فصل ۸

سامانه دو جسمی؛ برخورد

در این فصل سامانه‌ی منزوی دو جسمی را بررسی می کنیم. منزوی به این معنی است که در سامانه فقط نیروی متقابل بین دو جسم وجود دارد. با این حال، اگر گرانش را نیز در نظر بگیریم، حل مسئله چندان دشوار نخواهد بود، اما نتیجه‌ی آن کاربرد-های گسترده دارد. بنابراین، میدان گرانش **یکنواخت** را هم در نظر می‌گیریم.

۸ـ۱ مختصات مرکز جرم و مختصات نسبی

نخست چارچوبی را در نظر بگیرید که مکان‌های دو ذره نسبت به آن $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ اند. جرم ذره‌ها را m_1 و m_2 بنامید. اگر $\mathbf{F}$ نیرویی باشد که m_1 به m_2 وارد می‌کند، آنگاه بنا به قانون سوم نیوتون، نیرویی که m_2 به m_1 وارد می‌کند $-\mathbf{F}$ است. پس، معادله‌های حرکت در میدان گرانش یکنواخت $\mathbf{g}$ عبارت‌اند از:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = m_1\mathbf{g}+\mathbf{F}$$
$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = m_2\mathbf{g}-\mathbf{F} \qquad (۸-۱)$$

مکان ذره‌ها را باید نسبت به یک چارچوب اندازه بگیریم. هر چارچوب لخت (چارچوبی که شتاب ندارد) با چارچوب لخت دیگری هم‌ارز است و می‌تواند به کار برود. اما چارچوب خاصی وجود دارد که برای ما برتری‌هایی را به همراه دارد. این چارچوب خاص، چارچوب مرکز جرم است. در بخش۲-۸ آن را تعریف خواهیم کرد. پیش از آن لازم است که مرکزجرم دو جرم را تعریف کنیم. این تعریف، پیش درآمدی برای تعیین مرکز جرم هر جسم عمومی است و موضوع فصل ۹ است.

به جای متغیرهای $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ بهتر است متغیرهای تازه‌ای را به کار ببریم. مکان **مرکز جرم** دو جرم m_1 و m_2 را با رابطه‌ی

$$\mathbf{R}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} \qquad (۸-۲)$$

و مکان نسبی آن‌ها را با

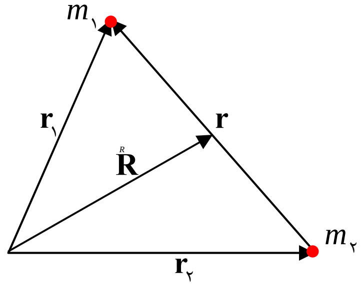
$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2 \qquad (۸-۳)$$

تعریف می‌کنیم. در شکل (۱-۸) این بردارها نشان داده شده‌اند. اگر دو معادله‌ی رابطه‌ی (۱-۸) را با هم جمع کنیم معادله‌ی حرکت مکان $\mathbf{R}$ به دست می‌آید.

$$M\ddot{\mathbf{R}}=M\mathbf{g} \quad , \quad M=m_1+m_2 \qquad (۸-۴)$$

یکی از خوبی‌های نماد $\mathbf{R}$ برای مرکزجرم این است که تأکید می‌کند بردار $\mathbf{R}$ با جرم کل $\mathbf{M}$ همراه است.

معادله‌ی حرکت $\mathbf{r}$ را نیز می‌توان از رابطه‌ی (۱- ۸) به دست آورد. نخست این معادله‌ها را به جرم‌ها تقسیم کنید و سپس از یکدیگر کم کنید؛ به دست می‌آید.



شکل ۱-۸

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= g+\frac{1}{m_1}\mathbf{F}\\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= g-\frac{1}{m_2}\mathbf{F}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \ddot{\mathbf{r}}_1-\ddot{\mathbf{r}}_2=\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\mathbf{F}\quad\Rightarrow\quad \mu\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{F}\qquad;\qquad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{۸-۵}$$

μ جرم **کاهیده** نامیده می شود، چون همیشه از تک تک m_1 و m_2 کمتر است. رابطه‌ی (۵-۸) می‌گوید، حرکت جرم m_2 نسبت به m_1 دقیقاً همان است که اگر ذره‌ی m_1 ثابت می‌بود و m_2 با جرم موثر μ حرکت می‌کرد. اینک دو معادله‌ی (۴-۸) و (۵-۸) کاملاً از یکدیگر جدا شده‌اند. رابطه‌ی (۴-۸) نشان می‌دهد که مرکز جرم با شتاب ثابت $\mathbf{g}$ حرکت می‌کند. برای حالتی که $\mathbf{g}=0$ است (یعنی گرانش وجود ندارد و به راستی سامانه منزوی است) رابطه‌ی (۴-۸) با قانون پایستگی تکانه هم‌ارز است.

$$M\dot{\mathbf{R}}=m_1\dot{\mathbf{r}}_1+m_2\dot{\mathbf{r}}_2=\mathbf{P}=\text{ثابت} \tag{۸-۶}$$

معادله‌ی حرکت (۵-۸) برای مکان نسبی، همانند معادله‌ی حرکت تک ذره‌ای با جرم μ است که تحت تأثیر نیروی $\mathbf{F}$ است. اگر بتوان مسئله‌ی این تک‌ذره را حل کرد، آنگاه می‌توان مسئله‌ی دو ذره رانیز حل کرد. اگر بتوان $\mathbf{R}$ و $\mathbf{r}$ را به صورت تابعی از زمان یافت، می‌توان با حل همزمان معادله‌های (۲-۸) و (۳-۸) مکان ذره‌ها را به دست آورد. چون داریم

