فصل ۹

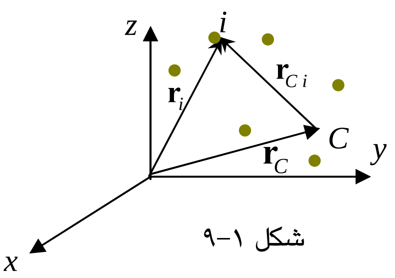
ایستایی‌شناسی جسم سخت

در فصل ۳ ترازمندی ایستایی تک‌ذره را بررسی کردیم. در برخی مثال‌ها هم که سامانه جسم دارای بعد بود، آن را نیز به تک ذره کاهش دادیم. در آنجا اساس کار این بود که راستای اثر نیروهای وارد به جسم باید در یک نقطه‌ی روی جسم یکدیگر را قطع کنند. درست است که برخی مسئله‌ها و مثال‌ها شامل یک جفت جسم بودند که با ریسمان به هم پیوسته بودند و راستای نیروهای وارد به سامانه، همگی در یک نقطه یکدیگر را قطع نمی‌کردند. اما، هرگاه یکی از اجزاء سامانه را جداگانه در نظر گرفتیم، در حقیقت راستای نیروهای وارد به آن همگی در یک نقطه به هم رسیدند و معادله‌های ترازمندی ایستایی را توانستیم برای هر جسم به طور جداگانه بنویسیم و هر جسم را به صورت یک تک ذره در نظر بگیریم.

در این فصل، ایستایی‌شناسی جسم سخت دارای بعد را بررسی می‌کنیم که راستای اثر نیروهای وارد به آن یکدیگر را در یک نقطه قطع نمی‌کنند. چنین مجموعه‌ای از نیرو ها، یک ویژگی دیگر هم به وجود می‌آورد. افزون بر انتقال، این نیروها تمایل دارند که جسم را بچرخانند. در نتیجه، اگر بخواهیم شرایط ترازمندی ایستایی جسمی را بررسی کنیم که تحت تأثیر مجموعه‌ی دلخواهی از نیروها قرار دارد، نه تنها باید ترازمندی در برابر جابه‌جایی انتقالی، بلکه ترازمندی چرخشی آن را هم به حساب بیاوریم.

۹-۱ مرکزجرم سامانه‌ی ذرات

مفهوم مرکز جرم در حل مسئله‌های دینامیک و استاتیک بسیار سودمند است. از این رو، نخست به تعریف مرکز جرم سامانه‌ی با Nذره می‌پردازیم و سپس مختصات آن را نسبت به هر چارچوب کارتزیOXYZ به دست می‌آوریم. سامانه‌ای N ذره در (۹ -۱) نشان داده شده است. بردار شعاعی این ذره ها را $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N$ بنامید.



شکل ۹-۱

فرض کنید جرم ذره‌ها $m_1, m_2, \cdots m_N$ اند. بردار $\mathbf{r}_i$ ، بردار شعاعی ذره‌ی i-ام است. نقطه‌ای مانند C را انتخاب کنید و بردار شعاعی $\mathbf{r}_C$ را از O به C بکشید و سپس از C بردار شعاعی $\mathbf{r}_{Ci}$را به ذره‌ی i-ام بکشید. سه بردار $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{r}_C$ و $\mathbf{r}_{Ci}$ مثلث بسته‌ای می‌سازند که معادله‌ی آن عبارت است از:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_{Ci} \qquad (۹\text{-}۱)$$

اگر رابطه‌ی (۹-۱) را در m_i ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$m_i\mathbf{r}_i = m_i\mathbf{r}_C + m_i\,\mathbf{r}_{Ci} \qquad (۹\text{-}۲)$$

برای هر یک از N ذره‌ی می‌توان یک چنین معادله‌ای نوشت. اگر همه‌ی این معادله ها را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots m_N\mathbf{r}_N = \left(m_1 + m_2 + \ldots m_N\right)\mathbf{r}_C + m_1\mathbf{r}_{C1} + m_2\mathbf{r}_{C2} + \ldots + m_N\mathbf{r}_{CN} \qquad (۹\text{-}۳)$$

می‌توان این معادله را با نمادگذاری ساده‌تری به صورت زیر نوشت

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\mathbf{r}_C + \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_{Ci} \qquad (۹\text{-}۴)$$

توجه بکنید که روی بردار $\mathbf{r}_C$ جمع بسته نشده است، چون $\mathbf{r}_C$ برای همه‌ی ذره‌ها یکسان است. یکبار که نقطه‌ی C را برگزیده

باشیم، آنگاه بردار $\mathbf{r}_C$ همواره ثابت می‌ماند. به بیان دیگر، $\mathbf{r}_C$ هیچ زیرنویسی برای جمع بستن روی آن ندارد. این گونه جمع بستن روی بردارها، جمع برداری اند. اگر در رابطه‌ی (۴− ۹) جمع دوم سمت راست صفر باشد، یعنی اگرداشته باشیم

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_{C\,i} = 0 \qquad (۹−۵)$$

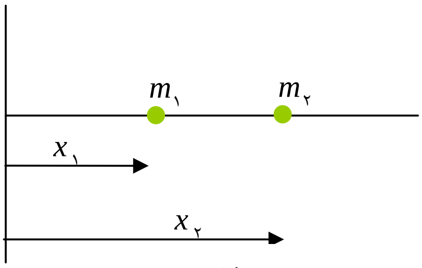
گوییم نقطه‌ی C مرکز جرم سامانه است. چنانچه این شرط برقرار باشد، معمولاً $\mathbf{r}_C$ را با $\mathbf{R}$ نشان می‌دهند. پس، اگر رابطه‌ی (۵−۹) برقرار باشد، از رابطه‌ی (۴−۹) داریم:

$$M\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \qquad (۹−۶)$$

که در آن M جرم کل همه‌ی ذره‌هاست $\left(M = \sum_{i=1}^{N} m_i\right)$. کمیت $\mathbf{R}$ بردار شعاعی از هر مبداء O به مرکز جرم سامانه است. مؤلفه‌های کارتزی بردار مرکزجرم $\mathbf{R}$ عبارتند از:

$$X_R = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M} \quad , \quad Y_R = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M} \quad , \quad Z_R = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M} \qquad (۹−۷)$$

ساده‌ترین مثال، یافتن مرکز جرم دو ذره با جرم‌های m_1 و m_2 است. اگر خطی که دو ذره را به هم وصل می‌کند روی محور x باشد، چون مختصات y و z هر دو صفرند، روشن است که مرکز جرم روی محور x قرار خواهد داشت. .شکل (۲− ۹) این وضعیت را نشان می‌دهد. مؤلفه‌ی x مرکزجرم عبارت است از



شکل ۲−۹

$$\mathbf{R}_X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (۹ −۸)$$

برای حالت خاصی که جرم دو ذره با هم برابر باشد، مرکزجرم در نیم راه خطی قرار می‌گیرد که دو جسم را به هم وصل می‌کند. مختصات مرکز جرم یک سامانه‌ی مرکب را می‌توان با تقسیم‌کردن آن به اجزاء کوچک‌تر هم حساب کرد. کافی است که نخست مرکزجرم هر جزء را حساب کنیم و سپس مرکز این مرکز جرم‌ها را پیدا کنیم. برای مثال؛ پتک شکل (۳−۹) را در نظر بگیرید که از یک سر مکعبی به ضلع $2a$ و دسته‌ای به طول b تشکیل شده است. می‌خواهیم مرکزجرم آن را بیابیم. برای این کار بهتر است سامانه را ترکیبی از دو جسم، سر و دسته، در نظر بگیریم. نشان دادن این که، این کار پذیرفتنی است دشوار نیست. فرض کنید سامانه‌ی N ذره‌ای بالا را به دو بخش تقسیم کنیم یک بخش با k ذره و بخش دیگر با $N-k$ ذره. جرم های دو بخش عبارتند از:

شکل ۳−۹

$$M_1 = \sum_{i=1}^{k} m_i \quad , \quad M_2 = \sum_{i=k+1}^{N} m_i \qquad (۹−۹)$$

و داریم $M = M_1 + M_2$. بردار شعاعی مرکزجرم هر کدام عبارت است از

$$M_1 R_1 = \sum_{i=1}^{k} m_i \mathbf{r}_i \qquad , \qquad M_2 R_2 = \sum_{i=k+1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \tag{۹-۱۰}$$

روشن است که

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=k+1}^{N} m_i \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \tag{۹-۱۱}$$

و معادله‌ی (۹-۶) به صورت زیر درمی‌آید

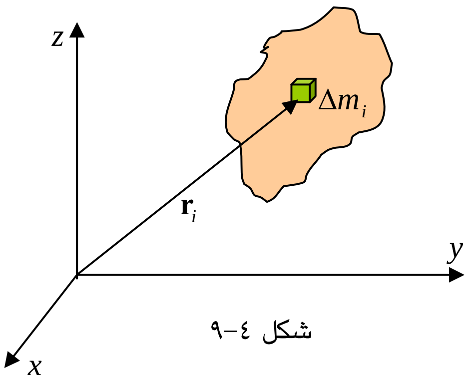
$$M\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{k} m_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=k+1}^{N} m_i \mathbf{r}_i = M_1 \mathbf{R}_1 + M_2 \mathbf{R}_2 \tag{۹-۱۲}$$

مؤلفه‌ی x معادله‌ی (۹-۱۲) عبارت است از:

$$MR_x = M_1 R_{x1} + M_2 R_{x2} \tag{۹-۱۳}$$

و این درست همانند حالت دو ذره [رابطه (۹-۷)] است.

۹-۲ مرکزجرم جسم سخت



شکل ۹-٤

اگرچه مکان مرکزجرم جسم سخت اندکی پیچیده‌تر است، اما هنوز هم گفتار بخش ۹-۱ چاره ساز است. جسم سخت دارای بعد را می‌توان سامانه‌ای با تعداد بسیار زیاد ذرات پنداشت که جدایی میان ذره‌ها بسیار کوچک است. در این صورت جسم را می‌توان مانند شکل (۹-٤) به صورت توزیع پیوسته‌ی جرم فرض کرد. اگر جسم را به اجزاء جرم Δm_i با مختصات x_i, y_i, z_i تقسیم کنیم، آنگاه می‌بینیم که، برای مثال، مولفه‌ی x مرکزجرم به تقریب $R_x = (1/M)\sum_i^N x_i \Delta m_i$ است. رابطه‌های مشابهی هم برای R_y و R_z می‌توان نوشت. اگر اجازه دهیم که تعداد عناصر جرم، N ، به بینهایت میل کند آنگاه R_x دقیق‌تر هم می‌شود. در این حد، علامت جمع به انتگرال و Δm_i به عنصر دیفرانسیل dm تبدیل می‌شوند و خواهیم داشت

$$R_x = \ell im_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum x_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{\int x dm}{\int dm} \tag{۹-۱٤}$$

همین طور برای مؤلفه‌های R_y و R_z داریم

$$R_y = \frac{1}{M}\int y dm \qquad , \qquad R_z = \frac{1}{M}\int z dm \tag{۹-۱۵}$$

یا اگر به صورت برداری نشان دهیم ، بردار مکان مرکزجرم، $\mathbf{R}$ ، عبارت است از

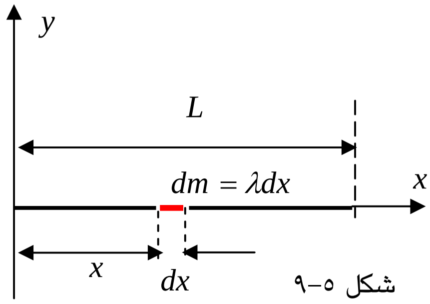
$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm \tag{۹-۱٦}$$

یک نتیجه‌گیری آنی گفتار بالا این است که مرکزجرم اجسام همگن و متقارن باید روی محـور تقارن آنها باشد. برای نمونه، مرکز جرم میله‌ی همگن باید روی میله و در نیمراه بین دو انتها (وسط) باشد. مرکز جرم کره‌ی یا مکعب همگن باید در مرکز

هندسی آنها باشد. در مثال‌های زیر برخی از حالت ها را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱-۹ **(الف)**: نشان دهید که مرکز جرم میله‌ای همگن به جرم M و به طول L در وسط میله است.

(ب): فرض کنید میله ناهمگن است و مانند شکل (۵-۹) جرم واحد طول با فاصله از یک انتهای میله تغییر کند، $\lambda = \alpha x$، که در آن α مقدار ثابتی است. مؤلفه‌ی x مرکزجرم را برحسب طول L بیابید.



شکل ۵-۹

حل: **(الف)** بنا به تقارن $R_y = R_z = 0$ است (اگر میله در راستای محور x ها باشد). اگر جرم در واحد طول را λ بنامیم (چگالی خطی جرم) برای میله‌ی همگن داریم $\lambda = M/L$. میله را به جزء‌های با طول dx تقسیم کنید، جرم هر جزء $dm = \lambda dx$ است. چون یکی از این جزء‌های دلخواه در فاصله‌ی x از مبداء قرار دارد (شکل۵- ۹) از رابطه‌ی (۱۴-۹) داریم

$$R_x = \frac{1}{M}\int_0^L x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\lambda dx = \frac{\lambda}{M}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} \qquad (۹-۱۷)$$

چون $\lambda = M/L$ است، بنابراین:

$$R_x = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \frac{L}{2} \qquad (۹-۱۸)$$

(ب): در این حالت هم $dm = \lambda\, dx$ است، اما مانند قسمت (الف) λ دیگر مقدار ثابت نیست. پس

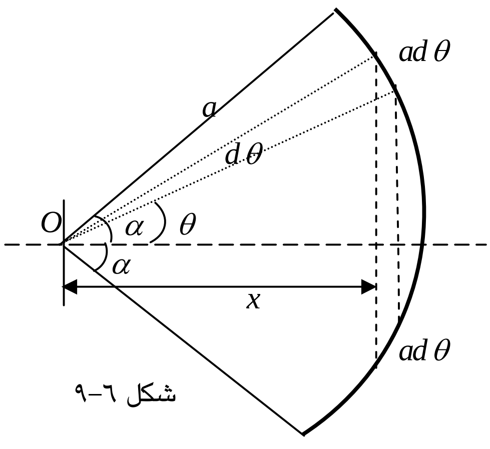
$$R_x = \frac{1}{M}\int_0^L x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\lambda dx = \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2 dx = \frac{\alpha L^3}{3M} \qquad (۹-۱۹)$$

می‌توان α را حذف کرد. کافی است توجه داشته باشیم که جرم کل M را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L \alpha x dx = \frac{\alpha L^2}{2} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{2M}{L^2} \qquad (۹-۲۰)$$

و در نتیجه: $R_x = \alpha L^3 \big/ (3\,\frac{\alpha L^2}{2}) = 2L/3$

مثال۲-۹: سیم یکنواختی را برابر شکل (۶-۹) به صورت خمی از یک دایره به شعاع a و با زاویه‌ی مرکزی 2α درآورده‌ایم. مرکزجرم این سیم خمیده را بیابید.



شکل ۶-۹

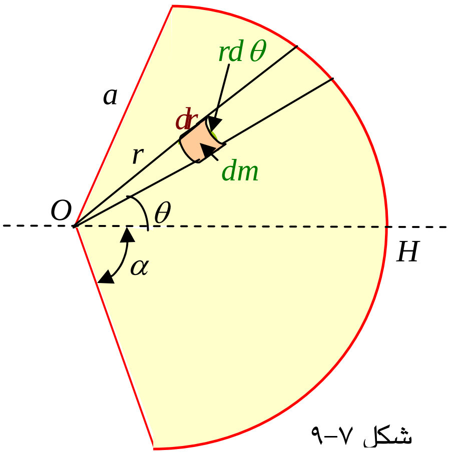
حل: فرض کنید جرم واحد طول سیم λاست. روشن است که به خاطر تقارن، مرکزجرم سیم روی محور تقارن OAخواهد بود، ما این محور را محور x ها انتخاب می‌کنیم (شکل۶-۹). عنصرهای متقارن $a\,d\theta$ را همانند شکل در نظر بگیرید. مرکز جرم این دو عنصر متقارن در نیم‌راه بین آنها روی خط OA قرار دارد که در فاصله‌ی x از مرکز O است و جرم موثر

آن $2a\lambda d\theta$ است. برای هر جفت جزء جرم متقارن دیگرهم این چین است. بنابراین، مرکز جرم R_x تمامی سیم روی محور x خواهد بود. چون $x = a\cos\theta$ پس داریم

$$R_x = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{\alpha} 2\lambda a^2 \cos\theta d\theta}{\int_0^{\alpha} 2\lambda a d\theta} = \frac{a\sin\alpha}{\alpha} \qquad (9\text{-}21)$$

مثال۳-۹ مرکز جرم قطاعی از یک رویه‌ی دایره‌ای به شعاع a و زاویه‌ی مرکزی 2α را به دست آورید. نخست به طور مستقیم و با گزینش جرء جرم دلخواه محاسبه را انجام دهید و سپس با استفاده از نتیجه‌ی مثال (۲ـ ۹) آن را حساب کنید.

حل: **(الف) روش ۱= محاسبه ی مستقیم**:



شکل ۷-۹

جزء جرم dm را همانند شکل (۷-۹) در فاصله‌ی r از نقطه‌ی O در نظر بگیرید. مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده $r\,dr\,d\theta$ است. پس، جرم آن $dm = \sigma\, r dr d\theta$ است که در آن σ چگالی سطحی جرم؛ یعنی جرم در واحد سطح است. روشن است که چون پوسته همگن است؛ مرکز جرم روی خط OH یا محور تقارن قرار دارد. این محور تقارن را محور x بنامید. پس داریم:

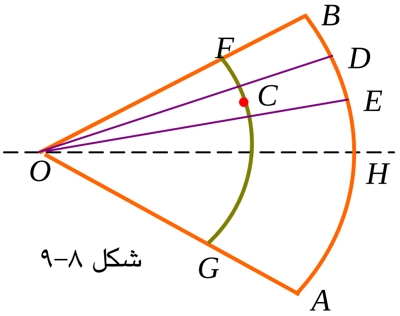
$$R_x = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x\,\sigma r dr d\theta}{\int \sigma r dr d\theta} \Rightarrow R_x = \frac{\int (r\cos\theta)\sigma r dr d\theta}{\int \sigma r dr d\theta} \qquad (9\text{-}22)$$

توجه کنید که به جای x قرار دادیم $x = r\cos\theta$. انتگرال بالا یک انتگرال دوگانه است. در این انتگرال متغیر r از صفر تا a و متغیر θ از $-\alpha$ تا α تغییر می‌کنند.

$$R_x = \frac{\sigma\int r^2\cos\theta dr d\theta}{\sigma\int r dr d\theta} = \frac{\sigma\int_0^a r^2 dr\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta d\theta}{\sigma\int_0^a r dr\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{\frac{1}{3}\sigma a^3(\sin\theta)\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\frac{1}{2}\sigma a^2(\theta)\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}$$

$$\Rightarrow R_x = \frac{\frac{1}{3}a^3\sigma(2\sin\alpha)}{\frac{1}{2}a^2(2\alpha)} = \frac{2a}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad (9\text{-}23)$$

روش ۲- استفاده از مثال ۲-۹ : در شکل (۸-۹) صفحه‌ی OAB با زاویه‌ی مرکزی 2α و شعاع a نشان داده شده است.

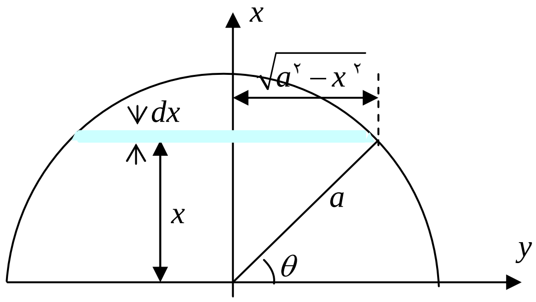


شکل ۸-۹

می‌توان مثلث کوچک ODE را عنصر انتگرال‌گیری انتخاب کرد. در هر مثلث، مرکز جرم محل برخورد میانه‌هاست. اگر نقطه‌ی C محل برخورد میانه‌های این مثلث کوچک باشد، این نقطه در فاصله‌ی ۲/۳ از رأس قرار دارد. می‌توانیم رویه را به مثلث‌های کوچک هم‌اندازه تقسیم کنیم. مرکز جرم همه‌ی این مثلث‌ها روی خم FG قرار خواهند گرفت که شعاع آن $2a/3$ است. اگر مثلث‌ها را درواقع بسیار کوچک

فرض کنیم، در عمل، خم FG را می‌توان به صورت سیمی در نظر گرفت که بخشی از پیرامون دایره‌ای به شعاع $۲a/۳$ است. در نتیجه؛ از رابطه‌ی (۲۱-۹)، مثال ۲-۹ می‌توان استفاده کرد. پس، مرکزجرم FG و در نتیجه، مرکزجرم قطاع OAB، روی خط OH به فاصله‌ی $R_x = (2a/3)(\sin\alpha/3\alpha) = 2a\sin\alpha/3\alpha$ از O قرار خواهد گرفت

مثال ۴ ـ ۹: مرکزجرم نیم‌کره‌ی توپر به شعاع a با توزیع جرم یکنواخت رابیابید.



