است از

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r'^2} \hat{\mathbf{r}}' \quad (2-96)$$

بردار یکه‌ی  $\hat{\mathbf{r}}'$  را می‌توان به صورت  $\hat{\mathbf{r}}' = -\sin \theta' \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta' \hat{\mathbf{j}}$  نوشت. در نتیجه، رابطه‌ی (۲-۹۶) به صورت زیر در می‌آید

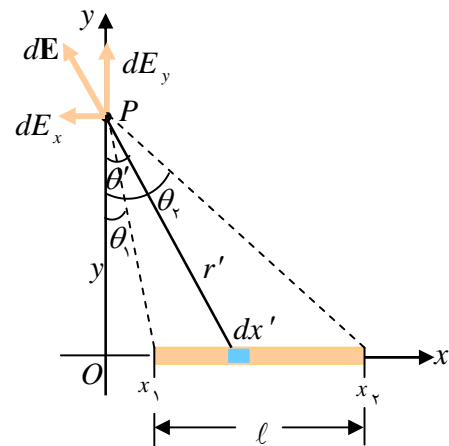
$$d\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{dq}{r'^2} \hat{\mathbf{r}}' = \frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} (-\sin \theta' \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta' \hat{\mathbf{j}}) \quad (2-97)$$

در این مثال تقارن وجود ندارد و در نتیجه، میدان در نقطه‌ی  $P$ ، هم مولفه‌ی  $x$  و هم مولفه‌ی  $y$  دارد. مولفه‌ی  $x$  میدان

$$dE_x = -\frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \sin \theta' \quad (2-98)$$

است. همان گونه که از شکل پیداست  $\sin \theta' = x'/\sqrt{x'^2 + y^2}$  که اگر در رابطه‌ی بالا قرار دهیم، به دست می‌آید

$$dE_x = -\frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \sin \theta' = -\frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = -\frac{1}{\epsilon \pi \epsilon_0} \frac{\lambda x' dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} \quad (2-99)$$



شکل ۲-۳۰ میدان الکتریکی میله در نقطه‌ی  $P$

انتگرال گیری این رابطه از  $x' = x_1$  تا  $x' = x_2$  مولفه  $x$  میدان الکتریکی را به دست می دهد

$$E_x = -\frac{\lambda}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x' dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \int_{x_1}^{x_2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\lambda}{\epsilon\pi\epsilon_0} u^{-1/2} \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{\lambda}{\epsilon\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y^2}} \right] = \frac{\lambda}{\epsilon\pi\epsilon_0 y} \left[ \frac{y}{\sqrt{x_2^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x_1^2 + y^2}} \right] = \frac{\lambda}{\epsilon\pi\epsilon_0 y} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \quad (2-100)$$

به همین ترتیب، مولفه  $y$  میدان ناشی از جزء بار عبارت است از

$$dE_y = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \cos \theta' = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{x'^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda y dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} \quad (2-101)$$

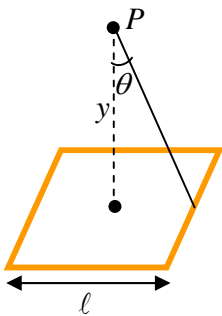
با انتگرال گیری روی تمام طول میله، مولفه  $y$  میدان الکتریکی به دست می آید

$$E_y = \frac{\lambda y}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda y}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta' d\theta' = \frac{\lambda}{\epsilon\pi\epsilon_0 y} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad (2-102)$$

اگر میله یا سیم بینهایت دراز باشد، یعنی  $x_1 \rightarrow -\infty$  و  $x_2 \rightarrow +\infty$ ، چون  $x_i = y \tan \theta_i$  است، برای میله بینهایت دراز هم چنین داریم  $\theta_1 \rightarrow -\pi/2$  و  $\theta_2 \rightarrow +\pi/2$ . در نتیجه، میدان سیم بینهایت دراز با چگالی بار یکنواخت به صورت زیر به دست می آید

$$E_{x,\infty} = 0, \quad E_{y,\infty} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{y} \quad (2-103)$$

که در سازگاری کامل با رابطه (2-95) است. برنامه ی پویانمای میدان الکتریکی میله حالت های مختلف را نشان می دهد.



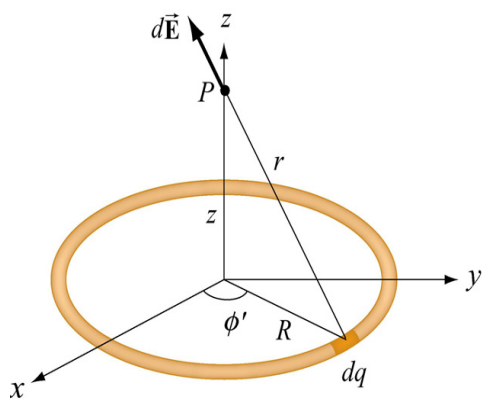
شکل 2-31 حلقه ی مربع

مثال 2-11 میدان یک حلقه مربع: در شکل (2-31) حلقه ای مربع به ضلع  $l$  نشان داده شده است. بار الکتریکی با چگالی خطی  $\lambda$  به طور یکنواخت بر روی حلقه توزیع شده است. میدان الکتریکی حلقه را در نقطه ی  $P$  به فاصله ی  $y$  از مرکز حلقه حساب کنید. حل: این آرایه از چهار سیم محدود تشکیل شده است. در مثال (2-9) میدان سیم محدود را در فاصله ی  $y$  از وسط آن حساب کردیم؛ رابطه ی (2-93) را ببینید. در این مثال فاصله ی نقطه ی  $P$  از وسط یک ضلع برابر  $\sqrt{y^2 + (\ell/2)^2}$  است. بنابراین، میدان یک ضلع در نقطه ی  $P$  با جاگذاری  $y \rightarrow \sqrt{y^2 + (\ell/2)^2}$  در رابطه ی (2-93) به دست می آید. آن را  $E_1$  بنامید.

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \ell}{\sqrt{y^2 + (\ell/2)^2} \sqrt{(y^2 + \ell^2/4) + \ell^2/4}} \quad (2-104)$$

در اینجا چهار ضلع داریم و میدان هر کدام برابر  $E_1$  است. چون مولفه های افقی این چهار میدان یکدیگر را حذف می کنند و میدان برآیند در راستای عمودی خواهد بود. پس، کافی است  $E_1$  را در  $4 \cos \theta$  ضرب کنیم تا میدان حاصل از چهار ضلع به دست آید. چون  $\cos \theta = y / \sqrt{y^2 + \ell^2/4}$  است، پس

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon\lambda\ell y}{(y^2 + \ell^2/\epsilon)\sqrt{y^2 + \ell^2/\epsilon}} \hat{y} \quad (2-105)$$



شکل ۲-۳۲ میدان حلقه‌ای دایره

مثال ۲-۱۲ میدان حلقه‌ای دایره روی محور: حلقه‌ای دایره به شعاع  $R$  و با چگالی بار خطی یکنواخت  $\lambda$  و بار کل  $Q$  برابر شکل (۲-۳۲) در صفحه‌ی  $xy$  قرار دارد. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی  $P$  به فاصله‌ی  $z$  از مرکز حلقه و در روی محور آن حساب کنید.

حل: جزء طول  $d\ell'$  را در روی حلقه در نظر بگیرید. بار موجود در این جزء طول  $dq = \lambda d\ell' = \lambda(R d\phi')$  و میدان آن

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi'}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2-106)$$

است. این آرایه تقارن دارد و به ازای هر جزء طول  $d\ell'$ ، جزء طول متناظری وجود دارد که در شکل (۲-۳۳) نشان داده شده است. با توجه به آن شکل،

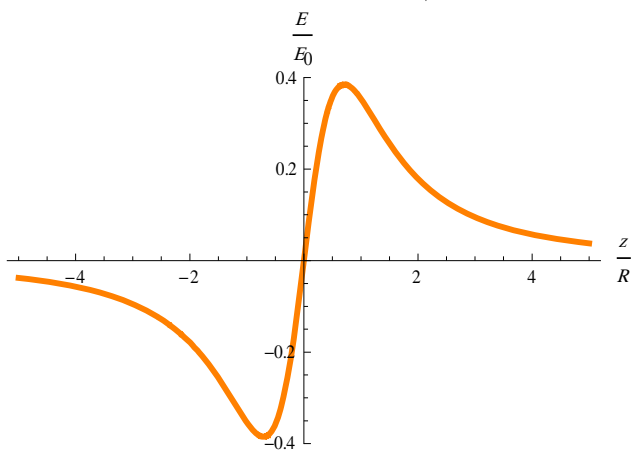
دید می‌شود که مولفه‌های افقی یکدیگر را حذف می‌کنند و میدان در نقطه‌ی  $P$  فقط مولفه‌ی  $z$  دارد.

$$dE_z = dE \cos\theta = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}} z = \frac{\lambda}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Rz d\phi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2-107)$$

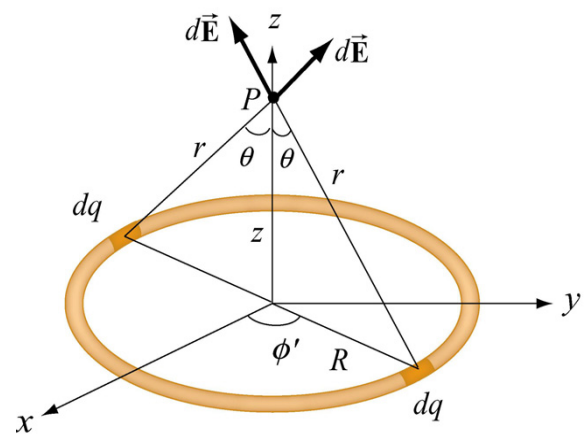
با انتگرال‌گیری روی توزیع بار (روی حلقه) میدان کل حلقه به دست می‌آید:

$$E_z = \frac{\lambda}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{\lambda}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2-108)$$

که در آن  $Q = 2\pi R \lambda$  است. در شکل (۲-۳۴) نمودار میدان برحسب تابعی از  $z$  رسم شده است.