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{R}+\frac{m_2}{M}\mathbf{r}\qquad,\qquad \mathbf{r}_2=\mathbf{R}-\frac{m_1}{M}\mathbf{r} \tag{۸-۷}$$

معادله‌های (۴-۸) و (۵-۸) دو معادله‌ی جدا از هم‌اند. یکی معادله‌ی حرکت مرکزجرم و دیگری معادله‌ی حرکت جرم کاهیده است. جدایی میان حرکت مرکز جرم و حرکت نسبی را می‌توان به تکانه‌ی زاویه‌ای کل و انرژی جنبشی هم تعمیم داد. باتوجه به رابطه‌ی (۷-۸) داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{L}&=m_1\mathbf{r}_1\times\dot{\mathbf{r}}_1+m_2\mathbf{r}_2\times\dot{\mathbf{r}}_2\\ &=m_1\left(\mathbf{R}+\frac{m_2}{M}\mathbf{r}\right)\times\left(\dot{\mathbf{R}}+\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)+m_2\left(\mathbf{R}-\frac{m_1}{M}\mathbf{r}\right)\times\left(\dot{\mathbf{R}}-\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)\end{aligned} \tag{۸-۸}$$

اگر پرانتزها را با دقت‌کردن در ضرب برداری آنها، در هم ضرب کنیم جمله‌های $\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{r}}$ و $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{R}}$ یکدیگر را حذف می‌کنند و خواهیم داشت

$$\mathbf{L}=M\,(\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}})+\mu\,\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} \tag{۸-۹}$$

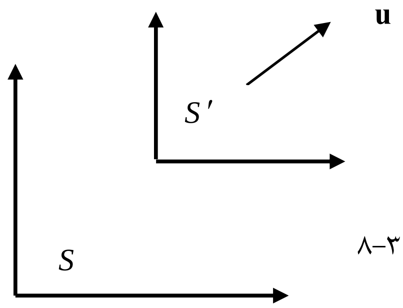
به همین ترتیب، اگر از رابطه‌های (۷-۸) نسبت به زمان مشتق بگیریم و در $T=(1/2)m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2+(1/2)m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2$ جایگزین کنیم، پس از اندک عملیات جبری خواهیم داشت

$$T=(1/2)M\dot{\mathbf{R}}^2+(1/2)\mu\dot{\mathbf{r}}^2 \tag{۸-۱۰}$$

این رابطه‌ی چشمگیری است. از این رابطه آشکار است که انرژی جنبشی کل سامانه جمع انرژی‌های جنبشی دو جرم "پنداری" است. یکی انرژی جنبشی جسمی به جرم $(M=m_1+m_2)$ است که با سرعتی برابر سرعت مرکزجرم حرکت می‌کند. دیگری، انرژی جنبشی جسمی به جرم μ است که با سرعت مکان نسبی $\mathbf{r}$ حرکت می‌کند. توجه کنید که جمله‌ی دوم در رابطه‌ی (۱۰-۸) انرژی جنبشی در چارچوب مرکزجرم است، اما $\mathbf{r}$ فاصله از مرکزجرم نیست. جمله‌ی نخست را می‌توان انرژی جنبشی جسمی به جرم M پنداشت که بردار مکان آن $\mathbf{R}$ است. یعنی انرژی جرم M جایگزیده در مرکزجرم.

۸-۲-۱ چارچوب مرکزجرم

هنگامی که از تکانه حرف می‌زنیم، به طور ضمنی چارچوب خاصی را در نظر داریم. به هر حال، سرعت ذره ها را باید نسبت به چارچوبی اندازه گرفت. وقتی سخن از سرعت است، باید بگوییم نسبت به کدام چارچوب آن را اندازه می‌گیریم. چارچوب S را در شکل(۳-۸) در نظر بگیرید. چارچوب دیگر S' را هم که نسبت به S با سرعت $\mathbf{u}$ حرکت می‌کند در نظر بگیرید. سرعت ذره‌ای در S با رابطه‌ی (۸-۱) در فصل ۱، به سرعت ذره در S' مربوط است:



شکل ۳-۸

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u} \qquad (۸-۱۱)$$

سامانه‌ای منزوی شامل دو ذره را در S تصور کنید. این دو ذره باهم برخورد می‌کنند. اینک می‌پرسیم: اگر تکانه‌ی کل دو ذره در چارچوب S پایسته باشد، آیا در طول برخورد ذره‌ها در چارچوب S' نیز تکانه کل پایسته است؟ پاسخ روشن است. در S' نیز تکانه پایسته است؛ چون تکانه‌های اولیه و نهایی سامانه، در چارچوب S' ، در مقایسه با چارچوب S، هر دو به اندازه‌ی $(\sum m_i)\mathbf{u}$ افزایش می‌یابند (به بیان دیگر، هنگامی که در فصل ۵ پایستگی تکانه را بررسی کردیم در هیچ جا نگفتیم که از چه چارچوبی استفاده می‌کنیم. فقط فرض کردیم چارچوب شتاب‌دار نیست. اگر چارچوب شتاب‌دار می‌بود $\mathbf{F}$ دیگر با $m\mathbf{a}$ برابر نمی شد.) بنابراین، بگذارید به چارچوب یگانه‌ای بیندیشیم که در آن، تکانه‌ی کل سامانه‌ی ذرات صفر است. یک چنین چارجوبی را **چارچوب مرکزجرم**(چارچوب CM) می‌گویند. اگر در چارچوب S تکانه‌ی کل $\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{v}_i$ باشد آنگاه چارچوب مرکزجرم، S' ، چارچوبی است که باید نسبت به S با سرعت

