

۱۰ چشمه‌ی میدان مغناطیسی

پیش‌گفتار جابه‌جایی بارهای الکتریکی جریان الکتریکی به وجود می‌آورد. جریان‌های الکتریکی میدان‌های مغناطیسی تولید می‌کنند. میدان‌های مغناطیسی برآمده از جریان‌های پایا به زمان وابسته نیستند و نظریه‌ای که آن‌ها را توصیف می‌کند مغنوستاتیک* نام دارد. در این فصل به شیوه‌ی محاسبه‌ی میدان‌های مغناطیسی حاصل از جریان‌های پایا خواهیم پرداخت. منظور از جریان پایا، جریانی است که همیشه و همواره برقرار است، اندازه‌ی آن کم یا زیاد نمی‌شود و مسیرش تغییر نمی‌کند. به بیان دیگر، مقدار باری که در واحد زمان از یک نقطه‌ی فضا می‌گذرد، هم اکنون و یک ساعت دیگر و یک سال پیش همگی یکسان است. روشن است که در عمل به راستی جریان پایا وجود ندارد. با وجود این، نظریه‌ای که پرورانده می‌شود، به خوبی از عهده‌ی توصیف جریان‌هایی برمی‌آید که در هر ثانیه ۶۰ بار تغییر می‌کند. بنابراین، تا هنگامی که افت و خیزهای جریان‌ها باشند، این نظریه در واقع تقریب خوبی از واقعیت است.

توجه کنید که حرکت یک بار نقطه‌ای نمی‌تواند جریان پایا به وجود بیاورد، چون در یک لحظه از نقطه‌ای می‌گذرد و در آن نقطه جریانی به وجود می‌آورد، اما در لحظه‌ای بعدی، دیگر در آن نقطه جریان وجود ندارد.

هنگامی که در سیم رسانا جریان پایا برقرار می‌شود، مقدار جریان، I ، باید در تمام طول سیم یکسان باشد، اگر چنین نباشد،

بارهای الکتریکی باید در جایی انباشته شوند؛ در چنین حالتی نمی‌توان برای مدت نامحدودی جریان را در سیم برقرار نگه

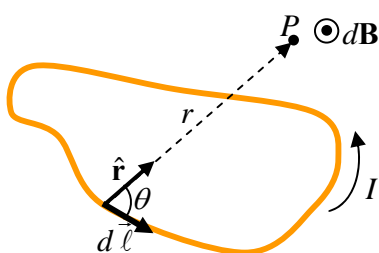
داشت. پس در مغنوستاتیک چگالی بار الکتریکی مستقل از زمان و $\partial\rho/\partial t = 0$ است و معادله‌ی پیوستگی، رابطه‌ی (۸۶-۹)،

به صورت زیر در می‌آید

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (10-1)$$

۱۰-۱ میدان مغناطیسی جریان پایا: قانون بیو-ساوار[◇]

سیم رسانای شکل (۱۰-۱) را در نظر بگیرید. از این سیم جریان پایای I می‌گذرد. هر جزء $d\vec{\ell}$ سیم یک چشمه‌ی جریان



کوچک است و در نقطه‌ی P میدان جزئی $d\mathbf{B}$ ایجاد می‌کند. با جمع این میدان‌های

جزئی، می‌توان میدانی را که جریان I در نقطه‌ی P به وجود می‌آورد حساب کرد. هر

جزء سیم را می‌توان یک کمیت برداری پنداشت که مقدارش با طول جزء سیم برابر و

جهتش همسو با جهت جریان در آن نقطه است. بنابراین، چشمه‌ی جریان جزئی $d\mathbf{I}$ را

می‌توان به صورت $d\mathbf{I} \equiv I d\vec{\ell}$ تعریف کرد.

قانون بیو-ساوار رابطه‌ی بین چشمه‌ی جریان و جزء میدان را به دست می‌دهد. ما

بدون این که بکوشیم این قانون را ثابت کنیم، آن را به صورت یک اصل (مانند قانون

کولمب) می‌پذیریم. قانون بیو-ساوار به صورت زیر بیان می‌شود

$$d\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dl \quad (10-1)$$

* Magnetostatics

◇ Biot-Savart law

در این رابطه، r فاصله‌ی چشمه‌ی جریان تا نقطه‌ی میدان است و $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه در راستای r است. μ_0 تراوایی* فضای تهی است و مقدارش در سامانه‌ی یکاهای SI برابر

$$\mu_0 = \epsilon\pi \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A} = \epsilon\pi \times 10^{-7} \text{ N}/\text{A}^2 \quad (10-2)$$

است. یکای μ_0 به گونه‌ای است که، بنابه قانون نیروی مغناطیسی، میدان مغناطیسی با یکای نیوتون بر متر- آمپر یا تسلا (T) بیان شود. روشن است که $1 \text{ T} = 1 \text{ N}/(\text{A}\cdot\text{m})$ است. مقدار μ_0 یک عدد دقیق است و ثابت تجربی نیست. این عدد برای تعریف آمپر استفاده می‌شود و آمپر هم برای تعریف کولمب به کار می‌رود. یکای میدان مغناطیسی در سامانه‌ی یکاهای CGS گوس نام دارد. $1 \text{ T} = 10^4 \text{ gauss}$ است. میدان مغناطیسی زمین در حدود نیم گوس است. میدان‌های مغناطیسی قوی آزمایشگاهی حدود 10000 گوس اند.

به همانندی چشمگیر بین قانون بنیادی بیو- ساوار، رابطه‌ی (10-1) و قانون کولمب برای بار جزیی dq توجه کنید:

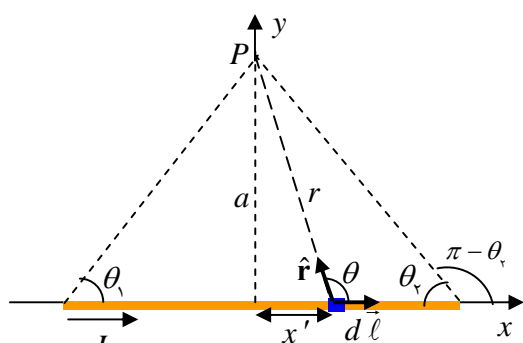
$$d\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (10-3)$$

برای این که میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P حساب کنیم، باید این جزء میدان‌ها را باهم جمع کنیم. این کار لازم می‌دارد که بر روی چشمه‌ی جریان انتگرال بگیریم. خواهیم داشت

$$\mathbf{B}(P) = \int d\mathbf{B} = \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dl = \frac{\mu_0}{\epsilon\pi} I \int \frac{d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (10-4)$$

رابطه‌ی (10-4) یک انتگرال برداری است و بنابراین، در اساس، سه انتگرال برای سه مولفه‌ی بردار \mathbf{B} است. سرشت برداری آن در ضرب خارجی $d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}$ نهفته است. کلید استفاده از قانون بیو- ساوار آموختن محاسبه‌ی این ضرب خارجی و سپس انتگرال‌گیری از آن است. در مثال‌های زیر کاربرد این قانون و روش محاسبه‌ی رابطه‌ی (10-4) برای برخی حالت‌ها نشان داده شده است.

مثال 1-1 میدان مغناطیسی سیم راست محدود: سیم راست و نازکی برابر شکل (10-2) در راستای محور x قرار دارد و جریان پایای I از آن می‌گذرد. میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P به فاصله‌ی a از سیم به دست آورید. (اثرهای رابط‌ها در دو انتهای سیم را نادیده بگیرید)



شکل 2- سیم نازک با جریان I

حل: نخست جزء طول $d\vec{\ell} = +dx' \hat{\mathbf{i}}$ در نظر بگیرید که جریان I از آن می‌گذرد. مختصات مکان این جزء جریان $\mathbf{r}' = x' \hat{\mathbf{i}}$ است. حال نقطه‌ی میدان را در نظر بگیرید. آن را با زیرنویس " P " نشان خواهیم داد. مختصات نقطه‌ی میدان در $(x, y) = (0, a)$ است. بردار مکان آن $\mathbf{r}_p = a \hat{\mathbf{j}}$ است. بنابراین، بردار نسبی بین چشمه‌ی جریان و نقطه‌ی

میدان $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}'$ است. پس، در این مثال $\mathbf{r} = a \hat{\mathbf{j}} - x' \hat{\mathbf{i}}$ است. اندازه‌ی بردار \mathbf{r} ، فاصله‌ی بین چشمه‌ی جریان و نقطه‌ی P ،

برابر $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{a^2 + x'^2}$ است. با توجه به شکل (10-2) بردار یکه $\hat{\mathbf{r}}$ از چشمه تا نقطه‌ی میدان عبارت است از

* permeability

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{a\hat{\mathbf{j}} - x'\hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{a^2 + x'^2}} = \sin(\pi - \theta)\hat{\mathbf{j}} + \cos(\pi - \theta)\hat{\mathbf{i}} = \sin\theta\hat{\mathbf{j}} - \cos\theta\hat{\mathbf{i}} \quad (10-5)$$

حالا می‌توان ضرب خارجی $d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}$ را حساب کرد. داریم

$$d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}} = (+dx'\hat{\mathbf{i}}) \times (\sin\theta\hat{\mathbf{j}} - \cos\theta\hat{\mathbf{i}}) = (dx'\sin\theta)\hat{\mathbf{k}} \quad (10-6)$$

بنابراین، میدان مغناطیسی حاصل از چشمه‌ی جریان جزیی $Id\vec{\ell}$ عبارت است از

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx'\sin\theta}{r^2} \hat{\mathbf{k}} \quad (10-7)$$

که نشان می‌دهد جهت میدان در نقطه‌ی P در راستای $+\hat{\mathbf{k}}$ یا به سوی بیرون از صفحه است. متغیرهای r و θ و x' مستقل از هم نیستند و بهتر است x' و r را برحسب θ بازنویسی کنیم. با توجه به شکل (10-2) داریم:

$$r = \frac{a}{\sin(\pi - \theta)} = a \csc\theta, \quad x' = a \cot(\pi - \theta) = -a \cot(\theta) \Rightarrow dx' = a \csc^2\theta d\theta \quad (10-8)$$

که اگر در رابطه‌ی (10-7) قرار دهیم به دست می‌آید

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(a \csc^2\theta d\theta) \sin\theta}{(a \csc\theta)^2} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin\theta d\theta \hat{\mathbf{k}} \quad (10-9)$$

برای این که میدان مغناطیسی کل را بیابیم، باید از رابطه‌ی (10-9) انتگرال بگیریم. حدود انتگرال باید همه‌ی سیم حامل جریان را دربر داشته باشد. یعنی، زاویه‌ی θ از θ_1 تا $\pi - \theta_2$ تغییر می‌کند. پس:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\pi - \theta_2} \sin\theta d\theta \hat{\mathbf{k}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\cos(\pi - \theta_2) - \cos\theta_1] \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\theta_2 + \cos\theta_1) \hat{\mathbf{k}} \quad (10-10)$$

جمله‌ی اول شامل θ_2 سهم قسمتی از سیم است که در راستای $+x$ محور افقی قرار دارد و جمله‌ی دوم (شامل θ_1) سهم آن بخش از سیم است که در امتداد $-x$ قرار دارد. این دو جمله باهم جمع می‌شوند!

حالت‌های خاص: (۱) اگر نقطه‌ی P روی نیمساز سیم باشد، وضعیت متقارن خواهیم داشت و $\theta_2 = \theta_1$ است. اگر طول سیم

$2L$ باشد، آنگاه $\cos\theta_1 = L/\sqrt{L^2 + a^2}$ است و اندازه‌ی میدان عبارت است از

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}} \quad (10-11)$$

(۲) سیم بینهایت دراز: $L \rightarrow \infty$

در این حالت $(\theta_2, \theta_1) \rightarrow (0, 0)$ میل می‌کنند و از رابطه‌ی (10-10) خواهیم داشت:

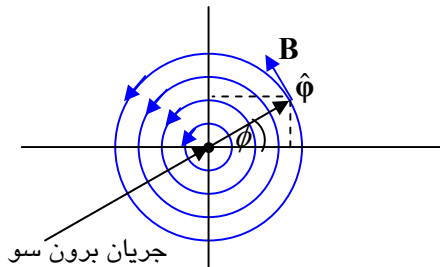
$$\mathbf{B}_\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{\mathbf{k}} \quad (10-12)$$

جهت میدان در نقطه‌ی P بیرون از صفحه است. اگر نقطه‌ی P را در زیر سیم برمی‌گزیدیم، جهت میدان \mathbf{B} در آن نقطه به سوی درون صفحه می‌شد. در حد $L \rightarrow \infty$ ، سامانه تقارن استوانه‌ای دارد و خط‌های میدان مغناطیسی همانند شکل (10-3)

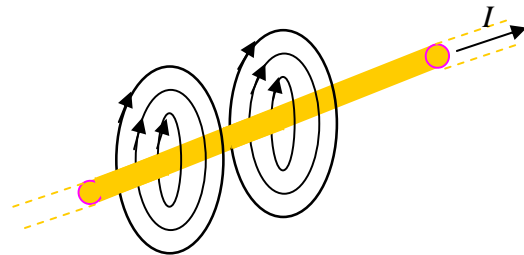
دایره‌ای اند. در حالت کلی و برای سیم دراز، جهت میدان بنا به قاعده‌ی انگشت‌های دست راست، حول سیم می‌چرخد. این

رفتار در شکل (10-4) نشان داده شده است. اگر انگشت شست راست در جهت جریان باشد، چرخش چهار انگشت دیگر دست راست جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.