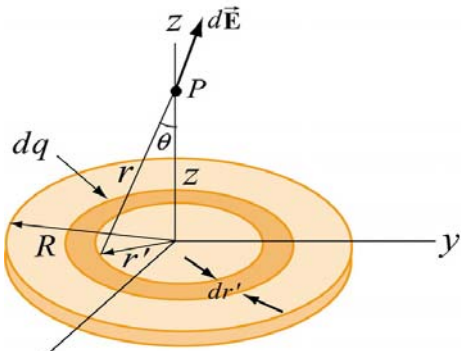


شکل ۲-۳۴ نمودار میدان حلقه برحسب تابعی از  $z$



شکل ۲-۳۳ نمایش تقارن توزیع بار حلقه

در شکل (۲-۳۴) برابر  $E_0 = Q/\epsilon\pi\epsilon_0 R^2$  است. توجه کنید که میدان در مرکز حلقه ( $z = 0$ ) صفر است و همین را هم از تقارن مسئله انتظار داریم.



شکل ۲-۳۵ میدان الکتریکی قرص باردار

مثال ۲-۱۴ میدان قرص باردار: قرصی با چگالی بار سطحی یکنواخت  $\sigma$  و به شعاع  $R$  در صفحه‌ی  $xy$  قرار دارد. بار کل قرص  $Q$  است (شکل ۲-۳۵). میدان الکتریکی را در نقطه‌ی  $P$  به فاصله‌ی  $z$  از مرکز قرص و بر روی محور عمودی آن به دست آورید.

حل: قرص از حلقه‌های هم‌مرکز بسیار زیادی تشکیل شده است. یکی از این حلقه‌ها به شعاع  $r'$  و به ضخامت  $dr'$  در شکل (۲-۳۵) دیده می‌شود. بار این حلقه  $dq = \sigma(2\pi r' dr')$  است که به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. در مثال ۲-۱۳، رابطه‌ی (۲-۱۰۸)، میدان حلقه‌ی با توزیع بار

یکنواخت را در فاصله‌ی  $z$  از مرکز آن به دست آوردیم. با استفاده از این نتیجه، سهم حلقه در تولید میدان قرص را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$dE_z = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{z dq}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{z (2\pi\sigma r' dr')}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2-109)$$

توجه کنید که در مثال ۲-۱۳ توزیع بار خطی و چگالی آن  $\lambda$  بود. در اینجا توزیع بار سطحی است. در واقع چگالی بار "خطی" متناظر در حلقه‌ی به ضخامت  $dr'$  در این مثال عبارت است از  $\lambda = \sigma dr'$ . اگر از رابطه‌ی (۲-۱۰۹) از  $r' = 0$  تا  $r' = R$  انتگرال بگیریم، میدان کل قرص در نقطه‌ی  $P$  به دست می‌آید.

$$E_z = \int dE_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{\epsilon_0} \int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\sigma z}{\epsilon_0} \left[ \frac{-1}{\sqrt{u}} \right]_{z^2}^{R^2+z^2}$$

$$= -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right] = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \right] \quad (2-110)$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

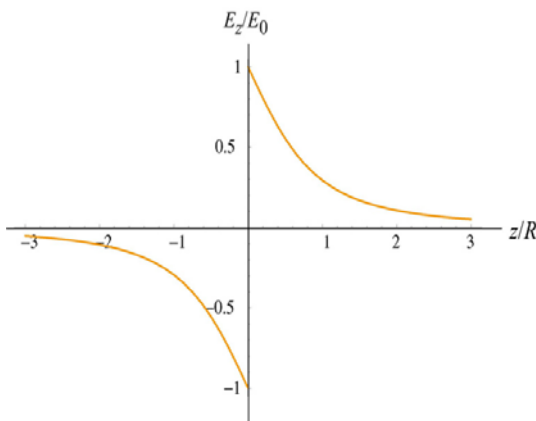
$$E_z = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right], & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ -1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right], & z < 0 \end{cases} \quad (2-111)$$

در شکل (۲-۳۶) تغییرات میدان  $E_z/E_0$  بر حسب تابعی از  $z/R$  رسم شده است ( $E_0 \equiv \sigma/2\epsilon_0$ ).

حالت‌های حدی: ۱- در حد  $z \gg R$  قرص به صورت بار نقطه‌ای با بار کل  $Q$  به نظر می‌رسد که در مرکز قرص قرار دارد. از قانون کولمب می‌دانیم که میدان آن در فاصله‌ی  $z$  به صورت زیر است:

$$E_z = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \quad (2-112)$$

است. بنابراین، اگر محاسبه‌ی ما درست باشد، باید رابطه‌ی (۲-۱۱۱) هم در حد  $z \gg R$  به این نتیجه بیانجامد. برای بازیافت



شکل ۲-۳۶ نمودار میدان قرص باردار یکنواخت

رابطه‌ی (۲-۱۱۲) از رابطه‌ی (۲-۱۱۱)، جمله‌ی دلخ [ ] را بسط تیلور بدهید

$$1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} = 1 - \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + \dots\right) \approx \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} \quad (2-113)$$

بنابراین، رابطه‌ی (۲-۱۱۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\pi R^2}{z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \quad (2-114)$$

که در واقع میدان بار نقطه‌ای در فاصله‌ی  $z$  است.

۲- حد  $R \gg z$ : در این حد، قرص یا یک صفحه‌ی باردار بسیار گسترده است و یا این که نقطه‌ی  $P$  بسیار به سطح قرص نزدیک است. در این حد جمله‌ی دوم داخل [ ] در رابطه‌ی (۲-۱۱۱) صفر می‌شود؛ چون

$$\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/z^2}} \xrightarrow{R^2/z^2 \rightarrow \infty} 0 \quad (2-115)$$

و بنابراین، رابطه‌ی (۲-۱۱۱) به صورت زیر در می‌آید.

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}}, & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}}, & z < 0 \end{cases} \quad (2-116)$$

نمودار میدان در این حالت حدی در شکل (۲-۳۷) نشان داده شده است.

به گسستگی میدان در گذار از سطح توجه کنید. این گسستگی عبارت

است از

$$\Delta E_z = E_{z+} - E_{z-} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2-117)$$

در فصل‌های ۴ و خواهیم دید که مولفه‌ی عمودی میدان الکتریکی در گذار از سطحی با چگالی بار سطحی  $\sigma$  همواره به اندازه‌ی  $\sigma/\epsilon_0$  گسسته است. یعنی میدان درست در بالای سطح باردار و درست در زیر سطح باردار به اندازه‌ی  $\sigma/\epsilon_0$  اختلاف دارند.

**مثال ۱۵-۲ میدان صفحه‌ی مربع با چگالی  $\sigma$ :** میدان الکتریکی صفحه مربع شکل به ضلع  $l$  و توزیع بار سطحی یکنواخت  $\sigma$

را در فاصله‌ی  $z$  از مرکز آن به دست آورید (شکل ۲-۲۸). پاسخ را برای

حالت‌های خاص  $l \rightarrow \infty$  و  $z \gg l$  بیازمائید.

**حل:** درمثال ۲-۱۱ میدان حلقه مربع شکل را در فاصله‌ی  $z$  از مرکز آن به

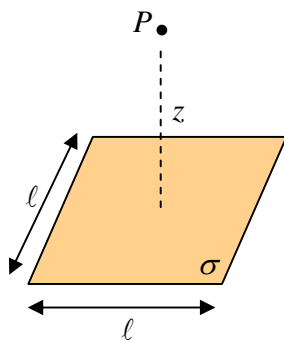
دست آوردیم (نگاه کنید به رابطه‌ی (۲-۱۰۵)). صفحه را همانند شکل (۲-۳۹)

به حلقه‌های مربع شکل به ضخامت  $d\ell/2$  تقسیم کنید، بار موجود در هر یال

حلقه برابر  $dq = \sigma(s d\ell/2) = "s\lambda"$  است. بنابراین، چگالی بارخطی متناظر

آن  $"\lambda" = \sigma d\ell/2$  است. پس، با جاگذاری  $\sigma d\ell/2 \rightarrow \lambda$  و  $y \rightarrow z$  در

رابطه‌ی (۲-۱۰۵)، میدان یک حلقه به دست می‌آید. با انتگرال‌گیری روی  $d\ell$



شکل ۲-۳۸ صفحه‌ی مربع با چگالی بار  $\sigma$

از صفر تا  $l$  میدان صفحه به دست می آید. در نتیجه، برای میدان یک حلقه داریم

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \gamma\sigma z \int_0^l \frac{l dl}{(z^2 + l^2/\epsilon)\sqrt{z^2 + l^2/\epsilon}} \quad (2-118)$$

با تغییر متغیر  $u \equiv l^2/\epsilon$  و رابطه‌ی بالا به صورت زیر در می آید

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \epsilon\sigma z \int_0^{l^2/\epsilon} \frac{du}{(u+z^2)\sqrt{2u+z^2}} \\ &= \frac{\sigma z}{\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\gamma}{z} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{2u+z^2}}{z} \right) \right]_0^{l^2/\epsilon} \\ &= \frac{\gamma\sigma}{\pi\epsilon_0} \left\{ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{z^2 + l^2/\epsilon}}{z} \right) - \tan^{-1}(1) \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\gamma\sigma}{\pi\epsilon_0} \left[ \tan^{-1} \sqrt{1 + \frac{l^2}{2z^2}} - \frac{\pi}{\epsilon} \right] \hat{\mathbf{z}} \quad (2-119)$$

حالت‌های حدی:  $-1$  در حد  $l \rightarrow \infty$  (صفحه بینهایت گسترده):

$$\mathbf{E} = \frac{\gamma\sigma}{\pi\epsilon_0} \left[ \tan^{-1}(\infty) - \pi/\epsilon \right] \hat{\mathbf{z}} = \frac{\gamma\sigma}{\pi\epsilon_0} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\epsilon} \right) \hat{\mathbf{z}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} \quad (2-120)$$

این پاسخی است که در مثال ۱۴-۲ هم برای صفحه‌ی بینهایت گسترده به دست آوردیم.