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{P}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{M} \qquad (۸-۱۲)$$

حرکت کند ($M = \sum m_i$ جرم کل سامانه‌ی ذرات است). اثبات این که چارچوب S' با این سرعت $\mathbf{u}$ نسبت به S همان چارچوب مرکزجرم است (یعنی در آن تکانه‌ی کل صفر است) دشوار نیست. با استفاده از رابطه‌ی (۸-۱۱) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' &= \sum m_i \mathbf{v}'_i = \sum m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}) \\ &= \sum m_i (\mathbf{v}_i - \frac{\mathbf{P}}{M}) = (\mathbf{P} - \mathbf{P}) = \circ \end{aligned} \qquad (۸-۱۳)$$

پس، در این چارچوب تکانه‌ی کل صفر است.

چارچوب مرکزجرم بسیار سودمند است. فرایندهای فیزیکی در این چارچوب تقارن بیشتری دارند و این سبب شفاف بودن نتایج می‌شود. فیزیک پیشه‌های نظری بیشتر کارهای پژوهشی خود را در این چارچوب انجام می‌دهند. گاهی به چارچوب مرکزجرم چارچوب **تکانه‌صفر** نیز می‌گویند. چون در این چارچوب، مرکز جرم ساکن است و حرکت نمی‌کند. اما چارچوب مرکزجرم معمول‌تراست. (در میدان گرانش این چارچوب شتاب‌دار و در نتیجه نا لخت است؛ با این وجود، هنوز هم سودمند است.)

تعریف مرکزجرم برای دو ذره، رابطه‌ی (۸-۲)، را می‌توان به صورت زیر به بیش از دو ذره هم تعمیم داد

$$\mathbf{R}=\frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} \qquad (۸–۱۴)$$

واقعیت این که در چارچوب مرکزجرم، خودِ مرکزجرم حرکت نمی‌کند از این نکته نتیجه می‌شود که مشتق $\mathbf{R}$ همان سرعت مرکزجرم است که با رابطه‌ی (۱۲–۸) تعریف شده است. پس، می‌توان مرکزجرم را مبداء مختصات برگزید. البته مکان نسبی $\mathbf{r}_i$ مستقل از این است که مبداء مختصات را کجا برگزینیم. با گزینه‌ی $\mathbf{R}_{CM}=۰$ در رابطه‌ی (۷–۸) داریم

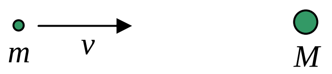
$$\mathbf{r}_{۱CM}=\frac{m_۲}{M}\mathbf{r} \qquad , \qquad \mathbf{r}_{۲CM}=-\frac{m_۱}{M}\mathbf{r} \qquad (۸–۱۵)$$

در این چارچوب تکانه های دو ذره باهم برابر و مخالف یکدیگرند

$$m_1\dot{\mathbf{r}}_{1CM}=-m_2\dot{\mathbf{r}}_{2CM}=\mu\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{P}_{CM} \qquad (۸–۱۶)$$

افزون بر چارچوب مرکزجرم، فیزیک پیشه‌ها از چارچوب دیگری به نام **چارچوب آزمایشگاه** هم استفاده می‌کنند. هیچ چیز خاصی در باره‌ی چارچوب آزمایشگاه وجود ندارد. چارچوب آزمایشگاه چارچوب لختی است که *شرایط مسئله* در آن چارچوب داده می‌شود. پس، هر چارچوب لخت را می توان "چارچوب آزمایشگاه" نامید. بیشتر وقت‌ها برای حل مسئله باید بین چارچوب‌های مرکزجرم و آزمایشگاه رفت و آمد کرد. برای نمونه، ممکن است که از ما خواسته شود پاسخ مسئله را در چارچوب آزمایشگاه بیابیم. برای این کار گاهی مجبوریم داده‌های مسئله در چارچوب آزمایشگاه را به چارچوب مرکزجرم ببریم (چون حل مسئله در چارچوب مرکزجرم آسان‌تر است) و آن را حل کنیم و سپس نتیجه را به چارچوب آزمایشگاه برگردانیم. مثال ۱–۸ این تبدیل ها را روشن‌تر نشان می‌دهد.

مثال ۱–۸ (دو جرم در یک بعد): در شکل (۳–۸) جرم m با سرعت v به سوی جرم در حال سکون M حرکت می‌کند و با آن برخورد می‌کند. جرم‌ها بدون اتلافی در انرژی کل آن‌ها، از هم وامی‌جهند. فرض کنید برخورد در یک بعد روی می‌دهد .سرعت نهایی جرم‌ها را پیدا کنید.



شکل ۳–۸

حل: برای حل این مسئله در چارچوب آزمایشگاه باید از پایستگی انرژی استفاده کنیم.

در این چارچوب رابطه‌ها زشت و پیچیده می‌شود (چون باید تکانه‌ها را به توان دو رساند). حل آن در چارچوب مرکزجرم ساده‌تر است و از این گونه پیچیدگی ها خبری نیست. (در مثال ۳–۸ همین مسئله را در چارچوب آزمایشگاه حل خواهیم کرد).