در چارچوب مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) رابطه‌ی بین بردارهای یک‌به‌صورت $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\phi} = \hat{\mathbf{z}}$ است و اگر جهت جریان در



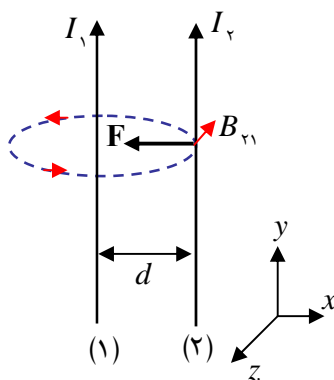
شکل ۴-۱۰ جهت میدان مغناطیسی سیم بینهایت دراز



شکل ۳-۱۰ خط های میدان مغناطیسی سیم بینهایت

راستای $+z$ باشد، بنا به قانون بیو-ساوار، میدان در جهت $\hat{\phi}$ خواهد بود. اینک می توان نیروی ربایش بین دو سیم دراز و موازی را که به فاصله d از هم قرار دارند، حساب کرد.

مثال ۲-۱۰ نیروی ربایش بین دو سیم دراز: از سیم های موازی و دراز (۱) و (۲) در شکل (۱۰-۵) به ترتیب جریان های



شکل ۵-۱۰ دو سیم موازی

همسوی I_1 و I_2 می گذرد. فاصله سیم ها از هم d است. نیروی ربایش در واحد طول را بین دو سیم حساب کنید.

حل: میدان سیم (۱) در جایگاه سیم (۲) از رابطه (۱۰-۱۲) به دست می آید و برابر $\mathbf{B}_{21} = \mu_0 I_1 (-\hat{\mathbf{k}}) / 2\pi a$ است. بنا به قاعده انگشت های دست راست، جهت این میدان در مکان سیم (۲) به سوی درون صفحه است. از قانون نیروی مغناطیسی، رابطه ی (۹-۲۳) داریم

$$d\mathbf{F}_{21} = I_2 d\vec{\ell}_2 \times \mathbf{B}_{21} = I_2 d\ell_2 \hat{\mathbf{j}} \times \mathbf{B}_{21} = (I_2 d\ell_2 \hat{\mathbf{j}}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} (-\hat{\mathbf{k}})$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2 d\ell_2}{2\pi a} \hat{\mathbf{i}} \quad (10-13)$$

اگر از این رابطه انتگرال بگیریم نیروی کل وارد به سیم (۲) به دست می آید

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \hat{\mathbf{i}} \int d\ell_2 \quad (10-14)$$

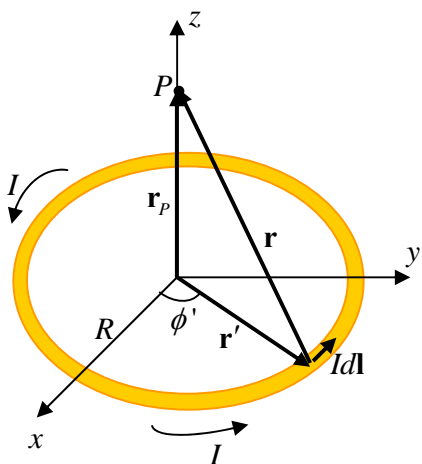
این نیرویی کل است که سیم (۱) به سیم (۲) وارد می کند. چون سیم (۲) بینهایت دراز است انتگرال بالا بینهایت می شود. اما نیرو در واحد طول عبارت است از

$$\mathbf{f} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{I_1 I_2}{a} \right) \hat{\mathbf{i}} \quad (10-15)$$

اگر جریان های I_1 و I_2 در خلاف جهت هم بودند، نیرو رانشی می شد که با توصیف کیفی فصل پیش سازگار است.

مثال ۳-۱۰ میدان مغناطیسی حلقه ی جریان: حلقه ی دایره ای به شعاع R برابر شکل (۶) در صفحه xy قرار دارد و جریان پادساعتگرد I از آن می گذرد.

(الف): میدان مغناطیسی را در نقطه P به فاصله z از مرکز حلقه و در روی محور آن حساب کنید.



شکل (۶) حلقه ی جریان

(ب): اگر یک دوقطبی مغناطیسی $\mu = \mu_z \hat{k}$ را در نقطه ی P قرار دهید چه نیرویی به آن وارد می شود. آیا این نیرو ربایشی است یا رانشی؟ اگر جهت دوقطبی را وارون کنید، یعنی $\mu = -\mu_z \hat{k}$ ، چه پیش می آید؟
 حل: این مثال دیگری از کاربرد قانون بیو-ساوار است. در این جا هم از روش حل مثال ۱۰-۱ پیروی خواهیم کرد. یعنی نخست بردارهای مکان نقطه ی چشمه و نقطه ی میدان را به دست می آوریم و با استفاده از آنها بردارنسبی بین این دو نقطه را حساب می کنیم. سپس، با استفاده از آن بردار یکه ی \hat{r} را می یابیم تا بتوانیم ضرب خارجی را در قانون بیو-ساوار حساب کنیم. سرانجام با انتگرال گیری روی همه ی جزء جریان ها، میدان مغناطیسی به دست می آید.

(الف): ۱- یافتن بردار مکان چشمه: با توجه به شکل (۶-۱۰) جزء جریان $Id\vec{\ell}$ در مختصات کارتزی در $\mathbf{r}' = R(\cos\phi' \hat{i} + \sin\phi' \hat{j})$ قرار دارد. می توان نوشت

$$Id\vec{\ell} = I \left(\frac{d\mathbf{r}'}{d\phi'} \right) d\phi' = IR d\phi' (-\sin\phi' \hat{i} + \cos\phi' \hat{j}) \quad (۱۰-۱۶)$$

۲- یافتن بردار مکان نقطه ی میدان: چون نقطه ی میدان P در روی محور حلقه قرار دارد و فاصله اش از مرکز حلقه z است، بردار مکان آن $\mathbf{r}_p = z\hat{k}$ است.

۳- بردار نسبی $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}'$: بردار مکان نسبی عبارت است از

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}' = -R \cos\phi' \hat{i} - R \sin\phi' \hat{j} + z \hat{k} \quad (۱۰-۱۷)$$

و مقدار آن، یعنی فاصله ی بین چشمه ی جریان و نقطه ی P ، برابر

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(-R \cos\phi')^2 + (-R \sin\phi')^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + z^2} \quad (۱۰-۱۸)$$

است. پس، بردار یکه از $Id\vec{\ell}$ به نقطه ی P را می توان به صورت زیر نوشت

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} (-R \cos\phi' \hat{i} - R \sin\phi' \hat{j} + z \hat{k}) \quad (۱۰-۱۹)$$

اینک می توانیم ضرب خارجی $Id\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}$ را حساب کنیم. از رابطه های (۱۰-۱۶) و (۱۰-۱۹) داریم

$$\begin{aligned} Id\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}} &= \frac{IR}{\sqrt{R^2 + z^2}} d\phi' (-\sin\phi' \hat{i} + \cos\phi' \hat{j}) \times [-R \cos\phi' \hat{i} - R \sin\phi' \hat{j} + z \hat{k}] \\ &= \frac{IR}{\sqrt{R^2 + z^2}} d\phi' [z \cos\phi' \hat{i} + z \sin\phi' \hat{j} + R \hat{k}] \end{aligned} \quad (۱۰-۲۰)$$

بنابراین، قانون بیو-ساوار به صورت زیر درمی آید

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{\epsilon\pi r^3} = \frac{\mu_0 IR}{\epsilon\pi \sqrt{R^2+z^2}} \frac{z \cos\phi' \hat{\mathbf{i}} + z \sin\phi' \hat{\mathbf{j}} + R \hat{\mathbf{k}}}{r^2} d\phi'$$

$$= \frac{\mu_0 IR}{\epsilon\pi} \frac{z \cos\phi' \hat{\mathbf{i}} + z \sin\phi' \hat{\mathbf{j}} + R \hat{\mathbf{k}}}{(R^2+z^2)^{3/2}} d\phi' \quad (10-21)$$

و سرانجام انتگرال گیری از $d\mathbf{B}$ به دست می دهد

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 IR}{\epsilon\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos\phi' \hat{\mathbf{i}} + z \sin\phi' \hat{\mathbf{j}} + R \hat{\mathbf{k}}}{(R^2+z^2)^{3/2}} d\phi' \quad (10-22)$$

همان گونه که می بینید، انتگرال بالا سه انتگرال است. هر یک از آنها یکی از مولفه های میدان را به دست می دهد. به سادگی می توان دید که مولفه های B_x و B_y صفر اند:

$$B_x = \frac{\mu_0 IRz}{\epsilon\pi (R^2+z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' = \frac{\mu_0 IRz}{\epsilon\pi (R^2+z^2)^{3/2}} \sin\phi' \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$B_y = \frac{\mu_0 IRz}{\epsilon\pi (R^2+z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin\phi' d\phi' = -\frac{\mu_0 IRz}{\epsilon\pi (R^2+z^2)^{3/2}} \cos\phi' \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (10-23)$$

و مولفه B_z عبارت است از

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{\epsilon\pi} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{\mu_0 I}{\epsilon\pi} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} 2\pi = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \quad (10-24)$$

پس، مولفه ی میدان در راستای محور تقارن، B_z ، تنها مولفه ی غیر صفر میدان است. با استفاده از تقارن هم می توانستیم به این نتیجه برسیم. رفتار B_z/B_0 به صورت تابعی از z/R در شکل (۷-۱۰) نشان داده شده است که $B_0 = \mu_0 I/2R$ اندازه ی میدان در $z=0$ است.

(ب): اگر دو قطبی مغناطیسی $\mu = \mu_z \hat{\mathbf{k}}$ را در نقطه ی P قرار دهیم، به خاطر نایکنواخت بودن میدان مغناطیسی به دو قطبی نیرو وارد می شود. بنابه رابطه ی (۶۰-۹) این نیرو عبارت است از

$$\mathbf{F}_B = \nabla(\mu \cdot \mathbf{B}) = \nabla(\mu_z B_z) = \mu_z \left(\frac{dB_z}{dz} \right) \hat{\mathbf{k}} \quad (10-25)$$

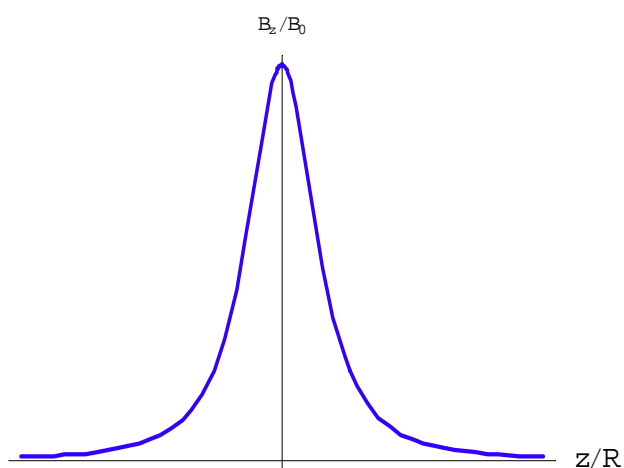
با مستق گیری از رابطه ی (۱۰-۲۴) نسبت به z و جاگذاری در رابطه ی (۱۰-۲۵) به دست می آید:

$$\mathbf{F}_B = -\frac{3\mu_z \mu_0 IR^2 z}{2(R^2+z^2)^{5/2}} \hat{\mathbf{k}} \quad (10-26)$$

پس، دو قطبی به سوی حلقه ی جریان کشیده می شود. نیرو

ربایشی است. اگر جهت دو قطبی وارون بشود، $\mu = -\mu_z \hat{\mathbf{k}}$

آنگاه نیروی وارد به آن رانشی خواهد شد.



شکل ۷-۱۰ نسبت B_z/B_0 بر حسب z/R

مثال ۴-۱۰ میدان مغناطیسی بار متحرک: جزء جریان بسیار کوچکی را در نظر بگیرید که به شکل استوانه‌ای با سطح قاعده‌ای A و طول $d\ell$ است. فرض کنید در این استوانه n بار الکتریکی در واحد حجم وجود دارد و همه‌ی آنها با سرعت یکسان \mathbf{v} در امتداد محور استوانه حرکت می‌کنند. میدان مغناطیسی را حساب کنید.

حل: جزء جریان مقدار باری است که در واحد زمان از سطح قاعده‌ی استوانه می‌گذرد و برابر

$$I = \frac{nqAd\ell}{dt} = nqA|\mathbf{v}| \quad (۱۰-۲۷)$$

است. تعداد کل بارهای درون استوانه $dN = nAd\ell$ است. با استفاده از قانون بیو-ساوار، رابطه‌ی (۱۰-۱)، می‌توان جزء میدان حاصل از dN بار را به صورت زیر نوشت (به نکته‌ی بعد از رابطه‌ی (۱۰-۲۹) توجه کنید).