۲- حد  $z \gg l$ : در این حد، صفحه همانند بار نقطه‌ای  $Q = \sigma l^2$  جایگزیده در مکان مرکز مربع خواهد بود و بنا به قانون کولمب، میدان آن عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \quad (2-121)$$

پس، در این حالت حدی، پاسخ ما در رابطه‌ی (۲-۱۱۹) باید به رابطه‌ی (۲-۱۲۱) کاهش پیدا کند. برای بازیافت آن فرض کنید

$$f(x) \equiv \tan^{-1} \sqrt{1+x} - \frac{\pi}{\epsilon}$$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \dots \quad (2-122)$$

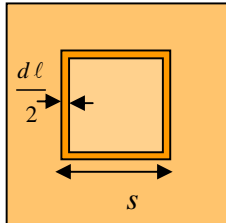
چون  $f(0) = \tan^{-1}(1) - \pi/\epsilon = \pi/\epsilon - \pi/\epsilon = 0$  است، پس

$$f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2(2+x)\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\epsilon}x + (\dots)x^2 + (\dots)x^3 + \dots \quad (2-123)$$

است. بنابراین، و با توجه به این که  $l^2/2z^2 \equiv x \ll 1$  است، خواهیم داشت

$$\mathbf{E} \approx \frac{\gamma\sigma}{\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{l^2}{2z^2} \right) = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\sigma l^2}{z^2} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \quad (2-124)$$

و به این ترتیب رابطه‌ی (۲-۱۲۱) دوباره به دست آمد.



شکل ۳۹-۲ حلقه‌ی جزء بار

مثال ۲-۱۶ میدان پوسته‌ی کروی: میدان الکتریکی رویه کروی به شعاع  $R$  و بار سطحی یکنواخت  $\sigma$  را در فاصله‌ی  $z$  از

مرکز آن حساب کنید (شکل ۲-۴۰). هر دو حالت  $z > R$  (بیرون کره)

و  $z < R$  (درون کره) را در بررسی کنید.

حل: جزء بار  $dq = \sigma da = \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\phi$  را در روی سطح

کره در نظر بگیرید. با توجه به شکل (۲-۴۱) داریم

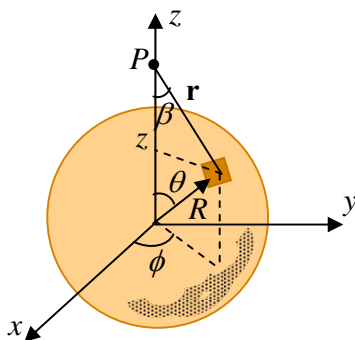
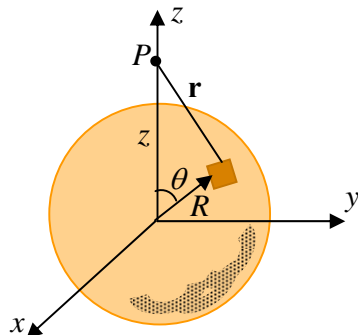
$$r^2 = R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta \quad (2-125)$$

$$\cos \beta = (z - R \cos \theta) / r \quad (2-126)$$

چون مسئله تقارن دارد، روشن است که میدان  $\mathbf{E}$  در جهت محور  $z$

هست. بنابراین:

شکل ۲-۴۰ رویه کروی با توزیع بار سطحی  $\sigma$



شکل ۲-۴۱

$$E_z = \frac{1}{\epsilon_0 \pi} \int \frac{dq}{r^2} \cos \beta =$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \pi} \int \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\phi}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta)^{3/2}} (z - R \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0 \pi} (\pi R^2 \sigma) \int_0^\pi \frac{(z - R \cos \theta) \sin \theta}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta)^{3/2}} d\theta \quad (2-127)$$

در اینجا انتگرال  $\int d\phi = 2\pi$  را حساب و جایگزین کردیم.

با تغییر متغیر  $u = \cos \theta$  و بنابراین،  $du = -\sin \theta d\theta$  خواهیم داشت

$$:(\theta = \pi \Rightarrow u = -1 \text{ و } \theta = 0 \Rightarrow u = 1)$$

خواهیم داشت  $(\theta = \pi \Rightarrow u = -1 \text{ و } \theta = 0 \Rightarrow u = 1)$

$$E_z = \frac{1}{\epsilon_0 \pi} (\pi R^2 \sigma) \int_{-1}^1 \frac{z - Ru}{(R^2 + z^2 - 2Rzu)^{3/2}} du = \frac{1}{\epsilon_0 \pi} (\pi R^2 \sigma) \left[ \frac{1}{z^2} \frac{(zu - R)}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rzu}} \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0 \pi} \frac{\pi R^2 \sigma}{z^2} \left\{ \frac{(z - R)}{|z - R|} - \frac{(-z - R)}{|z - R|} \right\} \quad (2-128)$$

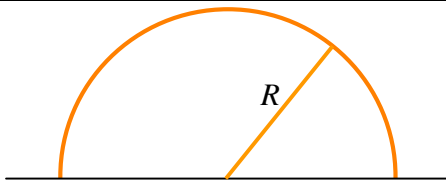
برای  $z > R$  (بیرون کره) داریم  $|z - R| = z - R$  و رابطه‌ی بالا به رابطه‌ی زیر کاهش می‌یابد

$$E_z = \frac{1}{\epsilon_0 \pi} \frac{\pi R^2 \sigma}{z^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \pi} \frac{Q}{z^2} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \pi} \frac{Q}{z^2} \hat{\mathbf{k}} \quad (2-129)$$

که در آن  $Q = \pi R^2 \sigma$  بار کل روی سطح کره است. رابطه‌ی (۲-۱۲۹) پذیرفتنی است و نشان می‌دهد که اگر در بیرون توزیع بار قرار گیرید، توزیع بار را می‌توان به صورت بار نقطه‌ای جایگزیده در مبدا مختصات پنداشت. در این صورت قانون کولمب به همان نتیجه‌ی بالا می‌انجامد.

برای  $z < R$  (درون کره) داریم  $|z - R| = -z + R$  و بنابراین،  $E_z = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = 0$

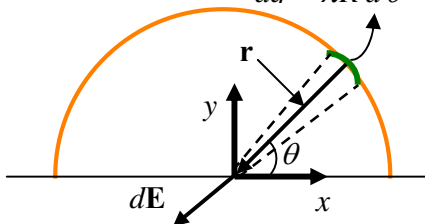
مثال ۲-۱۷ میدان سیم نیم‌دایره: بار کل  $Q$  به طور یکنواخت بر روی سیم نیم دایره (شکل ۲-۴۲) به شعاع  $R$  توزیع شده



شکل ۲-۴۲ سیم نیم‌دایره با چگالی

بار خطی یکنواخت  $\lambda$

$$da = \lambda R d\theta$$



شکل ۲-۴۳ میدان جزء بار dq

است. میدان الکتریکی را در مرکز نیم دایره حساب کنید.

حل: نخست بار جزئی  $dq$  را روی کمان سیم انتخاب کنید. مقدار این بار جزئی  $dq = \lambda R d\theta$  است و در شکل (۲-۴۳) نشان داده شده است. میدان الکتریکی این جزء بار عبارت است از

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{R^2} (-R \cos\theta \hat{\mathbf{i}} - R \sin\theta \hat{\mathbf{j}}) \end{aligned} \quad (2-130)$$

به خاطر تقارن، مولفه  $x$  میدان حذف می‌شود و فقط مولفه  $y$  باقی می‌ماند. بنابراین روی مولفه  $y$  میدان انتگرال می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned} E_y &= \int dE_y \\ &= -\frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\lambda}{R} \sin\theta d\theta = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \cos\theta \Big|_0^\pi = -\frac{2}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \end{aligned} \quad (2-131)$$

و بنابراین داریم

$$\mathbf{E} = E_y \hat{\mathbf{j}} = -\frac{2}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \hat{\mathbf{j}} \quad (2-132)$$

مثال ۲-۱۸ میدان دو کمان روبه‌رو: دو خم هریک به شعاع  $R$  و زاویه  $\theta = \pi/6 = 30^\circ$  مرکزی با چگالی بار خطی  $\lambda$  برابر

شکل (۲-۴۴) در صفحه  $xy$  قرار دارند. جهت و اندازه  $y$  میدان الکتریکی را در روی محوری که از مرکز می‌گذرد و بر صفحه‌ی شکل عمود است (محور  $z$ ) پیدا کنید

حل: نخست توجه کنید که برای یافتن میدان الکتریکی در هر نقطه روی

محور  $z$  باید از قانون کولمب روی هر یک از کمان‌ها انتگرال بگیریم. شکل

انتگرالی قانون کولمب عبارت است از

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2-133)$$

$\hat{\mathbf{r}}$  بردار یکه از جزء بار  $dq$  تا نقطه  $P$  در روی محور  $z$  است.  $r^2$  مربع فاصله‌ی جزء بار  $dq$  تا نقطه  $P$  است. داریم

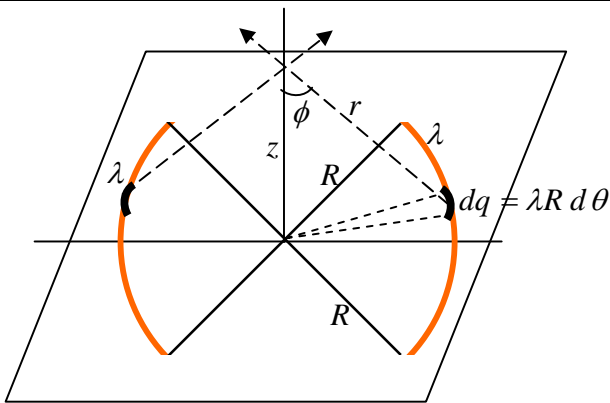
که در شکل (۲-۴۵) نشان داده شده است. اگرچه بردار یکه  $\hat{\mathbf{r}}$  با محور  $z$  زاویه  $\phi$  می‌سازد، اما به علت

تقارن مسئله، مولفه‌های افقی میدان یکدیگر را حذف می‌کنند و میدان فقط مولفه در جهت محور  $z$  دارد. پس، مولفه  $z$  بردار

یکه‌ی  $\hat{\mathbf{r}}$  عبارت است از

$$(\hat{\mathbf{r}})_z = |\hat{\mathbf{r}}| \cos\phi = \cos\phi = \frac{z}{r} = \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \quad (2-134)$$

هم چنین داریم  $r^2 = (R^2 + z^2)$ . با جای گذاری این سه جزء در انتگرال قانون کولمب خواهیم داشت



شکل ۲-۴۵ میدان دو کمان روبرو

$$E_z = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda R d\theta}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \quad (2-135)$$