در چارچوب آزمایشگاه تکانه‌ی کل سامانه mv است. بنابراین، چارچوب مرکزجرم چارچوبی است که با سرعت $u\equiv mv/(m+M)$ نسبت به چارچوب آزمایشگاه به راست حرکت می‌کند. پس، در چارچوب مرکزجرم سرعت ذره‌ها عبارتند از

$$v_{m,CM}=v-u=\frac{Mv}{m+M}, \qquad v_{M,CM}=-u=-\frac{mv}{m+M} \qquad (۸–۱۷)$$

برای آزمون درستی این نتیجه توجه کنید که تفاوت سرعت‌ها v و نسبت آنها M/m است.

نکته‌ی مهمی را که اینک باید به آن توجه کنیم این است که در چارچوب مرکزجرم اگر واقعا برخورد روی دهد، ذره‌ها باید پس از برخورد جهت سرعتشان را وارون کنند. چون پس از برخورد هم باید نسبت سرعت‌ها M/m باشد تا تکانه‌ی کل صفر باقی

بماند. پس، سرعت‌ها یا هر دو باید افزایش یابند ویا هر دو باید کاهش پیدا کنند. اما اگر هر کدام از این حالت‌ها روی دهد دیگر انرژی پایسته نمی‌ماند. (توجه کنید که در چارچوب مرکزجرم نیز از پایستگی انرژی استفاده کردیم. اما سنگینی آن در مقایسه با چارچوب آزمایشگاه اندک است).

اگر بخواهیم، می‌توانیم سرعت‌های نهایی را در چارچوب آزمایشگاه به دست آوریم. با توجه به رابطه‌ی (۱۱-۸) کافی است که سرعت مرکزجرم، $mv/(m+M)$ را به این دو سرعت جدید $-Mv/(m+M)$ و $mv/(m+M)$ بیفزاییم تا سرعت ها در چارچوب آزمایشگاه به صورت زیر به دست آیند.

$$v_{M,lab}=\frac{۲mv}{m+M} \quad \text{و} \quad v_{m,lab}=\frac{(m-M)v}{m+M} \tag{۸-۱۸}$$

نکته: اگر $m=M$ باشد، جرم سمت چپ پس از برخورد می‌ایستد و جرم سمت راست با سرعت v در چارچوب آزمایشگاه حرکت می‌کند. اگر $M \ll m$ باشد، جرم سمت چپ با سرعت $\approx v$ به عقب برمی‌گردد و جرم سمت راست اساسا حرکت نمی‌کند. اگر $m \ll M$ باشد، آنگاه جرم سمت چپ با سرعت $\approx v$ به حرکتش ادامه می‌دهد و جرم سمت راست با سرعت $\approx ۲v$ حرکت می‌کند. این سرعت $۲v$ نتیجه‌ی چشم‌گیری است وبه برخی نتایج جالب می‌انجامد (مسئله توپ تنیس و توپ بسکتبال را ببینید.) اگر از چارچوب جرم سنگین‌تر m که در واقع چارچوب مرکزجرم است، به مسئله نگاه کنید این موضوع روشنی بیشتر دارد. ♣

بد نیست که همین مسئله را یک بار دیگر و در چارچوب آزمایشگاه هم حل کنیم. این حل در مثال ۳-۸ در بخش ۳-۸ آمده است.

۲-۲-۸ انرژی جنبشی

در سامانه‌ای با مجموعه‌ای از ذره‌ها، رابطه‌ی بین انرژی جنبشی در دو چارچوب متفاوت معمولا پیچیده و از روشنگری اندکی برخوردار است. اما اگر یکی از این چارچوب‌ها، چارچوب مرکزجرم باشد این ارتباط ساده و زیبا می‌شود.

فرض کنید S' چارچوب مرکزجرم است و نسبت به چارچوب دیگر S با سرعت $\mathbf{u}$ حرکت می‌کند. سرعت ذره‌ها در دو چارچوب با رابطه‌ی (۱۱-۸) داده شده است و برای هر ذره‌ی سامانه داریم

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{v}'_i+\mathbf{u} \tag{۸-۱۹}$$

انرژی جنبشی در چارچوب مرکزجرم عبارت است از

$$T_{CM}=\frac{۱}{۲}\sum m_i\,|\mathbf{v}'_i|^۲ \tag{۸-۲۰}$$

و در چارچوب S برابراست با

$$\begin{aligned}T_S&=\frac{۱}{۲}\sum m_i\,|\mathbf{v}'_i+\mathbf{u}|^۲=\frac{۱}{۲}\sum m_i\,(\mathbf{v}'_i\cdot\mathbf{v}'_i+۲\mathbf{v}'_i\cdot\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\\&=\frac{۱}{۲}\sum m_i\,|\mathbf{v}'_i|^۲+\mathbf{u}\cdot(\sum m_i\,\mathbf{v}'_i)+\frac{۱}{۲}|\mathbf{u}|^۲\sum m_i=T_{CM}+\frac{۱}{۲}Mu^۲\end{aligned} \tag{۸-۲۱}$$

که در آن M جرم کل است و بنابه تعریف مرکزجرم داریم $\sum_i m_i\,\mathbf{v}'_i=۰$. پس، انرژی جنبشی در هر چارچوبی برابر است

با انرژی جنبشی در چارچوب مرکزجرم بعلاوه‌ی انرژی جنبشی ذره‌ای نقطه‌ای با جرمی برابر با جرم کل سامانه M که در مرکزجرم جایگزیده است (و با سرعت $\mathbf{u}$ حرکت می‌کند.) یک نتیجه‌ی آنی از این رابطه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

درهر فرایند برخورد که انرژی جنبشی در یک چارچوب پایسته باشد در هر چارچوب دیگری هم پایسته است.