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(nqA|\mathbf{v}|)d\bar{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(nAd\ell)q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(dN)q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (۱۰-۲۸)$$

r فاصله‌ی بین بار و نقطه‌ی P میدان است، جایی که میدان در آن نقطه محاسبه می‌شود. جهت بردار یکه $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ از چشمه (بار) به سوی نقطه‌ی P است. بردار طول جزیی $d\bar{\ell}$ موازی سرعت \mathbf{v} تعریف شده است. به ازای یک بار، یعنی $dN = 1$ ، رابطه‌ی (۱۰-۲۸) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} \quad (۱۰-۲۹)$$

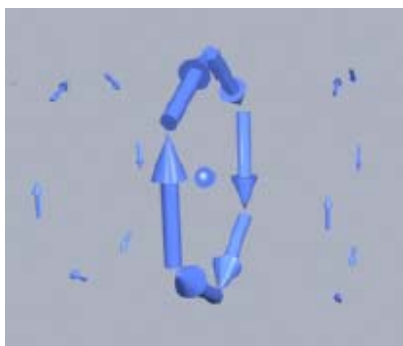
نکته: توجه کنید که قانون بیو-ساوار فقط برای جریان‌های پایا درست است و حرکت بار نقطه‌ای جریان پایا تولید نمی‌کند. بنابراین، رابطه‌ی (۱۰-۲۹) درست نیست. رابطه‌ی (۱۰-۲۹) تنها در حد $v \ll c$ و تحت شرایطی که بتوان از اثر "تاخیری"

چشم پوشید، به تقریب درست است. برای توضیح بیشتر و روش درست حل این مسئله، فصل ۹ را ببینید. ♣

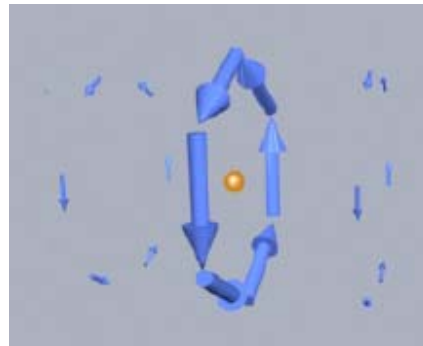
نتیجه‌ی (۱۰-۲۹) را می‌توان برای N بار نقطه‌ای که هر یک با سرعت متفاوت \mathbf{v}_i حرکت می‌کند تعمیم داد. مکان بار i -م را با (x_i, y_i, z_i) نشان دهید و فرض کنید سرعت آن \mathbf{v}_i است. با استفاده از اصل برنشه، می‌توان میدان مغناطیسی آنها را در نقطه‌ی P به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_0}{4\pi} q_i \mathbf{v}_i \times \left[\frac{(x-x_i)\hat{\mathbf{i}} + (y-y_i)\hat{\mathbf{j}} + (z-z_i)\hat{\mathbf{k}}}{[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]^{3/2}} \right] \quad (۱۰-۳۰)$$

در شکل‌های (۱۰-۸) و (۱۰-۹) به ترتیب، میدان مغناطیسی یک بار مثبت و یک بار منفی متحرک نشان داده شده اند



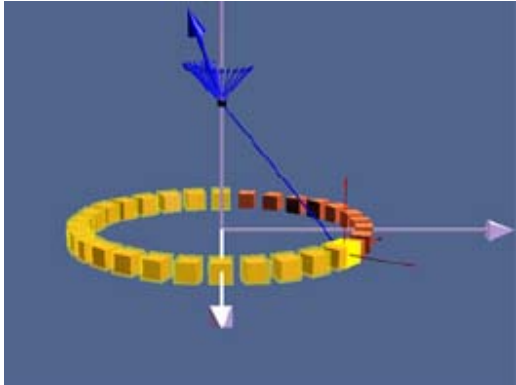
شکل ۹-۱۰ میدان مغناطیسی بار نقطه‌ای منفی



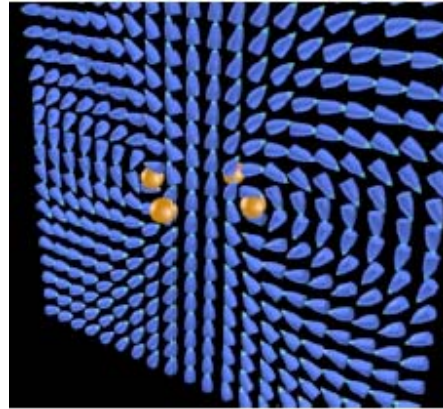
شکل ۸-۱۰ میدان مغناطیسی بار نقطه‌ای مثبت

اگر بخواهیم میدان مغناطیسی چند بار نقطه‌ای را حساب کنیم که با فاصله‌های مساوی روی پیرامون دایره‌ای می‌گردند باید

میدان مغناطیسی هر بار را بنا به رابطه‌ی (۱۰-۲۸) حساب کنیم و سپس آنها را به صورت برداری با هم جمع کنیم. در شکل (۱۰-۱۰) میدان مغناطیسی لحظه‌ای چهار بار الکتریکی نشان داده شده است که روی دایره‌ای می‌گردند. شکل (۱۰-۱۱) نمایش لحظه‌ای از جمع برداری میدان‌های ۳۰ ذره را نشان می‌دهد که روی یک دایره حرکت می‌کنند.



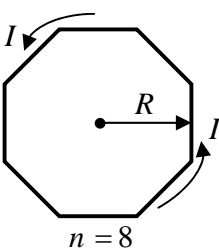
شکل ۱۱-۱۰ جمع برداری لحظه‌ای میدان‌های ۳۰ بار



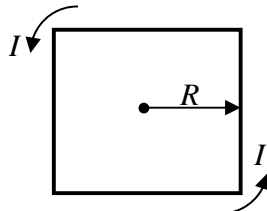
شکل ۱۰-۱۰ میدان مغناطیسی ۴ بار در یک لحظه

مثال ۵-۱۰ میدان مغناطیسی چند ضلعی منتظم* : (الف) میدان مغناطیسی را در مرکز حلقه‌ی مربع شکلی که جریان پایای I از آن می‌گذرد، به دست آورید. فاصله‌ی مرکز مربع تا یک ضلع را همانند شکل (۱۰-۱۲) R فرض کنید.

(ب): میدان را در مرکز یک n ضلعی منتظم با جریان پایای I حساب کنید. فاصله‌ی مرکز n ضلعی تا یک ضلع را R بنامید



$n = 8$



شکل ۱۲-۱۰ میدان چند ضلعی منتظم در مرکز آن

(پ): نشان دهید که در حد $n \rightarrow \infty$ پاسخ شما به میدان یک حلقه‌ی دایره‌ای در مرکز آن، $B_0 = \mu_0 I / 2R$ کاهش می‌یابد.

حل: (الف) از رابطه‌ی (۱۰-۱۰) با $a = R$ و $\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$ استفاده کنید. برای چهار ضلع به دست می‌آید

$$B = \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi R} (\cos 45^\circ + \cos 45^\circ) = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{\pi R}$$

(ب): این بار $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{n}$ و $a = R$ اند. در نتیجه، میدان یک ضلع عبارت است از

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi R} (\cos(\pi/2 - \pi/n) + \cos(\pi/2 - \pi/n)) = \frac{2 \mu_0 I}{\epsilon \pi R} \sin(\pi/n) \quad (10-31)$$

و میدان حاصل از n ضلع برابر nB_1 است. در نتیجه، داریم

$$\Rightarrow B = nB_1 = \frac{n \mu_0 I}{\epsilon \pi R} \sin(\pi/n) \quad (10-32)$$

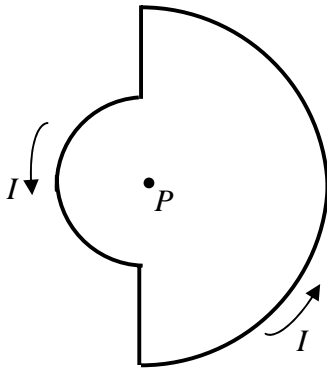
(پ): در حد $n \rightarrow \infty$ در رابطه‌ی (۱۰-۳۲) خواهیم داشت $\sin(\pi/n) \approx \pi/n$ و در نتیجه

$$B_\infty = \frac{n \mu_0 I}{\epsilon \pi R} (\pi/n) = \frac{\mu_0 I}{\epsilon 2R} \quad (10-33)$$

* برگرفته از David J. Griffiths, Introduction To Electrodynamics, 2nd ed., Prentice - Hall, 1989.

که با نتیجه‌ی به دست آمده در بالا برای میدان حلقه‌ی دایره‌ای شکل در مرکز آن سازگار است.

مثال ۶-۱۰ شکل (۱۰-۱۳) حلقه‌ای را نشان می‌دهد که از دو نیم دایره به شعاع‌های R و $2R$ و دو قطعه سیم راست تشکیل شده است. از این حلقه جریان پادساعتگرد و پایای I می‌گذرد. میدان مغناطیسی را در مرکز حلقه، نقطه‌ی P ، حساب کنید.



شکل ۱۰-۱۳ میدان دو نیم حلقه

حل: سیم‌های راست در P میدان ندارند. بنابراین کافی است میدان‌های دو نیم‌دایره را در P حساب کنیم و سپس با استفاده از اصل برنهمش با هم جمع کنیم. جهت میدان هر دو نیم‌دایره در P هم‌سو و به سوی بیرون از صفحه‌اند. با استفاده از قانون بیو-ساوار داریم

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \Rightarrow d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{rd\theta}{r^2} = \hat{k} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} d\theta \quad (10-34)$$

\hat{k} بردار یکه‌ی عمود بر صفحه و به سوی بیرون از آن است. بسته به این که روی کدام نیم حلقه انتگرال بگیریم، $r = R$ یا $r = 2R$ است. در هر دو حالت برای نیم حلقه‌ها، θ بین صفر و π تغییر می‌کند. بنابراین، در نقطه‌ی P میدان نیم حلقه‌ی با شعاع $r = R$ عبارت است از

$$\mathbf{B}_R = \int_{\theta=0}^{\pi} \hat{k} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \pi \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4R} \hat{k} \quad (10-35)$$

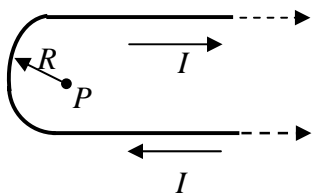
و میدان نیم حلقه‌ی با شعاع $r = 2R$ برابر است با

$$\mathbf{B}_{2R} = \int_{\theta=0}^{\pi} \hat{k} \frac{\mu_0 I}{4\pi(2R)} d\theta = \frac{\mu_0 I}{8\pi R} \pi \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{8R} \hat{k} \quad (36)$$

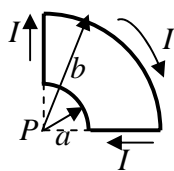
جمع برداری این دو میدان، میدان مغناطیسی کل را در نقطه‌ی P به دست می‌دهد

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right) \hat{k} = \frac{3\mu_0 I}{8R} \hat{k} \quad (37)$$

مثال ۷-۱۰ در هر یک از آرایش‌های شکل‌های (۱۰-۱۴) و (۱۰-۱۵) میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P حساب کنید



شکل ۱۰-۱۵



شکل ۱۰-۱۴

(الف) در شکل (۱۰-۱۴) دو ربع دایره به شعاع‌های a و b با دو سیم راست افقی و عمودی به هم وصل‌اند.
(ب): دو سیم نیمه بینهایت که با نیم دایره‌ای به شعاع R برابر شکل (۱۰-۱۵) به هم وصل‌اند.

حل: (الف) قسمت‌های راست در شکل (۱۴) در نقطه‌ی P میدان

ایجاد نمی‌کنند. یعنی خط‌های میدان این قسمت‌ها از P نمی‌گذرد. میدان ربع دایره‌ها در نقطه‌ی P یک چهارم میدان یک دایره‌ی کامل در مرکز آن است. بنابراین میدان ربع دایره‌ی به شعاع a در نقطه‌ی P برابر $\mu_0 I / 8a$ و جهتش به سوی بیرون از صفحه است. به همین ترتیب، میدان ربع دایره‌ی به شعاع b در نقطه‌ی P برابر $\mu_0 I / 8b$ است، اما جهتش به درون صفحه است. پس، بنا به اصل برنهمش داریم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{\lambda} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \hat{\mathbf{k}} \quad (10-38)$$

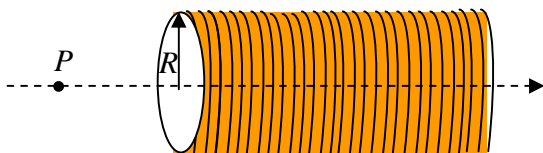
$\hat{\mathbf{k}}$ برداری به سوی بیرون صفحه است.

(ب): میدان دو سیم نیم بینهایت همانند میدان یک سیم بینهایت است و بنابراین در نقطه P سهم این دو سیم در میدان $\mu_0 I / 2\pi R$ و جهتش به درون صفحه است. اندازه‌ی میدان نیم دایره هم در مرکز $\mu_0 I / 4R$ است. جهت این میدان هم در نقطه P به درون صفحه است. پس، جهت میدان کل به سوی درون صفحه است و مقدارش با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{\epsilon R} \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) (-\hat{\mathbf{k}}) \quad (10-39)$$

مثال ۸-۱۰ سولونوئید (پیچه) شکل (۱۰-۱۶) از یک استوانه به شعاع R تشکیل شده است که دور آن سیم پیچیده شده است.

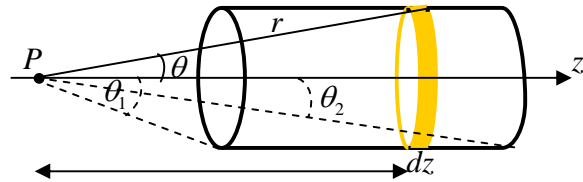
سیم‌ها بسیار نزدیک به هم پیچیده شده‌اند و می‌توان آنها را دایره فرض کرد. در هر واحد طول پیچه N دور سیم وجود دارد. از سیم جریان پایای I می‌گذرد. میدان مغناطیسی را روی محور استوانه به دست آورید. (راهنمایی: از نتیجه‌ی مثال ۳ استفاده کنید).