در این انتگرال همه چیز مقادیر ثابت اند و از زیر انتگرال بیرون می آیند. در نتیجه،

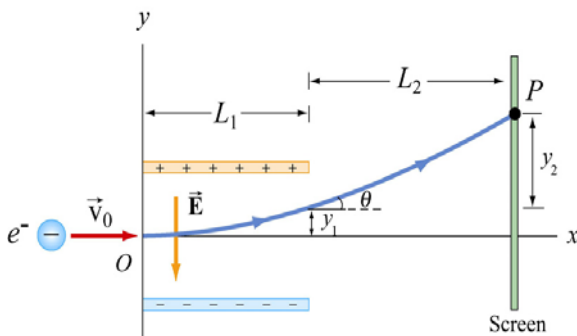
$$E_z = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int d\theta \quad (2-136)$$

اما  $\int d\theta = 2(\pi/2)$  و بنابراین

$$E_z = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\lambda R z}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (2-137)$$

$$= \frac{\lambda R z}{\epsilon\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$$

**مثال ۲-۱۹ حرکت بار در جهت عمود بر میدان:** در فضای بین دو صفحه‌ی باردار با بارهای مخالف و چگالی بار  $\sigma$ ، میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد می‌شود (شکل ۲-۴۶). الکترونی با سرعت اولیه‌ی  $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{i}$  در زمان  $t_0$  به طور افقی و در جهت عمود بر میدان الکتریکی به فضای بین دو صفحه وارد می‌شود. فرض کنید فاصله‌ی صفحه‌ها در مقایسه با ابعاد آنها اندک است



شکل ۲-۴۶ حرکت الکترون در فضای بین دو

صفحه‌ی باردار و عمود بر میدان  $\mathbf{E}$

(الف): در ناحیه‌ی بین صفحه‌ها چه نیرویی به الکترون وارد می‌شود؟

(ب): شتاب الکترون را در این ناحیه حساب کنید.

(پ): در راستای محور  $x$  طول صفحه‌ها  $L_1$  است. در چه زمان

$t_1$  الکترون این ناحیه را ترک می‌کند؟

(ت): سرعت الکترون را در لحظه‌ی  $t_1$  که ناحیه‌ی بین صفحه‌ها

را ترک می‌کند، حساب کنید.

(ج): انحراف عمودی الکترون در لحظه‌ی  $t_1$  چقدر است؟

(چ): در زمان  $t_1$  که الکترون از میدان خارج می‌شود با راستای افق چه زاویه‌ای،  $\theta$ ، می‌سازد.

(ح): پرده‌های در فاصله‌ی  $L_1$  از انتهای سمت راست صفحه‌ها قرار دارد و الکترون در زمان  $t_1$  به آن می‌رسد

و با آن برخورد می‌کند. انحراف عمودی کل الکترون از مسیر افقی را بین زمان‌های  $t_0$  و  $t_1$  حساب کنید.

**حل:** (الف) چون بار الکترون منفی است،  $q = -e$ ، نیروی وارد به الکترون عبارت است از

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = -e\mathbf{E} = (-e)(-E_y \hat{j}) = eE_y \hat{j} \quad (2-138)$$

چون گفته شده است که فاصله‌ی صفحه‌ها در مقایسه با ابعاد آنها اندک است؛ می‌توان هر صفحه را بسیار گسترده پنداشت.

میدان الکتریکی صفحه‌ی گسترده  $\sigma/2\epsilon_0$  است (رابطه‌های (۲-۱۱۷) و (۲-۱۲۰) را ببینید). میدان الکتریکی در فضای بین

صفحه‌ها عبارت است از جمع برداری میدان‌های صفحه‌ی مثبت و منفی:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\hat{j}) + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (\hat{j}) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j} \Rightarrow \mathbf{F}_e = (-e) \left( -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j} \right) = \frac{e\sigma}{\epsilon_0} \hat{j} \quad (2-139)$$

بنابراین، نیروی وارد به الکترون رو به بالاست. توجه کنید که حرکت الکترون همانند حرکت ذره‌ای است که در میدان گرانشی ثابت به طور افقی پرتاب شده است. مسیر ذره سهمی و رو به پایین است. چون الکترون بار منفی دارد، نیروی ثابت وارد به آن رو به بالاست و الکترون روی مسیر سهمی به سوی بالا منجر می‌شود.

(ب): شتاب الکترون عبارت است از

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_e}{m} = \frac{e\sigma}{\epsilon_0 m} \hat{\mathbf{j}} \quad (2-140)$$

همان گونه که دیده می‌شود، جهت آن رو به بالاست.

(پ): زمان لازم برای پیمایش میدان الکتریکی  $t_1 = L_1/v_0$  است. شتاب الکترون در تعیین زمان  $t_1$  نقشی ندارد، چون  $v_0$  مولفه‌ی افقی سرعت است و میدان در آن تاثیر نمی‌گذارد.

(ت): سرعت اولیه‌ی الکترون  $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{i}}$  است. چون شتاب الکترون در جهت  $y$  است، تنها مولفه‌ی  $y$  سرعت تغییر می‌کند. پس، سرعت در زمان  $t_1$  برابر است با

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} = v_0 \hat{\mathbf{i}} + a_y t_1 \hat{\mathbf{j}} = v_0 \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{e\sigma}{\epsilon_0 m} \right) \left( \frac{L_1}{v_0} \right) \hat{\mathbf{j}} = \frac{e\sigma L_1}{\epsilon_0 v_0 m} \hat{\mathbf{j}} \quad (2-141)$$

(ج): از شکل (2-46) دیده می‌شود که الکترون مسافت افقی  $L_1$  را در زمان  $t_1 = L_1/v_0$  می‌پیماید و با انحراف عمودی

$$y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{e\sigma}{\epsilon_0 m} \right) \left( \frac{L_1}{v_0} \right)^2 = \frac{e\sigma L_1^2}{2\epsilon_0 v_0^2 m} \quad (2-142)$$

از آن خارج می‌شود.

(چ): وقتی الکترون در زمان  $t_1$  فضای بین صفحه‌ها را ترک می‌کند، با افق زاویه‌ی  $\theta_1$  می‌سازد که با نسبت مولفه‌های سرعت الکترون تعیین می‌شود.

$$\tan \theta_1 = \frac{v_y}{v_x} = \frac{(e\sigma L_1 / \epsilon_0 v_0 m)}{v_0} = \frac{e\sigma L_1}{m \epsilon_0 v_0^2} \quad (2-143)$$

(ح): پس از ترک فضای بین صفحه‌ها به الکترون دیگر نیرویی وارد نمی‌شود و الکترون مسیر راست خطی را می‌پیماید. انحراف  $y_2$  الکترون عبارت است از

$$y_2 = L_2 \tan \theta_1 = \frac{e\sigma L_2 L_1}{m \epsilon_0 v_0^2} \quad (2-144)$$

و انحراف کل در هنگام رسیدن الکترون به پرده برابر است با

$$y = y_1 + y_2 = \frac{e\sigma L_1^2}{2\epsilon_0 v_0^2 m} + \frac{e\sigma L_2 L_1}{m \epsilon_0 v_0^2} = \frac{e\sigma L_1}{m \epsilon_0 v_0^2} \left( \frac{L_1}{2} + L_2 \right) \quad (2-145)$$

مثال 20-2 آزمایش قطره روغن میلیکان: قطره روغنی به شعاع  $r = 1.6 \times 10^{-7} \text{ m}$  و چگالی  $\rho_m = 8.51 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$  از حالت سکون فرو می‌افتد و وارد ناحیه‌ای با میدان الکتریکی ثابت  $\mathbf{E}$  می‌شود. جهت  $\mathbf{E}$  رو به پایین است. بار  $q$  قطره روغن نامشخص است. اندازه‌ی میدان الکتریکی چنان تنظیم شده است که نیروی گرانشی  $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} = -mg \hat{\mathbf{j}}$  و نیروی الکتریکی  $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$  وارد به قطره روغن یکدیگر را حذف می‌کنند. فرض کنید این وضعیت به ازای  $\mathbf{E} = -E_y \hat{\mathbf{j}} = -(1.92 \times 10^5 \text{ N/C}) \hat{\mathbf{j}}$

فراهم می‌شود.

(الف): جرم قطره روغن را حساب کنید.

(ب): بار قطره روغن را برحسب بار الکتریکی الکترون،  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  به دست آورید.

حل: (الف) جرم قطره روغن از حاصل ضرب چکالی و حجم آن به دست می‌آید

$$M = \rho_m V = \rho_m \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) = (8,01 \times 10^2 \text{ kg/m}^3) \left( \frac{4\pi}{3} \right) (1,6 \times 10^{-6} \text{ m})^3 = 1,07 \times 10^{-14} \text{ kg} \quad (2-146)$$

(ب): نیروهای الکتریکی و گرانشی یکدیگر را حذف می‌کنند. داریم  $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_e = 0$ . چون نیروی گرانش رو به پایین است، نیروی

الکتریکی باید رو به بالا باشد. پس داریم

$$0 = m\mathbf{g} + q\mathbf{E} \Rightarrow m\mathbf{g} = -q\mathbf{E}_y \quad (2-147)$$

چون میدان الکتریکی رو به پایین است، نتیجه می‌گیریم که بار قطره روغن منفی است. توجه کنید که جهت بردار یکه‌ی  $\hat{\mathbf{j}}$  را به

سوی بالا برگزیده‌ایم. بنابراین

$$q = -\frac{mg}{E_y} = \frac{(1,07 \times 10^{-14} \text{ kg})(9,80 \text{ m/s}^2)}{1,92 \times 10^5 \text{ N/C}} = -8,02 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (2-148)$$

چون بار الکترون  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  است، بار قطره روغن برحسب بار الکترون برابر است با

$$N = \frac{q}{e} = \frac{8,02 \times 10^{-19} \text{ C}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 5 \quad (2-149)$$

شاید از این که نتیجه‌ی بالا یک عدد صحیح است، شگفت‌زده شوید. آزمایش قطره روغن میلیکان نخستین گواه تجربی بود که

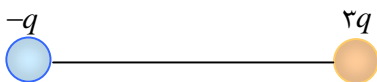
نشان داد بار الکتریکی کوانتیده است. از تحلیل عددی بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم که در قطره روغن 5 الکترون وجود دارد!