شکل ۹-۹

حل: چون نیم‌کره تقارن هندسی دارد، می‌دانیم کـه مرکز جرم روی محور تقارن آن خواهد بود. اگر این محور را محور x ها در بنامیم، آنگاه کافی ست R_x را حساب کنیم. جزء جرم را بُرشی به ضخامت dx و در فاصله‌ی x از مرکز نیمکره انتخاب می‌کنید. شعاع این برش $(a^۲ - x^۲)^{۱/۲}$ است و در شکل (۹-۹) نشان داده شده است. جرم این برش $dm = \rho\pi(a^۲ - x^۲)dx$ است که در آن ρ چگالی حجمی جرم است. بنابراین، داریم

$$R_x = \frac{\int_۰^a \rho\pi x\,(a^۲ - x^۲)dx}{\int_۰^a \rho\pi(a^۲ - x^۲)dx} = \frac{۳}{۸}a \qquad (۹-۲۴)$$

مثال ۵-۹ : مرکزجرم یک رویه‌ی نیمکره به شعاع a را به دست آورید. توزیع جرم روی سطح رویه است.

حل: دستگاه مختصات را همانند مثال٤-۹ در نظر بگیرید. در اینجا نیز به خاطر تقارن، مرکزجرم روی محور x ها خواهد بود. جزء جرم را روبانی به پهنای $a\,d\theta$ برگزینید (توجه کنید که تفاوت این مثال با مثال پیشین در این است که این بار جرم روی سطح توزیع شده است و جزء جرم dm در روی سطح کره است.) بنابراین: $dm = \sigma dA = 2\pi(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} a d\theta$. که در آن dA جزء سطح و σ چگالی سطحی جرم است. همان‌گونه که از شکل (۹-۹) می‌توان دید داریم:

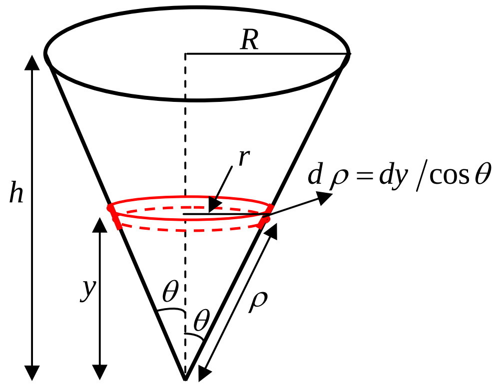
$$\theta = \sin^{-۱}\left(\frac{x}{a}\right) \;\Rightarrow\; d\theta = \left(a^۲ - x^۲\right)^{-۱/۲} dx \quad \Rightarrow \quad dm = ۲\pi a\sigma dx$$

$$\Rightarrow\Rightarrow \quad R_x = \frac{\int_۰^a \sigma ۲\pi a\, x\, dx}{\int_۰^a \sigma ۲\pi\, a\, dx} = \frac{۱}{۲}a \qquad (۹-۲۵)$$

مثال ۶-۹ (الف): مرکز جرم سطح مخروطی با شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع h را به دست آورید.

(ب): اگر مخروط توپر باشد، مرکزجرمش را حساب کنید.

حل: **(الف)**: قیف را مانند شکل (۱۰-۹) به باریکه‌های افقی بُرش دهید. داریم:



شکل ۱۰-۹

$$\cos\theta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{y}{\cos\theta} \Rightarrow d\rho = \frac{dy}{\cos\theta} \qquad (۹-۲۶)$$

مساحت باریکه‌ی روبان‌مانند عبارت است از

$$\begin{aligned} dA &= (2\pi r)(d\rho) = (2\pi r)\frac{dy}{\cos\theta} \\ &= 2\pi(y\,\tan\theta)\left(\frac{dy}{\cos\theta}\right) = 2\pi y dy\,\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \end{aligned} \qquad (۹-۲۷)$$

طول یال مخروط $h/\cos\theta$ و مساحت آن $A = \frac{1}{2}\left(2\pi R\,\frac{h}{\cos\theta}\right)$ است. پس،

جرم کل مخروط عبارت است از $M = \sigma A = \sigma\frac{1}{2}\left(2\pi R\,\frac{h}{\cos\theta}\right)$. پس،

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} y_{CM} &= \frac{1}{M}\int y dm = \frac{1}{\sigma\pi R\,h/\cos\theta}\int y\,(\sigma dA) = \frac{1}{\cancel{\sigma}\,\cancel{\pi}R\,h/\cos\theta}\int y\,\cancel{\sigma}\,2\cancel{\pi}\,y dy\,\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{2\tan\theta}{Rh}\int_0^h y^2 dy = \frac{2\tan\theta}{Rh}\left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{h^2}{R}\right)\tan\theta \end{aligned} \qquad (۹-۲۸)$$

چون $h\tan\theta = R$ است، پس

$$y_{CM} = \frac{2}{3}h \qquad , \qquad x_{CM} = 0 \qquad (۹-۲۹)$$

ب): این بار مخروط را به قرص‌های افقی به شعاع r بُرش دهید. توجه کنید که جرم در حجم مخروط توزیع شده است و $\sigma \sim \mathrm{kg/m^3}$ است. با توجه به شکل (۱۰-۹) روشن است که حجم هر قرص $dV = \pi r^2 dy$ و جرم آن $dm = \sigma\pi(y\,\tan\theta)^2 dy$ است. جرم کل مخروط برابر است با $(\pi R^2 h/3)$ $M = \sigma V = \sigma(\pi R^2 h/3)$. بنابراین ، داریم

$$\begin{aligned} y_{CM} &= \frac{1}{M}\int y dm = \frac{1}{(1/3)\sigma\pi R^2 h}\int y\,\sigma\pi y^2\tan^2\theta dy = \frac{3\tan^2\theta}{R^2 h}\int_0^h y^3 dy \\ &= \frac{3\tan^2\theta}{R^2 h}\left(\frac{h^4}{4}\right) = \frac{3}{4}\frac{h^3}{R^2}\tan^2\theta \end{aligned} \qquad (۹-۳۰)$$

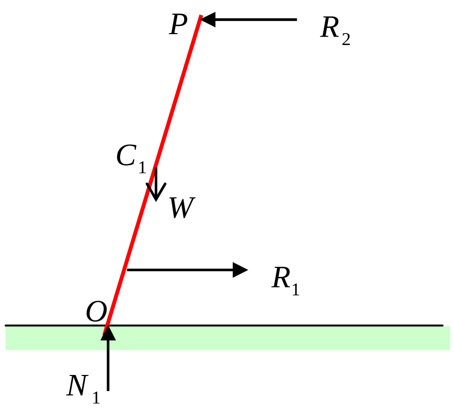
اگر قرار دهیم $h\tan\theta = R$ خواهیم داشت

$$y_{CM} = \frac{3}{4}\frac{\left(h\,\cancel{(h\tan\theta)^2}\right)}{\cancel{R^2}} = \frac{3}{4}h \qquad (۹-۳۱)$$

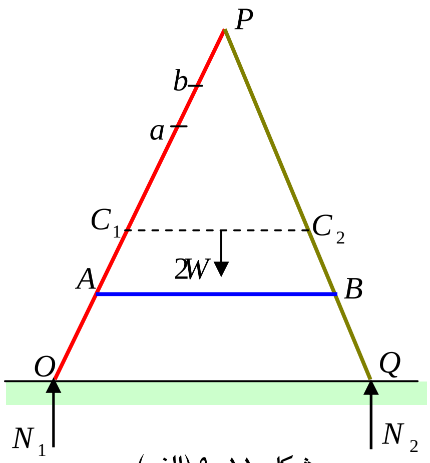
۹-۳ ترازمندی جسم سخت؛ نیروهای خارجی و درونی

پیش از آنکه به شرایط لازم برای ترازمندی جسم دارای بعد بپردازیم، لازم است کران‌های هندسی جسم را در نظر بگیریم. برای مثال، ترازمندی دو نردبان همگن و یکسان OP و OQ شکل (۱۱-۹ الف) را در نظر بگیرید که در نقطه‌ی بدون اصطکاک

P به هم چسبیده‌اند و میله‌ی بدون جرم AB، دو نردبان را به هم وصل کرده است. مجموعه روی سطح بدون اصطکاک قرار دارد. فرض کنید که وزن هر نردبان W است.



شکل ۱۱-۹ (ب)

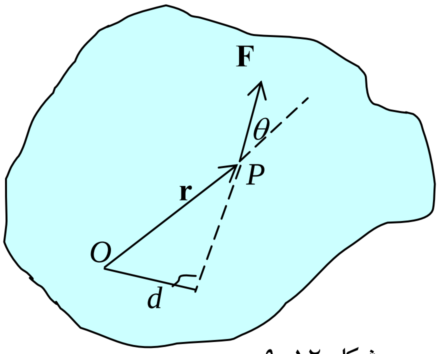


شکل ۱۱-۹ (الف)

نخست به بررسی سامانه‌ی دو نردبان و میله می‌پردازیم: نیروهای وارد بر این سامانه از سوی عامل‌های بیرونی عبارتند از وزن کل $۲W$ که به مرکزجرم هر یک از نردبان‌ها در C_1 و C_2وارد می‌شوند. همچنین نیروهای $N_۱$ و $N_۲$ (در اینجا به خاطر تقارن $N_۱ = N_۲$) که از طرف سطح به نردبان‌ها وارد می‌شوند نیروهای $۲W$ ، $N_۱$ و $N_۲$ *نیروهای خارجی* اند. افزون بر این نیروهای خارجی، *نیروهای درونی* نیز وجود دارند. نیروهای درونی آنهایی اند که مثلاً قسمت‌های مجاور به یکدیگر وارد می‌کنند؛ مانند نیرویی که aبه b یا برعکس وارد می‌کند؛ یا نیرویی که دو نردبان در نقطه‌ی تماس P به یکدیگر وارد می‌کنند. اگر سامانه‌ای از n ذره تشکیل شده باشد، نیروهای گرانش، الکتروستاتیک و یا نوع دیگر نیرو که بین جفت ذره ها وجود دارد، همگی نیروهای درون سامانه اند و نیروی درونی نامیده می‌شوند. در شکل (۱۱-۹ ب) یکی از نردبان‌ها نشان داده شده است. نیروهای خارجی در این سامانه عبارتند از: $N_۱$ (از طرف سطح)، W که نیروی گرانش است و به مرکز جرم آن در نقطه‌ی C_1 وارد می‌شود و نیروهای افقی $R_۱$ و $R_۲$ که به ترتیب نیروهای واکنش میله و نردبان PQ اند. توجه کنید که پیش‌تر برای سامانه‌ی دو نردبان ومیله $R_۱$ و $R_۲$ را به حساب نیاوردیم. زیرا برای آن سامانه $R_۱$ و $R_۲$ نیروهای درونی بودند. بزرگی یا گستردگی سامانه کاملاً دلخواه است و بنا به شرایط مسئله انتخاب می‌شوند؛ از این رو کدام نیرو درونی و کدام بیرونی است بستگی به این دارد که چه چیزی را "سامانه‌ی مورد بررسی" برگزینیم. آشکار است که اگر سامانه به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد ***همه‌ی*** نیروها ***درونی*** خواهند شد.

۹-۴ گشتاور نیرو و شرایط عمومی ترازمندی جسم سخت .

در فصل ٤-۷ درباره‌ی گشتاور نیرو سخن گفتیم. گشتاور نیرو در ترازمندی جسم سخت نقش مهمی بازی می‌کند. برای فهمیدن آن فرض کنید به جسمی که در شکل (۱۲-۹) از نقطه‌ی O آویخته شده است، نیروی $\mathbf{F}$ اثر کند. اثر این نیرو روی جسم به مکان نقطه‌ی اثر آن، P، بستگی دارد. اگر $\mathbf{r}$ بردار مکان نقطه‌ی P نسبت به O باشد، می‌دانیم که گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ نسبت به نقطه‌ی O عبارت ست از



شکل ۱۲-۹

$$\mathbf{G}=\mathbf{r}\times\mathbf{F} \tag{۹-۳۲}$$

که همان رابطه‌ی (۲۳-۷) است. بردار $\mathbf{G}$ بر صفحه‌ی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ عمود است و جهت آن را سوی چرخشی که نیرو به آن می‌دهد، تعیین می‌کند. تمایل و توانایی $\mathbf{F}$ برای چرخاندن جسم حول محوری که از نقطه‌ی O می‌گذرد به بازوی گشتاور، d (فاصله‌ی عمودی از نقطه‌ی O تا راستای اثر نیرو) و به اندازه‌ی $\mathbf{F}$ بستگی دارد. اگر چندین نیرو، $\mathbf{F}_۱,\mathbf{F}_۲\cdots\mathbf{F}_n$ همگی در نقطه‌ی P به جسم اثر کنند، جمع برداری گشتاور این نیروها، نسبت به O برابر است با گشتاور بردار برآیند آنها. فرض کنید برآیند این نیروها $\mathbf{F}$ باشد آنگاه داریم

$$\mathbf{G}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{r}\times(\mathbf{F}_۱+\mathbf{F}_۲+\cdots+\mathbf{F}_n)=\mathbf{r}\times\mathbf{F}_۱+\mathbf{r}\times\mathbf{F}_۲+\cdots+\mathbf{r}\times\mathbf{F}_n=\mathbf{G}_۱+\mathbf{G}_۲+\cdots+\mathbf{G}_n \tag{۹-۳۳}$$

اگر چند نیرو به سامانه‌ای از ذرات اثر کنند، مرکزجرم سامانه شتاب خطی پیدا خواهد کرد، انگار که همه‌ی نیروها به مرکزجرم اعمال شده است. بنابراین، برای اینکه سامانه ترازمندی انتقالی داشته باشد (شتابیده نشود) جمع برداری همه‌ی نیروها باید صفر باشد. در فصل ۱۰ هم‌چنین نشان خواهیم داد که اگر گشتاور نیروها حول محور دلخواهی که شتاب ندارد، غیر صفر باشد، سامانه‌ی ذرات شتاب زاویه‌ای پیدا خواهد کرد. بنابراین، برای این که سامانه شتاب زاویه‌ای نداشته باشد، جمع برداری گشتاورها نیروها نسبت به نقطه‌ای که محور چرخش از آن می‌گذرد باید صفر باشد. سامانه‌ی ذرات در اینجا جسم سخت تشکیل می‌دهند. بنابراین، اگر نیروهای $\mathbf{F}_۱,\mathbf{F}_۲\cdots\mathbf{F}_n$ به جسم سخت اثر کنند و اگر جمع برداری آنها صفر باشد

$$\mathbf{F}_۱+\mathbf{F}_۲+\mathbf{F}_۳+\cdots=۰ \tag{۹-۳۴}$$

آنگاه مرکزجرم؛ اگر از ابتدا ساکن بوده باشد، در حالت سکون باقی خواهد ماند و اگر در ابتدا حرکت یکنواخت داشت، به حرکت یکنواخت خود ادامه خواهد داد. این **شرط ترازمندی انتقالی** جسم است. هم‌چنین اگر جمع برداری گشتاور نیروهای وارد به جسم نسبت به یک محور صفر باشد

$$\mathbf{r}_۱\times\mathbf{F}_۱+\mathbf{r}_۲\times\mathbf{F}_۲+\cdots+\mathbf{r}_n\times\mathbf{F}_n=۰ \tag{۹-۳۵}$$

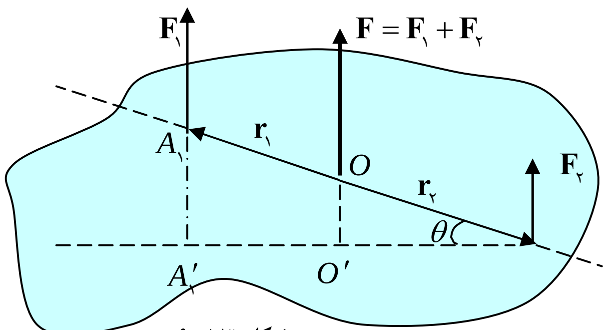
این بدان معنی است که تکانه‌ی زاویه‌ای جسم (یا حالت حرکت چرخشی جسم) تغییر نمی‌کند (به رابطه‌ی (۳۳-۷) نگاه کنید) و این شرط **ترازمندی چرخشی** جسم است؛ یعنی اگر جسم در ابتدا ساکن (بدون چرخش) باشد، چرخش آغاز نخواهد کرد. رابطه‌های (۳۴-۹) و (۳۵-۹) با هم شرط‌های لازم برای ترازمندی ایستایی کامل جسم سخت‌اند.

توجه کنید که در این بحث فرقی بین نیروهای خارجی و درونی نگذاشتیم؛ زیرا بنا به قانون سوم نیوتون نیروهای درونی به صورت جفت اند و جهت آنها مخالف هم است. پس، اثر هر عضو جفت‌نیرو در ایجاد شتاب انتقالی با اثر عضو دیگر خنثی می‌شود. اگر این نیروها مرکزی باشند، برآیند گشتاور نیروهای داخلی حول هر نقطه‌ای نیز صفر است. اگر یک جزء جسم به جزء همسایه چنان چسبیده باشد که فاصله‌ی آنها تغییر نکند این نیروها باید مرکزی باشند و این درواقع تعریف جسم سخت است. پس، در رابطه‌های (۳۴-۹) و (۳۵-۹) می‌توانیم به جای واژه‌ی نیرو از نیروهای خارجی نام ببریم.

پیامد سودمند و جالب دو شرط ترازمندی بالا برای جسم سخت این است که *اگر جسم سخت تحت تأثیر سه نیروی در حالت ترازمند باقی باشند، آن سه نیرو همگی در یک صفحه خواهند بود و هر سه در یک نقطه تلاقی خواهند کرد.* اگر چه اثبات این

گزاره دشوار نیست، ما در اینجا از آن خواهیم گذشت.

اگر چند نیروی موازی به یک جسم اثر کنند، می‌توان آنها را ترکیب و با یک نیرو جایگزین کرد. در شکل (۱۳-۹) دو نیروی موازی $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ در نقاط A_1 و A_2 به جسم اثر می‌کنند. اثر این نیروها را می‌توان با تک نیروی $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ جایگزین کرد که در نقطه‌ی O به جسم اثر می‌کند. تأثیر نیروی $\mathbf{F}$ روی جسم باید همان باشد که دو نیروی $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ با هم به وجود می‌آورند.



شکل ۱۳-۹

اگر این حرف درست باشد، افزون بر اینکه $\mathbf{F}$ باید با $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ برابر باشد، گشتاور آن نیز نسبت به هر نقطه‌ای باید با جمع برداری گشتاورهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ حول همان نقطه برابر باشد. این گزاره درست است، چون اگر $\mathbf{F}$ جایگزین $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ شود، آنگاه $\mathbf{F}$ باید همان تمایل و توانایی برای ایجاد چرخش (و نیز انتقال) را داشته باشد که نیروهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ دارند. به ویژه، چون $\mathbf{F}$ از نقطه O می‌گذرد، بنابراین گشتاور آن نسبت به O صفر است. پس، جمع برداری گشتاورهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ نیز باید نسبت به نقطه‌ی O صفر باشد. این لازم می‌دارد که اندازه‌ی گشتاورهای این دو نیرو با هم برابر باشند؛ زیرا آنها در جهت‌های خلاف هم حول محور گذرنده از O چرخش ایجاد می‌کنند. بنابراین، داریم

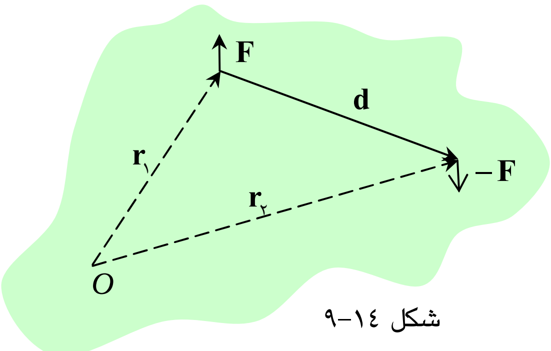
$$F_1\left(O'A'_1\right) = F_2(O'A_2) \qquad (۹-۳۶)$$

یا

$$F_1 r_1 \cos\theta = F_2 r_2 \cos\theta \qquad (۹-۳۷)$$

در نمادگذاری برداری این نتیجه عبارت است از:

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = 0 \qquad (۹-۳۸)$$



شکل ۹-۱٤

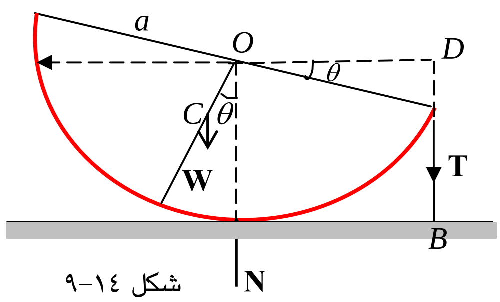
به همین روش نیروهای پادموازی را، به شرطی که اندازه‌ی آنها یکسان نباشد، می‌توان با یک نیرو جایگزین کرد. اما نمی‌توان دو نیروی پادموازی یک اندازه را که خط اثر آنها بر هم منطبق نیست با یک نیرو جایگزین کرد. یک چنین جفت نیرو را، **جفت‌شده** می‌گویند و نمی‌توان آن را به تک نیرو کاهش داد. نیروهای جفت‌شده، چرخش ایجاد می‌کنند اما باعث انتقال جسمی که به آن اثر می‌کنند، نمی‌شوند. یافتن گشتاور نیروهای جفت‌شده آموزنده است. فرض کنید درشکل (۹-۱٤) $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ نیروهای موازی باشند. $\mathbf{d}$ بردار شعاعی از نقطه‌ی اثر $\mathbf{F}$ به نقطه‌ی اثر $-\mathbf{F}$ است. نقطه‌ی دلخواه O را انتخاب کنید و بردارهای $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ را از این نقطه به نقطه‌ی اثر $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ بکشید. گشتاور هر یک از نیروها را نسبت به نقطه‌ی O حساب کنید و با هم جمع برداری کنید. گشتاور برآیند عبارت است از

$$\mathbf{G} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F} = \mathbf{F} \times \mathbf{d} \qquad (۹-۳۹)$$

زیرا $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\mathbf{d}$. می‌بینیم که وابستگی به $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ ناپدید می‌شود و در می‌یابیم که $\mathbf{G}$ مستقل از مکان نقطه‌ای است که گشتاورها نسبت به آن نقطه حساب شده‌اند. همچنین توجه به این نکته مهم است که لازم نیست O در صفحه‌ی نیروها باشد.