شکل ۱۶-۱۰ پیچه‌ی محدود

حل: چون سیم‌ها کپ هم پیچیده شده است، این آرایه را می‌توان همانند یک توزیع جریان سطحی پنداشت. برای حل مسئله، رابطه‌ی (۱۰-۲۴) را

برای حلقه‌ی جریانی با پهنای dz به کار ببرید. در شکل (۱۰-۱۷) این حلقه به صورت روبان باریکی به پهنای dz نشان داده شده است و شامل جریان $NIdz$ است. روشن است که تنها



شکل ۱۷ جزء جریان و میدان آن

مولفه‌ی B_z این میدان غیر صفر است. بنابراین از رابطه‌ی (۱۰-۲۴) داریم

$$dB = \frac{\mu_0 N I dz}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

برای یافتن میدان کل در نقطه‌ی P باید از این رابطه انتگرال بگیریم. اما $z = R \cot \theta$ و در نتیجه،

$$z = R \cot \theta \Rightarrow dz = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta, \quad \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^3} = \frac{\sin^3 \theta}{R^3} \quad (10-40)$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2} \int \frac{R^2 (-R d\theta) \sin^3 \theta}{R^3 \sin^2 \theta} = \frac{\mu_0 N I}{2} \int -\sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 N I}{2} (\cos \theta) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\Rightarrow \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \quad (10-41)$$

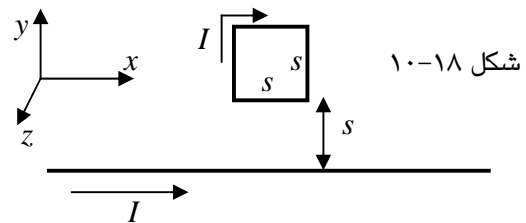
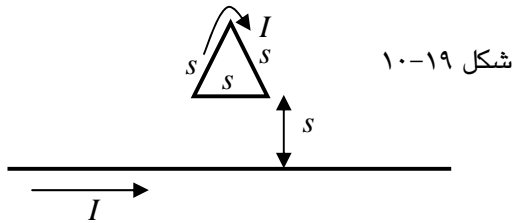
برای پیچه‌ی با طول بینهایت $\theta_1 = 180^\circ$ و $\theta_2 = 0^\circ$ اند و میدان پیچه‌ی بینهایت دراز عبارت است از

$$B_\infty = \frac{\mu_0 N I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) = \frac{\mu_0 N I}{2} [1 - (-1)] = \mu_0 N I \quad (10-42)$$

این نتیجه را دوباره با استفاده از قانون آمپر به دست خواهیم آورد.

مثال ۹-۱۰ نیرویی که سیم به حلقه وارد می‌کند (الف): حلقه‌ی مربع شکل به ضلع s در فاصله‌ی s از سیم بینهایت درازی قرار دارد. سیم و حلقه برابر شکل (۱۸-۱۰) در یک صفحه قرار دارند. از حلقه جریان ساعتگرد I می‌گذرد. جریان گذرنده از سیم هم I است. نیروی وارد به حلقه را حساب کنید.

(ب): اگر حلقه مثلث متساوی الاضلاع به ضلع s باشد و برابر شکل (۱۹-۱۰) فاصله‌ی قاعده اش از سیم s باشد، چه نیرویی به حلقه وارد می‌شود؟



حل (الف): جهت میدان مغناطیسی سیم در بالای آن به سوی بیرون از صفحه است و مقدارش بنا به رابطه‌ی (۱۲-۱۰)

است. $\frac{\mu_0 I}{2\pi z}$ نیروی وارد به دو ضلع عمودی مربع یکدیگر را حذف می‌کنند. میدان مغناطیسی در مکان ضلع پایینی مربع

$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\mathbf{k}}$ است. بنابراین نیروی وارد به ضلع پایین برابر است با

$$\mathbf{F}_{\text{Bottom}} = \int I d\vec{\ell} \times \mathbf{B} = \int_0^s I d\ell (-\hat{\mathbf{i}}) \times \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\mathbf{k}} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \right) I s \hat{\mathbf{j}} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \hat{\mathbf{j}} \quad (10-43)$$

این نیرو رو به بالاست. میدان مغناطیسی سیم در مکان ضلع بالایی مربع در فاصله‌ی $2s$ از سیم $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \hat{\mathbf{k}}$ است. بنابراین،

نیروی وارد به این ضلع برابر است با

$$\mathbf{F}_{\text{Top}} = \int I d\vec{\ell} \times \mathbf{B} = \int_0^s I d\ell (\hat{\mathbf{i}}) \times \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \hat{\mathbf{k}} = -\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi s} \right) I s \hat{\mathbf{j}} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \hat{\mathbf{j}} \quad (10-44)$$

این نیرو رو به پایین است. نیروی کل وارد به مربع جمع برداری دو نیروی بالاست:

$$\mathbf{F}_{\text{Total}} = \mathbf{F}_{\text{Bottom}} + \mathbf{F}_{\text{Top}} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \hat{\mathbf{j}} - \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \hat{\mathbf{j}} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \hat{\mathbf{j}} \quad (10-45)$$

جهت این نیروی کل رو به بالاست. حلقه‌ی مربع از سیم دور می‌شود.

(ب): وضعیت در شکل (۲۰-۱۰) نشان داده شده است. نیروی وارد به ضلع

پایین مثلث همانند قسمت (الف) و برابر $\mathbf{F}_{\text{Bottom}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{\mathbf{j}}$ است. این نیرو رو

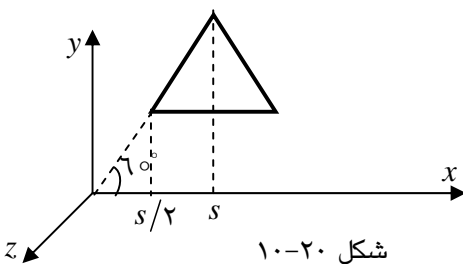
به بالاست. میدان مغناطیسی سیم در ارتفاع y و در روی ضلع سمت چپ

مثلث $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{\mathbf{k}}$ است. نیروی $d\mathbf{F}$ که به جزء طول این ضلع وارد

می‌شود برابر است با

$$d\mathbf{F} = I d\vec{\ell} \times \mathbf{B} = I (dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}}) \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{\mathbf{k}} \right) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi y} (-dx \hat{\mathbf{j}} + dy \hat{\mathbf{i}}) \quad (10-46)$$

اما مولفه‌ی x این نیرو با مولفه‌ی x نیروی وارد به ضلع سمت راست حذف می‌شود. بنابراین، کافی است فقط مولفه‌ی y را



حساب کنیم.

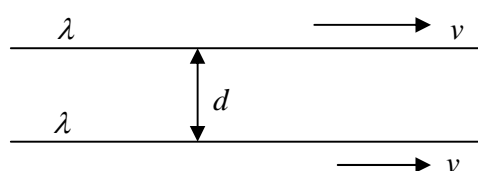
$$F_y = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \int_{s/\sqrt{2}}^s \frac{1}{y} dx \quad (10-47)$$

چون $y = \sqrt{2}x \Rightarrow dx = dy/\sqrt{2}$ پس داریم

$$F_y = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \int_{s/\sqrt{2}}^s \frac{1}{y} dx = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \int_{s/\sqrt{2}}^s \frac{1}{y} \frac{dy}{\sqrt{2}} \Rightarrow F_y = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi\sqrt{2}} \ln\left(\frac{s}{s/\sqrt{2}}\right) = -\frac{\mu_0 I^2 \ln 2}{2\sqrt{2}\pi} \quad (10-48)$$

نیروی وارد به ضلع سمت راست هم درست مانند ضلع سمت چپ است. پس، نیروی برآیند برابر است با

$$\mathbf{F}_{\text{Total}} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{2} \ln 2}{\sqrt{2}}\right) \hat{\mathbf{j}} \quad (10-49)$$

مثال ۱۰-۱۰ فرض کنید بار خطی با چگالی λ روی دو سیم راست بینهایت دراز شکل (۲۱-۱۰) توزیع شده است.

شکل ۲۱-۱۰ دو سیم موازی باردار و متحرک

سیم ها موازی و به فاصله d از هم قرار دارند و با سرعت ثابت v حرکت می کنند. برای این که نیروی ربایش مغناطیسی و نیروی رانش الکتریکی یکدیگر را خنثی کنند، سرعت v باید چقدر باشد؟

حل: نیروی ربایش مغناطیسی در واحد طول با رابطه‌ی (۱۵) داده شده است و عبات است از

$$f_{\text{mag.}} = \frac{\mu_0 \lambda^2 v^2}{2\pi d} \quad (10-50)$$

میدان الکتریکی یک سیم در جایگاه سیم دیگر برابر است با

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{enc}} \Rightarrow E \cdot 2\pi d l = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda l \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \quad (10-51)$$

نیروی رانشی الکتریکی که به واحد طول سیم دوم وارد می شود، از رابطه‌ی زیر به دست می آید

$$f_{\text{elc.}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda^2}{d} \quad (10-52)$$

برای این که این دو نیرو یکدیگر را خنثی کنند باید داشته باشیم

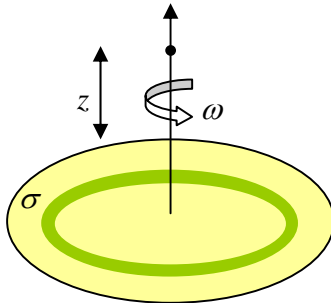
$$f_{\text{mag}} = f_{\text{elc.}} \Rightarrow \mu_0 v^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (10-53)$$

چون $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ coul}^2/\text{N.m}^2$ و $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N.sec}^2/\text{coul}^2$ اند، بنابراین داریم

$$\epsilon_0 \mu_0 = (4\pi \times 8.85) \times 10^{-19} \text{ sec}^2/\text{m}^2 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 8.85 \times 10^{-19}}} \text{ m/s} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (10-54)$$

این سرعت نور است! بنابراین، هرگز نمی توان سیم ها را با سرعتی کافی راند. نیروی رانشی الکتریکی همواره چیره است.

مثال ۱۰-۱۱ قرص باردار چرخان: قرصی به شعاع R با چگالی بار سطحی σ با سرعت زاویه‌ای ω حول محورش می چرخد.(الف): چگالی جریان سطحی K را در فاصله‌ی r از مرکز قرص بیابید.



شکل ۱۰-۲۲ صفحه‌ی باردار چرخان

(ب): میدان مغناطیسی قرص را در نقطه‌ی $z > R$ روی محور آن حساب کنید.

حل: (الف) $v = r\omega \Rightarrow K = \sigma v = \sigma r\omega$

(ب): بار موجود در روی حلقه‌ای به شعاع r و پهنای dr در شکل (۱۰-۲۲) برابر $\Delta q = (2\pi r dr)\sigma$ است. زمان یک دور چرخش قرص $\Delta t = 2\pi/\omega$ است. پس

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \sigma\omega r dr \quad (10-55)$$

بنا به رابطه‌ی (۱۰-۲۴)، میدان مغناطیسی این حلقه

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \sigma\omega r dr \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (10-56)$$

است. بنابراین، با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۱۰-۵۶) میدان کل قرص به دست می‌آید. داریم

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R \frac{r^2 dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k} \quad (10-57)$$

با گزینه‌ی $r^2 = u \Rightarrow r dr = d(u/2) = du/2$ خواهیم داشت

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \frac{1}{2} \int_0^{R^2} \frac{u du}{(u + z^2)^{3/2}} \hat{k} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4} \left[\frac{u + 2z^2}{\sqrt{u + z^2}} \right]_0^{R^2} \hat{k} \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{(R^2 + 2z^2)}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2z \right] \hat{k} \quad (10-58)$$

در مثال‌های بالا ما همواره تقارن مسئله‌ها را در نظر گرفتیم و میدان مغناطیسی را در نقاطی حساب کردیم که به گونه‌ای نقاط خاص بودند. در زیر مثال ۱۰-۳ را دو بار حل می‌کنیم اما این بار به جای این که میدان را درست در بالای مرکز حلقه و در روی محور حساب کنیم، آن را در نقطه‌ی دلخواهی در صفحه‌ی xz به دست می‌آوریم.

مثال ۱۰-۱۲: میدان مغناطیسی حلقه در نقطه‌ی دلخواه: از حلقه‌ی شکل (۱۰-۲۳) جریان پایایی I می‌گذرد. حلقه در صفحه‌ی

xy قرار دارد و شعاع آن R است. میدان مغناطیسی حلقه‌ی را در نقطه‌ی P با مختصات $(0, y, z)$ واقع در صفحه‌ی xz

حساب کنید. مختصات چشمه $(R \cos \phi, R \sin \phi, 0)$ است. ϕ از صفر

تا 2π تغییر می‌کند

حل: میدان مغناطیسی حلقه از قانون بیو-سوار به دست می‌آید

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (10-59)$$

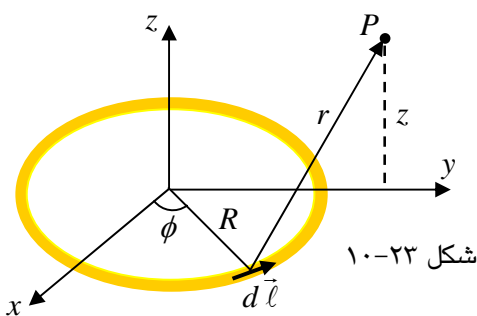
داریم

$$\mathbf{r} = -R \cos \phi \hat{i} + (y - R \sin \phi) \hat{j} + z \hat{k} \quad (10-60)$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$r^2 = R^2 \cos^2 \phi + y^2 - 2Ry \sin \phi + R^2 \sin^2 \phi + z^2 = R^2 + y^2 + z^2 - 2Ry \sin \phi \quad (10-61)$$

مختصات چشمه‌ی جریان عبارت است از



شکل ۱۰-۲۳

$$x_o = R \cos \phi \Rightarrow dx_o = -R \sin \phi d\phi,$$

$$y_o = R \sin \phi \Rightarrow dy_o = R \cos \phi d\phi, \quad z_o = 0 \Rightarrow dz_o = 0$$

$$\Rightarrow d\vec{l} = -R \sin \phi d\phi \hat{i} + R \cos \phi d\phi \hat{j} + 0 \hat{k}$$