### ۲-۵ پرسش‌های کوتاه و چند گزینه‌ای

۲-۱ قانون گرانش نیوتون،  $F_g = Gm_1m_2/r^2$ ، و قانون کولمب،  $F_e = kq_1q_2/r^2$  ( $k \equiv 1/\epsilon_0\pi$ ) را مقایسه کنید و در باره‌ی مانستگی‌ها و ناهمانندی‌های آنها بحث کنید.

۲-۲ آیا خط‌های میدان می‌توانند یکدیگر را قطع کنند؟ توضیح دهید.

۲-۳ دو بار ناهم نام برابر شکل (۲-۴۷) روی یک خط قرار دارند. اندازه‌ی بار سمت راست سه برابر بار سمت چپ است. به جز در بینهایت، در چه مکان دیگری میدان الکتریکی آرایه ممکن است صفر باشد؟



شکل ۲-۴۷ دو بار ناهم نام نابرابر

(الف): بین دو بار (ب): در سمت راست بار  $3q$  (پ): در سمت چپ بار  $-q$   
(ت): میدان الکتریکی فقط در فاصله‌ی بینهایت از بارها صفر است.

۲-۴ برابر شکل (۲-۴۸) بار آزمون مثبتی در نزدیکی میله‌ی باردار مثبتی قرار دارد. اگر اندازه‌ی بار آزمون کاهش پیدا کند و علامتش تغییر کند، جهت و اندازه‌ی میدان الکتریکی چگونه تغییر خواهد کرد؟

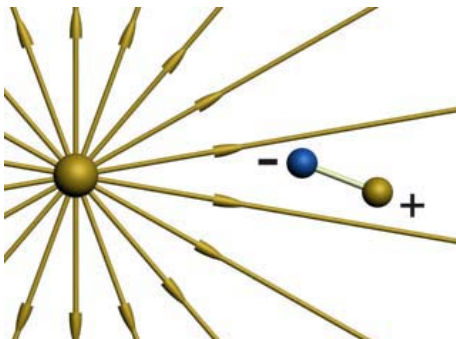


۲-۵ دو بار مساوی و ناهم نام را در دو انتهای یک میله قرار می‌دهیم و به این صورت یک دوقطبی الکتریکی می‌سازیم. دوقطبی می‌تواند حول مرکزش آزادانه بچرخد. دوقطبی را در میدان الکتریکی یکنواخت قرار می‌دهیم. آیا به آن نیرو وارد می‌شود؟ گشتاور چطور؟



شکل ۲-۴۸ بار آزمون در نزدیکی میله

۲-۶ دوقطبی پرسش ۲-۵ با دو بار مساوی و ناهم نام برابر شکل (۲-۴۹) در میدان الکتریکی بار نقطه‌ای ساکنی قرار دارد. کدام گزینه درست است؟



شکل ۲-۴۹ دوقطبی در میدان بار

(الف): دوقطبی ساعتگرد می‌چرخد و به سمت چپ حرکت می‌کند.

(ب): دوقطبی پاد ساعتگرد می‌چرخد و به سمت راست حرکت می‌کند.

(پ): دوقطبی ساعتگرد می‌چرخد و به سمت راست حرکت می‌کند.

(ت): دوقطبی پاد ساعتگرد می‌چرخد و به سمت چپ حرکت می‌کند.

(ج): ساعتگرد می‌چرخد اما حرکت نمی‌کند.

(چ): پاد ساعتگرد می‌چرخد اما حرکت نمی‌کند.

۲-۷ دوقطبی پرسش ۲-۵ با دو بار مساوی و ناهم نام در میدان الکتریکی یکنواخت  $E$  قرار دارد. میدان  $E$  بر محور دوقطبی عمود است. کدام گزاره درباره‌ی دوقطبی درست است؟

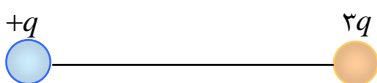
(الف): به دوقطبی نیروی چشمگیری وارد می‌شود اما گشتاور چشمگیری به آن وارد نمی‌شود.

(ب): به دوقطبی نیروی چشمگیری وارد نمی‌شود اما گشتاور چشمگیری به آن وارد می‌شود.

(پ): به دوقطبی هم نیرو و هم گشتاور چشمگیری وارد می‌شود.

(ت): به دوقطبی نه نیرو و نه گشتاور چشمگیری وارد می‌شود.

۲-۸ بارهای  $+q$  و  $+3q$  برابر شکل (۲-۵۰) در روی خط افقی قرار دارند. میدان الکتریکی این آرایه در کجا صفر است؟



شکل ۲-۵۰ دو بار هم نام، اما نابرابر

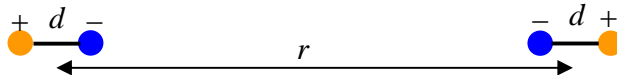
(الف): در سمت چپ بار  $+q$  (ب): در سمت چپ بار  $+3q$

(پ): بین دو بار و نزدیکتر به بار  $+q$  (ت): بین دو بار و نزدیکتر به بار  $+2q$  (ج): فقط در بینهایت.

۲-۹ میدان الکتریکی  $E$  یک دوقطبی الکتریکی را در نظر بگیرید. اگر از فاصله  $r$  که بسیار بزرگتر از ابعاد دوقطبی است و در راستای ثابتی به دو قطبی نگاه کنیم، وابستگی اندازه‌ی میدان،  $E(r)$ ، به  $r$  به صورت زیر است:

(الف):  $E(r) \sim 1/r$  (ب):  $E(r) \sim \sqrt{r^2}$  (پ):  $E(r) \sim \sqrt{r^2}$  (ت):  $E(r) \sim r$  (ج):  $E(r) \sim r^2$

۲-۱۰ دو دوقطبی یکسان شکل (۲-۵۱) را در نظر بگیرید که در روی محور  $x$  و به فاصله  $r$  از هم قرار دارند. طول هر

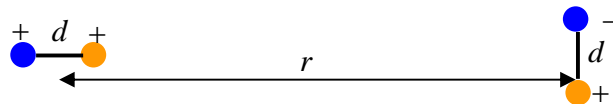


شکل ۲-۵۱ دو دوقطبی در روبروی هم

دوقطبی  $d$  است و  $r \gg d$  است. کدام یک از گزاره های زیر در باره‌ی دوقطبی سمت چپ درست است؟

- (الف): نیرویی به سمت چپ و گشتاوری که می‌کوشد آن را ساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شوند.
- (ب): نیرویی به سمت چپ و گشتاوری که می‌کوشد آن را پادساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شوند.
- (پ): نیرویی به سمت چپ به آن وارد می‌شود اما گشتاور به آن وارد نمی‌شود.
- (ت): نیرویی به سمت راست و گشتاوری که می‌کوشد آن را ساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شوند.
- (ج): نیرویی به سمت راست و گشتاوری که می‌کوشد آن را پادساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شوند.
- (چ): نیرویی به سمت راست به آن وارد می‌شود اما گشتاور به آن وارد نمی‌شود.
- (ح): نیرو وارد نمی‌شود. فقط گشتاوری که می‌کوشد آن را ساعتگرد بچرخاند.
- (خ): نیرو وارد نمی‌شود. فقط گشتاوری که می‌کوشد آن را پادساعتگرد بچرخاند.
- (د): نه نیرو و نه گشتاور به آن وارد می‌شود.

پ-۱۱ دو دوقطبی یکسان به طول  $d$  داریم که برابر شکل (۲-۵۲) به فاصله  $r$  از هم قرار دارند. کدام



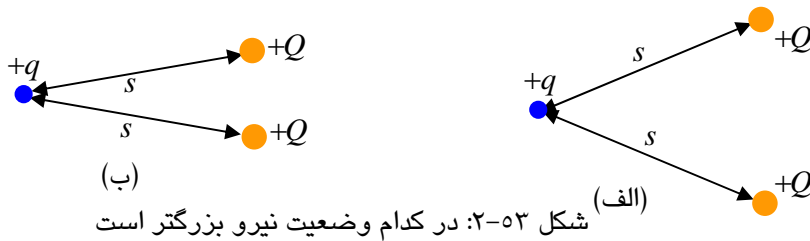
شکل ۲-۵۲ دو دوقطبی عمود برهم

گزاره در باره‌ی دوقطبی سمت چپ درست است؟

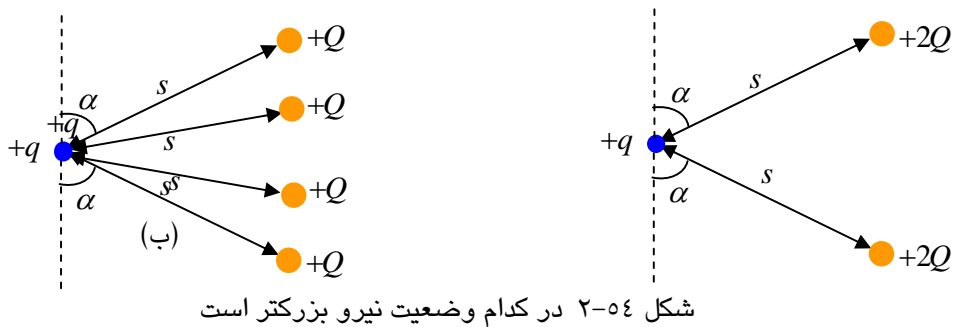
- (الف): نیرویی به سمت بالا و گشتاوری که می‌کوشد آن را ساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شود.
- (ب): نیرویی به سمت بالا و گشتاوری که می‌کوشد آن را پادساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شود.
- (پ): نیرویی به سمت بالا به آن وارد می‌شود اما گشتاور به آن وارد نمی‌شود.
- (ت): نیرویی به سمت پایین و گشتاوری که می‌کوشد آن را ساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شود.
- (ج): نیرویی به سمت پایین و گشتاوری که می‌کوشد آن را پادساعتگرد بچرخاند به دوقطبی وارد می‌شوند.
- (چ): نیرویی به سمت پایین به آن وارد می‌شود اما گشتاور به آن وارد نمی‌شود.
- (ح): نیرو وارد نمی‌شود. فقط گشتاوری که می‌کوشد آن را ساعتگرد بچرخاند.
- (خ): نیرو وارد نمی‌شود. فقط گشتاوری که می‌کوشد آن را پادساعتگرد بچرخاند.

(د): نه نیرو و نه گشتاور به آن وارد می‌شود.