مثال ۲-۸ (حرکت یک سیاره) : ارتباط بین دوره‌ی مدار ماه با فاصله‌ی ماه و زمین چیست؟ مکان ظاهری خورشید به خاطر تأثیر ماه در مکان زمین تا چه حد نوسان می‌کند؟

حل: معادله‌ی (۵-۸) اینک به صورت زیر درمی‌آید.

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G\, m_1 m_2}{r^2}\hat{r} = -\frac{G\, M\, \mu}{r^2}\hat{r} \qquad (8-22)$$

این رابطه، معادله‌ی حرکت ذره‌ای است که حول نقطه‌ی ثابتی با جرم M حرکت می‌کند. به ویژه برای مدار بیضی، دوره با رابطه (۹۰-۷) داده می‌شود:

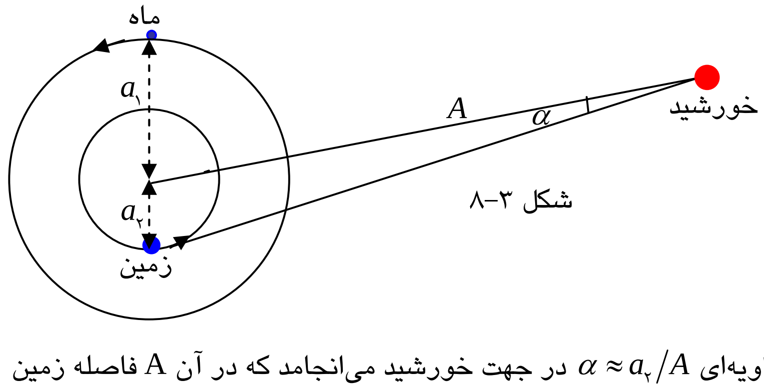
$$\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{GM} \qquad (8-23)$$

توجه کنید که در اینجا a نیم‌محور بزرگ مدار ***نسبی*** (میانگین فاصله بین دو جسم) است و M جمع دو جرم است و نه جرم جسم سنگین‌تر. بنابراین، قانون سوم کپلر تنها به طور تقریب درست است: دوره‌ی مدار نه تنها به نیم‌محور بزرگ بستگی دارد بلکه به جرم هم وابسته است.

در منظومه‌ی خورشیدی تنها حالت‌هایی که جرم جسم سبک‌تر کسر چشمگیری از کل جرم است، سامانه‌ی زمین- ماه (با نسبت $m_1/m_2 = 1/81{,}3$) و پلوتو ـ شارون (با نسبت $m_1/m_2 = 1/8{,}5$) اند. اگر می‌خواستیم دوره‌ی مدار ماه را از قانون سوم کپلر حساب کنیم و آن رابا دوره‌ی مدار ماهواره‌ی کوچکی به دور زمین مقایسه کنیم، می‌بایست مقدار بالا را به دست می‌آوردیم، با این تفاوت که به جای M باید m_2 را جایگزین می‌کردیم. این به دوره‌ای خواهد انجامید که حدود ٤ ساعت طولانی‌تر است.

در چارچوب CM زمین- ماه، از رابطه‌ی (۱۵-۸) دیده می‌شود که هر دو جسم در مدارهای بیضی حول مرکز جرم حرکت می‌کنند. نیم‌محورهای بزرگ آنها عبارتند از

$$a_1 = \frac{m_2}{M}a \qquad a_2 = \frac{m_1}{M}a \qquad (8-24)$$



شکل ۳-۸

برای سامانه‌ی زمین- ماه، $a = 3{,}84\times10^5\,\mathrm{Km}$ است. بنابراین، زمین در مدار بیضی کوچکی با نیم‌محور بزرگ $a_2 = a/81{,}3 = 4670\,\mathrm{Km}$ حول مرکزجرم می‌چرخد(توجه کنید که مرکزجرم سامانه در درون زمین قرار دارد.) این به نوسان‌های کوچکی (شکل ۳-۸ را ببینید) با دامنه‌ی زاویه‌ای $\alpha \approx a_2/A$ در جهت خورشید می‌انجامد که در آن A فاصله زمین تا خورشید است. چون $A = 1{,}5\times10^8\,\mathrm{Km}$ است بنابراین $\alpha = 6{,}4$ ثانیه است

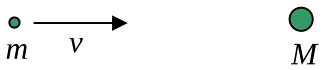
۸-۳ برخورد

بین ذرات دو گونه برخورد وجود دارد: برخورد *کشسان* (الاستیک) و برخورد *ناکشسان* (غیر الاستیک). برخوردهایی را کشسان می‌گویند که در فرایند برخورد انرژی جنبشی پایسته بماند. در واقع واژه‌ی "کشسان" نام رمز برای پایسته بودن انرژی جنبشی است. برخورد ناکشسان برخوردی است که انرژی جنبشی در فرایند برخورد پایسته نمی‌ماند و بخشی از آن هدر می‌رود. البته، در هر برخوردی انرژی **کل** پایسته است. اما در برخورد ناکشسان بخشی از آن به جای این که به صورت انرژی انتقالی ظاهر شود به گرما تبدیل می شود (یا به بیان دیگر به حرکت نسبی اتم‌های درون ذره‌ها تبدیل می‌شود.)
حل مسئله‌هایی که به برخورد کشسان می‌پردازد به نسبت آسان است. کافی است معادله‌های پایستگی انرژی و تکانه را نوشت و آنها را برحسب متغیرهای خواسته شده حل کرد. در مسئله‌های مربوط به برخورد ناکشسان تغییری اندک در این محاسبه کارساز خواهد بود.