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R \sin \phi d\phi & R \cos \phi d\phi & 0 \\ -R \cos \phi & (y - R \sin \phi) & z \end{vmatrix} = \hat{i}(Rz \cos \phi d\phi) \quad (10-62)$$

$$+ \hat{j}(Rz \sin \phi d\phi) + \hat{k}(-Ry \sin \phi d\phi + R^x \sin^x \phi d\phi + R^x \cos^x \phi d\phi)$$

با قرار دادن این رابطه در انتگرال (۱۰-۵۹) دیده می شود که سه جمله برای سه مولفه‌ی میدان، B_x ، B_y ، و B_z به صورت زیر به دست می آیند

$$B_x = \frac{\mu_o I}{\epsilon \pi} R z \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi d\phi}{(R^x + y^x + z^x - 2Ry \sin \phi)^{x/2}} \quad (10-63)$$

$$B_y = \frac{\mu_o I}{\epsilon \pi} R z \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi d\phi}{(R^x + y^x + z^x - 2Ry \sin \phi)^{x/2}} \quad (10-64)$$

$$B_z = \frac{\mu_o I}{\epsilon \pi} R \int_0^{2\pi} \frac{(R - y \sin \phi) d\phi}{(R^x + y^x + z^x - 2Ry \sin \phi)^{x/2}} \quad (10-65)$$

$$\Rightarrow B_x = \frac{\mu_o I}{\epsilon \pi} R z \frac{1}{Ry} \frac{1}{\sqrt{R^x + y^x + z^x - 2Ry \sin \phi}} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (10-66)$$

برای محاسبه‌ی انتگرال B_x کافی است از تغییر متغیر $u = R^x + y^x + z^x - 2yz \sin \phi$ استفاده کنیم و سپس انتگرال بگیریم. از تقارن مسئله هم می توان به صفر بودن B_x پی برد: سهم جزء جریان در ϕ با سهم جزء جریان در $\pi - \phi$ یکدیگر را حذف می کنند. دو انتگرال دیگر برای مولفه‌های B_y و B_z انتگرال‌های بیضوی اند و نمی توان آن‌ها را برحسب توابع معمولی نوشت. می توان آنها را به طور عددی حل کرد. توجه کنید که در حد $y = 0$ نقطه‌ی میدان روی محور z قرار می گیرد و ما دوباره رابطه‌های (۱۰-۲۴) و (۱۰-۲۴) را به دست می آوریم. اینها همان اند که در مثال ۱۰-۳ یافته بودیم.

۱۰-۲ میدان مغناطیسی یک دو قطبی مغناطیسی نقطه‌ای

اگر ابعاد حلقه‌ی مثال ۱۰-۱۲ در مقایسه با فاصله‌ی حلقه تا نقطه‌ی میدان کوچک باشد ($r = (y^x + z^x)^{1/2} \ll R$)، حلقه را می توان یک دو قطبی نقطه ای پنداشت که در مرکز حلقه قرار دارد. در این حد، مخرج انتگرال‌های رابطه‌های (۱۰-۶۳) تا (۱۰-۶۵) را می توان به صورت زیر بسط داد

$$(R^x + y^x + z^x - 2Ry \sin \phi)^{-x/2} = \frac{1}{r^x} \left[1 + \frac{R^x - 2Ry \sin \phi}{r^x} \right]^{-x/2} = \frac{1}{r^x} \left[1 - \frac{x}{2} \left(\frac{R^x - 2Ry \sin \phi}{r^x} \right) + \dots \right] \quad (10-67)$$

... جایگزین جمله‌های بالاتر بسط است. مولفه‌های B_x و B_y به صورت زیر درمی آیند

$$B_y \approx \frac{\mu_0 I R z}{\epsilon \pi r^3} \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{z}{r} \left(\frac{R^2 - 2Ry \sin \phi}{r^2} \right) \right] \sin \phi d\phi = \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi} \frac{2R^2 y z}{r^3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi} \frac{2R^2 y z}{r^3}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I R}{\epsilon \pi r^3} \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{z}{r} \left(\frac{R^2 - 2Ry \sin \phi}{r^2} \right) \right] (R - y \sin \phi) d\phi \quad (10-68)$$

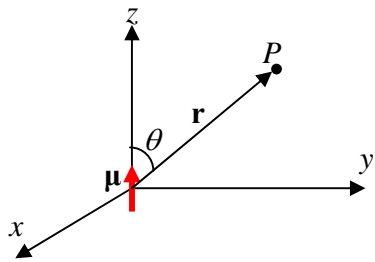
$$= \frac{\mu_0 I R}{\epsilon \pi r^3} \left[2\pi \left(R - \frac{2R^2}{r^2} \right) - \frac{2\pi R y^2}{r^2} \right] = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{\epsilon \pi r^3} \left[2 - \frac{2y^2}{r^2} + \dots \right] \quad (10-69)$$

کمیت $I(\pi R^2)$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی، $\mu = IA$ ، است که در آن $A = \pi R^2$ مساحت حلقه است. در مختصات کروی، $z = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ را می توان برحسب آنها به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$B_y = \frac{\mu_0 (I \pi R^2)}{\epsilon \pi} \frac{2(r \sin \theta)(r \cos \theta)}{r^3} = \frac{\mu_0}{\epsilon \pi} \frac{2\mu \sin \theta \cos \theta}{r^2} \quad (10-70)$$

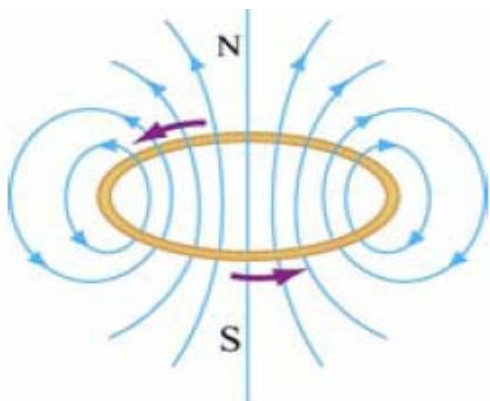
$$B_z = \frac{\mu_0 (I \pi R^2)}{\epsilon \pi} \left(2 - \frac{2r^2 \sin^2 \theta}{r^2} \right) = \frac{\mu_0}{\epsilon \pi} \frac{\mu}{r^2} (2 - 2 \sin^2 \theta) = \frac{\mu_0}{\epsilon \pi} \frac{\mu}{r^2} (2 \cos^2 \theta - 1) \quad (10-71)$$

بنابراین، می بینیم که میدان مغناطیسی حلقه‌ی به شعاع R را می توان به تقریب، همانند میدان مغناطیسی دو قطبی کوچک شکل (10-24) پنداشت که در مرکز مختصات قرار دارد. رابطه‌های

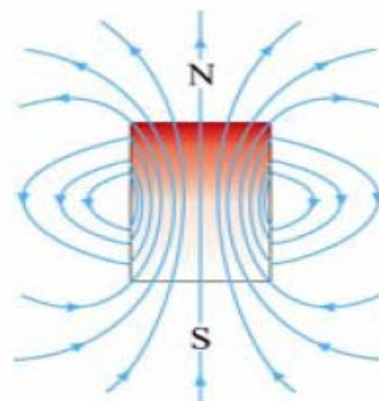


شکل ۲۴- گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\mu = \mu \hat{k}$

(10-70) و (10-71) میدان مغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی را به دست می دهند. مقایسه‌ی خط‌های میدان حلقه و یک دو قطبی مغناطیسی، مثل یک آهن ربای کوچک میله‌ای، آموزنده است در شکل‌های (10-25) آنها نشان داده شده اند. به همانندی هایشان توجه کنید.



شکل ۲۵-۱۰ خط‌های میدان حلقه‌ی حامل جریان



شکل ۲۵-۱۰ الف: خط‌های میدان آهن ربای میله‌ای

در مختصات کروی، میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P می توان به صورت $\mathbf{B} = B_r \hat{r} + B_\theta \hat{\theta}$ نوشت. مولفه‌های B_r و B_θ با رابطه‌های زیر به مولفه‌های B_y و B_z در مختصات کارتریزی مربوط اند.

$$B_r = B_y \sin \theta + B_z \cos \theta \quad , \quad B_\theta = B_y \cos \theta - B_z \sin \theta \quad (10-72)$$

افزون بر این، بردارهای یک‌ه‌ی \hat{r} و $\hat{\theta}$ برحسب بردارهای یک‌ه‌ی مختصات کارتریزی عبارتند از

$$\hat{r} = \sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \quad , \quad \hat{\theta} = \cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \quad (10-73)$$

می توان از این رابطه ها استفاده کرد و مولفه های میدان، رابطه های (10-74) و (10-75) را در مختصات کروی نوشت:

$$B_r = \frac{\mu_0 I R^\nu \cos \theta}{\epsilon \pi} \int_0^\pi \frac{d\phi}{(R^\nu + r^\nu - \nu R r \sin \theta \sin \phi)^{\nu/\nu}} \quad (10-74)$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I R^\nu}{\epsilon \pi} \int_0^\pi \frac{(r \sin \phi - R \cos \theta) d\phi}{(R^\nu + r^\nu - \nu R r \sin \theta \sin \phi)^{\nu/\nu}} \quad (10-75)$$

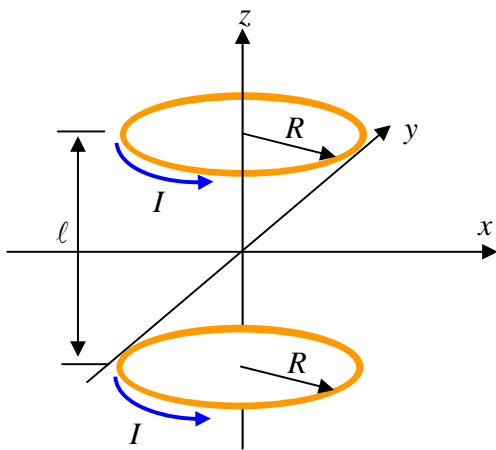
در حد $R \ll r$ خواهیم داشت

$$B_r \approx \frac{\mu_0 I R^\nu \cos \theta}{\epsilon \pi r^\nu} \int_0^\pi d\phi = \frac{\mu_0 \nu \pi I R^\nu \cos \theta}{\epsilon \pi r^\nu} = \frac{\mu_0 \nu \mu \cos \theta}{\epsilon \pi r^\nu} \quad (10-76)$$

$$\begin{aligned} B_\theta &= \frac{\mu_0 I R^\nu}{\epsilon \pi} \int_0^\pi \frac{(r \sin \phi - r \sin \theta) d\phi}{(R^\nu + r^\nu - \nu R r \sin \theta \sin \phi)^{\nu/\nu}} \\ &\approx \frac{\mu_0 I R^\nu}{\epsilon \pi r^\nu} \int_0^\pi \left[-R \sin \theta \left(1 - \frac{\nu R^\nu}{\nu r^\nu} \right) + \left(r - \frac{\nu R^\nu}{\nu r^\nu} - \frac{\nu R^\nu \sin^2 \theta}{\nu r^\nu} \right) \sin \phi + \nu R \sin \theta \sin^2 \phi \right] d\phi \\ &\approx \frac{\mu_0 I R^\nu}{\epsilon \pi r^\nu} (-\nu \pi R \sin \theta + \nu \pi r \sin \theta) = \frac{\mu_0 (I \pi R^\nu) \sin \theta}{\epsilon \pi r^\nu} = \frac{\mu_0 \mu \sin \theta}{\epsilon \pi r^\nu} \quad (10-77) \end{aligned}$$

۱۰-۳ پیچهای هلمهولتز

دو پیچهای دایره ای به شعاع R را در نظر بگیرید. هر یک از پیچها از N حلقه تشکیل شده است و همانند شکل (10-26) مرکزشان در فاصله های $z = \pm \ell/2$ از مبدا مختصات و در روی محور z قرار دارند. از هر دو پیچه جریان همسوی I می گذرد. این آرایه پیچهای هلمهولتز نامیده می شود. از پیچهای هلمهولتز برای ایجاد میدان های مغناطیسی یکنواخت استفاده می شود و به زودی آن را خواهیم دید. در اینجا می خواهیم میدان مغناطیسی \mathbf{B} را در فاصله z از مرکز یکی از پیچه ها و در روی محور z حساب کنیم.