پ-۱۲ در شکل (۲-۵۲) دو وضعیت نشان داده شده‌اند. هر یک از دو بار مثبت  $+Q$  در فاصله‌ی  $s$  از بار مثبت  $+q$  قرار دارند. نیروی کل وارد به بار  $+q$  در وضعیت (الف) بزرگتر است یا در وضعیت (ب)؟



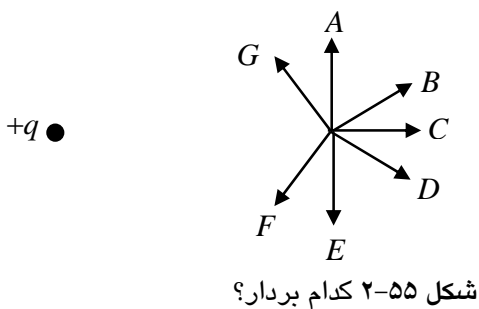
پ-۱۳: در شکل (۲-۵۴) دو وضعیت نشان داده شده‌اند. در وضعیت (الف) دو بار مثبت با اندازه‌های  $+2Q$  به فاصله‌ی  $s$  از بار مثبت  $+q$  قرار دارند. در وضعیت (ب) چهار بار هر کدام به اندازه‌ی  $+Q$  در فاصله‌ی  $s$  از بار مثبت  $+q$  قرار دارند. نیروی کل وارد به بار  $+q$  در وضعیت (الف) بزرگتر است یا در وضعیت (ب)؟



۲-۱۴ در شکل ۲-۵۵ کدام بردار جهت میدان الکتریکی ناشی از دو

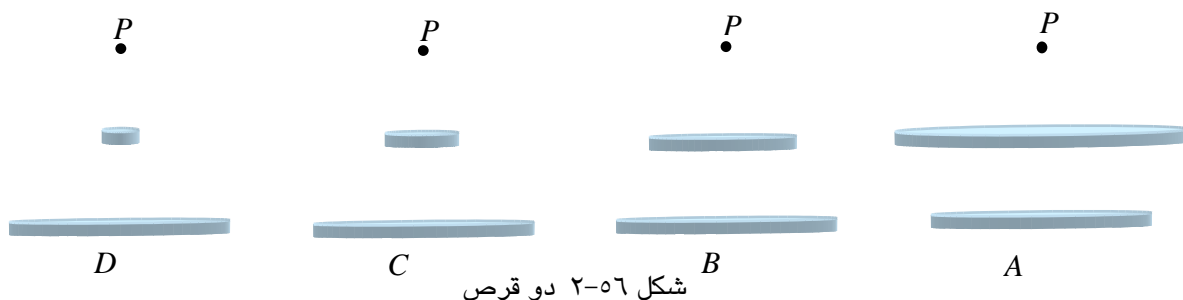
بار  $+q$  و  $-q$  را به درستی نشان می‌دهد؟

- |        |   |
|--------|---|
| (الف): | A |
| (ب):   | B |
| (پ):   | C |
| (ت):   | D |
| (ج):   | E |
| (ح):   | G |



۲-۱۵ در شکل ۲-۵۶ قرص‌هایی نشان داده شده‌اند که ابعاد دیگرشان بر صفحه‌ی کاغذ عمود است. چگالی بار سطحی در همه‌ی قرص‌ها یکنواخت و یکسان است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی  $P$  در نظر بگیرید. در کدام یک از چهار سامانه میدان الکتریکی قرص بالای از میدان الکتریکی قرص پایینی بزرگتر است؟

- |        |   |      |       |      |           |      |                |
|--------|---|------|-------|------|-----------|------|----------------|
| (الف): | A | (ب): | A و B | (پ): | A و B و C | (ت): | هر چهار سامانه |
|--------|---|------|-------|------|-----------|------|----------------|



شکل ۲-۵۶ دو قرص

۲-۱۶ میله‌ای به طول  $l$  بر روی محور  $x$  ها از  $x = -l$  تا  $x = 0$  قرار دارد. بار  $Q$  به طور یکنواخت بر روی میله توزیع شده است. در مکان  $x = l$  یک بار نقطه‌ای با بار  $Q$  قرار دارد. مکان  $x = l/3$  در روی محور  $x$  ها جایی است که میدان میله و بار نقطه‌ای یکدیگر را حذف می‌کنند. جای دیگری هم وجود دارد که میدان الکتریکی در آنجا صفر است (این نقطه در روی میله است) آیا مکان دیگری هم وجود دارد که میدان در آن نقطه صفر است.

(الف): آری، در سمت چپ میله  
 (ب): آری، در سمت راست بار نقطه‌ای  
 (پ): آری در جایی به جز بین میله و بار نقطه‌ای در روی محور  $x$  ها  
 (پ): آری، اما در مکانی که روی محور  $x$  ها نیست. (ج): نه!

### مسئله‌ها

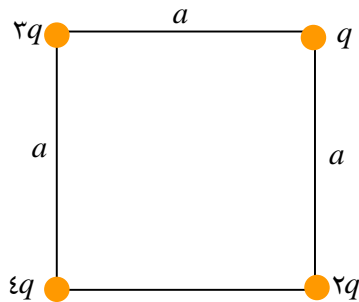
- ۲-۱ اتم هیدروژن، مثال عددی: در مدل کلاسیک اتم هیدروژن الکترون با بار منفی در دایره‌ای به شعاع  $r = 0,53 \times 10^{-10} \text{ m}$  حول پروتون با بار مثبت می‌گردد. اندازه‌ی بار الکترون و پروتون، هر دو،  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  اند.
- (الف): اندازه‌ی نیروی الکتریکی بین الکترون و پروتون را بیابید
- (ب): اندازه‌ی میدان الکتریکی پروتون را در فاصله‌ی  $r$  از آن حساب کنید.
- (پ): نسبت نیروی الکتریکی و گرانشی بین الکترون و پروتون را حساب کنید. آیا پاسخ به فاصله‌ی بین الکترون و پروتون بستگی دارد؟
- (ت): با توجه به پاسخ قسمت (ب) توضیح دهید که چرا نیروهای الکتریکی در حرکت سیاره‌ها نقش ندارند.

۱-۲ سه بار در سه راس مثلث: سه بار برابر شکل (۲-۵۵) در سه راس مثلث متساوی اضلاع به ضلع  $a$  قرار دارند.

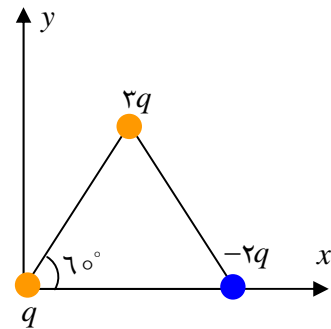
(الف): نیروی کل وارد به بار  $۲q$  را حساب کنید. (ب): نیروی کل وارد به بار  $-۲q$  را حساب کنید.

۱-۳ چهار بار نقطه‌ای: چهار بار نقطه‌ای برابر شکل (۲-۵۶) در چهار گوشه‌ی مربعی به ضلع  $a$  قرار دارند.

(الف): میدان الکتریکی را در مکان بار  $q$  به دست آورید. (ب): چه نیرویی به بار  $۲q$  وارد می‌شود؟



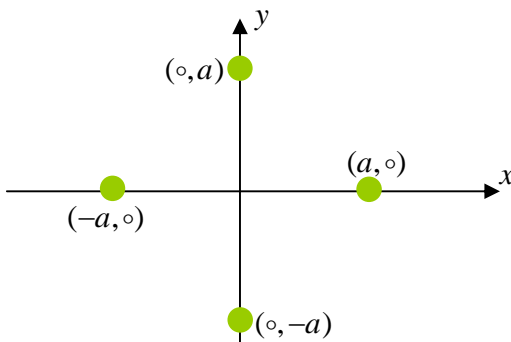
شکل ۲-۵۶ چهار بار در چهار گوشه



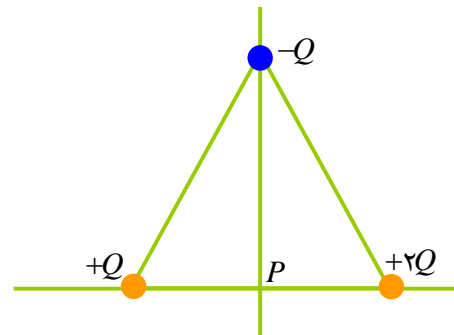
شکل ۲-۵۵ سه بار در سه راس

۲-۴ باز هم سه بار نقطه‌ای: سه بار در سه راس مثلث متساوی اضلاع به ضلع  $a$  قرار دارند.

مولفه‌های  $x$  و  $y$  میدان الکتریکی را در نقطه‌ی  $P$  به دست آورید.



شکل ۲-۵۸ چهار بار در چهار نقطه



شکل ۲-۵۷ سه بار نقطه‌ای در سه گوشه

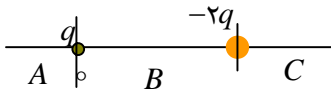
۲-۵ چهار بار: چهار بار مثبت نقطه‌ای و یکسان برابر شکل (۲-۵۸) قرار دارند.

(الف): میدان الکتریکی را در نقطه‌ی  $P = (0, 0, z)$  به دست آورید. اندازه و جهت آن را مشخص کنید.

(ب): چه باری را باید در مبدا مختصات  $(0, 0, 0)$  قرار داد تا میدان در نقطه‌ی  $(0, 0, a)$  صفر شود؟

۲-۶ دو بار: دو بار  $q$  در مبدا مختصات قرار دارد و بار  $-۲q$  در نقطه‌ی  $x = ۱$  است

(شکل ۲-۵۹).



شکل ۲-۵۹ دو بار روی محور  $x$

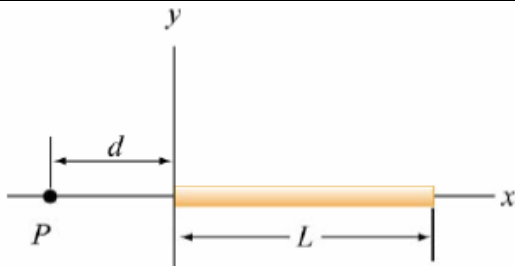
(الف): در چه نقاطی روی محور  $x$  میدان الکتریکی در هر یک از سه ناحیه‌ی  $B, A, C$

و  $C$  صفر است؟ میدان را برحسب  $x$  رسم کنید.