۸-۳-۱ برخورد کشسان در یک بعد

نخست به حرکت در یک بعد می‌پردازیم و برای این که روش عمومی حل این گونه مسئله ها را ببینیم مثال ۸-۱ را دوباره حل می کنیم.

مثال ۸-۳ (دوجرم در یک بعد- دوباره):



شکل ۸-٤

برابر شکل (۸-٤) جرم m با سرعت v به سوی جرم در حال سکون M حرکت و با آن برخورد می کند. جرم ها بدون اتلاف در انرژی کل، از هم وامی‌جهند. فرض کنید همه‌ی حرکت ها در یک بعد روی می‌دهند. سرعت نهایی جرم‌ها را پیدا کنید.

حل: سرعت‌های نهایی ذره ها را v' و V' بنامید (در مثال ۸-۱ ما از پرایم برای مشخص کردن چارچوب استفاده کردیم. در اینجا پرایم را برای نشان دادن سرعت‌های"نهایی" به کار می‌بریم). از پایستگی تکانه و انرژی به ترتیب داریم

$$mv + 0 = mv' + MV'$$
$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 \qquad (۸-۲۵)$$

برای این که v' و V' را به دست بیاوریم باید این دو معادله را حل کنیم. از معادله‌ی اول برای V' خواهیم داشت $V' = m(v - v')/M$. اگر آن را در معادله‌ی دوم جاگذاری کنیم، به دست می‌آید

$$mv^2 = mv'^2 + M\,\frac{m^2(v-v')^2}{M^2} \;\Rightarrow\; 0 = (m+M)v'^2 - 2mvv' + (m-M)v^2$$
$$\Rightarrow\; 0 = [(m+M)v' - (m-M)v](v'-v) \qquad (۸-۲۶)$$

$v = v'$ یکی از پاسخ‌های معادله‌ی بالاست؛ اما پاسخی نیست که در پی آنیم. البته این پاسخ است، چون به یقین، شرایط اولیه در پایستگی انرژی و تکانه صدق می‌کنند. پاسخ $v = v'$ را می‌توان این گونه تفسیر کرد که ذره ها با هم برخورد نکرده‌اند. با

این وجود، دانستن این که $v = v'$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی بالاست ما را از دردسرهای اضافی حل معادله‌های درجه دو می‌رهاند. ریشه‌ی دیگر معادله‌ی (۸-۲۶) عبارت است از $v' = v(m-M)/(m+M)$. اگر این ریشه را در معادله‌ی نخست رابطه‌ی (۸-۲۵) قرار دهیم آنگاه V' هم به دست می‌آید و خواهیم داشت

$$v' = \frac{(m-M)v}{m+M} \qquad \text{و} \qquad V' = \frac{۲mv}{m+M} \tag{۸-۲۷}$$

این ها همان پاسخ‌هایی اند که در مثال ۱-۸ به دست آمدند.

حل مثال بالا اندکی دردناک بود؛ چون می‌بایست معادله‌ی درجه دو را حل می‌کردیم. قضیه‌ی زیر ما را از درگیر شدن با معادله‌های درجه دو در مسئله‌های برخورد در یک بعد بی نیاز می‌کند و در نتیجه بسیار سودمند است.

قضیه‌ی ۱-۸ : *در برخورد کشسان در یک بعد، سرعت نسبی دو ذره پس ا ز برخور با منهای سرعت نسبی آنها پیش از برخورد د برابراست.*

اثبات: جرم ذره‌ها را m و M و سرعت اولیه‌ی آنها را به ترتیب v_i و V_i بنامید. سرعت نهایی (پس از برخورد) آنها را با v_f و V_f نشان دهید. از پایستگی تکانه و انرژی داریم

$$\begin{aligned} & mv_i + MV_i = mv_f + MV_f \\ & \frac{۱}{۲}mv_i^۲ + \frac{۱}{۲}MV_i^۲ = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ + \frac{۱}{۲}MV_f^۲ \end{aligned} \tag{۸-۲۸}$$

پس از جابه‌جایی جمله‌ها ، این رابطه‌ها به صورت زیر درمی‌آیند

$$\begin{aligned} & m(v_i - v_f) = M(V_f - V_i) \\ & m(v_i^۲ - v_f^۲) = M(V_f^۲ - V_i^۲) \end{aligned} \tag{۸-۲۹}$$

اگر معادله‌ی دوم را به اولی تقسیم کنیم خواهیم داشت $v_i + v_f = V_i + V_f$. بنابراین داریم

$$v_i - V_i = -(v_f - V_f) \tag{۸-۳۰}$$

این نتیجه‌ای است که می‌خواستیم اثبات کنیم. توجه کنید که با تقسیم کردن دو معادله در بالا، پاسخ های $v_f = v_i$ و $V_f = V_i$ را از دست دادیم. اما همان گونه که در مثال۳-۸ گفتیم، این ها پاسخ های بدیهی اند. ■

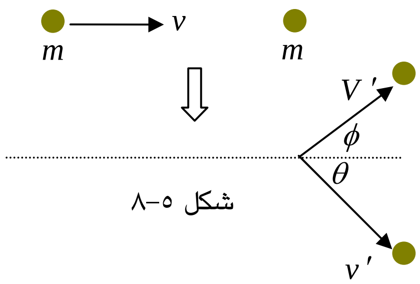
این قضیه‌ای بی‌مانند است. چون رابطه‌ای خطی است و گزاره‌ی پایستگی انرژی که یک معادله‌ی درجه دو است در آن نهفته است. بنابراین، استفاده از این قضیه به همراه پایستگی تکانه، که هر دو خطی‌اند، همان آگاهی‌ها را دربردارد که جفت معادله‌های (۸-۲۵) دارند. توجه کنید که این قضیه در چارچوب مرکزجرم کاملا واضح است. بنابراین در هر چارچوب دیگری هم برقرار است؛ چون فقط با تفاوت سرعت ها سروکار دارد.