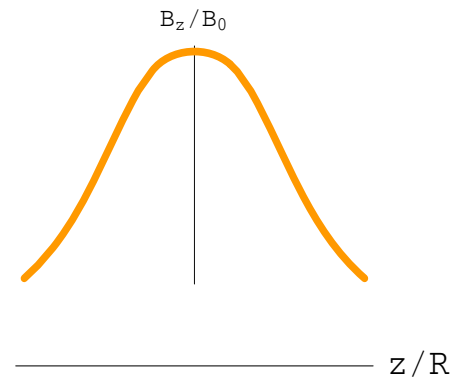


شکل ۱۰-۲۶ پیچهای هلمهولتز

در مثال ۱۰-۳، میدان یک حلقه را در فاصله z در بالای مرکز آن حساب کردیم. با بهره گیری از اصل برنهم می توان از آن استفاده کرد و در نقطه ای $P(0,0,z)$ (یعنی نقطه ای در فاصله $z - \ell/2$ از مرکز یک پیچه و $z + \ell/2$ از مرکز پیچه دوم) میدان را به دست آورد. داریم

$$B_z = B_{\text{top}} + B_{\text{bottom}} = \frac{\mu_0 N I R^\nu}{\nu} \left[\frac{1}{[(z - \ell/2)^\nu + R^\nu]^{\nu/\nu}} + \frac{1}{[(z + \ell/2)^\nu + R^\nu]^{\nu/\nu}} \right] \quad (10-78)$$

B_{Bottom} و B_{top} به ترتیب میدان پیچهای بالایی و پیچهای پایینی است. نمودار B_z/B_0 بر حسب z/R در شکل (10-27) نشان



شکل ۲۷-۱۰ میدان مغناطیسی بر حسب z/R

داده شده است. $B_0 = \mu_0 NI / R (0/4)^{3/2}$ اندازه‌ی میدان برای $R = \ell$ در نقطه‌ی $z = 0$ است. بگذارید ویژگی‌های B_z را با جزییات بیشتری بررسی کنیم. اگر از B_z نسبت به z مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$B'_z(z) = \frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 NI R^2}{2} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2(z - \ell/2)}{[(z - \ell/2)^2 + R^2]^{3/2}} \\ \frac{2(z + \ell/2)}{[(z + \ell/2)^2 + R^2]^{3/2}} \end{array} \right\} \quad (10-79)$$

از اینجا به سادگی دیده می‌شود که در نیم‌راه بین دو پیچه، یعنی در $z = 0$ ، مشتق بالا صفر می‌شود

$$\left. \frac{dB_z}{dz} \right|_{z=0} = 0 \quad (10-80)$$

اگر مشتق دوم، B''_z ، را حساب کنیم خواهیم داشت

$$B''_z(z) = \frac{d^2 B_z}{dz^2} = \frac{\mu_0 NI R^2}{2} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{[(z - \ell/2)^2 + R^2]^{3/2}} + \frac{10(z - \ell/2)^2}{[(z - \ell/2)^2 + R^2]^{5/2}} \\ -\frac{2}{[(z + \ell/2)^2 + R^2]^{3/2}} + \frac{10(z + \ell/2)^2}{[(z + \ell/2)^2 + R^2]^{5/2}} \end{array} \right\} \quad (10-81)$$

این رابطه به‌ازای $z = 0$ ساده‌تر می‌شود و به صورت زیر درمی‌آید

$$B''_z(0) = \left. \frac{d^2 B_z}{dz^2} \right|_{z=0} = \frac{\mu_0 NI^2}{2} \left\{ -\frac{6}{[(\ell/2)^2 + R^2]^{3/2}} + \frac{10\ell^2}{2[(\ell/2)^2 + R^2]^{5/2}} \right\} = -\frac{\mu_0 NI^2}{2} \frac{6(R^2 - \ell^2)}{[(\ell/2)^2 - R^2]^{3/2}} \quad (10-82)$$

بنابراین، شرط این که مشتق دوم، B''_z ، در $z = 0$ صفر باشد $\ell = R$ است. یعنی فاصله‌ی بین دو پیچه با شعاع پیچه برابر باشد. آرایش با $\ell = R$ پیچه‌ها را پیچه‌ی هلمهولتز می‌نامند.

برای z های کوچک می‌توان B_z را در همسایگی $z = 0$ بسط تیلور داد. خواهیم داشت

$$B_z(z) = B_z(0) + B'_z(0)z + \frac{1}{2!} B''_z(0)z^2 + \dots \quad (10-83)$$

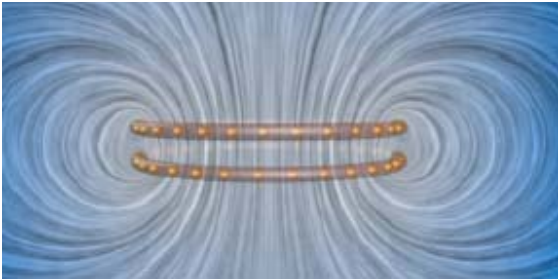
واقعیت این که دو مشتق اول و دوم در $z = 0$ صفر اند، به این معنی است که میدان در ناحیه‌ی z های کوچک به مقدار زیادی یکنواخت است. می‌توان نشان داد که مشتق سوم هم در $z = 0$ برابر صفر است.

به یاد بیاورید نیرویی که به یک دوقطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی وارد می‌شود $\mathbf{F}_B = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$ است. اگر یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور مغناطیسی $\boldsymbol{\mu} = \mu_z \hat{\mathbf{k}}$ رادر $z = 0$ قرار دهیم، نیروی وارد به آن عبارت است از

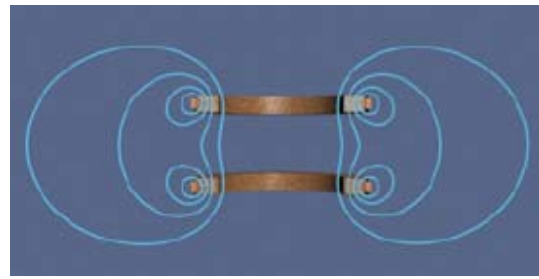
$$\mathbf{F}_B = \nabla(\mu_z B_z) = \mu_z \left(\frac{dB_z}{dz} \right) \hat{\mathbf{k}} \quad (10-84)$$

چون میدان مغناطیسی یکنواخت است، انتظار می‌رود که این نیرو بسیار کوچک باشد.

میدان مغناطیسی پیچه‌های هلمهولتز در شکل (۲۸-۱۰) نشان داده شده است. در این آرایش، جهت جریان‌ها در دو پیچه هم‌سو اند و بنابراین، گشتاور دوقطبی پیچه‌ها در یک راستا قرار دارند. میدان‌های مغناطیسی پیچه‌ها با هم جمع می‌شوند و میدان کل را به وجود می‌آورند که در مرکز پیچه‌ها به تقریب یکتواخت است.

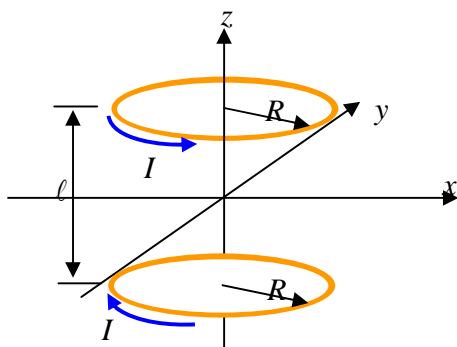


شکل ۲۹- ربایش دو حلقه‌ی جریان هم محور با
با جریان‌های هم سو.



شکل ۲۸- میدان پیچه‌های هلمهولتز وقتی که
فاصله‌شان با شعاع برابر است: $\ell = R$

چون فاصله‌ی بین پیچه‌ها با شعاع پیچه برابر و مقدار ثابتی است، نیروی ربایشی بین آنها تنش ایجاد می‌کند. این تنش با خط‌های میدان نشان داده شده است که به سوی بیرون گسترده اند تا هر دو پیچه را در بر گیرند.



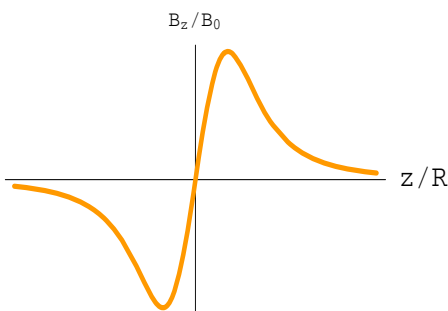
شکل ۳۰- پیچه‌ی هلمهولتز با جریان‌های خلاف

در شکل (۲۹-۱۰) وضعیتی نشان داده شده است که فاصله‌ی بین پیچه‌ها ثابت نیست. در این حالت به خاطر نیروی ربایشی بین آنها، پیچه‌ها به سوی یکدیگر حرکت می‌کنند. در شکل (۲۹-۱۰) جریان گذرنده از پیچه‌ی بالا نصف جریان در پیچه‌ی پایین انتخاب شده است.

اینک وضعیت شکل (۳۰-۱۰) را در نظر بگیرید که جهت جریان در پیچه‌ها خلاف یکدیگر است. باز هم با استفاده از اصل برنهم می‌توان میدان مغناطیسی این آرایه را در نقطه‌ی $P(0,0,z)$ و برای $z > 0$ به صورت زیر نوشت

$$B_z = B_{z1} + B_{z2} = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left[\frac{1}{[(z - \ell/2)^2 + R^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(z + \ell/2)^2 + R^2]^{3/2}} \right] \quad (10-85)$$

نمودار B_z/B_0 بر حسب z/R با $B_0 \equiv \mu_0 N I / 2R$ و $\ell = R$ در شکل (۳۱-۱۰) نشان داده شده است. مشتق این میدان نسبت به z عبارت است از



$$B'_z(z) = \frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{2(z - \ell/2)}{[(z - \ell/2)^2 + R^2]^{5/2}} \\ & + \frac{2(z + \ell/2)}{[(z + \ell/2)^2 + R^2]^{5/2}} \end{aligned} \right\} \quad (10-86)$$

و مقدارش در $z = 0$ برابر است با

شکل ۳۱- ۱۰ میدان مغناطیسی بر حسب z/R

$$B_z(\circ) = \frac{dB_z}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \frac{2\ell}{[(\ell/2)^2 + R^2]^{3/2}} \neq 0 \quad (10-87)$$

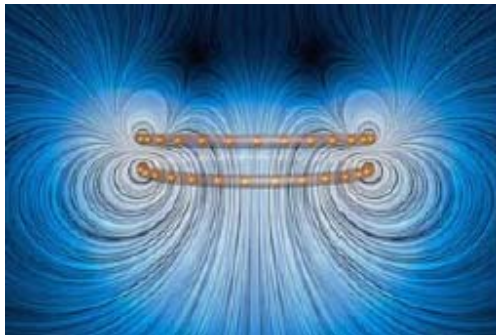
بنابراین ، اگر گشتاور دو قطبی مغناطیسی $\mu = \mu_z \hat{k}$ را در $z = 0$ قرار دهیم، به آن نیرو وارد خواهد شد. نیرو برابر است با

$$\mathbf{F}_B = \nabla(\mu \cdot \mathbf{B}) = \nabla(\mu_z B_z) = \mu_z \left(\frac{dB_z(\circ)}{dz} \right) \hat{k} = \frac{\mu_z \mu_0 N I R^2}{2} \frac{2\ell}{[(\ell/2)^2 + R^2]^{3/2}} \hat{k} \quad (10-88)$$

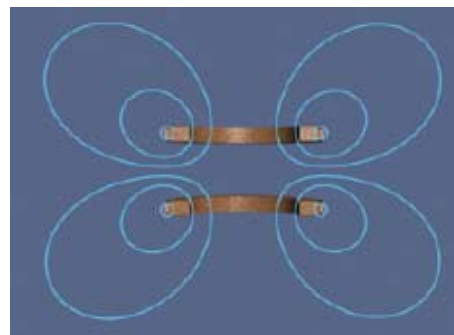
به ازای $\ell = R$ این نیرو شکل ساده‌تری به خود می‌گیرد و به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{F}_B = \frac{2\mu_0 \mu_z N I}{2(5/4)^{3/2}} \frac{\hat{k}}{R^2} \quad (10-89)$$

شکل (۱۰-۳۲) خط‌های میدان دو پیچه‌ی هلمهولتز را نشان می‌دهد که جریان در پیچه‌ها خلاف یکدیگرند .

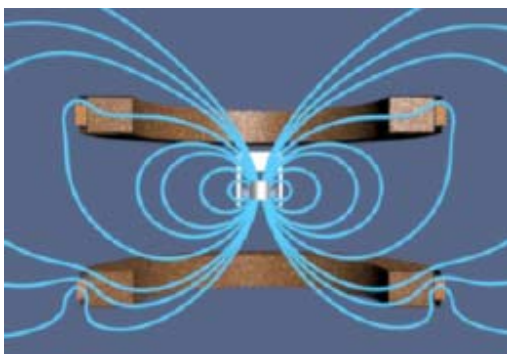


شکل ۱۰-۳۳ دو حلقه‌ی هم محور با جریان‌های خلاف یکدیگر را می‌رانند.



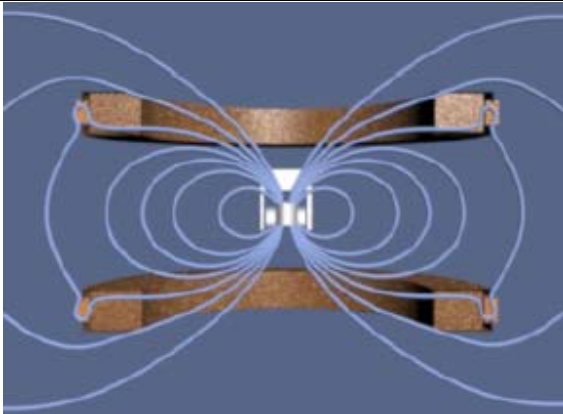
شکل ۱۰-۳۲ خط‌های میدان دو پیچه با جریان‌های ناهمسو

در این آرایش، گشتاور دو قطبی پیچه‌ها پادموازی اند. روی محور تقارن و در مرکز حلقه‌ها میدان صفر است. اگر فاصله‌ی پیچه‌ها را ثابت نگه داریم، نیروی رانشی بین آنها سبب ایجاد فشار در بین پیچه‌ها می‌شود. در شکل (۱۰-۳۳) میدان دو حلقه‌ی جریان نشان داده شده است که جریان‌ها در خلاف یکدیگر اند و فشردگی خط‌های میدان در امتداد محور افقی مرکزی بین پیچه‌ها نشان دهنده‌ی این فشار است. در آرایش شکل (۱۰-۳۳) جریان گذرنده از حلقه‌ی پایین دوبرابر جریان در حلقه‌ی بالایی است .



شکل ۱۰-۳۴ نوسان یک آهن‌ربای دایمی در فضای بین دو پیچه جریان با اختلاف فاز ۱۸۰ درجه.