(ب): در چه نقطه‌ای روی محور  $y$  میدان الکتریکی موازی محور  $x$  است؟

۲-۷ میله با چگالی نایکناخت: میله‌ای به طول  $L$  روی محور  $x$  قرار دارد و انتهای چپ آن برابر شکل (۲-۶۰) در مبدا

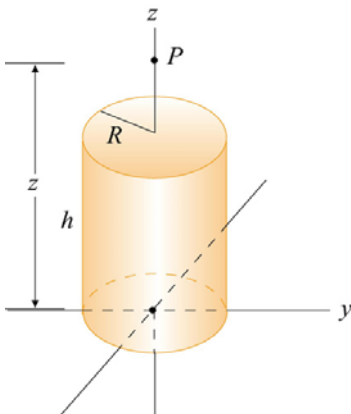
مختصات است. چگالی بار خطی نایکناخت و به صورت  $\lambda = \alpha x$  داده شده است ( $\alpha$  کمیت ثابت و مثبتی است).



شکل ۲-۶۰ میله با بار نایکخواخت

(الف): رابطه‌ای برای بار کل  $Q$  میله بر حسب  $\alpha$  و  $L$  به دست آورید.  
 (ب): جهت و اندازه‌ی میدان الکتریکی را در نقطه‌ی  $P$  حساب کنید.  
 (پ): میدان را در حالت حدی  $d \gg L$  حساب کنید و نشان دهید که رفتار آن همانند رفتار میدان بار نقطه‌ای است.  
 ۲-۸ پوسته‌ی استوانه‌ای: بار کل  $Q$  بر سطح پوسته‌ی استوانه‌ای به شعاع  $R$  و ارتفاع  $h$  به طور یکنواخت توزیع شده است (شکل ۲-۶۱)

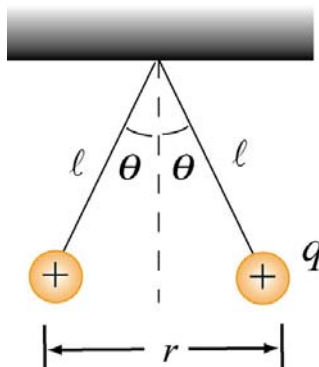
را ببینید.



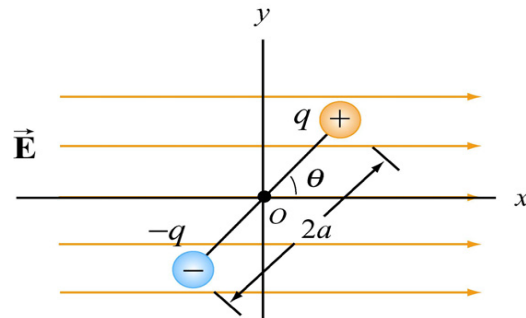
شکل ۲-۶۱ استوانه‌ی باردار

(الف): میدان الکتریکی را در نقطه‌ی  $P$  به فاصله‌ی  $z$  از قاعده‌ی پایینی استوانه به دست آورید. (راهنمایی: استوانه را مجموعه‌ی برهم نهاده‌ی تعداد زیادی حلقه‌ی بار دار فرض کنید.)  
 (ب): اگر به جای پوسته، استوانه توپر باشد و بار به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شود، میدان الکتریکی را در نقطه‌ی  $P$  به دست آورید. (راهنمایی: استوانه را مجموعه‌ی برهم نهاده‌ی تعداد زیادی قرص بار دار فرض کنید.)

۲-۹ دوقطبی الکتریکی: دوقطبی الکتریکی در صفحه‌ی  $xy$  قرار دارد میدان الکتریکی یکنواخت  $\vec{E}$  در جهت  $+x$  برابر شکل (۲-۶۲) به آن اعمال می‌شود و دوقطبی را به اندازه‌ی زاویه اندک  $\theta$  از حالت ترازمندی منحرف می‌کند. فاصله‌ی بارهای دوقطبی از هم  $2a$  و گشتاور لختی دوقطبی  $I$  است. اگر دوقطبی را از این حالت رها کنیم، نشان دهید که جهت‌گیری دوقطبی همانند نوسانگر هماهنگ رفتار می‌کند. بسامد زاویه‌ای نوسان را بیابید.



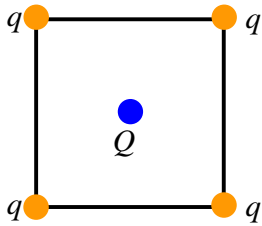
شکل ۲-۶۳ دو توپ باردار



شکل ۲-۶۲ دوقطبی الکتریکی در میدان یکنواخت  $\vec{E}$

۲-۱۰ دو توپ: دو توپ کوچک یکسان با جرم  $m$  و بار  $q$  همانند شکل (۲-۶۳) با دو ریسمان به طول‌های  $l$  از سقف آویزانند. هر توپی با خط قائم زاویه‌ی  $\theta$  می‌سازد. فرض کنید  $\theta$  کوچک و  $\tan \theta \approx \sin \theta$  است. نشان دهید که در وضعیت ترازمندی،

$$\text{فاصله‌ی بین توپ‌ها } r = \left( \frac{q^2 l}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/2} \text{ است.}$$



شکل ۲-۶۴ چهار بار و یک بار

۲-۱۱ چهار بار در چهار گوشه و یک بار در مرکز: چهار ذره برابر شکل (۲-۶۴) در چهار گوشه‌ی مربع ثابت شده‌اند. بار الکتریکی هر ذره  $q$  است. در مرکز مربع بار ناهمنام  $Q$  قرار دارد. برای این که نیروی وارد به هر یک از بارهای موجود در گوشه‌ها صفر شود، اندازه‌ی بار  $Q$  چقدر باید باشد؟ چون با مقداری که برای  $Q$  به دست می‌آورید، سامانه در ترازمندی پایدار است. آیا این ترازمندی پایدار است؟

۲-۱۲ دو میله: دو میله به طول‌های  $L_1$  و  $L_2$  برابر شکل (۲-۶۵) به فاصله‌ی  $L$  از یکدیگر در روی محور  $x$  قرار دارند. چگالی بار خطی میله‌ها به ترتیب  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  است.

(الف): رابطه‌ی برای نیروی بین میله‌ها بیابید (یعنی نیرویی که یک میله به هر میله دیگر وارد می‌کند).

(ب): در حد  $L_1 \gg L_2$  نشان دهید که نیروی وارد به میله‌ی به طول  $L_1$  عبارت است از

$$F = -\frac{1}{\epsilon_0 \pi \epsilon_0} \lambda_1 \lambda_2 \ln \left( 1 + \frac{L_1}{L} \right) \hat{x} \quad (2-100)$$

(پ): نشان دهید که در حد  $L_1, L_2 \gg L$  پاسخ، به نیروی بین دو بار نقطه‌ای  $Q_1$  و  $Q_2$  کاهش می‌یابد. مقادیر  $Q_1$  و  $Q_2$  را حساب کنید.

۲-۱۳ دو نیم دایره و یک بار نقطه‌ای: بار نقطه‌ای  $Q$  در مرکز یک حلقه به شعاع  $a$  قرار دارد. حلقه در صفحه‌ی  $xy$  است. چگالی بار در نیمه‌ی  $x > 0$  حلقه‌ی یکنواخت و برابر  $+\lambda$  و در نیمه‌ی  $x < 0$  برابر  $-\lambda$  است (شکل ۲-۶۶).

الف- به بار نقطه‌ای  $Q$  چه نیرویی وارد می‌شود؟

ب- برای این که بار نقطه‌ای  $Q$  را در امتداد محور  $z$  از مرکز حلقه به بینهایت ببریم، چه مقدار کار لازم است؟

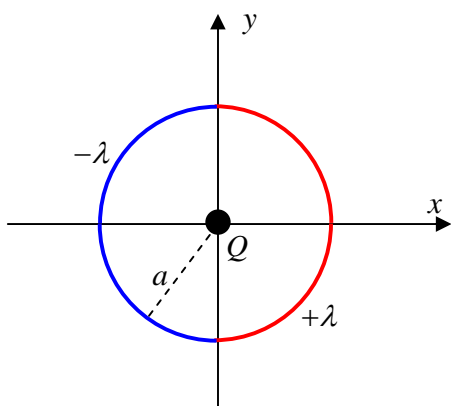
پ- اگر بار نقطه‌ای  $Q$  در مرکز حلقه باشد، در چه نقطه‌ی دیگری می‌توان بار نقطه‌ای دوم برابر و هم‌نام با بار  $Q$  قرار داد که نیروی خالص وارد به بار موجود در مرکز حلقه صفر شود؟ آیا بار نشسته در مرکز حلقه در ترازمندی پایدار است یا نه؟

۲-۱۴ میدان در نقطه‌ای دلخواه: بار  $+q$  در  $x = a$  و بار  $-q$  در  $x = -a$  قرار دارند. میدان الکتریکی  $E$  را در هر نقطه‌ی دلخواهی در صفحه‌ی  $xy$ ، به صورت رابطه‌ی برداری در مختصات کارتزی به دست آورید.

۲-۱۵ نمایش خط‌های میدان: نشان دهید که خط‌های میدان

$$\mathbf{E}(x, y) = E_x(x, y) \hat{i} + E_y(x, y) \hat{j} \quad \text{در صفحه‌ی } xy \text{ با معادله‌ی} \\ dy/dx = E_y(x, y)/E_x(x, y) \text{ به دست می‌آید.}$$

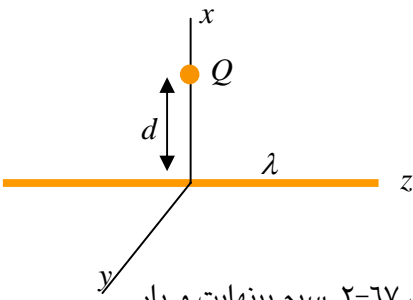
۲-۱۶ حرکت نوسانی بار: بار کل  $Q$  به طور یکنواخت بر روی حلقه‌ای به شعاع  $a$  توزیع شده است. حلقه در صفحه‌ی  $xy$  قرار دارد. بار  $-Q$  چنان مقید شده است که بر روی محور حلقه بلغزد. نشان دهید که برای جابه‌جایی‌های کوچک، بار  $-Q$  حرکت نوسانی هماهنگ ساده خواهد داشت.