۸-۳-۲ برخورد کشسان در دو بعد

اینک به حالت عمومی‌تر برخورد در دو بعد می پردازیم. برخورد در سه بعد هم شبیه حالت دو بعدی است. بنابراین، خود را به دو بعد محدود می‌کنیم. برخورد در دو بعد با حالت برخورد در یک بعد فرق چندانی ندارد. برخورد دو بعدی، در مقایسه با

برخورد در یک بعد، یک معادله‌ی اضافه برای پایستگی تکانه ونیز یک متغیر اضافی دارد. بگذارید این را با مثالی نشان دهیم.

مثال ۴-۸ (دو تیله): در شکل (۵-۸) تیله‌ای با سرعت v به تیله‌ی یکسانی که در حال سکون است نزدیک می‌شود. تیله‌ها با هم برخورد و از روی هم وامی‌جهند. تیله‌ی فرودی پس از برخورد با زاویه‌ی θ از مسیر اولیه‌اش منحرف می‌شود. سرعت نهایی تیله‌ها را بیابید. زاویه‌ی حرکت، ϕ، تیله‌ی دوم چقدر است؟



شکل ۵-۸

حل: سرعت‌های نهایی تیله‌ها را v' و V' بنامید. از پایستگی p_x، p_y و E به ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} mv &= mv'\cos\theta + mV'\cos\phi \\ mv'\sin\theta &= mV'\sin\phi \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mV'^2 \end{aligned} \qquad (۳۱-۸)$$

باید این سه معادله را حل کنیم و سه مجهول v'، V' و ϕ را به دست آوریم. روش‌های گوناگونی برای حل هم‌زمان آنها وجود دارد. یکی از آن ها به قرار زیر است:

دو معادله‌ی اول را به توان دو برسانید و با هم جمع کنید. پس از بردن $mv'\cos\theta$ به سمت چپ تساوی، خواهیم داشت

$$v^2 - 2vv'\cos\theta + v'^2 = V'^2 \qquad (۳۲-۸)$$

اگر این رابطه را با معادله‌ی سوم در رابطه‌ی (۳۱-۸) ترکیب کنیم V' حذف می‌شود و خواهیم داشت

$$v' = v\cos\theta \qquad (۳۳-۸)$$

حال اگر در معادله‌ی سوم رابطه‌ی (۳۱-۸) به جای v' از رابطه‌ی (۳۳-۸) قرار دهیم ، به دست می‌آید

$$V' = v\sin\theta \qquad (۳۴-۸)$$

بنابراین، از معادله‌ی دوم رابطه‌ی (۳۱-۸) خواهیم داشت $m(v\cos\theta)\sin\theta = m(v\sin\theta)\sin\phi$ یا $\cos\theta = \sin\phi$ و سرانجام این که

$$\phi = 90^\circ - \theta \qquad (۳۵-۸)$$

به بیان دیگر، تیله‌ها با زاویه‌ی 90° نسبت به هم از روی هم وامی‌جهند. در مثال زیر این واقعیت روشن تر نشان داده شده است

مثال ۵-۸ (زاویه‌ی راست در بازی تیله): دو تیله‌ی یکسان با هم برخورد کشسان می‌کنند. با نوشتن $mv^2/2$ به صورت $m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/2$ نشان دهید که پس از برخورد، زاویه‌ی بین مسیر آنها 90° است.

حل: سرعت اولیه را $\mathbf{v}$ و سرعت‌های نهایی دو ذره را $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ بنامید. از پایستگی تکانه و انرژی داریم

$$\begin{aligned} m\mathbf{v} &= m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 \\ \frac{1}{2}m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) &= \frac{1}{2}m(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) + \frac{1}{2}m(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2) \end{aligned} \qquad (۳۶-۸)$$

معادله‌ی نخست می‌گوید $\mathbf{v}=\mathbf{v}_۱+\mathbf{v}_۲$. آن را در معادله‌ی دوم قرار دهید و توجه کنید که $(\mathbf{v}_۱+\mathbf{v}_۲)\cdot(\mathbf{v}_۱+\mathbf{v}_۲)=\mathbf{v}_۱\cdot\mathbf{v}_۱+۲\mathbf{v}_۱\cdot\mathbf{v}_۲+\mathbf{v}_۲\cdot\mathbf{v}_۲$. بنابراین، به دست می‌آید:

$$\mathbf{v}_۱\cdot\mathbf{v}_۲=\circ \tag{۸-۳۷}$$

به بیان دیگر، زاویه‌ی بین $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ برابر ۹۰° است. (**یا**: $\mathbf{v}_۱=\circ$ است یعنی تیله‌ی فرودی می‌ایستد؛ چون برخورد شاخ به شاخ است. یا: $\mathbf{v}_۲=\circ$ است ، یعنی تیله‌ها به هم برخورد نمی کنند.)