در شکل (۱۰-۳۴) آهن ربای دایمی کوچکی را می‌بینید که از ریسمانی آویزان است و در فضای بین دو پیچه قرار دارد. این آهن‌ربا چنان سامان داده شده است که قطب شمال آن همواره رو به بالا باشد. (در شکل فقط برشی از پیچه‌ها نشان داده شده است). جریان در حلقه‌ها سینوسی است و به اندازه‌ی ۱۸۰ درجه اختلاف فاز دارند. هنگامی که گشتاور دو قطبی مربوط به پیچه‌ی بالا رو به بالاست و جهت گشتاور دو قطبی پیچه‌ی پایین رو به پایین است، آهن ربای دایمی از پیچه‌ی پایین رانده و به سوی پیچه‌ی بالا جذب می‌شود و در نتیجه، رو به بالا حرکت می‌کند.



شکل ۳۵-۱۰ آه ربای دایمی در فضای بین دو پیچه
جریان‌های هم فاز

چون جهت ربا در فضا ثابت نگه داشته شده است.) هنگامی که در نیمه‌ی دوم چرخه‌ی جریان، گشتاورهای دو قطبی پیچه‌ها وارون می‌شوند، هر دو پیچه آهن‌ربای دایمی را از خود می‌رانند و در نتیجه باز هم نیروی وارد به آهن‌ربا صفر می‌شود.

در نیمه‌ی دوم چرخه، شرایط وارون می‌شود و آهن‌ربای دایمی به پایین حرکت می‌کند. به این ترتیب، آهن‌ربای دایمی بین دو پیچه نوسان می‌کند.

شکل (۳۵-۱۰) نمایش همان آرایش است، اما این بار جریان در پیچه‌ها هم فاز اند. وقتی که گشتاور دو قطبی پیچه‌ی بالایی رو به بالا باشد، گشتاور دو قطبی پیچه‌ی پایینی هم رو به بالا قرار می‌گیرد. بنابراین، هر دو پیچه می‌خواهند آهن‌ربای دایمی را به سوی خود جذب کنند. در نتیجه، نیروی وارد به آهن‌ربا صفر می‌شود (اگرچه به آهن‌ربا نیرو وارد نمی‌شود، اما به آن گشتاور نیرو وارد می‌شود که در شکل نشان داده نشده است،

۴-۱۰ قانون بیو-ساوار و چگالی جریان

قانون بیو-ساوار، رابطه‌ی (۱-۱۰)، را برای توزیع جریان‌های سطحی \mathbf{K} و حجمی \mathbf{J} هم می‌توان به کار برد. برای توزیع جریان‌ها قانون بیو-ساوار به صورت زیر درمی‌آید.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} da, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau \quad (۱۰-۹۰)$$

انتگرال‌های بالا بر روی سطح یا حجمی گرفته می‌شوند که شامل چگالی جریان اند.

در مثال‌های فراوان این فصل کوشیدیم روش استفاده از قانون بیو-ساوار را بیاموزیم. این قانون در اساس یک انتگرال‌گیری برداری است. از این جهت می‌تواند برای برخی دشوار باشد. در دنباله‌ی این فصل بر آنم که روش به کارگیری و محاسبه‌ی انتگرال قانون بیو-ساوار را با چند مثال دیگر تکرار کنیم. اگر گام‌های زیر را درست بردارید، نباید دشواری زیادی داشته باشید.

رویکردی برای حل مسئله: روش محاسبه‌ی میدان مغناطیسی با استفاده از قانون بیو-ساوار

قانون بیو-ساوار می‌گوید میدان مغناطیسی برآمده از جزء طول $d\vec{\ell}$ حامل جریان پایای I در نقطه‌ی P به فاصله‌ی \mathbf{r} از جزء طول عبارت است از

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (۱۰-۹۱)$$

برای محاسبه‌ی آن می‌توان گام‌های زیر را برداشت:

(۱) مکان چشمه: چارچوب مختصات مناسبی برگزینید و رابطه‌ای برای جزء جریان $I d\vec{\ell}$ و بردار مکان \mathbf{r}' آن بنویسید. اندازه‌ی

فاصله‌ی جزء جریان $I d\vec{\ell}$ از مبداء مختصات $r' = |\mathbf{r}'|$ است. متغیرهای پرایم دار را برای چشمه‌ی جریان به کار برده ایم.

(۲) نقطه‌ی میدان: نقطه‌ی میدان، نقطه‌ای در فضا است که می‌خواهیم در آن جا میدان مغناطیسی حاصل از توزیع جریان را

حساب کنیم. از همان چارچوبی که در گام (۱) برگزیدید استفاده کنید و بردار مکان \mathbf{r}_p نقطه‌ی P را بنویسید. کمیت $r_p = |\mathbf{r}_p|$

فاصله‌ی بین مبدا مختصات و نقطه‌ی P است.

(۳) بردار مکان نسبی: مکان نسبی چشمه و نقطه‌ی میدان با بردار $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}'$ داده می‌شود. بردار یکه‌ای که در راستای \mathbf{r} است به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'|} \quad (۱۰-۹۲)$$

که در آن $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'|$ فاصله‌ی چشمه و نقطه‌ی میدان است.

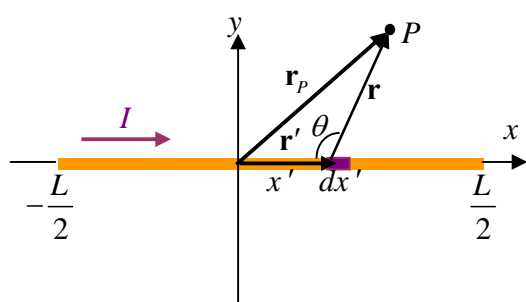
(۴) محاسبه‌ی ضرب خارجی: ضرب خارجی $d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}$ یا $d\vec{\ell} \times \mathbf{r}$ را به دست آورید. حاصل ضرب خارجی، برداری است که جهت میدان مغناطیسی \mathbf{B} را براساس قانون بیو-ساوار به دست می‌دهد.

(۵) جا گذاری: نتایج چهار گام بالا را در رابطه‌ی (۱۰-۹۱) برای $d\mathbf{B}$ قرار دهید و تا جایی که شدنی است آن را ساده کنید.

(۶) انتگرال گیری: از رابطه‌ی به دست آمده انتگرال بگیرید و \mathbf{B} را حساب کنید. هندسه و ابعاد سامانه در حدود انتگرال نمایان می‌شود. گاهی تغییر متغیر دادن به انتگرال گیری کمک می‌کند.

در چند مثال زیر این گام ها را با هم برمی داریم.

مثال ۱۰-۱۳ سیم محدود: از سیمی به طول L برابر شکل (۱۰-۳۶) جریان I در راستای $+x$ می‌گذرد. میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی دلخواه P در صفحه‌ی xy به دست آورید.



شکل ۱۰-۳۶ سیم محدود با جریان I

حل: این مثال خیلی شبیه مثال ۱۰-۱ است. در این جا نقطه‌ی میدان

مکان دلخواهی در صفحه‌ی xy است. این مثال را با رویکردی که در بالا برشمردیم، یک بار دیگر حل می‌کنیم.

(۱) مکان چشمه: از شکل (۱۰-۳۶) دیده می‌شود که مکان طول جزیی

dx' با بردار $\mathbf{r}' = x' \hat{\mathbf{i}}$ داده می‌شود و چشمه‌ی جریان $d\mathbf{l} = (dx') \hat{\mathbf{i}}$ را می‌سازد.

(۲) نقطه‌ی میدان: همان‌گونه که از شکل پیداست مکان نقطه‌ی میدان

در P است. بردار مکان آن $\mathbf{r}_p = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}$ است.

(۳) بردار مکان نسبی: بردار مکان نسبی از چشمه تا نقطه‌ی P همانا $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}' = (x - x') \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}$ است. اندازه‌ی آن برابر

$r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + y^2]^{1/2}$ است. بردار یکه در راستای \mathbf{r} با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}'|} = \frac{(x - x') \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}}{[(x - x')^2 + y^2]^{1/2}} \quad (۱۰-۹۳)$$

(۴) ضرب خارجی و ساده کردن آن: ضرب خارجی $d\vec{\ell} \times \mathbf{r}$ را می‌توان به صورت زیر ساده کرد

$$(dx' \hat{\mathbf{i}}) \times [(x - x') \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}] = y dx' \hat{\mathbf{k}} \quad (۱۰-۹۴)$$

(۵) جای گذاری: اگر نتایج بالا را در رابطه‌ی (۱۰-۹۱) قرار دهیم خواهیم داشت

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi} \frac{d\vec{\ell} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi} \frac{y dx'}{\left[(x-x')^2 + y^2 \right]^{3/2}} \hat{\mathbf{k}} \quad (10-95)$$

(6) انتگرال گیری:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \int d\mathbf{B} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi} \frac{y dx'}{\left[(x-x')^2 + y^2 \right]^{3/2}} \hat{\mathbf{k}} = -\frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi y} \frac{(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \Bigg|_{-L/2}^{L/2} \hat{\mathbf{k}} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi y} \left[\frac{(x-L/2)}{\sqrt{(x-L/2)^2 + y^2}} - \frac{(x+L/2)}{\sqrt{(x+L/2)^2 + y^2}} \right] \hat{\mathbf{k}} \quad (10-96) \end{aligned}$$

حالت حدی $L \gg x, y$ را بیازمایید: در این حد پاسخ برای سیم حامل جریان بینهایت دراز به دست می آید.

$$\mathbf{B}_\infty = -\frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi y} \left[-\frac{L/2}{L/2} - \frac{L/2}{L/2} \right] \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{\mathbf{k}} \quad (10-97)$$

اگر از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم و سیم در امتداد محور $+z$ باشد، میدان مغناطیسی با رابطه‌ی

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (10-98)$$

توصیف می شود که در آن $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ بردار یک‌ه‌ی سمتی است و نقطه‌ی میدان P در فاصله‌ی r از سیم است.

مثال ۱۴-۱۰ حلقه‌ی جریان مستطیل: حلقه‌ی جریان مستطیل شکل (۱۰-۳۷) را در نظر بگیرید و میدان مغناطیسی را در مبداء مختصات، نقطه‌ی O ، برحسب I ، a و b حساب کنید (در این مثال ضلع چهارم مستطیل نشان داده نشده است، چون فرض

کردیم این ضلع در بینهایت قرار دارد و بنابراین سهمی در میدان نخواهد داشت).

حل: میدان سیم محدود در نقطه‌ی P با رابطه‌ی (۱۰-۱۰) داده شده است:

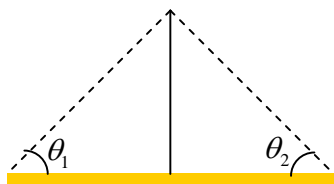
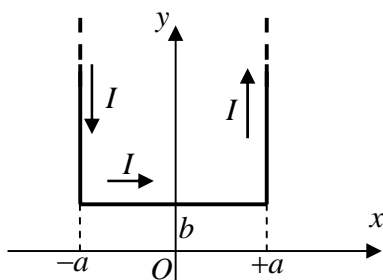
$$B = \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

اند و طول سیم را پارامتری می‌کنند. برای این که میدان را به دست بیاوریم، از رابطه‌ی بالا بهره می‌گیریم.

میدان در نقطه‌ی O از سه بخش تشکیل شده است: سهم سیم سمت چپ، سیم سمت راست و سیم افقی.(۱) سیم سمت چپ از $(x, y) = (-a, \infty)$ تا $(x, y) = (-a, b)$ ادامه دارد. زاویههایی که این سیم را پارامتری می‌کنند $\cos \theta_1 = 1$ و $\cos \theta_2 = -b/\sqrt{b^2 + a^2}$ اند.

بنابراین، داریم

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi a} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right) \quad (10-99)$$

جهت \mathbf{B}_1 در نقطه‌ی O به سوی بیرون از صفحه یا در جهت $+\hat{\mathbf{k}}$ است.

شکل ۱۰-۳۷ حلقه‌ی جریان مستطیل

(۲) سهم بخش افقی سیم که از $(x, y) = (-a, b)$ تا $(x, y) = (a, b)$ گسترده است. زاویه‌های (یا کسینوس زاویه‌ها)

$$\cos \theta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \theta_2 = \cos \theta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (10-100)$$

اند و در نتیجه، میدان آن در نقطه‌ی O عبارت است از

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi b} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \frac{\mu_0 I a}{\epsilon \pi b \sqrt{a^2 + b^2}} \quad (10-101)$$

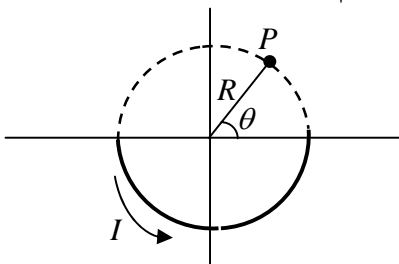
جهت B_y در نقطه‌ی O به سوی درون صفحه یا در جهت $-\hat{k}$ است.

(۳) بخش سوم سیم از $(x, y) = (a, b)$ تا $(x, y) = (a, \infty)$ ادامه دارد و به سادگی می‌توان نشان داد که اندازه‌ی میدان این سیم سمت راست با اندازه‌ی میدان سیم سمت چپ برابر است: $B_y = B_1$. جهت B_y در راستای $+\hat{k}$ است. بنابراین، میدان کل در نقطه‌ی O از جمع برداری سه میدان به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_y + \mathbf{B}_y = 2\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_y = \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi a} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \hat{k} - \frac{\mu_0 I a}{\epsilon \pi b \sqrt{a^2 + b^2}} \hat{k} \\ &= \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi a b \sqrt{a^2 + b^2}} \left(b \sqrt{a^2 + b^2} - b^2 - a^2 \right) \hat{k} \end{aligned} \quad (10-102)$$

توجه کنید که در حد $a \rightarrow \infty$ طول قسمت افقی و نیز میدان آن سیم، صفر می‌شود. چون جریان‌ها در دو بخش نیم بینهایت سیم خلاف یکدیگر است، میدان آنها هم یکدیگر را حذف می‌کنند و بنابراین، در این حد میدان در نقطه‌ی O صفر است.