شکل ۲-۶۶ دو نیم حلقه و بار نقطه‌ای

۲-۱۷: نیروی قرص باردار: چگالی بار سطحی قرص نازکی  $+ \sigma \text{ C/m}^2$  و شعاع آن  $R$  است. بار  $q$  روی محور تقارن قرص است. نیروی وارد بر بار  $q$  را به صورت تابعی از فاصله  $z$  بار تا صفحه قرص به دست آورید. و در حدهای  $R \ll z$  و  $R \gg z$  نتیجه را بیازمایید.

۲-۱۸: سیم بینهایت دراز و بار نقطه‌ای: بار نقطه‌ای  $Q$  برابر شکل (۲-۱۷) در فاصله  $d$  از سیم بینهایت درازی با چگالی بار خطی یکنواخت  $\lambda$  قرار دارد. رابطه‌ی بین  $Q$  و  $\lambda$  عبارت است از  $Q/\lambda = d$ .

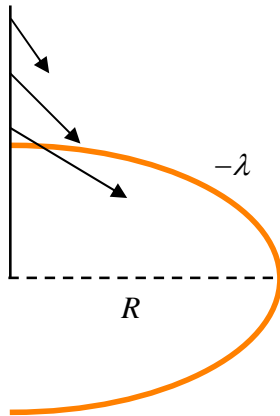


(الف): بردار میدان الکتریکی سامانه را برحسب مختصات  $(x, y, z)$  به دست آورید.

(ب): مختصات  $(x, y, z)$  نقطه‌ای را بیابید که در آن نقطه، یک بار ازمون در ترازمندی است

۲-۱۹: نیروی صفر در گوشه‌ها: در هر گوشه‌ای یک مربع یک بار نقطه‌ای  $q$  قرار دارد. بار دیگر  $-Q$  در مرکز مربع است. مقدار این بار چقدر باید باشد تا نیروی کل وارد به هریک از چهار بارهای  $q$  صفر باشد؟

۲-۲۰: خط‌های میدان همگرا: شکل (۲-۱۸) سیمی به شکل نیم‌دایره‌ی به شعاع  $R$  را نشان می‌دهد که توزیع بار یکنواخت با چگالی  $-\lambda$  دارد. نشان دهید که امتداد خط‌های میدان الکتریکی در همه‌ی نقاط روی محور سیم (خطی که از مرکز نیم‌دایره می‌گذرد و بر سطح آن عمود است) از یک نقطه واقع در صفحه‌ی سیم می‌گذرند. این نقطه‌ی در کجاست؟



۲-۲۱: روشی زیبا: جسم تختی با شکل دلخواه و با توزیع بار سطحی یکنواخت  $\sigma$  داده شده است. میدان الکتریکی آن را در نقطه‌ی  $P$  در بیرون از سطح جسم در نظر بگیرید. جسم با زاویه‌ی فضایی  $\Omega$  از نقطه‌ی  $P$  دیده می‌شود. میدان الکتریکی در نقطه‌ی  $P$  را می‌توان به دو مولفه تجزیه کرد. یک مولفه،  $E_{\perp}$  عمود بر سطح جسم و مولفه‌ی دیگر،  $E_{\parallel}$  موازی سطح جسم:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{E}_{\parallel}$ .

(الف): ثابت کنید که  $E_{\perp} = \sigma \Omega / 4\pi\epsilon_0$  است.

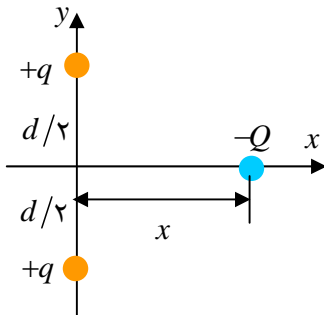
(ب): برای آزمون درستی پاسخ‌تان در بخش (الف)، میدان الکتریکی صفحه‌ی بینهایت گسترده با توزیع بار یکنواخت  $\sigma$  را حساب کنید.

(پ): جعبه‌ی مکعبی شکل با پنج رویه را در نظر بگیرید (یک رویه، در آن، برداشته شده است) چگالی بار رویه‌ها  $\sigma$  است. میدان الکتریکی را در مرکز جعبه حساب کنید (اندازه و جهت میدان را بیابید).

(ت): چهار وجهی منتظم از چهار رویه‌ی با مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته می‌شود. یک چهار وجهی منتظم را در نظر بگیرید که یکی از رویه‌های آن حذف شده است و چگالی بار بر روی سه وجه دیگرش  $\sigma$  است. میدان الکتریکی را در مرکز چهار وجهی بیابید.

۲-۲۲: میدان پوسته‌ی نیم‌کره: پوسته‌ی نیم‌کره با چگالی بار سطحی یکنواخت  $\sigma$  و شعاع  $R$  را در نظر بگیرید و میدان آن را در نقطه‌ای بر روی محور تقارن نیم‌کره و به فاصله‌ی  $z$  از مرکز حساب کنید. ( $z$  می‌تواند هر مقداری بین  $-\infty$  و  $+\infty$  باشد).

۲۳-۲ میدان در قاعده‌ی استوانه: یک استوانه‌ی توخالی به شعاع  $R$  و چگالی بار سطحی یکنواخت  $\sigma$  از یک طرف تا بینهایت ادامه دارد. میدان الکتریکی را در مرکز قاعده‌ی این پوسته‌ی استوانه‌ای نیم‌بینهایت حساب کنید و سپس با استفاده از نتیجه‌ی خود، میدان الکتریکی را در مرکز قاعده‌ی استوانه‌ی توپر نیم‌بینهایت با شعاع  $R$  و چگالی بار حجمی  $\rho$  بیابید.

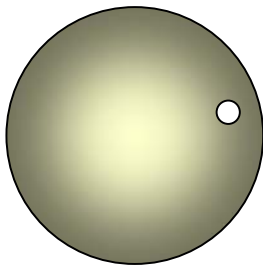


شکل ۲۱-۲ نوسان بار

۲۴-۲ نوسان بار: دو ذره‌ی نقطه‌ای یکسان با بار الکتریکی  $q$  برابر شکل (۶۹-۲) به فاصله‌ی  $d$  از هم در فضا ثابت‌اند. ذره‌ی سوم با بار  $-Q$  و جرم  $m$  از مکان  $x = a$  از حالت سکون رها می‌شود. این ذره مقید است که بر روی محور  $x$  حرکت کند. (الف): نشان دهید که اگر  $a \ll d$  باشد، بار  $-Q$  در روی محور  $x$  حرکت نوسانی ساده خواهد کرد.

(ب): بسامد نوسان آن را بیابید.

۲۵-۲ ساختن صفه از میله‌ها: صفحه‌ی بینهایت گسترده‌ی با بار سطحی یکنواخت را می‌توان همانند بینهایت میله‌ی باردار با توزیع بار یکنواخت پنداشت که کنار هم چیده شده‌اند. با استفاده از این واقعیت که میدان میله‌ی بینهایت دراز  $\lambda/2\pi\epsilon_0 r$  است، بر روی میله‌ها انتگرال بگیرید و نشان دهید که میدان صفحه‌ی باردار بینهایت گسترده با چگالی بار  $\sigma$  برابر  $\sigma/2\epsilon_0$  است.



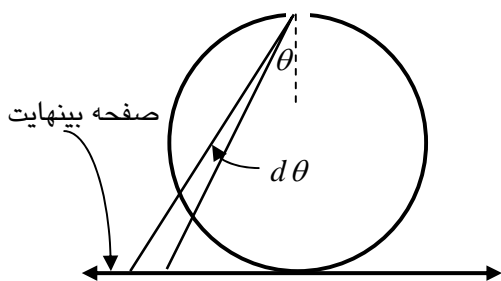
۲۶-۲ پوسته‌ی سوراخ: در شکل (۲۲-۲) یک پوسته‌ی کروی به شعاع  $a$  و با چگالی بار سطحی  $\sigma$  نشان داده شده است. از این پوسته، بخش کوچکی به شکل دایره و به شعاع  $b \ll a$  بریده شده است. اندازه و جهت میدان الکتریکی را در مرکز این سوراخ حساب کنید. این مسئله را با چند روش می‌توان حل کرد. روشی که برای این فصل مناسب است، انتگرال‌گیری مستقیم است.

شکل ۲۲-۲ پوسته با سوراخ

۲۷-۲ میدان در نزدیکی میله: میله‌ای به طول  $2\ell$  با چگالی بار یکنواخت  $\lambda$  را در نظر

بگیرید. نقطه‌ی  $P$  به فاصله‌ی  $\eta\ell$  ( $0 \leq \eta < 1$ ) از مرکز میله و به مقدار جزئی به دور از میله

است. وقتی از این نقطه به میله نگاه شود، همانند یک میله‌ی بینهایت دراز دیده خواهد شد. بنابراین، مولفه‌ی میدان  $\mathbf{E}$  که به میله عمود است  $E_{\perp} = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$  است (این میدان یک سیم بینهایت دراز در فاصله‌ی  $r$  از سیم است. نگاه کنید به معادله‌ی (۹۵-۲)). مولفه‌ی میدان  $\mathbf{E}$  موازی با میله،  $E_{\parallel}$  را در نقطه‌ی  $P$  بیابید. آیا این مولفه در انتهای میله بینهایت است یا مقدار محدودی باقی می‌ماند؟



شکل ۲۳-۵ صفحه‌ی بینهایت و پوسته‌ی سوراخ

۲۸-۲ میدان‌های برابر: پاسخ مسئله‌ی ۲۷-۳ این است که میدان در مرکز سوراخ برابر  $\sigma/2\epsilon_0$  است. با توجه به معادله‌ی (۹۵-۲) این هم‌چنین میدان یک صفحه‌ی تخت بینهایت گسترده با چگالی بار سطحی  $\sigma$  است. یعنی در مرکز سوراخ در شکل (۲۳-۲) میدان حاصل از پوسته منهای قرص سوراخ با میدان صفحه‌ی بینهایت گسترده یکی است (صفحه تخت افقی را می‌توان در هر ارتفاعی در نظر گرفت). برابری این دو میدان را ثابت کنید. برای این کار نشان

دهید که حلقه‌های متناظر با زاویه‌ی  $\theta$  و پهنای زاویه‌ای  $d\theta$  در روی پوسته و در صفحه، میدان‌های یکسانی را در بالای پوسته

تولید می کنند.