بنابراین، اثر نیروی جفت‌شده روی جسم سخت مثالی از بردار **آزاد** یا **ناجایگزیده** است؛ چون گشتاور آن نسبت به هر نقطه‌ی جسم سخت یکسان است. در حالی که، تک نیروی وارد به جسم، یک بردار **جایگزیده** است چون اثرش روی جسم، از جمله چرخش، به محل اثر (یا جایگزیدگی راستای اثر) بستگی دارد.

مثال ۷- ۹: نیم‌کره‌ی همگن توپری به وزن W روی سطح کاملاً هموار افقی قرار دارد. شعاع نیمکره a است. یک لبه‌ی آن (نقطه‌ی D) با ریسمان ناکشسان بدون وزن در روی سطح به نقطه‌ی B بسته شده است (شکل ۱۵-۹). طول ریسمان $b\,(b<a)$ است. کشش ریسمان را حساب کنید.



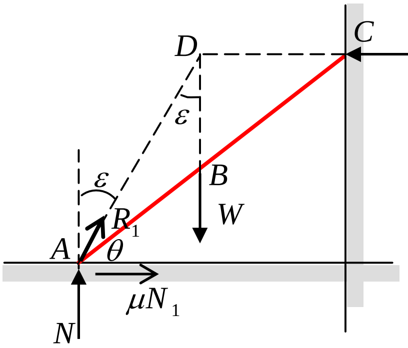
شکل ۱۴-۹

حل: نیمکره را منزوی کنید. نیروهای وارد بر آن عبارتند از: **W** که به مرکز جرم، C، در فاصله‌ی $3a/8$ از O (مثال ۴-۹ را ببینید) وارد می‌شود، نیروی واکنش سطح، **N**، و نیروی کشش ریسمان **T**. چون نقطه‌ی تماس بین سطح و نیمکره هموار است، **N** باید به سطح عمود باشد و از نقطه‌ی O بگذرد. چون **W** و **N** هر دو قائم‌اند، **T** هم باید قائم باشد و مؤلفه‌ی افقی نداشته باشد. نیمکره ترازمند است. بنابراین، برآیند نیروها باید صفر باشد: $W+T=N$. همچنین برآیند گشتاور نیروها نیز نسبت به هر نقطه‌ای باید صفر باشد. ما نقطه‌ی O را انتخاب می‌کنیم؛ چون راستای اثر **N** از O می‌گذرد و گشتاور **N** نسبت به O صفر است. بدین ترتیب نیروی ناشناخته‌ی **N** از محاسبات خارج می‌شود. برای این‌که تعادل برقرار باشد باید داشته باشیم $W\cdot\overline{OC}\sin\theta-Ta\cos\theta=0$. چون $\sin\theta=(a-b)/a$ و $\cos\theta=(2ab-b^2)^{1/2}/a$ و $\overline{CO}=3a/8$ اند، پس

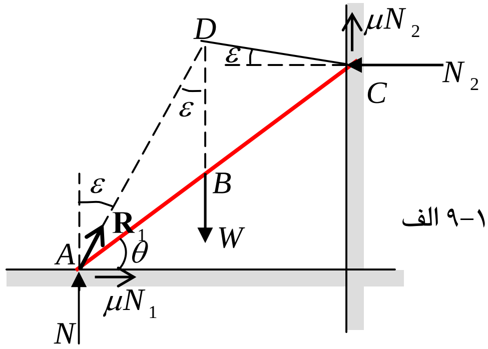
$$T=\frac{3}{8}\frac{W\,(a-b)}{\sqrt{2ab-b^2}} \qquad (9\text{-}40)$$

مثال ۸- ۹ نردبان یکنواخت سنگینی به دیوار ناهموار تکیه دارد و انتهای دیگر آن روی سطح افقی به همان اندازه ناهموار قرار دارد. زاویه‌ی اصطکاک ε است و نردبان در آستانه‌ی لغزش است. نردبان با سطح افقی چه زاویه‌ای می‌سازد؟

حل: در شکل (۱۶-۹ الف) نیروهای وارد به نردبان نشان داده شده‌اند. این نیروها عبارتند از وزن W که به مرکزجرم نردبان، B، وارد می‌شود و در راستای عمودی و به سمت پائین است. چون نقطه‌ی A درآستانه‌ی لغزش است. بنابراین، نقطه‌ی C نیز در آستانه‌ی لغزیدن است. نیروهای وارد به نقطه عبارتند از N_1 و μN_1 و نیروهای وارد به نقطه‌ی C عبارتند از N_2 و μN_2. یا برآیند آنها $\mathbf{R}_1$ در نقطه‌ی A و $\mathbf{R}_2$ در نقطه‌ی C. $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$، هرکدام با خط عمود زاویه‌ی ε می‌سازد؛ چون سامانه در ترازمندی حدی است (در آستانه‌ی لغزیدن است). پس، مسئله شامل سه نیروی $\mathbf{W}$، $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$ است که باید یکدیگر را در یک نقطه، مانند D، قطع کنند. در مثلث ABD داریم $\dfrac{\overline{AB}}{\sin\varepsilon}=\dfrac{\overline{AD}}{\cos\theta}$. از آنجائی که زاویه‌ی $ADC <$ برابر $\pi/2$ است، پس $\overline{AD}=\overline{AC}\cos\left(\pi/2-\varepsilon-\theta\right)$. از این دو رابطه و این که $\overline{AC}=2\overline{AB}$ خواهیم داشت:



شکل ۹-۱۶



شکل ۹-۱۶ الف

$$\cos\theta = 2\sin\varepsilon\sin(\varepsilon+\theta) = 2\sin^2\varepsilon\cos\theta + 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{1-2\sin^2\varepsilon}{2\sin\varepsilon\cos\varepsilon} = \frac{\cos 2\varepsilon}{\sin 2\varepsilon} = \cot 2\varepsilon \qquad (۹-۴۱)$$

و یا در حالت تعادل حدی (آستانه‌ی لغزش) : $\theta = (\pi/2) - 2\varepsilon$.

اگر دیوار هموار می‌بود، $\mathbf{R}_2$ بر دیوار عمود می‌شد، شکل (۹-۱۶ ب). در این حالت سه نیرو باز هم در D یکدیگر را قطع می‌کنند. این بار نقاط D و C خط افقی می‌سازند و داریم

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\varepsilon} = \frac{\overline{AD}}{\cos\theta'} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC}\sin\theta' = \overline{AD}\cos\varepsilon$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{AC}\sin\varepsilon\sin\theta'}{\cos\theta'\cos\varepsilon} = 2\overline{AB}\tan\varepsilon\tan\theta' \quad \Rightarrow \quad \tan\theta' = \frac{1}{2}\cot\varepsilon \qquad (۹-۴۲)$$

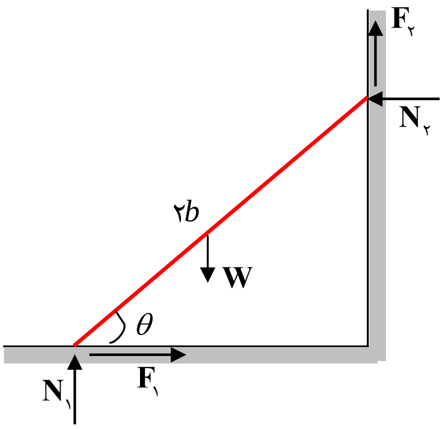
دشوار نیست که ببینیم θ' باید از θ بیشتر باشد. این از شکل‌های (۹-۱۶ الف و ۹-۱۶ ب) آشکار است و می‌توان به صورت زیر آن را آزمود.

$$\tan\theta = \cot 2\varepsilon = \frac{\cot^2\varepsilon - 1}{2\cot\varepsilon} = \tan\theta' - \frac{1}{2\cot\varepsilon} \qquad (۹-۴۳)$$

می‌توانستیم جواب‌های $\tan\theta$ و $\tan\theta'$ را با به کار بردن شرط‌های ترازمندی، $\sum\mathbf{F}=0$ و $\sum\mathbf{G}=0$ را هم به دست آوریم.

مثال ۹ ـ ۹ میله‌ای به طول $2b$ از یک انتها به دیوار ناهموار تکیه دارد و انتهای دیگر آن روی سطح افقی ناهموار است. میلـه با افق زاویه‌ی θ می‌سازد و وزن آن W است. سامانه در حالت ترازمند است، اما ترازمندی حدی نیست (یعنی در آستانه‌ی لغزش نیست).نیروهای واکنش دیوار و سطح را در دو انتهای میله به دست آوریم.

حل: نیروهای وارد به میله در شکل (۹-۱۷) نشان داده شده‌اند. چون سامانه در آستانه لغزیدن نیست نیروهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ را به طور مستقیم برحسب $\mathbf{N}_1$ و $\mathbf{N}_2$ و $\mathbf{W}$ نمی‌شناسیم. بنابراین چهار مجهول $\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2,\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2$ داریم اما تنها سه معادله برای یافتن آنها در دسترس است که عبارتند از قانون نیروها:



شکل ۹-۱۷

$$N_1 + F_2 - W = 0 \quad \text{و} \quad F_1 - N_2 = 0 \qquad (۹-۴۴)$$

و قانون گشتاورها. اگر گشتاور نیروها را نسبت به انتهای میله که در روی سطح

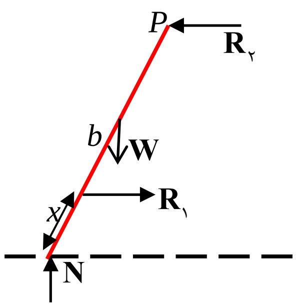
افقی است حساب کنیم داریم $W\ b\cos\theta - ۲N_۲ b\sin\theta - ۲F_۲ b\cos\theta = ۰$. در نتیجه، با شیوه‌هائی که آموخته‌ایم، مسئله را نمی‌توان حل کرد. یک تکه دانش اضافی دیگر نیز نیاز است.

۵-۹ نیروهای واکنش در پیوندگاه‌های هموار و ناهموار

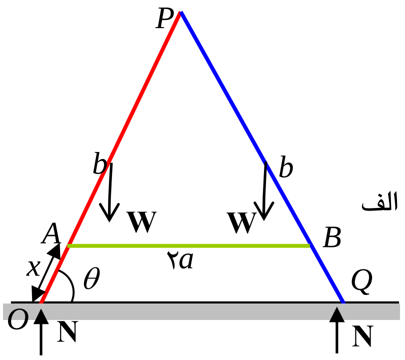
مسئله‌های ایستایی‌شناسی پر از وضعیت‌هایی است که دو میله به هم وصل شده‌اندو یا میله‌ای از نقطه‌ای آویخته شده است. نقطه‌ی آویز یا محل پیوند می‌تواند هموار
(بدون اصطکاک) و یا ناهموار باشد. اگر پیوندگاه **هموار** باشد، کنش یکی از میله‌ها را بر روی دیگری می‌توان با نیرویی نشان داد که در پیوندگاه اثر می‌کند. معمولاً جهت و اندازه‌ی این نیرو ناشناخته است و هر دو را باید از معادله‌های ترازمندی به دست آورد. با وجود این، در دو حالت، جهت نیرو شناخته شده است. نخستین این حالت ها هنگامی است که هندسه جسم و نیروهای خارجی وارد بر آن، هر دو نسبت به خط راستی که از پیوندگاه می‌گذرد متقارن باشند؛ در این حالت کنش و واکنش بین دو عضو نیز باید نسبت به این خط متقارن باشند و چون نیروهای کنش و واکنش با هم برابر و درخلاف جهت هم اند، لازم است که هر کدام به خط تقارن عمود باشد (R_2 را در مثال ۱۰-۹ ببینید). حالت دوم، هنگامی است که میله یا عضو در دو نقطه پیوند هموار داشته باشد. در این حالت جهت نیرو شناخته شده است. اگر به غیر از نیروی واکنش، هیچ نیرویی در پیوندگاه به جسم وارد نشود، آنگاه برای این که ترازمندی جسم برقرار باشد، هر دو واکنش‌ها، در دو نقطه، باید در راستای خط راستی باشند که دو پیوندگاه را به هم وصل می‌کند و باید مساوی و خلاف جهت هم باشند (مثال ۱۰-۹).

مثال ۱۰-۹ دو میله‌ی یکسان همگن هر کدام به طول b و وزن W برابر شکل (۱۸-۹ الف) در صفحه‌ای عمودی بر روی سطح هموای قرار دارند و در انتهای بالایی به هم پیوند داده شده‌اند. پیوندگاه هموار و بدون اصطکاک است. در فاصله‌ی x از سطح افقی (ودر امتداد میله) میله‌ی افقی سبکی به طول $۲a$ در نقطه‌های A و B به طور هموار به میله‌ها وصل است. نیروی واکنش وارد به میله‌ی AB را پیدا کنید.

حل: نیروهای خارجی که به سامانه‌ی دو میله‌ای وارد می‌شوند، عبارتند از: واکنش سطح هموار افقی، $\mathbf{N}$، و نیروهای وزن $\mathbf{W}$ که به وسط میله‌ها وارد می‌شود. این نیروها در راستای عمودی‌اند. باتوجه به تقارن مسئله، واکنش $\mathbf{N}$ برای هر دو میله یکسان است. چون مجموعه را به صورت یک سامانه می‌پنداریم، تنش‌ها درمیله‌ی AB و واکنش درنقطه‌ی P نیروهای داخلی‌اند و به طور جفت حذف می‌شوند. بنابراین، در راستای عمودی داریم $۲N = ۲W$.



شکل ۱۸-۹ ب



شکل ۱۸-۹ الف

حال نیروهایی را در نظر بگیرید که به یک میله، مثلاً به میله‌ی OP ، وارد می‌شوند. در شکل (۱۸–۹ ب) این نیروها نشان داده شده‌اند و عبارتند از: $\mathbf{W}$ ، $\mathbf{N}$، واکنش میله‌ی AB را $\mathbf{R}_1$ و واکنش پیوندگاه P را $\mathbf{R}_2$ بنامید. چون میله‌ها یکسان اند $\mathbf{R}_2$ باید افقی باشد. اگر $\mathbf{R}_2$ مؤلفه‌ی عمودی، مثلاً رو به بالا می‌داشت این بدان معنی می‌بود که واکنش OP روی میله‌ی QP هم می‌بایست مؤلفه‌ای عمودی، اما رو به پائین داشته باشد و این با تقارن مسئله سازگار نیست؛ چون OP و QP با هم برابرند. پس راستای اثر $\mathbf{R}_2$ تنها می‌تواند افقی باشد. باتوجه به این و رابطه‌ی بالا $2N=2W$، $\mathbf{R}_1$ نیز باید افقی و با $\mathbf{R}_2$ مساوی و در جهت خلاف آن باشد. حال اگر گشتاورها را نسبت به نقطه‌ی P حساب کنیم، داریم

$$Nb\cos\theta - R_1(b-x)\sin\theta - W\frac{b}{2}\cos\theta = 0 \qquad (۹–٤٥)$$

چون $\tan\theta = \frac{\sqrt{(b-x)^2-a^2}}{a}$ است و با استفاده از $2N=2W$ اینک می توانیم بنویسیم

$$R_1 = \frac{abW}{2(b-x)\left[(b-x)^2-a^2\right]^{1/2}} \qquad (۹–٤٦)$$

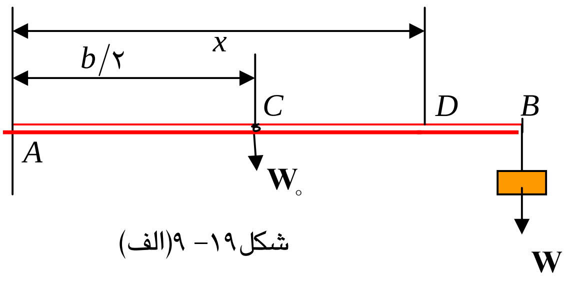
اگر پیوندگاه هموار نباشد وضعیت فرق می‌کند. در پیوندگاه هموار، نیرو می‌تواند از عضوی به عضو دیگر منتقل شود اما گشتاور نمی‌تواند؛ حال آنکه برای پیوندگاه ناهموار هر دو ممکن است منتقل شوند . برای پیشبرد بحث شکل (۱۹–۹ الف) را در نظر بگیرید که از میله‌ی یکنواخت AB به طول b و وزن W_0 تشکیل شده است و وزنه‌ی W از انتهای B به آن آویخته است. میله در نقطه‌ی A به طور **ثابت** به دیوار وصل است. در اینجا می‌خواهیم تنشی را که در نقطه‌ی D به میله وارد می‌شود، بررسی کنیم. نقطه‌ی D به فاصله‌ی x از A قرار دارد. نیروهای وارد به دیوار در نقطه‌ی A را نیز حساب خواهیم کرد. در شکل (۱۹–۹ب) بخش BD میله و وزنه‌ی آویزان W را باتوجه به بخش ۳ –۹ می‌توان با نیروی عمودی و رو به پایین

$$F_D = W + \frac{W_0}{b}(b-x) \qquad (۹–٤۷)$$

و با گشتاور

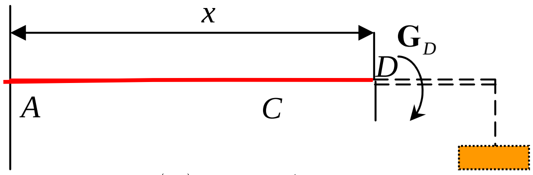
$$G_D = W(b-x) + \frac{W_0}{b}(b-x)\frac{(b-x)}{2} \qquad (۹–٤۸)$$

جایگزین کرد. این گشتاور می‌خواهد میله را ساعتگرد بچرخاند (این گشتاور در تعیین این که میله خواهد شکست یا نه عامل مهمی است). بنابراین، تنش‌های وارد در نقطه‌ی D عبارتند از نیروی برشی

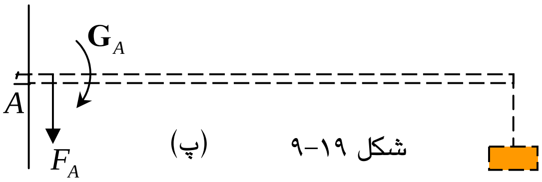


شکل۱۹– ۹(الف)

رابطه‌های (٤۷– ۹) و گشتاور (٤۸– ۹). در شکل (۱۹–۹ پ) تنش وارد به نقطه‌ی A نشان داده شده است. روشن است که می‌توان میله را با یک نیروی برشی $F_A = W + W_0$ و یک گشتاور خم‌کننده $G_A = Wb + W_0 b/2$ جایگزین کرد که هر دو در نقطه‌ی A به دیوار وارد می‌شوند. گشتاور G_A می‌خواهد دیوار را ساعتگرد بچرخاند. باتوجه به قانون سوم نیوتون، دیوار نیرویی برابر F_A و رو به بالا به میله وارد می‌کند. افزون بر این، گشتاوری به اندازه‌ی G_A از دیوار به میله وارد می‌شود که می‌خواهد میله را پادساعتگرد بچرخاند.