مثال ۱۵-۱۰ سیم نیم دایره: از سیم نیم دایره جریان پایای I می‌گذرد (نیم دایره باید به سیم‌های دیگری وصل شود تا مدار



شکل ۲۸-۱۰ نیم حلقه‌ی جریان

کامل شود، ولی برای ما این بخش مدار مهم نیست) میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P در طرف دیگر نیم دایره به دست آورید (شکل ۳۸-۱۰ را ببینید).

حل: در شکل (۳۹-۱۰) مکان چشمه و نقطه‌ی میدان نشان داده شده‌اند. مختصات چشمه

$$P' = (R \cos \phi, -R \sin \phi) \quad (10-103)$$

است. نقطه‌ی میدان یک نقطه‌ی ثابت است و مکانش در

$$P = (R \cos \theta, R \sin \theta) \quad (10-104)$$

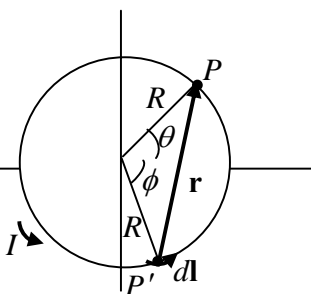
است. جزء طول جریان $d\vec{\ell}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$d\vec{\ell} = (R \sin \phi d\phi, R \cos \phi d\phi) = R d\phi (\sin \phi \hat{i}, \cos \phi \hat{j}) \quad (10-105)$$

بردار مکان نسبی عبارت است از

$$\mathbf{r} = R [(\cos \theta - \sin \phi) \hat{i} + (\sin \theta + \sin \phi) \hat{j}] \quad (10-106)$$

اینک نوبت ضرب خارجی $\mathbf{r} \times d\vec{\ell}$ است.



شکل ۳۹-۱۰ مکان چشمه و نقطه‌ی میدان

$$d\vec{\ell} \times \mathbf{r} = R^\gamma d\phi \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ (\cos\theta - \cos\phi) & (\sin\theta + \sin\phi) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= R^\gamma d\phi \hat{\mathbf{k}} (\sin\phi \sin\theta + \sin^\gamma\phi - \cos\theta \cos\phi + \cos^\gamma\phi) \quad (10-107)$$

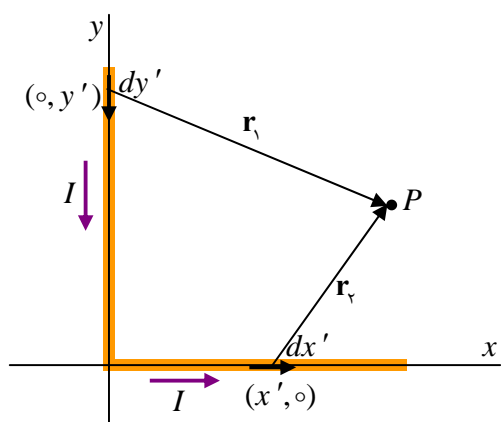
$$= R^\gamma d\phi \hat{\mathbf{k}} (1 + \sin\phi \sin\theta - \cos\theta \cos\phi) = R^\gamma d\phi \hat{\mathbf{k}} (1 - \cos(\theta + \phi)) \quad (10-108)$$

از جاگذاری این نتایج در قانون بیو-سوار خواهیم داشت

$$B = \frac{\mu_0 I}{\epsilon\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \mathbf{r}}{r^\gamma} = \frac{\mu_0 I}{\epsilon\pi} R^\gamma \hat{\mathbf{k}} \int_0^\pi \frac{(1 - \cos(\theta + \phi)) d\phi}{(\gamma R^\gamma - \gamma R^\gamma \cos(\theta + \phi))^{\gamma/\gamma}}$$

$$= \frac{\mu_0 I R^\gamma \hat{\mathbf{k}}}{\epsilon\pi (\gamma R^\gamma)^{\gamma/\gamma}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \cos(\theta + \phi)}} = \frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{k}}}{\lambda\pi \sqrt{\gamma} R} \int_0^\pi \frac{d\phi}{\sqrt{\gamma} \sin\left(\frac{\theta + \phi}{\gamma}\right)}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\lambda\pi R} \left[\gamma \ln\left(\tan\left(\frac{\theta + \phi}{\gamma}\right)\right) \right]_0^\pi \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0 I}{\lambda\pi R} \ln\left\{ \frac{\tan\left(\frac{\theta + \pi}{\epsilon}\right)}{\tan(\theta/\epsilon)} \right\} \hat{\mathbf{k}} \quad (10-109)$$



شکل ۱۰-۴۰ دو سیم نیم‌بینهایت

مثال ۱۰-۱۶ دو سیم نیم‌بینهایت: دو سیم نیم‌بینهایت همانند شکل

(۱۰-۴۰) قرار دارند. جریان I در راستای $-\hat{\mathbf{j}}$ به مبداء مختصات می‌رسد

و سپس در سیم افقی در راستای $+\hat{\mathbf{i}}$ جریان می‌یابد. میدان مغناطیسی را در ربع اول، یعنی در نقاط با $x, y > 0$ ، در صفحه xy حساب کنید.

حل: نقطه‌ی دلخواه $P(x, y)$ را در ربع اول در نظر بگیرید. نقطه‌ی P

در فاصله‌ی r_1 از نقطه‌ی $(0, y')$ واقع در روی محور y قرار دارد و

فاصله‌اش از نقطه‌ی $(x', 0)$ در روی محور x برابر r_2 است. با استفاده از

قانون بیو-سوار میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P می‌توان به صورت

زیر نوشت

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{\epsilon\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^\gamma} = \frac{\mu_0 I}{\epsilon\pi} \int_y \frac{d\vec{\ell}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_1}{r_1^\gamma} + \frac{\mu_0 I}{\epsilon\pi} \int_x \frac{d\vec{\ell}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_2}{r_2^\gamma} \quad (10-110)$$

انتگرال‌ها روی سیم‌های در امتداد محور y و محور x گرفته می‌شوند. بگذارید هر بخش را جداگانه بررسی کنیم.

(۱) جزء طول کوچک $d\vec{\ell}_1 = -dy' \hat{\mathbf{j}}$ را در امتداد محور y در نظر بگیرید. فاصله‌ی این جزء طول تا نقطه‌ی P عبارت است از

$$\mathbf{r}_1 = x \hat{\mathbf{i}} + (y - y') \hat{\mathbf{j}}$$

ضرب خارجی $d\vec{\ell}_1 \times \mathbf{r}_1$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$d\vec{\ell}_1 \times \mathbf{r}_1 = (-dy' \hat{\mathbf{j}}) \times [x \hat{\mathbf{i}} + (y - y') \hat{\mathbf{j}}] = x dy' \hat{\mathbf{k}} \quad (10-111)$$

(۲) به همین ترتیب، در راستای محور x هم داریم $d\vec{\ell}_2 = dx' \hat{\mathbf{i}}$ و $\mathbf{r}_2 = (x - x') \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}$. بنابراین،

$$d\vec{l}_\varphi \times \mathbf{r}_\varphi = (dx' \hat{\mathbf{i}}) \times [(x-x') \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}] = y dx' \hat{\mathbf{k}} \quad (10-112)$$

پس، می بینیم که میدان مغناطیسی در نقطه‌ی P در جهت $+z$ است. با استفاده از نتایج بالا و با جاگذاری‌های

$$r_\varphi = \sqrt{(x-x')^2 + y^2} \quad \text{و} \quad r'_\varphi = \sqrt{x'^2 + (y-y')^2}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi} \int_0^\infty \frac{x dy'}{[x'^2 + (y-y')^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi} \int_0^\infty \frac{y dx'}{[y'^2 + (x-x')^2]^{3/2}} \quad (10-113)$$

انتگرال‌ها با استفاده از دستور

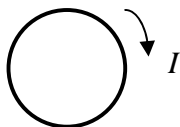
$$\int_0^\infty \frac{b ds}{[b^2 + (a-s)^2]^{3/2}} = \frac{1}{b} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (10-114)$$

به سادگی قابل محاسبه اند. خواهیم داشت

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{\epsilon \pi} \left[\frac{1}{x} + \frac{y}{x \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y \sqrt{x^2 + y^2}} \right] \hat{\mathbf{k}} \quad (115)$$

پرسش‌های مفهومی

- ۱- قانون بیو-ساوار را در مغناطوستاتیک با قانون کولمب مقایسه کنید و تفاوت‌های آنها را توضیح دهید.
- ۲- اگر جریان از یک فنر بگذرد، آیا فنر کشیده می‌شود یا فشرده می‌شود؟ توضیح دهید.
- ۳- از دو حلقه‌ی دایره‌ای هم مرکز و هم صفحه با قطرهای متفاوت جریان‌های پایا و هم جهت می‌گذرد. این دو حلقه یکدیگر را می‌ربایند یا یکدیگر را می‌رانند؟ توضیح دهید.
- ۴- سه سیم بینهایت دراز و موازی چنان سامان داده شده‌اند که اگر از روبرو به آنها نگاه کنیم در سه گوشه‌ی یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌بینیم. آیا می‌توان سیم‌ها را چنان سامان داد (ترکیبی از جریان‌های به سوی درون صفحه و بیرون از صفحه) که هر سه سیم (الف): همدیگر را برابیند؛ (ب) همدیگر را برانند؟
- ۵- جریان در یک سیم دراز و در یک حلقه‌ی دایره‌ای برابر شکل روبروست.



شکل ۱۰-۴۱

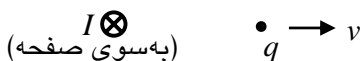
نیروی که به سیم دراز وارد می‌شود

(الف): صفر است (ب): به سوی صفحه است

(پ): به سوی بیرون از صفحه است

(ت): روبه بالاست (ج): رو به پایین است

- ۶- سیمی راستی را در نظر بگیرید که از آن جریان I می‌گذرد. جهت جریان به سوی درون صفحه است. بار مثبتی در راستای شعاعی از سیم دور می‌شود. جها نیرویی که به بار وارد می‌شود، کدام است؟



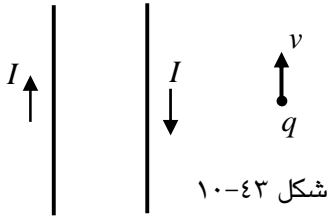
شکل ۱۰-۴۲

(الف): به سوی چپ (ب): به سوی راست

(پ): رو به بالا (ت): رو به پایین

(ج): به سوی درون صفحه (چ): بیرون از صفحه

۷- از دو سیم بینهایت دراز برابر شکل جریان‌های I در دو جهت مخالف می‌گذرد. بار مثبت q با سرعت v در راستایی که نشان داده شده است، حرکت می‌کند. جهت نیروی مغناطیسی وارد به بار q کدام است؟



شکل ۴۳-۱۰

(الف): به سوی چپ

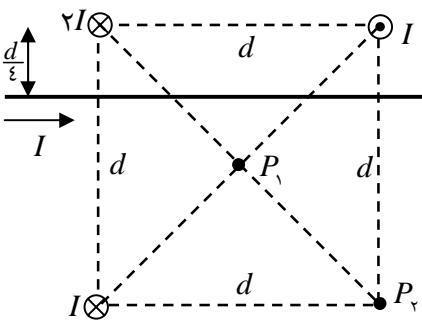
(ب): به سوی راست

(پ): به سوی درون صفحه

(ت): به سوی بیرون از صفحه

مسئله‌ها:

۱-۱ چگالی بار سطحی یکنواخت در روی یک پوسته‌ی کروی توخالی σ است. پوسته حول محور قائم خود با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. شدت میدان مغناطیسی را در "قطب شمال" یعنی در روی نقطه‌ای که بر روی محور چرخش و بر روی پوسته است، پوسته حساب کنید



شکل ۱۰-۴۴ سیم جریان در سه گوشه

۱۰-۲ سه سیم جریان در سه گوشه‌ی مربع: سه سیم جریان دراز و موازی برابر شکل (۱۰-۴۴) در سه گوشه‌ی یک مربع به ضلع d قرار دارند. جریان در یکی از سیم‌ها $2I$ و به سمت درون صفحه است. جریان در دو سیم دیگر I است و در دو جهت خلاف هم اند.

(الف): شدت میدان مغناطیسی را در نقاط P_1 و P_2 حساب کنید.

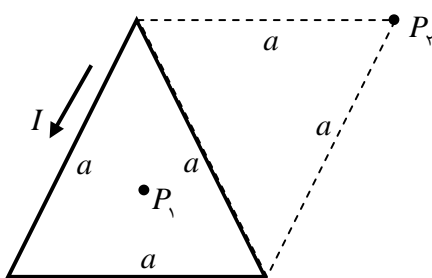
(ب): نیروی کل که به در واحد طول هر سیم وارد می‌شود، چقدر است؟

(پ): سیم افق چهارمی در فاصله‌ی $d/4$ در زیر ضلع بالایی مربع به این آرایه افزوده می‌شود. جریان در این سیم I و از چپ به راست است. حالا چه نیرویی به هر یک از سیم‌ها وارد می‌شود؟

۱۰-۳ سیم رسانایی را به شکل یک مثلث متساوی‌اضلاع در آورديم. شکل (۱۰-۴۵) را ببینید. از حلقه‌ی مثلث جریان I می‌گذرد.

(الف): با استفاده از قانون بیو-ساوار میدان مغناطیسی را در مرکز حلقه، نقطه‌ی P_1 حساب کنید. (راهنمایی: میدان هر ضلع را جداگانه حساب کنید.)

(ب): با استفاده از قانون بیو-ساوار میدان مغناطیسی را در نقطه‌ی P_2 حساب کنید



شکل ۱۰-۴۵ حلقه‌ی مثلث