شکل ۱۹-۹ (ب)



(پ) شکل ۱۹-۹

۶ - ۹ ایستایی‌شناسی ریسمان معلق

در اینجا بهتر است یکبار دیگر هم جسم سخت را تعریف کنیم: جسم سخت سامانه‌ای از ذره‌هاست که فاصله‌ی میان هر جفت آنها، مستقل از این که چه نیروهایی به جسم وارد می‌شود، ثابت بماند. در طبیعت جسم سخت آرمانی وجود ندارد. کم و بیش همه‌ی اجسام تغییر شکل می-دهند. در خیلی حالت‌ها، مانند آنهایی که در بخش های پیشین در نظر گرفتیم، با تقریب خوبی می‌توان جسم سخت را آرمانی پنداشت چون تغییر شکل بسیاری از اجسام تحت اثر نیروهایی که به آنها وارد می‌شود بسیار جزئی است.وضعیت‌هایی هم وجود دارد که این فرض پذیرفتنی نیست. برای نمونه، اگر به انتهای میله‌ای نیروی بسیار بزرگی وارد کنیم میله تغییر شکل خواهد داد. مقدار تغییر شکل به اندازه‌ی نیرو بستگی دارد. اگر تغییر شکل خیلی بزرگ نباشد با حذف‌کردن نیرو، میله به حالت نخستین خود برمی‌گردد. اجسام تغییر شکل‌پذیر دیگر، مانند ریسمانی که آزادانه روی یک میز قرار دارد، با اندک نیرو شکل خود را تغییر می‌دهند و پس از حذف نیرو به حالت اولیه‌ی خود برنمی‌گردند.

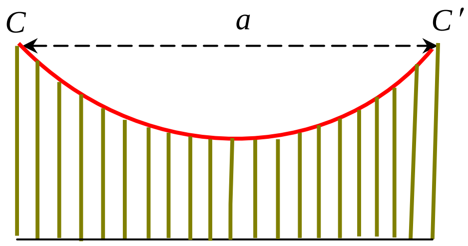
در این بخش، خود را به بررسی تک جسم تغییر شکل‌پذیر محدود خواهیم کرد؛ مانند ریسمانی که در میدان گرانش در تعادل ایستایی است و تحت تأثیر نیروهای گوناگون قرار می‌گیرد. در این بررسی فرض می‌کنیم که جسم تغییر شکل‌پذیر از اجزاء سخت زیادی تشکیل شده است که به هم پیوسته‌اند و نیروهائی که به هر جزء وارد می‌شوند از گونه‌ی نیروهای خارجی است که تاکنون در نظر گرفته‌ایم و با آن‌ها آشناییم. مانند اثر نیروهایی که همسایه‌ها به جزیی که تحت بررسی است اعمال می‌کنند. این اثر البته نیروی کششی است که در ریسمان است و در راستای خطی که دو جزء را بهم وصل می‌کند، اثر می‌کند.

۱-۶-۹ **پل معلق**: نخست حالتی را در نظر بگیرید که از وزن ریسمان چشم‌پوشی شده است و باری را که ریسمان تحمل می‌کند به طور یکنواخت در راستای افقی توزیع شده است مثل پل معلق شکل (۲۰-۹). آسان‌ترین روش بررسی آن است که بخشی از ریسمان را انتخاب کنیم. پائین‌ترین نقطه‌ی پل یک انتهای ریسمان باشد وانتهای دیگرش هر نقطه‌ی دیگر پل، مانند شکل (۲۱-۹)، باشد. نیروهایی که به بخش AB ریسمان وارد می‌شوند عبارتند از کشش $\mathbf{T}_0$ در نقطه A که در راستای افقی است، کشش $\mathbf{T}$ که در نقطه‌ی B بر ریسمان مماس است و سرانجام وزن کل $\mathbf{W}$، آن بخش از پل که به وسیله‌ی تکه‌ی AB ریسمان نگهداری شده است (یعنی بار روی قطعه $A'B'$ جاده). می‌توان فرض کرد که این نیرو به وسط این بخش ازجاده یا پل وارد می‌شود. اگر λ وزن واحد طول باشد، آنگاه $W=\lambda x$ در نقطه‌ی E به ریسمان وارد می‌شود. فاصله‌ی x افقی اندازه‌گیری شده است.θ زاویه‌ای است که خط مماس به ریسمان در نقطه‌ی B با افق می‌سازد. شرط ترازمندی AB عبارت است از:

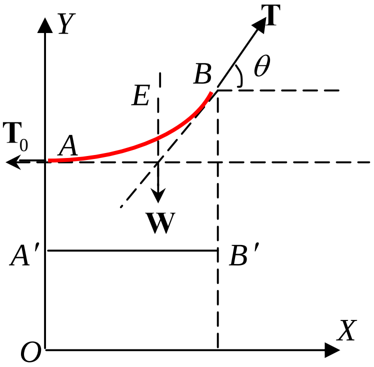
$$T\sin\theta=\lambda x \qquad (۹-۴۹)$$

$$T\cos\theta=T_0 \qquad (۹-۵۰)$$

اگر این دو رابطه را به هم تقسیم کنیم و توجه کنیم که $\tan\theta=dy/dx$ است، آنگاه $dy/dx=\lambda x/T_0$. با انتگرال‌گیری از این رابطه به دست می‌آید



شکل ۲۰-۹



شکل ۲۱-۹

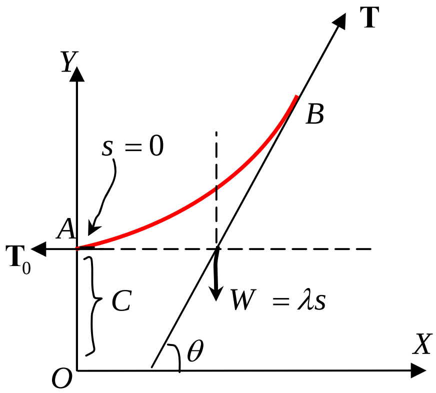
$$y=\frac{\lambda x^2}{2T_0}+C_1 \qquad (۹-۵۱)$$

این معادله‌ی سهمی است و C_1 ثابت انتگرال‌گیری است. معنی C_1 روشن است: ارتفاع وسط ریسمان از مبدأ مختصات O است. محور سهمی خط OY است. اینک می‌توان در هر نقطه‌ی ریسمان کشش T را با استفاده از رابطه‌های (۴۹-۹) و (۵۰-۹) به دست آورد، کافی است این دو رابطه را به توان دو رساند و با هم جمع کرد.

$$T=\sqrt{T_0^2+\lambda^2x^2} \qquad (۹-۵۲)$$

با افزایش طول x، کشش نیز به صورت x^2 افزایش پیدا می‌کند و در نقطه‌ی انتهایی به بیشینه مقدار خود می‌رسد. اگر فاصله‌ی پیوندگاه‌ها را a بنامیم آنگاه بیشینه کشش T_{max} عبارت است از

$$T_{max}=\frac{1}{2}\sqrt{4T_0^2+\lambda^2a^2} \qquad (۹-۵۳)$$



شکل ۲۲- ۹

۲-۶-۹ زنجیر سنگین: فرض کنید زنجیر یا ریسمان سنگینی را از دو انتها به دو دیوار وصل کرده‌ایم. زنجیر یا ریسمان تحت نیروی وزن خود به حالت خمیده درمی‌آید. فرق این مسئله و پل معلق در این است که اینجا بار به طور یکنواخت در امتداد زنجیر یا ریسمان توزیع شده است. در شکل (۲۲- ۹) بخش AB این زنجیر یا ریسمان نشان داده است. فرض کنید دو انتهای زنجیر یا ریسمان که به دو دیوار وصل اند دریک سطح باشند. نقطه‌ی A در شکل ، پائین‌ترین نقطه‌ی زنجیر است و نقطه‌ی B هر نقطه‌ی دیگر آن با مختصات (x,y) است. محور OY از نقطه‌ی A می‌گذرد و طول s را در امتداد زنجیر و از نقطه‌ی A اندازه‌گیری می‌کنیم. ریسمان تحت نیروی وزن خود به حالت خمیده درمی‌آید. فرق این مسئله و پل معلق در این است که اینجا بار به طور یکنواخت در امتداد زنجیر یا ریسمان توزیع شده است. در شکل (۲۲- ۹) بخش AB این زنجیر یا ریسمان نشان داده است. فرض کنید دو انتهای زنجیر یا ریسمان که به دو دیوار وصل اند دریک سطح باشند. نقطه‌ی A در شکل، پائین‌ترین نقطه‌ی زنجیر است و نقطه‌ی B هر نقطه‌ی دیگر آن با مختصات (x,y) است. محور OY از نقطه‌ی A می‌گذرد و طول s را در امتداد زنجیر و از نقطه‌ی A اندازه‌گیری می‌کنیم. معادله‌های ترازمندی جزء AB زنجیر عبارتند از: $T\sin\theta=\lambda s$ و $T\cos\theta=T_0$ که در آن T_0 کشش در نقطه‌ی A و T کشش در نقطه‌ی B اند. مانند حالت پیش اگر این دو رابطه را به هم تقسیم کنیم داریم

$$s=C\tan\theta \qquad (۹-۵۴)$$

که در آن $C=T_0/\lambda$ است و دارای بعد طول است. معادله‌ی (۵۴- ۹) معادله‌ی **سرشتی زنجیر** نام دارد. اگر آن را برحسب مختصات x و y بنویسیم، به نظر آشناتر خواهد آمد. برای این کار توجه کنید ک $\tan\theta=dy/dx$ است و رابطه (۵۴-۹) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{dy}{dx}=\frac{s}{C} \qquad (۹-۵۵)$$

اگر یک بار ازاین رابطه مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{۱}{C}\frac{ds}{dx}=\frac{۱}{C}\frac{\sqrt{dx^{۲}+dy^{۲}}}{dx}=\frac{۱}{C}\sqrt{۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{۲}} \qquad (۹-۵۶)$$

در این رابطه نه x وجود دارد و نه y . با تعریف $p\equiv dy/dx$ رابطه‌های بالا به معادله‌ی درجه یک از p و x تبدیل می‌شود:

$$\frac{dp}{\sqrt{۱+p^{۲}}}=\frac{۱}{C}dx \quad \text{یا} \quad \frac{dp}{dx}=\frac{۱}{C}\sqrt{۱+p^{۲}} \qquad (۹-۵۷)$$

که اگر از آن انتگرال بگیریم به دست می‌آید

$$\sinh^{-۱}p=\frac{x}{C} \qquad (۹-۵۸)$$

در اینجا ثابت انتگرال‌گیری صفر است؛ چون در $x=۰$ داریم $p=dy/dx=۰$. رابطه‌ی (۹-۵۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dy}{dx}=\sinh\frac{x}{C} \qquad (۹-۵۹)$$

حال اگر از این رابطه انتگرال بگیریم ، خواهیم داشت

$$y=C\cosh\frac{x}{C} \qquad (۹-۶۰)$$

در اینجا نیز اگر به ازای $x=۰$ داشته باشیم $y=C$ ثابت انتگرال‌گیری صفر می‌شود. این معادله‌ی خم زنجیری است که رأس آن در $y=C$ ، $x=۰$ است. کمیت C **پارامتر زنجیر** نام دارد و مشخصه‌ی زنجیر است. ما به شیوه‌ی محاسبه‌ی این کمیت خواهیم پرداخت.

گاهی نوشتن s برحسب x آموزنده است. این کار را با ترکیب رابطه‌های (۹-۵۵) و (۹-۶۰) می‌توان انجام داد: از رابطه‌ی (۹-۵۵) داریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{s}{C}=\sinh(x/C) \;\Rightarrow\; s=C\sinh\frac{x}{C} \qquad (۹-۶۱)$$

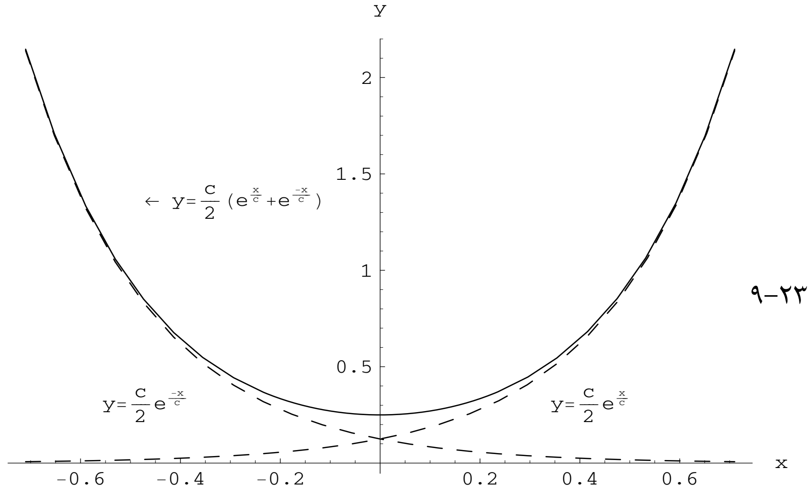
رابطه‌های دیگری نیز می‌توان نوشت: اگر رابطه‌های (۶۰-۹) و (۶۱-۹) را به توان دو برسانیم و از یکدیگر کم کنیم رابطه‌ای به دست خواهیم آورد که در آن x وجود ندارد: $y^{۲}=s^{۲}+c^{۲}$.

در شکل (۹-۲۳) خط پررنگ معادله‌ی زنجیر را نشان می‌دهد که معادله‌ی آن با رابطه‌ی (۹-۶۰) داده شده است. این خم نسبت به محور زنجیر، OY ، متقارن است و خم جمع دو تابع نمایی است. این را می‌توان به سادگی دید. کافی است رابطه‌ی (۶۰-۹) را به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$y=\frac{C}{۲}\left(e^{x/c}+e^{-x/c}\right) \qquad (۹-۶۲)$$

کشش در هر نقطه از ریسمان یا زنجیر را می‌توان از رابطه‌ی $T\cos\theta=T_{۰}$ و رابطه‌های (۶۰-۹) و(۶۲-۹) به دست آورد. چون $\cos\theta\equiv dx/ds$ است ، پس داریم

$$T = T_\circ \frac{ds}{dx} = T_\circ \cosh\frac{x}{C} = \frac{T_\circ}{C} y = \lambda y \qquad (۹-٦٣)$$



شکل ۲۳-۹

تساوی سوم با مشتق گرفتن از رابطه‌ی (٦١-۹) به دست آمد. بنابراین، کشش در هر نقطه‌ی زنجیر با ارتفاع آن نقطه متناسب است و بیشینه‌ی آن در نقطه‌ی اتصال است، جائی که $|x| = a/۲$ و $y = h + C$ اند. در این جا a فاصله‌ی بین اتصال دو نقطه‌ی انتهایی است و h بیشینه فاصله‌ی زنجیر از خط افقی است که دو انتها را به هم وصل می‌کند. بیشینه‌ی T عبارت است از

$$T_{\max} = T_\circ \cosh\frac{a}{۲C} = \lambda C \cosh\frac{a}{۲C} = \lambda(h + C) \qquad (۹-٦٤)$$

مثال ۱۱- ۹ ریسمان سنگینی از دو گل‌میخ هم سطح به فاصله‌ی d از هم آویزان است. نشان دهید که تعادل غیرممکن است مگر اینکه طول ریسمان بزرگتر یا مساوی de باشد. e پایه‌ی لگاریتم طبیعی است.

حل: وضعیت در شکل (۲-۹) نشان داده شده است. طول ریسمان مجموع دو قطعه‌ی AD و DB و دو بخش عمودی آن است: $L = ۲s_۱ + ۲b$. پارامتر سهمی‌وار ADB برابر C است. برای این‌که در نقطه‌ی B تعادل برقرار باشد باید داشته باشیم $T_{\max} = \lambda b = \lambda C \cosh\left(d/۲C\right)$. هم چنین $b = C \cosh\left(d/۲C\right)$ و $s_۱ = C \sinh\left(d/۲C\right)$ اند. بنابراین، طول کل L برابر است با

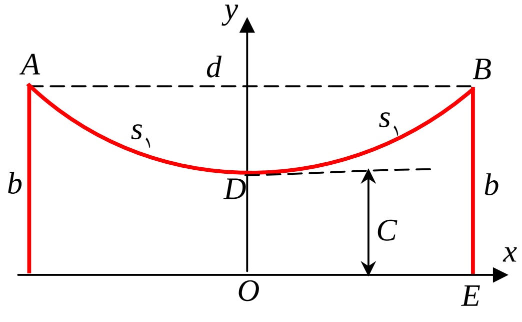
$$L = ۲C\left(\cosh\frac{d}{۲C} + \sinh\frac{d}{۲C}\right) = ۲Ce^{d/۲C} \qquad (۹-٦٥)$$

اگر طول ریسمان را تغییر دهیم، تنها کمیتی که در این رابطه تغییر می‌کند پارامتر C است. بنابراین، اگر از L نسبت به مشتق C بگیریم و حالت مانای آن را بررسی کنیم داریم

$$\frac{dL}{dC} = ۲e^{d/۲c} - ۲C\,\frac{d}{۲C^۲}e^{d/۲c} = ۰ \qquad (۹-٦٦)$$

و از اینجا $d = ۲C$ که اگر در رابطه‌ی (٦٥-۹) قرار دهیم، خواهیم داشت $L = de$. برای اینکه ببینیم این مقدار L بیشینه یا کمینه مقدار است باید از (٦٦-۹) دوباره مشتق بگیریم. به سادگی می‌توان دریافت که اگر $d = ۲C$ باشد آنگاه داریم

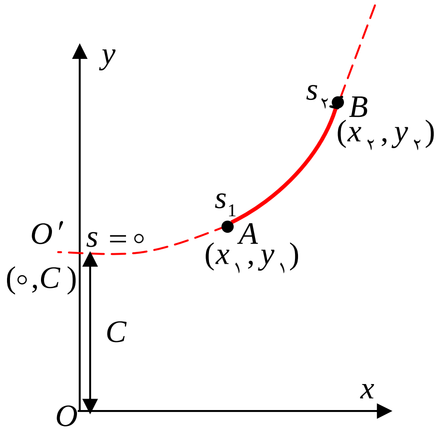
که $d^2L/dC^2 = 2e/C$ مقدار مثبتی است و در نتیجه de کمینه طولی است که به ازای آن حالت ترازمندی می‌تواند برقرار باشد.



شکل ۲٤-۹

۳-۶-۹ محاسبه‌ی پارامتر زنجیر

می‌بینیم که برای حل بسیاری از مسئله‌های مربوط به زنجیر یا ریسمان معلق لازم است که پارامتر زنجیر، C، را بیابیم. نخست رابطه‌ای برای C به دست می‌آوریم و سپس درباره‌ی مقدار تقریبی آن بحث می‌کنیم. ریسمان همگن AB شکل (۲۵-۹) را در نظر بگیرید که از دو نقطه‌ی A و Bآویزان است. نقطه‌های آویز لازم نیست هم‌سطح باشند. مختصات نقطه‌ی A عبارت است از (x_1,y_1) . s_1 و s_2 فاصله‌ی نقطه‌های A و B از نقطه‌ی O' اند که روی خم زنجیر اندازه‌گیری می‌شوند. O' به اندازه‌ی C (پارامتر زنجیر) بالای مبداء مختصات قرار دارد.



شکل ۲۵-۹

بهتر است نمادهای زیر را نخست تعریف کنیم

$$L \equiv s_2 - s_1, \quad a \equiv x_2 - x_1, \quad h \equiv y_2 - y_1 \qquad (۹-۶۷)$$

از رابطه‌های (۶۰-۹) و (۶۱-۹) داریم

$$L = C\left(\sinh\frac{x_2}{C} - \sinh\frac{x_1}{C}\right)$$
$$h = C\left(\cosh\frac{x_2}{C} - \cosh\frac{x_1}{C}\right) \qquad (۹-۶۸)$$

اگر این دو رابطه را به توان دو برسانیم و از یکدیگر کم کنیم، خواهیم داشت

$$\left(L^2 - h^2\right) = C^2\left(\sinh^2\frac{x_2}{C} + \sinh^2\frac{x_1}{C} - 2\sinh\frac{x_2}{C}\sinh\frac{x_1}{C}\right)$$
$$-C^2\left(\cosh^2\frac{x_2}{C} + \cosh^2\frac{x_1}{C} - 2\cosh\frac{x_2}{C}\cosh\frac{x_1}{C}\right) \qquad (۹-۶۹)$$

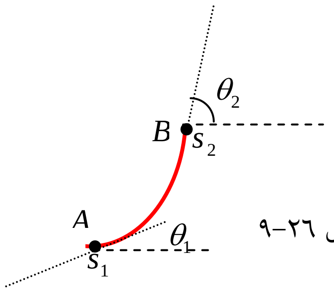
پس از ساده کردن رابطه‌ی بالا خواهیم داشت

$$L^2 - h^2 = 2C^2\left(\cosh\frac{a}{C} - 1\right) = 4C^2\sinh^2\frac{a}{2C} \qquad (۹-۷۰)$$

از این رابطه می‌توان C را به طور عددی به دست آورد. روث (Routh) دو پاسخ حقیقی برای C یافت. یکی مثبت و دیگری منفی. فقط پاسخ مثبت رابطه‌ی بالا به زنجیری که رأس خم آن در پائین قرار دارد منطبق است. بنابراین، تنها پاسخ یا ریشه‌ی مثبت پذیرفتنی است. توجه کنید که چون رابطه‌ی (۷۰-۹) تنها یک مقدار مثبت برای C دارد، بنابراین زنجیر یا ریسمان همگن سنگین که از دو نقطه آویزان است تنها یک وضعیت تعادلی می‌تواند داشته باشد.

۹-۶-۴ مقدار تقریبی پارامتر C برای زنجیر کشیده شده

اگر ریسمان یا زنجیر سنگین خوب کشیده شده باشد، آنگاه C خیلی بزرگ خواهد بود و با استفاده از این واقعیت، می‌توان مقدار تقریبی آن را به دست آورد. در شکل (۹-۲۶) طول L از ریسمانی که از دونقطه‌ی A و B آویزان است نشان داده شده است. مختصات $s_۱$ و $s_۲$ در امتداد ریسمان (که AB خمی از آن است) و از رأس خم اندازه‌گیری می‌شوند. از رابطه‌ی (۹-۵٤) داریم: $L = s_۲ - s_۱ = C\left(\tan\theta_۲ - \tan\theta_۱\right)$. اگر ریسمان کشیده شده باشد، $\theta_۱$ باید تقریباً با $\theta_۲$ برابر باشد. برای این که تساوی بالا برقرار باشد باید C در مقایسه با L بسیار بزرگ باشد. برای هر ریسمان سنگینی به طول L که از دو نقطه‌ی ثابت هم‌سطح به فاصله‌ی a از هم آویخته است، از رابطه (۹ -٦۱) می‌توان نوشت



شکل ۲٦-۹

$$\frac{L}{۲} = C\sinh\frac{a}{۲C} \qquad (۹\text{–}۷۱)$$

وقتی ریسمان کشیده است، چون C خیلی بزرگ است، رابطه‌ی (۹-۷۱) را می‌توان بسط داد.

$$\frac{L}{۲} = C\left(\frac{a}{۲C} + \frac{۱}{۳!}\frac{a^۳}{۸C^۳} + \cdots\right) \approx \frac{a}{۲} + \frac{a^۳}{٤۸C^۲} \qquad (۹\text{–}۷۲)$$

از حل این معادله برای C خواهیم داشت

$$C = \left[\frac{a^۳}{۲٤(L-a)}\right]^{۱/۲} \qquad (۹\text{–}۷۳)$$

که رابطه‌ای تقریبی برای پارامتر Cبرحسب طول L و فاصله‌ی a است. اینک محاسبه‌ی مقدار تقریبی کشش بیشینه شدنی است. از رابطه‌ی (۹-٦٤)، با چشم‌پوشی از توان‌های بالاتر a/C ، داریم

$$T_{\max} = \lambda C\cosh\frac{a}{۲C} = \lambda C\left(۱ + \frac{۱}{۲!}\frac{a^۲}{٤C^۲} + \frac{۱}{٤!}\frac{a^٤}{۱٦C^٤} + \cdots\right) \approx \lambda\left(C + \frac{a^۲}{۸C}\right) \qquad (۹\text{–}۷٤)$$

مثال ۱۲ـ ۹ ریسمان کشیده شده‌ای به طول L از دو نقطه‌ی ثابت هم‌سطح به فاصله‌ی a از یکدیگرآویزان است. گود افتادگی (شکم‌دادگی) ریسمان را حساب کنید.

حل: اگر h گودافتادگی و $y_۱$ ارتفاع نقطه‌ی آویز بالای رأس باشد، داریم

$$h = y_۱ - C = C\left(\cosh\frac{a}{۲C} - ۱\right) \qquad (۹\text{–}۷۵)$$

اگر $\cosh a/۲C$ را بسط تیلور بدهیم، خواهیم داشت

$$h = C\left(۱ + \frac{۱}{۲!}\frac{a^۲}{٤C^۲} + \frac{۱}{٤!}\frac{a^٤}{۱٦C^٤} + \cdots\right) - C \approx \lambda\frac{a^۲}{۸C} \qquad (۹\text{–}۷٦)$$

و با استفاده از (۹ -٦٦) داریم

$$h \approx \left[\frac{۳}{\gamma}a(L-a)\right]^{۱/۲} \qquad (۹\text{–}۷۷)$$

۵-۶-۹ زنجیر سهمی: بد نیست که در اینجا رابطه‌ی (۶۰- ۹) را برای C بزرگ (ریسمان‌کشیده) بررسی کنیم. داریم

$$y = C\cosh(x/C) = C\left(1+\frac{1}{2!}\frac{x^2}{C^2}+\frac{1}{4!}\frac{x^4}{C^4}+\dots\right)\approx C+\frac{x^2}{2C} \qquad (۹-۷۸)$$

این پاسخ، معادله‌ی سهمی است. اگر در رابطه‌ی (۵۱- ۹) ثابت انتگرال‌گیری C_1 را به طور مناسب تعریف کنیم، رابطه‌ی بالا دقیقاً به معادله‌ی ریسمان سبکی که توزیع بار یکنواخت دارد (پل معلق) تبدیل می‌شود. این البته شگفت‌آور نیست، زیرا اگر ریسمان کشیده باشد، وزن واحد طول، λ، ریسمان سنگین تقریب خوبی برای بار افقی است.

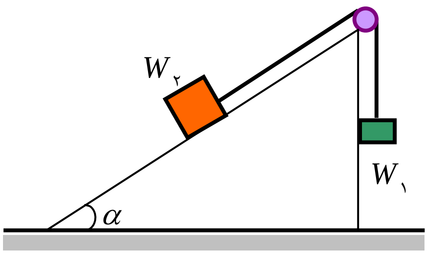
۷-۹ اصل کار مجازی

تاکنون، اصول ایستایی‌شناسی را بر پایه‌ی ترازمندی نیروها و گشتاور نیروها بیان کردیم. می‌توان به جای این دو، بنیادهای ایستایی‌شناسی را بر یک اصل استوار کرد و از این یک اصل اصول ترازمندی نیروها و گشتاور نیروها را نتیجه گرفت. نخست با دو مثال تاریخی آغاز می‌کنیم.

در شکل (۲۷-۹) وزنه‌ی W_1 با ریسمان سبک ناکشسانی که از روی قرقره‌ی هموار می‌گذرد به وزنه‌ی W_2 وصل شده است. وزنه‌ی W_2 مقید به لغزیدن در روی سطح شیب‌دار هموار با شیب α است. گالیله به ویژگی بسیار مهم این آرایه پی برد: ترازمندی را می‌توان برحسب جابه‌جایی روبه بالاو دورشدن وزنه‌ی W_1 از مرکز زمین و جابه‌جایی رو به پائین و نزدیک شدن وزنه‌ی W_2 به مرکز زمین توصیف کرد. در بیان گالیله، اگر در جابه‌جایی سامانه، حاصلضرب W_1 و جابه‌جایی عمودی آن با حاصلضرب W_2 و جابه‌جایی در راستای عمودیش برابر باشند، وزنه‌ها در ترازمندی ایستایی خواهند بود. افزون براین، جابه‌جایی‌های وزنه‌ها باید در خلاف جهت یکدیگر باشند. اگر W_1 پائین آورده شود، W_2 باید بالا برده شود. پس، اگر سامانه در حال ترازمندی باشد و W_1 به اندازه‌ی h پائین بیاید، باید داشته باشیم

$W_1 h = W_2 h\sin\alpha$، یا

$$W_1 h - W_2 h\sin\alpha = 0 \qquad (۹-۷۹)$$

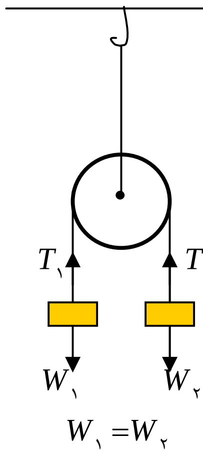


شکل ۲۷-۹

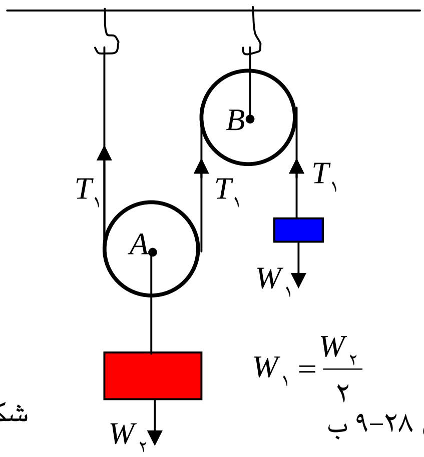
در واژگان نوین این بدان معنی است که کار کل نیروهای W_1 و W_2 در طول جابه‌جایی صفر است. روشن است که نتیجه‌ی (۷۹- ۹) با آنچه که پیشتر گفتیم یکسان است. همین نتیجه برای قرقره‌های استوینوس، هم عصر گالیله، نیز به کار برده شده است. در شکل (۲۸-۹) آرایه‌ای از قرقره های هموار سامان داده شده‌اند که در حالت ترازمندی‌اند. بر پایه‌ی اصول ترازمندی که پیشتر گفتیم، اگر در شکل (۲۸-۹ الف) دو قرقره بخواهند ترازمند باشند، وزن آنها باید یکسان و $T_1 = W_1 = W_2$ باشد. در شکل (۲۸-۹ب) می‌توانیم هر بخش را جداگانه در نظر بگیریم: اگر قرقره‌ی A بخواهد ترازمند باشد باید داشته باشیم $2T_1 = W_2$. چون T_1 با W_1 برابر است، پس داریم $W_1 = W_2/2$. در شکل (۲۸-۹پ) بررسی همانندی را می‌توان انجام داد: برای اینکه W_1 در حال تعادل باشد باید داشته باشیم $T_2 = W_1$ و برای اینکه قرقره‌ی میانی در حالت ترازمند باشد باید $2T_2 = T_1$ باشد و سرانجام برای ترازمندی قرقره‌ی سمت چپ یا W_2 باید $2T_1 = W_2$ باشد و از اینجا نتیجه می‌شود که

$$W_2 = 2T_1 = 2(2T_2) = 4T_2 = 4W_1 \;\Rightarrow\; W_1 = \frac{W_2}{4} \qquad (۹-۸۰)$$

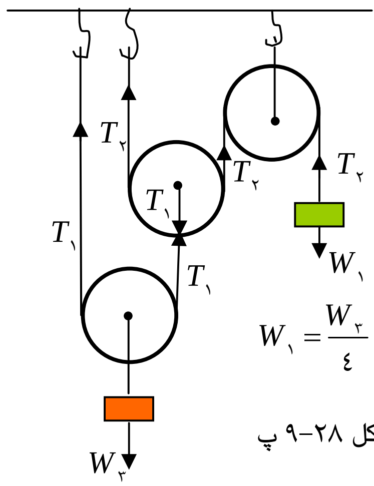
همین نتیجه‌ها را می‌توان با این شرط هم به دست آورد که اگر یکی از وزنه‌ها در راستای عمودی جابه‌جا شود، بقیه‌ی



شکل ۲۸-۹ الف



شکل ۲۸-۹ ب



شکل ۲۸-۹ پ

وزنه‌های سامانه چنان جابه‌جا می‌شوند که کار کل نیروی گرانش صفر شود. می‌توان این را به آسانی دید: فرض کنید در هر کدام از سامانه‌های بالا W_1 به اندازه‌ی S_1 پائین آورده شود. برای نمونه، از هندسه‌ی شکل (۲۸-۹ الف)، دیده می‌شود که

$$W_1 S_1 - W_2 S_2 = 0 \qquad (۹-۸۱)$$

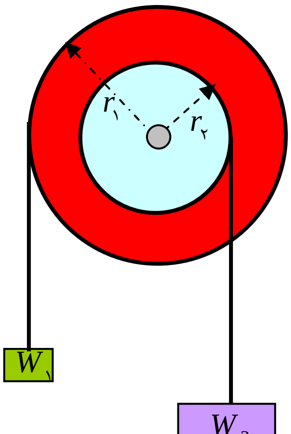
S_2 مقدار جابه‌جایی W_2 و رو به بالاست. چون $S_1 = S_2$ است پس، $W_1 = W_2$. در شکل (۲۸-۹ب) S_2 جابه‌جایی قیدی W_2 است که در اثر پائین‌آوردن W_1 به اندازه S_1 حاصل شده است، داریم

$$W_1 S_1 - W_2 S_2 = W_1 S_1 - W_2 \frac{S_1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_1 = \frac{W_2}{2} \qquad (۹-۸۲)$$

و سرانجام در شکل (۲۸-۹پ) اگر W_2 در اثر پایین آوردن W_1 به اندازه ی S_1 وادار به جابه‌جایی به اندازه‌ی S_2 شود معادله‌ی مربوطه عبارت خواهد بود از

$$W_1 S_1 - W_2 S_2 = W_1 S_1 - W_2 \frac{S_1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_1 = \frac{W_2}{4} \qquad (۹-۸۳)$$

بنابراین، روشن است که اندیشه‌ی صفر بودن کار کل در جابه‌جایی سامانه‌های بالا، اصل ترازمندی را فراهم می‌کند. جالب است که همین نتیجه را برای سامانه‌ی چرخنده هم می‌توان به دست آورد. درشکل (۲۹-۹) دو چرخ به شعاع‌های r_1 و r_2 به یکدیگر پیچ شده‌اند. ریسمانی برابر شکل از آنها می‌گذرد و وزنه‌های W_1 و W_2 از ریسمان آویزاند. وزنه‌های W_1 و W_2 چنان اند که سامانه در حال ترازمند است. فرض کنید سامانه را به اندازه‌ی θ پاد ساعتگرد بچرخانیم. در طول این جابه‌جایی، W_1 به اندازه‌ی $r_1\theta$ پائین می‌رود و W_2 به اندازه‌ی $r_2\theta$ بالا می‌آید. حال فرض می‌کنیم که کار کل انجام گرفته توسط نیروی گرانش صفر باشد. بنابراین داریم $W_1 r_1 \theta - W_2 r_2 \theta = 0$ یا $W_1 r_1 = W_2 r_2$. اما این همان شرط ترازمندی گشتاورها برای این مسئله است. پس، می‌توانیم نتیجه بگیریم که صفرشدن کار در طول جابه‌جایی این سامانه‌های ساده در حال ترازمند، دو شرط ترازمندی (ترازمندی نیروها و ترازمندی گشتاور نیروها) ایستایی پیشین را همزمان فراهم می‌کند. در مثال‌های بالا هیچ محدودیتی در اندازه‌ی جابه‌جایی اعمال نکردیم و در هر کدام، سامانه‌ی جابه‌جا شده در حالت



شکل ۲۹-۹

ترازمند بود. بنابراین، حالت های خاصی را در نظر گرفتیم که می‌توانستیم به اجزاء سامانه جابه‌جایی محدودی بدهیم و در هر جزء این جابه‌جایی سامانه هنوز هم ترازمند باقی بماند. ممکن است، در حالت عمومی، سامانه را با جابه‌جایی اندکی از حالت ترازمندی به وضعیت مجاور برد که دیگر ترازمندی نباشد. این نگرانی را می‌توان با به سوی صفر میل‌دادن اندازه‌ی جابه‌جایی برطرف کرد. به بیان دیگر، جابه‌جایی های جزئی که در آن‌ها کار کل صفر می‌شود و ترازمندی برقراراست. افزون بر این، فرض می‌کنیم که در طول جابه‌جایی زمان ثابت بماند. یک چنین جابه‌جایی را *جابه‌جایی مجازی* می‌نامند. جابجایی مجازی δx از نظر هندسی با جابه‌جایی حقیقی dx یکسان است. تفاوت این دو در آن است که *در جابه‌جایی مجازی، زمان در طول جابه‌جایی δx ثابت پنداشته می‌شود.* پس، اگر سطحی که جسم روی آن جابه‌جا می‌شود حرکت کند و یا تغییر شکل بدهد، وابستگی مکان یا تغییر شکل سطح تأثیری در جابه‌جایی مجازی δx ندارد. بنابراین، اصل کار مجازی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

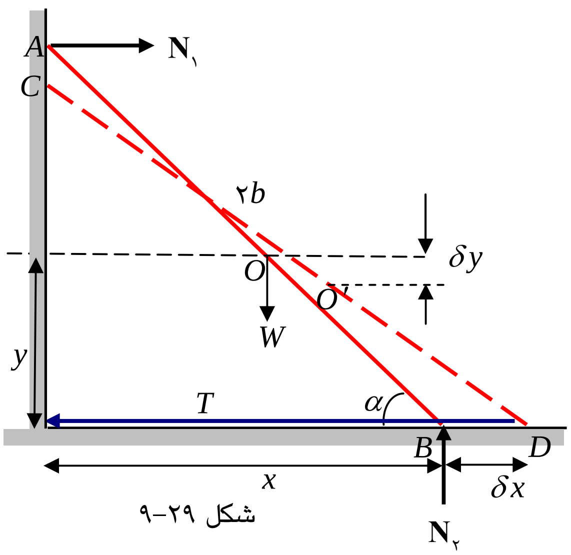
اگر سامانه‌ای با هر تعداد اجزاء، تحت تأثیر نیروهای $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \cdots, \mathbf{F}_n$ باشد و هر یک از این نیروها سبب جابجایی‌های جزئی $\delta\mathbf{S}_1, \delta\mathbf{S}_2, \cdots, \delta\mathbf{S}_n$ شوند، اگر $\mathbf{F}_1\cdot\delta\mathbf{S}_1 + \mathbf{F}_2\cdot\delta\mathbf{S}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n\cdot\delta\mathbf{S}_n = 0$ یا

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{S}_i = 0 \qquad (9-84)$$

باشد، گوییم سامانه در حالت ترازمندی است. تأکید می‌کنیم که جابه‌جایی‌های $\delta\mathbf{S}_i$ مجازی‌اند؛ به این معنی که در واقعیت سامانه در حالت ترازمندی ایستایی است و حرکت نمی‌کند و جابه‌جایی تنها یک پندار ذهنی است. بیان دقیق‌تر اصل کار مجازی این است که بگوییم جابه‌جایی‌های مجازی قیدهای سامانه را نقض نمی‌کنند وشرط لازم و کافی برای ترازمندی سامانه این است که کار محازی صفر باشد.

رابطه‌ی (۸۴-۹) می‌گوید: *کار (مجازی) کل همه‌ی نیروهایی که به سامانه در حال ترازمند وارد می‌شود در طول مجموعه‌ای از جابه‌جایی‌ها صفر است. جابه‌جایی‌ها باید کوچک و در همسایگی وضعیت ترازمند باشد. این اصل کار مجازی است.*

مثال ۱۳-۹ برابر شکل (۳۰-۹) یک سر میله‌ی همگن به وزن W روی سطح افقی هموار قرار و انتهای دیگر آن به دیوار هموار تکیه دارد. انتهای پائین میله با ریسمان ناکشسان بدون وزنی به پای دیوار وصل شده است. زاویه‌ی شیب میله نسبت به افق α است. کشش ریسمان را حساب کنید.



شکل ۲۹-۹

حل: فرض کنید طول میله $2b$ است. وضعیت اولیه‌ی میله در شکل (۲۹-۹) با AB نشان داده شده است. وسط میله در O است که به اندازه‌ی y بالای سطح افقی قرار دارد و انتهای B آن در فاصله‌ی x از پای دیوار است. داریم:

$$y = b\sin\alpha \quad , \quad x = 2b\cos\alpha \qquad (9-85)$$

نیروهای وارد به میله عبارت اند از کشش ریسمان، T ، نیروی

وزن W و نیروهای واکنش $N_۱$ در A و $N_۲$ در B. میله را اندکی جابه‌جا کنید و به حالت CD (خط نقطه‌چین) درآورید. (اگر $\alpha=\pi/۴$ می‌بود، می‌بایست داشته باشیم $AC=BD$). برای این که بتوان کار نیروها را در این جابه‌جایی حساب کرد، لازم است برای α دلخواه، δyرا در همسایگی O و جابه‌جایی افقی δx نقطه‌ی B را بدانیم. می توان ازرابطه‌ی (۸۵-۹) آن‌ها را به دست آورد.

$$|\delta y|=b\cos\alpha\;\delta\alpha \quad , \quad |\delta x|=۲b\sin\alpha\,\delta\alpha \qquad (۸۶-۹)$$

چون جابه‌جایی‌های دو انتهای میله در امتداد سطح افقی و دیوار اند، $N_۱$ و $N_۲$ کار انجام نمی‌دهند (آنها بر جابه‌جایی‌ها عمودند) بنابراین، با توجه به اصل کار مجازی باید داشته باشیم

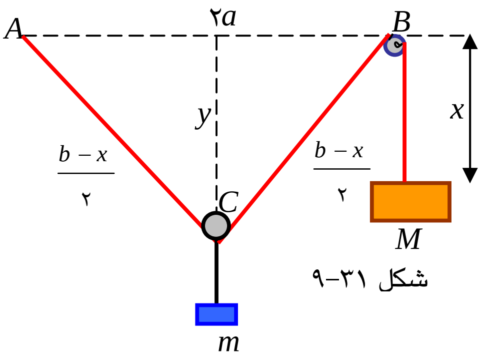
$$-T\cdot|\delta x|+W\cdot|\delta y|=۰ \qquad (۸۷-۹)$$

علامت جلو جمله‌ی نخست منفی است چون جابه‌جایی δx در خلاف جهت نیروی T است؛ در حالی که علامت جمله‌ی دوم مثبت است چون جابه‌جایی δy و نیروی W همسو اند. بنابراین

$$-T\cdot ۲b\sin\alpha\,\delta\alpha+W\cdot b\cos\alpha\,\delta\alpha=۰ \quad\Rightarrow\quad T=\frac{W}{۲}\cot\alpha \qquad (۸۸-۹)$$

این نتیجه را پیش‌تر هم به دست آوردیم.

مثال ۱۴-۹ ریسمانی به طول b در نقطه‌ی A به دیواری وصل است. ریسمان از روی قرقره‌ی همواری در نقطه‌ی B می‌گذرد. نقطه‌ی B با نقطه‌ی A هم‌سطح است و فاصله‌ی آنها $۲a$ است. جرم m برابر شکل (۳۱-۹) به قرقره‌ی هموار و سبکی در نقطه‌ی C آویخته است. به انتهای دیگر ریسمان که از قرقره B می‌گذرد وزنه‌ای M آویزان است. قرقره‌ی C آزاد و سامانه در حال ترازمند است. طول x را که به ازای آن ترازمندی برقرار است، بیابید.



شکل ۳۱-۹

حل: اگر جرم M را به اندازه‌ی δx به سمت پائین جابجا کنیم جرم m به اندازه‌ی δy به سمت بالا جابه‌جا خواهد شد. پس داریم $y^۲+a^۲=(b-x)^۲/۴$. اگر از این رابطه مشتق بگیریم، به دست می‌آید

$$\delta y=\frac{-(b-x)}{\left[۴(b-x)^۲-۱۶a^۲\right]^{۱/۲}}\delta x \qquad (۸۹-۹)$$

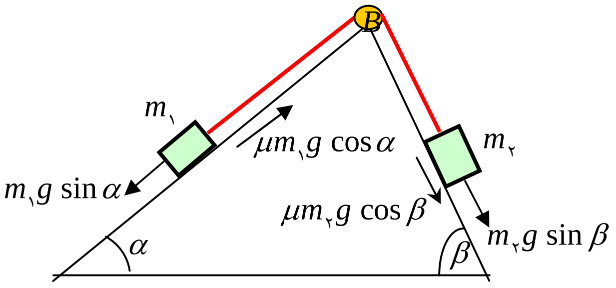
بنا به اصل کار مجازی $-mg\,|\delta y|+Mg\cdot|\delta x|=۰$ است. اگر به جای δy از رابطه‌ی (۸۹-۹) قرار دهیم ، سرانجام خواهیم داشت

$$x=b-\left(\frac{۱۶M^۲a^۲}{۴M^۲-m^۲}\right)^{۱/۲} \qquad (۹۰-۹)$$

مثال ۱۵- ۹ جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ همانند شکل (۳۲-۹) با ریسمان ناکشسانی به هم وصل اند. ریسمان از روی قرقره‌ی هموار در نقطه‌ی B می‌گذرد. وزنه‌ها بر روی دو سطح شیب‌دار قرار دارند. اصطکاک هر دو سطح یکسان و ضریب اصطکاک μ

است. زاویه های شیب α و β اند. اگر جرمها در آستانه‌ی لغزش در جهت پاد ساعتگرد باشند، ضریب اصطکاک ایستایی μ را بیابید.

حل: جابه‌جایی کوچک و پاد ساعتگرد δx را در نظر بگیرید. اگر سامانه در حالت ترازمند باشد کار کل همه‌ی نیروها در طول این جابه‌جایی باید صفر باشد:



شکل ۳۲-۹

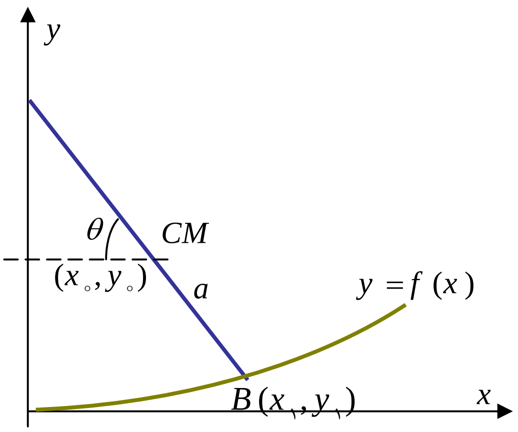
$$(m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha).|\delta x| - (m_2 g \sin\beta + \mu m_2 g \cos\beta).|\delta x| = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \mu = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta} \qquad (۹-۹۱)$$

همین نتیجه را می‌توانید با استفاده از ترازمندی نیروها و گشتاور نیروها هم به دست آورید.

مثال ۱۶ ـ ۹: میله‌ای به طول a از یک سر به دیوار عمودی کاملاً هموار تکیه دارد و انتهای دیگر آن بر روی سطحی کاملاً هموار با معادله‌ی $y = f(x)$ قراردارد. تابع سطح $f(x)$ چگونه باید باشد تا میله در هر وضعیتی که قرار گیرد همواره در حالت ترازمند باقی بماند (شکل ۳۳-۹).

حل: برای این‌که میله در هر وضعیتی در حال ترازمند باشد، ارتفاع مرکز جرم آن باید ثابت باشد (چرا؟ با توجه به اصل کار مجازی این گزاره را توجیه کنید). فرض کنید (x_0, y_0) مختصات مرکزجرم و (x_1, y_1) مختصات نقطه‌ی تماس میله در نقطه‌ی B با خم $f(x)$ باشد. اگر زاویه‌ی شیب میله θ باشد داریم:



شکل ۳۳-۹

$$y_0 = \frac{a}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sin\theta; \qquad (۹-۹۲)$$
$$x_0 = \frac{1}{2} a\cos\theta, \quad x_1 = a\cos\theta$$

بنابراین،

$$y_1 = \frac{1}{2}a\left(1 - \sqrt{1-\cos^2\theta}\right) = \frac{1}{2}a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}\right) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) \qquad (۹-۹۳)$$

۸-۹ پایداری ترازمندی

مثال (۱۶-۹) آغاز خوبی برای بررسی پایداری تعادل است. اصل کار مجازی می‌آموزد که برای هر سامانه‌ی در حال ترازمند، کار کل تمام نیروهائی که به سامانه وارد می‌شوند، در طول جابه‌جایی سامانه صفر است، یعنی

$$\delta W = \circ \tag{۹-۹۴}$$

حالا، اگر نیروها پایستار باشند، همان‌گونه که پیشتر گفتیم، می‌توان از تابع انرژی پتانسیل سامانه V حرف زد . V فقط تابعی از مختصات است. افزون بر این، با جابه‌جایی سامانه، تابع انرژی پتانسیل نیز همراه با جابه‌جایی تغییر می‌کند. می‌دانیم

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -dV \tag{۹-۹۵}$$

بنابراین، برای جابه‌جایی مجازی این رابطه به صورت زیر درمی‌آید

$$\delta W = -\delta V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) = \circ \tag{۹-۹۶}$$

چون δx، δy و δz متغیرهای مستقل اند؛ رابطه‌ی (۹۶- ۹) فقط هنگامی می‌تواند برقرار باشد که به ازای هر δx، δy و δz، هر یک از جمله‌های (۹۶-۹) جداگانه صفر شوند. به بیان دیگر، برای این که رابطه‌ی (۹۶-۹) برقرار باشد باید داشته باشیم

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \circ \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \circ \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \circ \tag{۹-۹۷}$$

رابطه‌های (۹۷-۹) شرط‌های لازمی‌اند که انرژی پتانسیل در آرایش ترازمند مقدار ثابتی داشته باشد. این همان نکته‌ی فیزیکی است که در حل مثال (۱۶-۹) از آن استفاده کردیم. رابطه‌های (۹۷-۹) همچنین، به مولفه‌های نیروها مربوط اند: برای نمونه $F_x \equiv -\partial V/\partial x$. معادله‌ی (۹۷-۹) بیان گزاره‌ی آشنای *« در حالت تعادل برآیند نیروها صفر است»* می‌باشد. با این حال، رابطه‌های (۹۷-۹) نمی‌گویند که آیا ترازمندی پایدار است یا نه. در حالت ترازمندی پایدار انرژی پتانسیل **همواره کمینه** است. پس، اگر با اندک اختلالی در سامانه آن را از حالت ترازمندی پایدار خود خارج کنیم، پس از حذف اختلال، سامانه به موقعیت اولیه‌ی خود برمی‌گردد. اگر ترازمندی پایدار نباشد، پس از حذف اختلال سامانه دیگر به حالت اولیه‌ی خود برنمی‌گردد. مثال ساده‌ی ترازمندی پایدار غلتیدن تیله‌ای در درون کاسه‌ی به شکل نیم‌کره است. تجربه‌ی همگانی می‌آموزد که تیله در ته کاسه باقی می‌ماند و اگر از نقطه‌ی ته کاسه به سویی هل داده شود، دوباره به جای اول خود برمی‌گردد. در مقابل، اگر کاسه را وارون کنیم و تیله را بر روی کاسه و در قطب شمال آن قرار دهیم، با کوچکترین اختلال تیله از سطح کاسه جدا می‌شود و هیچ تمایلی برای بازگشت به جایگاه نخستین خود نداشته باشد. در حالت نخست که تیله در ته کاسه قرار دارد ترازمندی **پایدار** است، در حالت دوم ترازمندی **ناپایدار** است. حالت سومی نیز وجود دارد که در آن اختلال نه سبب افزایش و نه کاهش انرژی پتانسیل می‌شود؛ مانند حالتی که تیله آزادانه روی سطح افقی جابه‌جا شود. این گونه ترازمندی، **ترازمندی بی‌تفاوت** است. همان‌گونه که پیشتر دیدیم، تابع انرژی پتانسیل را می‌توان در همسایگی نقطه‌ی ترازمندی بسط تیلور. برای سادگی فرض کنید تابع انرژی پتانسیل تابعی از یک متغیر، x، است، یعنی سامانه تنها یک درجه‌ی آزادی دارد. نقطه‌ی ترازمندی را در $x=\circ$ فرض کنید. بسط تیلور تابع انرژی پتانسیل در همسایگی $x=\circ$ به صورت زیر است از

$$V(x) = V_\circ + x\left(\frac{dV}{dx}\right)_\circ + \frac{x^۲}{۲!}\left(\frac{d^۲V}{dx^۲}\right)_\circ + \frac{x^۳}{۳!}\left(\frac{d^۳V}{dx^۳}\right)_\circ + \frac{x^٤}{٤!}\left(\frac{d^٤V}{dx^٤}\right)_\circ + \cdots \tag{۹-۹۸}$$

در رابطه‌ی بالا $V_\circ$، انرژی پتانسیل در مبداء است و مقدار ثابتی است. می‌توانیم آنرا صفر بگیریم. (مقدار ثابت افزودنی به تابع انرژی پتانسیل اثری در نیرو ندارد). افزون بر این، چون $x=\circ$ نقطه‌ی ترازمندی است، پس در آنجا نیرو باید صفر باشد $(dV/dx)_\circ = \circ$، . پس داریم:

$$V(x)=\frac{x^{2}}{2!}\left(\frac{d^{2}V}{dx^{2}}\right)_{0}+\frac{x^{3}}{3!}\left(\frac{d^{3}V}{dx^{3}}\right)_{0}+\frac{x^{4}}{4!}\left(\frac{d^{4}V}{dx^{4}}\right)_{0}+\cdots \qquad (۹-۹۹)$$

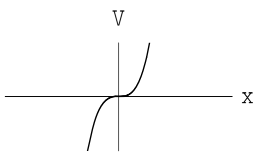
چون بسط در همسایگی $x=0$ انجام گرفته است، x باید به طور کلی کمیت بسیار کوچکی باشد. پس، هر یک از جمله‌های رابطه‌ی (۹-۹۹) مقدار کوچکی است و هر جمله نسبت به جمله‌ی پیشین یک مرتبه بالاتر است. بنابراین، اگر $\left(d^{2}V/dx^{2}\right)_{0}$ صفر نباشد، با تقریب خوبی می‌توان از جمله‌های با مرتبه‌ی بالاتر چشم پوشی کرد و نوشت

$$V(x)=\frac{X^{2}}{2!}\left(\frac{d^{2}V}{dx^{2}}\right)_{0} \qquad (۹-۱۰۰)$$

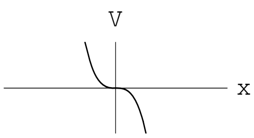
اگر $V(x)$ بخواهد در $x=0$ کمینه باشد (چون با قراردادن $V_{0}=0$ تعریف کردیم که V در $x=0$ صفر است) باید $V(x)$ در همسایگی $x=0$بزرگتر از صفر باشد. چون x^{2} در رابطه (۹-۱۰۰) کمیت مثبتی است ؛ در نتیجه علامت $V(x)$ همانند علامت $\left(d^{2}V/dx^{2}\right)_{0}$ است. پس، پایداری یا ناپایداری ترازمندی بستگی به این دارد که $\left(d^{2}V/dx^{2}\right)_{0}$ مثبت یا منفی باشد. اگر $\left(d^{2}V/dx^{2}\right)_{0}=0$ باشد، لازم است که به بررسی جمله‌های بالاتر بپردازیم، در مورد مسئله‌ی کنونی، باید به بررسی جمله‌ی

$$V(x)=\frac{x^{3}}{3!}\left(\frac{d^{3}V}{dx^{3}}\right)_{0} \qquad (۹-۱۰۱)$$

به پردازیم. اگر $\left(d^{3}V/dx^{3}\right)_{0}$ مثبت باشد آنگاه بسته به این که xمثبت یا منفی است، $V(x)$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد. همچنین، اگر $\left(d^{3}V/dx^{3}\right)_{0}$ منفی باشد باز هم $V(x)$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد. بستگی به دارد که x منفی یا مثبت است. نتیجه آنکه، اگر نخستین جمله‌ی غیرصفر بسط تیلور $\left(d^{3}V/dx^{3}\right)_{0}$ باشد ترازمندی ناپایدار است چه علامت $\left(d^{3}V/dx^{3}\right)_{0}$ مثبت باشد یا منفی. اگر $V(x)$ را بتوان به شکل (۹-۱۰۱) نوشت، آنگاه نمودار $V(x)$ به صورت شکل (۹-۳٤) خواهد بود. یعنی در مبدأ مختصات $V(x)$ دارای نقطه‌ی عطف است. شکل (۹-۳٤ الف) حالتی را نشان می‌دهد که $\left(d^{3}V/dx^{3}\right)_{0}$ مثبت است و در شکل (۹-۳٤ ب) حالت $\left(d^{3}V/dx^{3}\right)_{0}<0$ نشان داده شده است.



شکل ۹-۳٤ الف



شکل ۹-۳٤ ب

اگر $\left(d^{3}V/dx^{3}\right)_{0}$ باشد، باید جمله‌ی بعدی $V(x)=\left(d^{4}V/dx^{4}\right)x^{4}/4!$ بسط (۹-۹۹) را بیازمائیم. در اینجا هم مثل رابطه‌ی (۹-۹۸) مثبت یا منفی‌بودن $V(x)$بستگی به علامت $\left(d^{4}V/dx^{4}\right)_{0}$دارد و پایداری و ناپایداری ترازمندی نیز همانند آن است، یعنی اگر $\left(d^{4}V/dx^{4}\right)_{0}$مثبت باشد ترازمندی پایدار و اگر منفی باشد ترازمندی ناپایدار است.

مثال۱۷-۹: در مثال ۱٤-۹ آرایش ترازمندی را بیابید و پایداری آن را بیازمائید.

حل: انرژی پتانسیل را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$V=-mgy-Mgx=-\frac{mg}{۲}\sqrt{(b-x)^۲-۴a^۲}-Mgx$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dV}{dx}=\frac{mg}{۲}\frac{b-x}{\left[(b-x)^۲-۴a^۲\right]^{۱/۲}}-Mg \qquad (۹-۱۰۲)$$

مکان ترازمندی جایی است که $dV/dx=۰$ باشد. در نتیجه

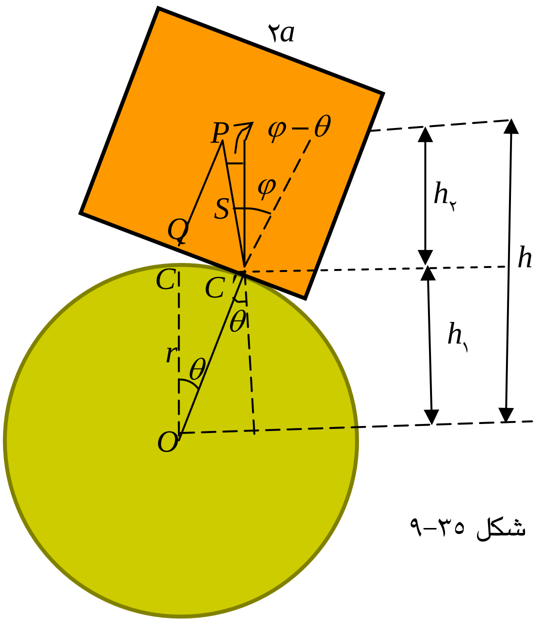
$$\frac{dV}{dx}=۰\quad\Rightarrow\quad x=b-\left(\frac{۱۶M^۲a^۲}{۴M^۲-m^۲}\right)^{۱/۲} \qquad (۹-۱۰۳)$$

این همان مقداری است که در مثال (۹-۱۴) به دست آوردیم. جالب است که توجه کنید: برای این که x کمیت حقیقی باشد باید داشته باشیم $۴M^۲>m^۲$. برای این که بدانیم ترازمندی پایدار یا ناپایدار است باید $d^۲V/dx^۲$ را وارسی کنیم.

$$\frac{d^۲V}{dx^۲}=\frac{g\left(۴M^۲-m^۲\right)^{۳/۲}}{۴m^۲a} \qquad (۹-۱۰۴)$$

اگر $۴M^۲>m^۲$ باشد، آنگاه $d^۲V/dx^۲$ کمیت مثبتی است. پس، تنها هنگامی ترازمندی خواهیم داشت که $۴M^۲>m^۲$ باشد و در این حالت ترازمندی، پایدار است.

مثال ۱۸– ۹ مکعب توپری به ضلع $۲a$ بر روی تنه‌ی استوانه‌ای درختی به شعاع r در حال ترازمندی است. صفحه‌ی یک طرف مکعب به محور استوانه عمود است. آیا این ترازمندی پایدار است یا نه؟



شکل ۳۵-۹

حل: در شکل (۳۵-۹) مکعب اندکی از حالت ترازمندی جابه‌جا شده است. در حالت ترازمندی نقطه‌ای Q بر نقطه‌ی C تنه‌ی درخت منطبق بود. در وضعیت جدید تماس، C'، خط OC' با OC زاویه‌ی θ می‌سازد و PC' با PQ زاویه‌ی φ دارد. اگر لغزش وجود نداشته باشد، باید داشته باشیم: $r\theta=a\tan\varphi$ یا $\overline{QC'}=r\theta$. چون جابه‌جایی بسیار کوچک است، رابطه‌ی بالا را می توان به صورت $r\theta=a\varphi$ نوشت. چون نقطه‌ی صفر انرژی پتانسیل دلخواه است، آن را در سطح محور استوانه فرض کنید. پس، انرژی پتانسیل مکعب عبارت است از $+mgh$ که h ارتفاع مرکز مکعب، P، از نقطه‌ی O است. اما از شکل آشکار است که $h=h_۱+h_۲=r\cos\theta+S\cos(\varphi-\theta)$ که در آن $S\equiv\overline{PC'}=\left(a^۲+r^۲\theta^۲\right)^{۱/۲}$. پس

$$V = mgh = mgr\cos\theta + mg\left(a^2 + r^2\theta^2\right)^{1/2}\cos(\varphi-\theta)$$
$$= mgr\cos\theta + mg\left(a^2 + r^2\theta^2\right)^{1/2}\cos\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right] \qquad (۹-۱۰۵)$$

حال اگر از این رابطه نسبت به θ مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم خواهیم داشت

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 = -mgr\sin\theta + \frac{mgr^2\theta}{\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}}\cos\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right]$$
$$-mg\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}\left(\frac{r}{a}-1\right)\sin\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right] \qquad (۹-۱۰۶)$$

این تساوی برای r و a دلخواه هنگامی برقرار است که $\theta = 0$ باشد. اینک داریم

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -mgr\cos\theta + \frac{mgr^2}{\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}}\cos\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right] - \frac{mgr^4\theta^2}{\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{3/2}}\cos\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right]$$
$$-\frac{mgr^2\theta}{\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}}\left(\frac{r}{a}-1\right)\sin\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right] -$$
$$\frac{mgr^2\theta}{\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}}\left(\frac{r}{a}-1\right)\sin\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right] - mg\left(a^2+r^2\theta^2\right)^{1/2}\left(\frac{r}{a}-1\right)^2\cos\left[\left(\frac{r}{a}-1\right)\theta\right] \qquad (۹-۱۰۷)$$

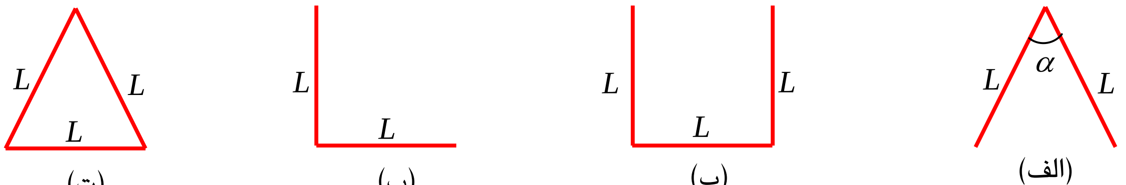
و به ازای $\theta = 0$ خواهیم داشت

$$\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0 = mg\left[-r + \frac{r^2}{a} - a\left(\frac{r}{a}-1\right)^2\right] = mg\,(r-a) \qquad (۹-۱۰۸)$$

پس: اگر $r > a$ باشد آنگاه ترازمندی پایدار است. اگر $r < a$ ، ترازمندی ناپایدار و سرانجام، به ازای $r = a$ باید مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر را وارسی کرد تا از سرشت ترازمندی آگاه شد.

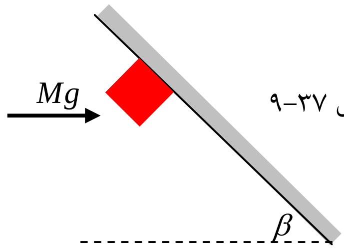
مثال‌های تکمیلی

ت-۱ هریک از اجسام شکل (۳۶-۹) از سیم‌های همگن ساخته شده‌اند. مکان مرکزجرم هریک را پیدا کنید.



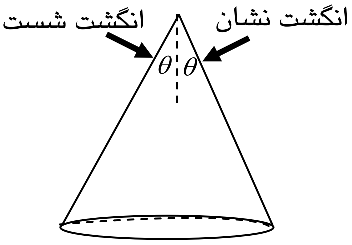
شکل ۳۶-۹

ت-۲ قطعه‌ای به جرم M در زیر دیواری قرار دارد که با افق زاویه‌ی β می‌سازد. نیروی افقی Mg برابر شکل (۳۷-۹) به قطعه وارد می‌شود. فرض کنید نیروی اصطکاک بین قطعه و دیوار به اندازه‌ای بزرگ است که قطعه در حال سکون باقی می‌ماند. نیروعمودی N و نیروی اصطکاک F_f که دیوار به قطعه وارد می‌کند چیستند؟ اگر ضریب اصطکاک ایستایی μ باشد، در چه بازه‌ی β قطعه ساکن باقی می‌ماند؟



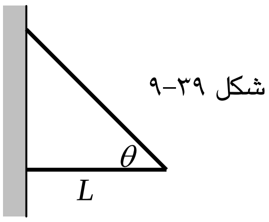
شکل ۳۷-۹

ت-۳ یک قیف بستنی را با برابر شکل (۳۸-۹) دو انگشت شست و نشان به طور وارون در هوا ساکن نگه می‌داریم. جرم قیف m است و ضریب اصطکاک ایستایی بین قیف و انگشت‌ها μ است. زاویه‌ی راس قیف ۲θ است. کم‌ترین نیرویی را که هر انگشت باید عمود بر قیف وارد کند تا قیف را در هوا نگه دارد چیست؟ کم‌ترین مقدار μ (برحسب θ) که بتوان قیف را هنوز در هوا نگه داشت چدر است؟ فرض کنید که نیروی عمودی لازم، هر اندازه که بزرگ باشد، انگشت‌ها می‌توانند فراهم کنند.



شکل ۳۸-۹

ت-۴ دو میله برابر شکل (۳۹-۸) به یکدیگر و به دیوار وصل‌اند. طول میله‌ی افقی L است. زاویه‌ی بین میله‌ها θ است. اگرجرم واحد طول هر دو میله ρ باشد. مولفه‌های افقی و عمودی نیرویی را که دیوار به پیوندگاه بالا وارد می‌کند حساب کنید. نشان دهید که اندازه‌ی این نیرو در هر دو حالت $\theta \to ۰$ و $\theta \to \pi/۲$ به بینهایت میل میکند (بنابراین زاویه‌ای مانند $۰ < \theta_۰ < \pi/۲$ وجود دارد که به ازای آن نیرو کمینه می‌شود. می‌توانید نشان دهید که این کمینه در $\cos\theta = \sqrt{۳} - ۱$ یا $\theta \approx ۴۳^\circ$ فراهم می‌شود.)

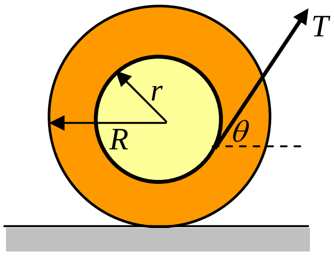


شکل ۳۹-۹

ت-۵ ماسوره‌ای شامل یک محور استوانه‌ای به شعاع r و بدنه‌ای به شعاع R است و روی زمین می‌غلتد. جرم ماسوره M است. فرض کنید اصطکاک بین زمین و ماسوره به اندازه‌ی کافی بزرگ است که از لغزیدن آن جلوگیری می‌کند. برابر شکل (۴۰-۹) ریسمانی به دور محور پیچیده شده است و با کشش T کشیده می‌شود.

(الف): برای r و R معین زاویه‌ی θ چقدر باید باشد تا ماسوره حرکت نکند؟

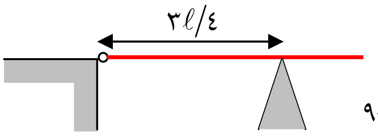
(ب): برای r و R وضریب اصطکاک μ بین ماسوره و زمین معین، بیشینه مقداری که T می‌تواند داشته باشد و هنوز هم ماسوره جابه‌جا نشود، چیست؟



شکل ۴۰-۹

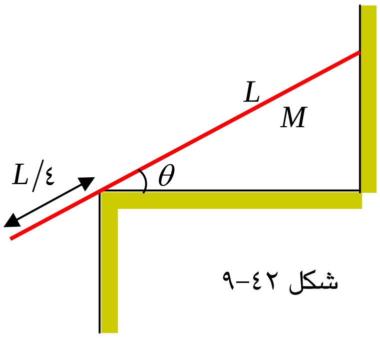
(پ): برای R و μ معین، r چقدر باید باشد تا با کمترین مقدار ممکن T ماسوره از حالت ایستایی خارج شود و در روی سطح بلغزد؛ یعنی به ازای چه مقدار r حد بالای T در بخش (ب) کم‌تریم مقدار ممکن را دارد. این مقدار T را حساب کنید.

ت-۶ انتهای چپ میله‌ی یکنواختی به جرم m و طول ℓ برابر شکل (۴۱-۹) به میزی لولا شده است. گوه‌ای در فاصله‌ی $۳\ell/۴$ زیر میله قرار دارد تا آن را افقی نگه دارد. گوه چه نیرویی به میله وارد می‌کند؟



شکل ۴۱-۹

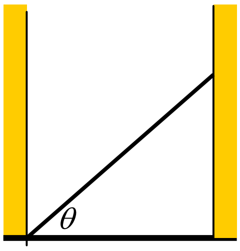
ت-۷ میله‌ای به جرم M و طول L از یک انتها به دیوار عمودی بدون اصطکاک تکیه دارد و برابر شکل (۴۲-۹) در فاصله‌ی



شکل ۴۲-۹

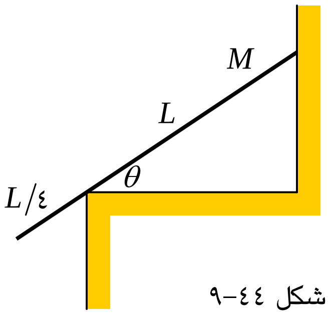
۱/۴ طول از انتهای دیگرش بر لبه‌ی سکویی قرار دارد. میله با افق زاویه‌ی θ می‌سازد. به ازای چه مقدار θ، کم‌ترین ضریب اصطکاک در لبه‌ی سکو می‌تواند میله را در حال سکون نگه دارد؟ (برای طول‌های مختلف میله،مقدار θ متفاوت خواهد بود، اما فرض کنید که برای هر طولی ، جرم همان M است).

مسئله ها



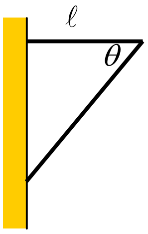
شکل ۹-۴۳

۹-۱ (میله در چاه): میله‌ی همگنی برابر شکل (۹-۴۳) از یک سر به دیوار و از سر دیگر به ته چاهی تکیه دارد و با افق زاویه‌ی θ می‌سازد. چاه چه نیروی‌هایی را که به دو انتهای میله وارد می کند؟ دیوارەها و سطح چاه اصطکاک ندارد.



شکل ۹-۴۴

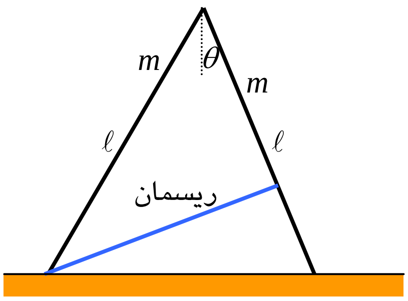
۹-۲ (نردبان بر لب سکو): نردبانی به طول L و جرم M از یک انتها به دیوار قائم بدون اصطکاک تکیه دارد و در فاصله‌ی $L/4$ از انتهای دیگر با لبه‌ی سکویی درتماس است (شکل ۹-۴۴). فرض کنید اصطکاک لبه‌ی سکو به اندازه‌ی کافی بزرگ است که نردبان را در حال سکون نگه دارد. نیروی کل که سکو به نردبان وارد می کند چقدر است؟



شکل ۹-۴۵

۹-۳ (چنگک روی دیوار): برابر شکل (۹-۴۵) دو میله با لولا به یکدیگر و به دیواری عمودی وصل شده اند. زاویه‌ی بین میله‌ها θ است. چگالی جرمی میله‌ها یکنواخت و ρ است. طول میله‌ی افقی ℓ است. مولفه‌های افقی و عمودی نیرویی را که میله‌ی پایین به دیوار وارد می‌کند پیدا کنید.

۹-۴ (دو میله و ریسمان): دو میله هر یک به طول ℓ و جرم m را برابر شکل (۹-۴۶) از یک انتها با لولای بدون اصطکاک به هم می‌پیوندیم. هر میله با خط قایم زاویه‌ی θ می‌سازد. با ریسمانی انتهای پایینی میله‌ی سمت چپ را به میله‌ی سمت راست می‌بندیم به طوری که ریسمان و میله‌ی سمت راست زاویه‌ی 90° بسازند. مجموعه قائم بر روی میز بدون اصطکاک قرار دارد.

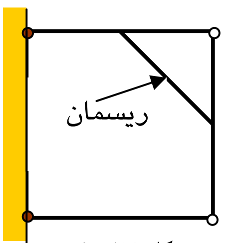


شکل ۹-۴۶

(الف): کشش ریسمان را حساب کنید.

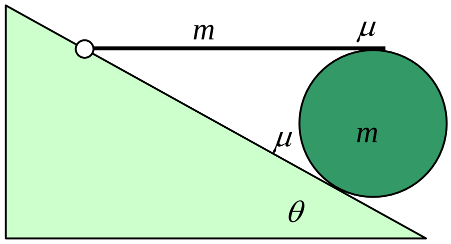
(ب): میله‌ی سمت چپ چه نیرویی را در پیوندگاه به میله‌ی سمت راست وارد می‌کند؟

۹-۵ (سه میله و ریسمان): سه میله هریک به جرم m سه ضلع یک مربع را می‌سازند. میله‌ها برابر شکل (۹-۴۷) با بست‌های بدون اصطکاک به یکدیگر و به دیوار وصل‌اند. وسط میله‌ی بالایی و سمت راست با ریسمان به همدیگر وصل شده‌اند. کشش را در ریسمان حساب کنید.

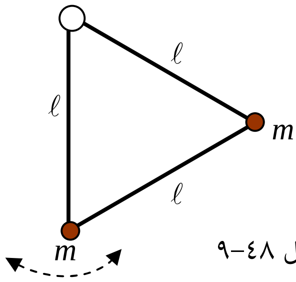


شکل ۹-۴۷

۹-۶ (دو جرم و مثلث) : از سه میله‌ی بدون جرم و به طول ℓ یک قاب مثلث ساخته‌ایم. دو جرم m را در دو راس این مثلث متساوی الاضلاع قرار می‌دهیم. راس سوم ازمیخی آویخته شده است. قاب می‌تواند آزادانه در صفحه‌ی عمودی نوسان کند، شکل (۹-۴۸). هنگامی که یکی از میله‌ها عمودی است (همانند شکل). سامانه را از حالت سکون رها می کنیم. کشش را در هر سه میله بیابید و شتاب جرم‌ها را درست پس از رها شدن حساب کنید



شکل ۹-۴۹

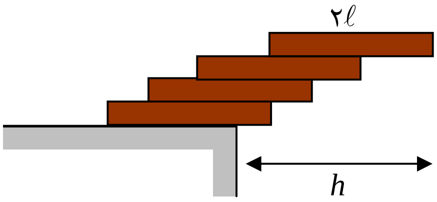


شکل ۹-۴۸

۹-۷ (استوانه روی سطح شیب‌دار): یک میله‌ی افقی به جرم m از انتهای چپ با لولای بدون اصطکاک به سطح شیب‌داری با شیب θ وصل شده است. انتهای راست میله برابر شکل (۹-۴۹) بر روی استوانه‌ای به جرم m قرار دارد. استوانه روی سطح شیب‌دار در حالت سکون است. ضریب اصطکاک بین میله و استوانه و بین سطح و استوانه هر دو μ است

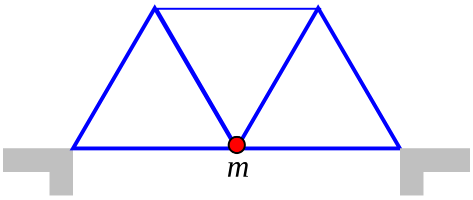
(الف): فرض کنید سامانه در حال سکون است. سطح چه نیروی عمودی به استوانه وارد می‌کند؟

(ب): برای این که سامانه نلغزد، کمترین مقدار μ برحسب θ چقدر باید باشد؟



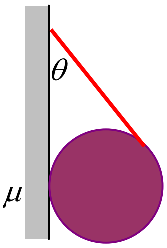
شکل ۹-۵۰

۹-۸ (چیدن آجرها): چهارآجر یکسان هر یک به طول ۲ℓ و جرم m را بر روی میزی چنان می‌چینیم که بخشی از هر آجر نسبت به آجر زیری در هوا باشد (شکل ۹-۵۰). آجر ها را چگونه بچینیم تا فاصله‌ی لبه‌ی سمت راست آخرین آجر تا لبه‌ی میز (فلصله‌ی h) بیشترین فاصله ممکن باشد. مسئله را برای N آجر گسترش دهید



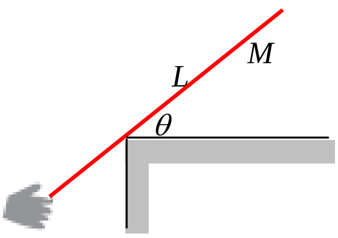
شکل ۹-۵۱

۹-۹ (پل): با سه قاب مثلث متساوی الاضلاع که هر کدام با سه میله ساخته شده است پلی برابر شکل (۹-۵۱) ساخته شده می‌شود. فرض کنید هفت میله‌ی تشکیل دهنده بدون جرم‌اند و میله‌ها دو به دو با بست به هم پیوند داده شده اند. اگر اتوموبیلی به جرم m در وسط پل باشد، نیروی وارد به هر یک از میله ها را بیابید. فرض کنید نیروی پایه‌های پل مولفه‌ی افقی ندارد.



شکل ۹-۵۲

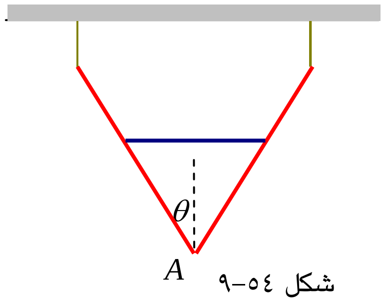
۹-۱۰ (توپ و ریسمان): توپی برابر شکل (۹-۵۲) نگه داشته شده است. ریسمان به توپ مماس است. ریسمان با دیوار زاویه‌ی θ می‌سازد. کمینه مقدار ضریب اصطکاک بین توپ و دیوار چقدر باید باشد تا توپ نیفتد.



شکل ۹-۵۳

۹-۱۱ (نگه داری میله): میله‌ای به طول L و جرم M را برابر شکل (۹-۵۳)با انگشت دست نگه می داریم. در فاصله‌ی $L/4$ از انگشت دست، میله بر لبه‌ی بدون اصطکاک میزی تکیه دارد و ساکن است. در این حالت میله با افق زاویه‌ی

θمی‌سازد. برای این که میله در این وضعیت باقی بماند چه نیرویی را باید دست به میله وارد کند؟ به ازای چه زاویه‌ی θ نیروی دست باید افقی باشد؟



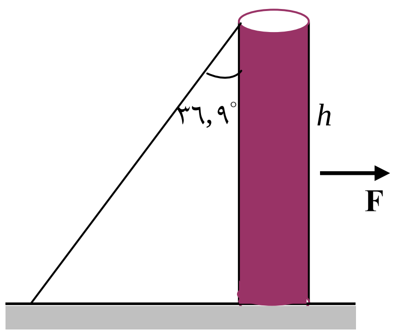
شکل ۹-۵۴

۹-۱۲ (v آویزان): دو میله‌ی همگن یکسان هر یک به وزن $260\ N$ از یک انتها (نقطه‌ی A در شکل (۹-۵۴)) با لولای بدون اصطکاک به هم چسبیده‌اند. میله‌ی افقی سبکی وسطهای آنها را به هم وصل می‌کند تا به این وسیله زاویه‌ی راس دو میله 53° باقی بماند. این سامانه را با دو سیم نازک از سقف می‌آویزیم تا به صورت " **v** " بایستد.

(الف): میله‌ی افقی چه نیرویی به هر یک از میله‌ها وارد می‌کند؟

(ب): در نقطه‌ی A لولا چه نیرویی به هر یک از میله ها وارد می‌کند؟

۹-۱۳ (تیرک پابرجا): تیرکی به وزن $400\ N$ و ارتفاع h بر روی زمین ایستاده است. ضریب اصطکاک بین زمین و سطح قاعده‌ی تیرک $\mu = 0/3$ است. انتهای بالای تیرک برابر شکل (۹-۵۵) با ریسمانی به زمین بسته شده است. زاویه‌ی ریسمان با تیرک $36/9^\circ$ است. نیروی افقی **F** به وسط تیرک وارد می شود.



شکل ۹-۵۵

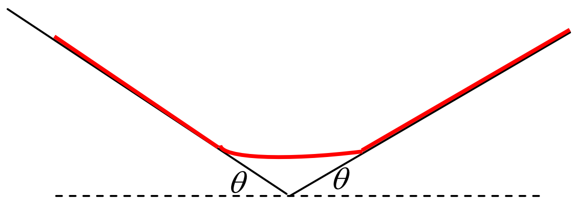
(الف): بیشه مقداری را که **F** می‌تواند داشته باشد و هنوز هم تیرک سرپا بماند چقدر است؟

(ب): اگر نیروی **F** در فاصله‌ی $0/6$ ارتفاع تیرک از پای آن به تیرک وارد شود، بیشینه مقدار **F** چقدر می‌تواند باشد که هنوز هم تیرک می‌تواند تاب بیاورد و نیفتد؟

(پ): نشان دهید که اگر نقطه‌ی اثر نیرو خیلی بالاتر از سطح زمین باشد، اندازه‌ی **F** هر چه باشد نمی‌تواند تیرک را جابه‌جا کند.

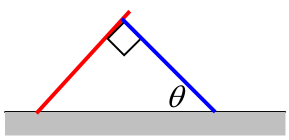
(ت): ارتفاع بحرانی از سطح زمین که اگر نقطه‌ی اثر **F** بالاتر از آن باشد، نمی‌تواند تیرک را جابه‌جا کند کجاست؟

۹-۱۴ (ریسمان بین دو سطح شیب‌دار): ریسمانی برابر شکل (۹-۵۶) در حالت کشیده بر روی دو سطح شیب‌دار، هردو با شیب θ، در حال سکون است. چگالی جرمی ریسمان یکنواخت است و ضریب اصطکاک بین آن و سطح‌ها $\mu = 1$ است. سامانه تقارن راست- چپ دارد. بزرگ‌ترین کسری از طول ریسمان که می تواند با سطح ها در تماس نباشد چیست؟ به ازای چه زاویه‌ی θ این مقدار بیشینه است؟

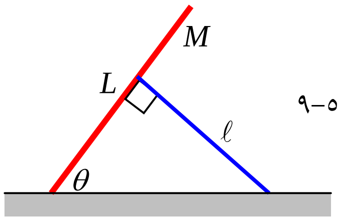


شکل ۹-۵۶

۹-۱۵ (میله‌هایی که به هم تکیه داده‌اند): دو میله با چگالی جرمی یکسان برابر شکل (۹-۵۷) به هم تکیه داده‌اند. زاویه‌ای که این دو میله با هم می سازند 90° است. میله‌ی سمت راست با افق زاویه‌ی θ می‌سازد. میله‌ی سمت چپ به مقدار ناچیزی پس از نقطه‌ی تماس با لبه‌ی میله‌ی سمت راست، ادامه دارد. ضریب اصطکاک بین دو میله μ است. انتهای دیگر هر دو میله روی زمین‌اند. زاویه‌ی θ چقدر باید باشد تا میله‌ها نیفتند ؟



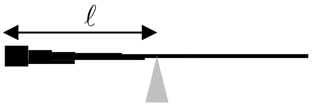
شکل ۹-۵۷



شکل ۵۸-۹

۱۶-۹ (نگه داشتن نردبان): نردبانی به طول L و جرم M به میله‌ی بدون جرمی با طول ℓ تکیه دارد. میله و نردبان هردو از یک انتها روی زمین‌اند. زاویه‌ی بین میله و نردبان $^\circ$۹۰ است. زاویه‌ی نردبان با زمین افقی θ است (شکل ۵۸-۹) . چه نیرویی از سوی میله به نردبان وارد می شود؟

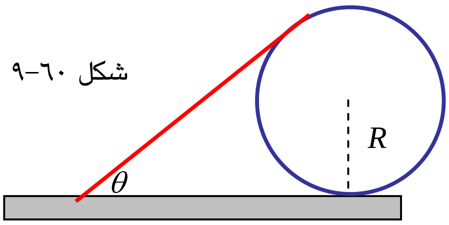
۱۷-۹ (ترازمندی میله): میله‌ای از یک طرف تا بینهایت ادامه دارد.توزیع جرم این میله چگونه باید باشد تا اگر میله را در جای دلخواهی ببریم، بقیه‌ی آن (که هنوز میله‌ای است که از یک سو تا بینهایت ادامه دارد) روی تکیه‌گاهی که در فاصله‌ی ℓ از انتهای میله است، ترازمند باشد. شکل (۵۹-۹) را ببینید.



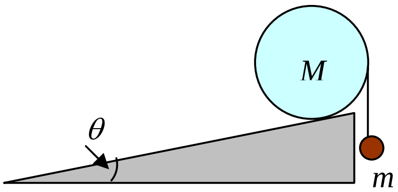
شکل ۵۹-۹

۱۸-۹ (میله و حلقه): میله‌ای با چگالی جرمی ρ برابر شکل (۶۰-۹) به حلقه‌ای با شعاع R تکیه دارد و با افق زاویه‌ی θ می‌سازد. میله در جایی که به حلقه تکیه می کند برحلقه مماس است. همه‌ی نقاط تماس سامانه دارای اصطکاک است. فرض کنید اصطکاک‌ها به اندازه‌ای بزرگ‌اند که سامانه را در حال سکون نگه می‌دارند. اصطکاک بین زمین و حلقه را بیابید.

شکل ۶۰-۹



۱۹-۹ (استوانه و جرم آویزان): استوانه‌ی همگنی به جرم M روی سطح شیب‌دار ثابتی با شیب θ قرار دارد. به سمت راست استوانه ریسمانی بسته شده است و از آن جرم m برابر شکل (۶۱-۹) آویزان است. اگر اصطکاک بین استوانه و سطح به اندازه‌ای بزرگ باشد که از لغزین استوانه جلوگیری کند، m را برحسب M و θ چنان بیابید که سامانه ایستا بماند.

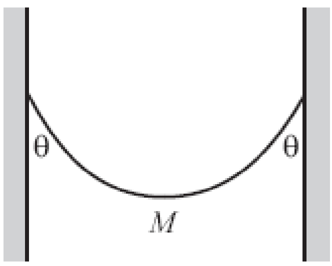


شکل ۶۱-۹

۲۰-۹ (زنجیر آویزان) : دو انتهای زنجیری به جرم M از یک سطح بین دو دیوار آویزان است. زنجیر برابر شکل (۶۲-۹) با هر یک از دیوارها زاویه‌ی θ می‌سازد. کشش زنجیر را در پایین‌ترین نقطه‌ی آن بیابید. مسئله را به دو روش حل کنید.

(الف): نیروهای وارد به نیمی از زنجیر را در نظر بگیرید (این روش زودتر به نتیجه می‌رسد).

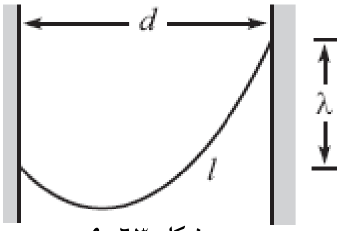
(ب): به یاد بیاورید که ارتفاع زنجیر $y(x)=C\cosh(x/C)$ است و از آن استفاده کنید و نیروی عمودی وارد به جزء بسیار کوچک واقع در پایین زنجیر را در نظر بگیرید. این روش کشش را برحسب C به دست می‌دهد. سپس رابطه‌ای برای C برحسب زاویه‌ی θ بیابید.



شکل ۶۲-۹

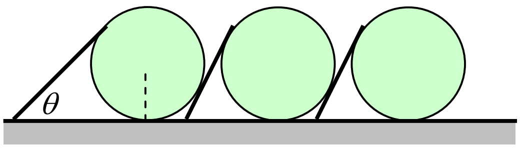
۲۱-۹ (زنجیر آویزان از دو نقطه‌ی ناهم‌سطح): **(الف)** زنجیری با چگالی جرمی یکنواخت از دو انتها به دو دیوار وصل است. معادله‌ی عمومی شکل زنجیر را پیدا کنید. به غیر از یک ثابت انتگرال‌گیری، در پاسخ شما که شکل زنجیر را توصیف می‌کند، باید یک ثابت ناشناخته وجود داشته باشد.

(ب): ثابت ناشناخته در پاسخ بخش (الف) به فاصله‌ی افقی، d ، دو دیوار و اختلاف سطح نقطه‌های اتصال و طول زنجیر بستگی دارد (شکل۶۳-۹). رابطه‌ای را پیدا کنید که این کمیت ها ثابت ناشناخته را بتوان از آن به دست آورد.



شکل ۹-٦٣

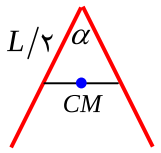
۹-۲۲ (میله ها وحلقه هایی که به هم تکیه داده اند): تعداد زیادی میله (هر یک با چکالی ρ) و حلقه (هر یک به شعاع R) برابر شکل (٦٤-۹) به هم تکیه داده اند. زاویه‌ی هر میله با افق θ است. انتهای بالایی هر میله به حلقه‌ی سمت راست خود مماس است. انتهای پایین میله‌ها به زمین وصل‌اند و هر سطح دیگر بدون اصطکاک است(بین میله و حلقه اصطکاک وجود ندارد.) برای حالتی که تعداد حلقه‌ها و میله‌ها خیلی زیاد است، نیروی عمودی بین یک میله و حلقه‌ی سمت راست آن را که میله تکیه کرده است چقدر است؟ فرض کنید آخرین حلقه به دیوار تکیه دارد.



شکل ۹-٦٤

حل مثال‌های تکمیلی

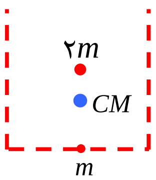
ت-۱ برای همه‌ی حالت‌ها از این واقعیت استفاده می‌کنیم که هر میله‌ی همگن به طول L را می‌توان به صورت جرم نقطه‌ی واقع در مرکز میله پنداشت.



شکل ۹-٦٥ الف

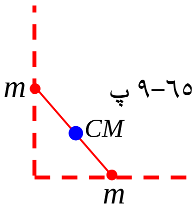
(الف): مرکزجرم در وسط خطی است که مرکز دو میله را به هم وصل می‌کند و در فاصله‌ی $(L/۲)\cos(\alpha/۲)$ از راس قرار دارد. شکل (٦٥-۹ الف).

آزمون درستی پاسخ: $\alpha=\circ\Rightarrow L/۲$ ، $\alpha=۹۰^\circ\Rightarrow L/۲\sqrt{۲}$) حالت (پ)) و $\alpha=۱۸۰^\circ\Rightarrow\circ$ که همگی پذیرفتنی‌اند.



شکل ۹-٦٥ ب

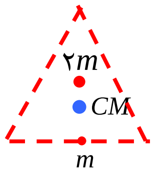
(ب): دو میله‌ی عمودی همانند جرم $۲m$ است که در وسط قرار دارد، شکل (٦٥-۹ ب) . بنابراین، مرکزجرم بین وسط میله‌ی افقی و در فاصله‌ی ۲/۳ از از آن قرار دارد. به بیان دیگر در فاصله‌ی $L/۳$ از میله‌ی افقی و درست بالای وسط آن.



شکل ۹-٦٥ پ

(پ): مرکزجرم در وسط خطی است که وسط دو میله را به هم وصل می‌کند شکل (٦٥-۹ پ).

(ت): مرکزجرم دو ضلع جانبی همانند حالت (الف) در وسط خطی ایت که وسط آنها را به هم می‌پیوندد. در ایت نقطه جرم $۲m$ قرار دارد. مرکزجرم ضلع افی در وسط آن است و جرم m در این نقطه است. بنابراین، مرکز جرم روی ارتفاع مثلث و به فاصله‌ی $(۱/۳)(\sqrt{۳}/۲)L$ از وسط ضلع افقی است ، شکل (٦٥-۹ ت)



شکل ۹-٦٥ ت

ت-۲ نیروها را به مولفه‌هایشان در راستای سطح و عمود بر آن تجزیه کنید. فرض کنید F_f مثبت در امتداد دیوار رو به بالا باشد. نیروهایی که موازی و عمود بر دیوارند، عبارت اند از

$$F_f = Mg\sin\beta + Mg\cos\beta \quad , \quad N = Mg\sin\beta - Mg\cos\beta \qquad (۹\text{-}۱۰۹)$$

N باید مثبت باشد (نمی تواند منفی باشد و اگر $N=0$ باشد قطعه دیوار را ترک می‌کند)، بنابراین، دیده می‌شود که اگر قرار است این آرایش ایستا باشد، β باید بیش‌تر از 45° باشد. ضریب اصطکاک μ می‌گوید که $|F_f| \le \mu N$ است و با استفاده از رابطه‌ی (۹-۱۰۹) این نابرابری به صورت زیر در می‌آید

$$Mg\left(\sin\beta+\cos\beta\right)\le \mu Mg\left(\sin\beta-\cos\beta\right)\ \Rightarrow\ \frac{\mu+1}{\mu-1}\le\tan\beta \qquad (9\text{-}110)$$

برای این که زاویه‌ی β وجود داشته باشد و این نابرابری برقرار باشد، باید $\mu>1$ باشد. اگر $\mu\to\infty$ برود β می‌تواند تا 45° کاهش پیدا کند اما کم‌تر از آن نمی‌تواند باشد.

ت-۳ نیروی اصطکاک بین قیف و هر انگشت را F بنامید. مولفه‌ی نیروها در راستای قائم F_y باید صفر باشد. به بیان دیگر داریم $2F\cos\theta-2N\sin\theta-mg=0$. همچنین داریم $F\le\mu N$. پس

$$2\mu N\cos\theta-2N\sin\theta-mg>0\ \Rightarrow\ N\ge\frac{mg}{2\left(\mu\cos\theta-\sin\theta\right)} \qquad (9\text{-}111)$$

این کمینه مقدار نیروی عمودی است. وقتی $\mu=\tan\theta$ باشد $N=\infty$ می‌شود. پس، $\mu=\tan\theta$ کمینه مقدار مجاز μ است.

ت-۴ مولفه‌های خواسته شده را F_x و F_y بنامید. جرم میله‌ی بالایی $\rho\left(L/\cos\theta\right)$ و جرم میله‌ی پایینی ρL است. از صفر بودن گشتاورهای وارد به کل این سامانه نسبت به انتهای چپ میله‌ی افقی داریم

$$F_x\left(L\tan\theta\right)=\rho g\left(\frac{L}{\cos\theta}+L\right)\left(\frac{L}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad F_x=\frac{\rho Lg}{2}\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right) \qquad (9\text{-}112)$$

حال، فقط میله‌ی بالایی را در نظر بگیرید. چون این میله در حال ترازمندی ایستایی است گشتاور کل وارد به آن صفر است. گشتاورها را نسبت به انتهای پایین میله حساب کنید:

$$F_yL=F_x\left(L\cot\theta\right)+\rho g\left(\frac{L}{\cos\theta}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad F_y=\frac{\rho gL}{2}\left(\frac{2+\cos\theta}{\cos\theta}\right) \qquad (9\text{-}113)$$

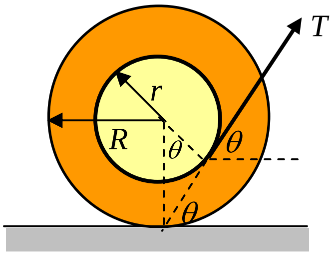
F_x به ازای $\theta\to0$ به بینهایت میل می‌کند و F_y به ازای $\theta\to\pi/2$ بینهایت می‌شود.

نکته: اگر مولفه‌ها را به توان دو برسانیم و باهم جمع کنیم، با استفاده از $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ خواهیم داشت

$$F^2\propto\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{\left(2+\cos\theta\right)^2}{\cos^2\theta} \qquad (9\text{-}114)$$

اگر از این رابطه مشتق بگیریم و مساوی صفر قرار دهیم به دست می‌آید $\cos^3\theta-6\cos\theta+4=0$. یک ریشه‌ی این معادله‌ی درجه سه ۲ است. اگر معادله‌ی بالا را به $\left(\cos\theta-2\right)$ تقسیم کنیم، معادله‌ی درجه ۲ به دست می‌آید که ریشه‌ی پذیرفتنی آن $\cos\theta=-1+\sqrt{3}$ است.

ت-۵ (الف): نیروی اصطکاک بین ماسوره و زمین را F_f بنامید. سامانه در ترازمندی استایی است، بنابراین، از $\sum F_x=0$ داریم $T\cos\theta=F_f$ و از $\sum\mathbf{G}=0$ نسبت به مرکز ماسوره داریم $Tr=F_fR$. از تقسیم این دو رابطه به یکدیگر به دست می‌آید $\cos\theta=r/R$. سادگی این پاسخ نشان دهنده‌ی آن است که روش آسان‌تری برای به دست آوردن آن وجود دارد. در



شکل ۶۶-۹

واقع، از شکل (۶۶-۹) پیداست که $\cos\theta = r/R$ زاویه‌ای است که به ازای آن امتداد خط کشش از نقطه‌ی تماس ماسوره و زمین می‌گذرد. چون گشتاور نیروهای گرانش و اصطکاک نسبت به این نقطه صفر اند، گشتاور کل هم نسبت به آن صفر است و در نتیجه، ماسوره ساکن باقی می‌ماند.

(ب): نیروی عمودی سطح زمین عبارت است از $N = Mg - T\sin\theta$. با استفاده از $T\cos\theta = F_f$ شرط $F_f \le \mu N$ به صورت زیر در می‌آید

$$T\cos\theta \le \mu\left(Mg - T\sin\theta\right) \quad\Rightarrow\quad T \le \frac{\mu Mg}{\cos\theta + \mu\sin\theta} \qquad (۹-۱۱۵)$$

که در آن θ عبارت است از $\theta = \cos^{-1}\left(r/R\right)$.

(پ): بیشینه مقدار T از رابطه‌ی (۱۱۵-۹) به دست می‌آید و به θ بستگی دارد. θ هم به r وابسته است. می‌خواهیم r را چنان به دست بیاوریم که T را کمینه کند. اگر از رابطه‌ی (۱۱۵-۹) نسبت به θ مشتق بگیریم در می‌یابیم که به ازای $\tan\theta_\circ = \mu$ مخرج کسر بیشینه می‌شود. مقدار T به ازای $\theta_\circ$ برابر است با

$$T_\circ = \frac{\mu Mg}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad (۹-۱۱۶)$$

برای این که r متناظر با آن را به دست آوریم از $\cos\theta = r/R$ استفاده می‌کنیم تا بنویسیم

$$\tan\theta = \sqrt{R^2 - r^2}\Big/r \qquad (۹-۱۱۷)$$

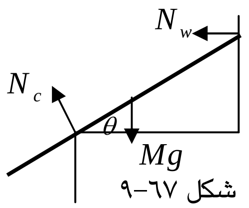
اینک رابطه‌ی $\tan\theta_\circ = \mu$ به پاسخ

$$r_\circ = \frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad (۹-۱۱۸)$$

می‌انجامد. به ازای این مقدار، حد بالای T کمینه مقدار ممکن را خواهد داشت. در حد $\mu = 0$ داریم $\theta_\circ = 0$ ، $T_\circ = 0$ و $r_\circ = R$. حد $\mu = \infty$ منطبق است بر $\theta_\circ = \pi/2$ ، $T_\circ = Mg$ و $r_\circ = 0$.

ت-۶ به گشتاورها حول لولا توجه کنید. چون گرانش به مرکزجرم اثر می‌کند، پس نیروی F که گوه به میله وارد می‌کند باید در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$mg\left(\ell/2\right) = F\left(3\ell/4\right) \quad\Rightarrow\quad F = \frac{2}{3}mg \qquad (۹-۱۱۹)$$



شکل ۶۷-۹

ت-۷ نیروی عمودی سکو را N_c بنامید. از گشتاور نیروها نسبت به انتهای بالایی میله (شکل ۶۷-۹) داریم

$$\sum \mathbf{G} = 0 \;\Rightarrow\; N_c\left(\frac{3L}{4}\right) = Mg\left(\frac{L}{2}\right)\cos\theta \;\Rightarrow\; N_c = \frac{2}{3}Mg\cos\theta \qquad (۹-۱۲۰)$$

اگر نیروی عمودی دیوار را N_w بنامیم از $\sum\mathbf{G} = 0$ نسبت به لبه‌ی سکو به دست می‌آید

$$N_W\left(\frac{۳L}{٤}\right)\sin\theta = Mg\left(\frac{L}{٤}\right)\cos\theta \quad\Rightarrow\quad N_W = \left(\frac{Mg}{۳}\right)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad (۹-۱۲۱)$$

اگر F_f نیروی اصطکاک لبه‌ی سکو باشد، از $\sum F_x = ۰$ داریم

$$F_f\cos\theta = N_c\sin\theta + N_w \quad\Rightarrow\quad F_f = \frac{۲}{۳}Mg\sin\theta + \frac{۱}{۳}\frac{Mg}{\sin\theta} \qquad (۹-۱۲۲)$$

اما می‌خواهیم $F_f \le \mu N_c$ باشد. پس

$$\frac{۲Mg\sin\theta}{۳} + \frac{Mg}{۳\sin\theta} \le \mu\frac{۲Mg\cos\theta}{۳} \quad\Rightarrow\quad \mu \ge \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{۱}{۲\sin\theta\cos\theta} \qquad (۹-۱۲۳)$$

اگر از این رابطه نسبت به θ مشتق بگیریم تا μ را کمینه کنیم به دست می‌آید $\tan\theta = ۱/\sqrt{۳} \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$.