همان گونه که در مثال برخورد یک بعدی دیدیم، تصور برخورد درچارچوب مرکزجرم آسان‌تر است. در برخورد دو بعدی (یا سه بعدی) هم به همان دلیل‌ها (یعنی پایستگی تکانه و انرژی) نتیجه می‌گیریم که در چارچوب مرکزجرم سرعت‌های نهایی دو ذره‌ای که برخورد کشسان می‌کنند باید با سرعت پیش از برخورد شان برابر باشد. این سادگی در چارچوب مرکزجرم، نسبت به چارچوب آزمایشگاه، بی شک از روشنگری بیشتری برخوردار است.

۸-۴ فرایندهای ناکشسان ذاتی

در گروهی از مسئله‌ها، سامانه ویژگی‌های ذاتی ناکشسان دارد. در نگاه نخست این سرشت ناکشسانی سامانه چندان آشکار نیست. مهم نیست که چگونه به این مسئله‌ها نگاه کنید؛ در آنها به ناگزیر اتلاف انرژی جنبشی به صورت گرما نمایان خواهد شد. البته انرژی کل سامانه پایسته است و گرما فقط صورت دیگری از انرژی است. اما نکته در این است که اگر بخواهید مشتی $mv^۲/۲$ بنویسید و جمع آنها را پایسته نگه دارید به پاسخ نادرست خواهید رسید. این گونه مسئله‌ها از زیبایی خاصی برخوردارند. مثال زیر نمایش کلاسیک این گونه مسئله هاست.

مثال ۶-۸ (ماسه و تسمه): تسمه‌ای با سرعت ثابت v حرکت می‌کند و ماسه با آهنگ σ kg/s به طور عمود بر روی تسمه می‌ریزد.

(الف): چه نیرویی باید به تسمه وارد کنیم تا به حرکت با سرعت ثابتش v ادامه دهد؟

(ب): ماسه در واحد زمان چقدر انرژی به دست می‌آورد؟ **(پ)**: چه مقدار کار در واحد زمان انجام می‌دهیم؟

(ت): چه مقدار انرژی در واحد زمان به گرما تبدیل می‌شود:

حل: **(الف)** نیرویی را که باید به تسمه وارد کنیم با آهنگ تغییر تکانه برابر است. اگر جرم تسمه و ماسه‌ی روی آن را m فرض کنید آنگاه برای سرعت ثابت v داریم

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{d(mv)}{dt}=m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}=\cdot+\sigma v \tag{۸-۳۸}$$

(ب): مقدار انرژی جنبشی که ماسه در واحد زمان به دست می‌آورد برابر است با

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^۲}{۲}\right)=\frac{dm}{dt}\left(\frac{v^۲}{۲}\right)=\frac{\sigma v^۲}{۲} \tag{۸-۳۹}$$

(**پ**): مقدار کاری را که ما در واحد زمان انجام می‌دهیم برابر است با

$$\frac{dW}{dt}=\frac{Fdx}{dt}=Fv\ =\sigma v^{2} \qquad (8-40)$$

(**ت**): کار با آهنگ σv^{2} انجام می‌گیرد و انرژی جنبشی با آهنگ $\sigma v^{2}/2$ افزوده می‌شود. پس" انرژی گم" شده باید با آهنگ $\sigma v^{2}-\sigma v^{2}/2=\sigma v^{2}/2$ به گرما تبدیل شود.

در این مثال مقدار انرژی هدر رفته با انرژی جنبشی که ماسه به دست می‌آورد برابر است. این نتیجه را به صورت زیر می‌توان توضیح داد. برای سادگی این توضیح، تنها یک دانه ماسه با جرم M را در نظر بگیرید که روی تسمه می افتد.

در چارچوب آزمایشگاه: مدت زمانی طول می‌کشد تا ماسه نسبت به تسمه به حال سکون در بیاید، در این مدت، ماسه به اندازه‌ی $Mv^{2}/2$ انرژی جنبشی به دست می‌آورد؛ چون تسمه با سرعت v حرکت می‌کند. حالا از چارچوب تسمه به این مسئله نگاه کنید. در این چارچوب، ماسه با انرژی جنبشی اولیه $Mv^{2}/2$ روی تسمه می‌نشیند و کُند می‌شود تا در روی تسمه به حالت سکون در بیاید. بنابراین، همه‌ی انرژی $Mv^{2}/2$ آن به گرما تبدیل می‌شود. چون گرما در هر چارچوبی یکسان است، پس در چارچوب آزمایشگاه هم مقدار گرما همین است. بنابراین، می‌بینیم که برابری اتلاف انرژی به گرما و مقدار انرژی جنبشی به دست آمده در چارچوب آزمایشگاه، از این واقعیت برمی‌خیزد که تسمه با همان آهنگی نسبت به چارچوب آزمایشگاه (یعنی v) حرکت می‌کند که چارچوب آزمایشگاه نسبت به تسمه (باز هم v) حرکت می‌کند.

در حل مسئله‌ی بالا ما چیزی در باره‌ی سرشت اصطکاک بین تسمه و ماسه فرض نکردیم. اتلاف انرژی و تبدیل آن به گرما گزیر ناپذیر است. شاید گمان کنید که اگر ماسه به آرامی و در زمانی طولانی نسبت به تسمه به حال سکون در بیاید، می‌توان از اتلاف انرژی جلوگیری کرد. این گمان نادرستی است؛ زیرا اگر چه با کند حرکت کردن ماسه در روی تسمه، نیروی اصطکاک کم می‌شود اما طول مسیری که نیروی اصطکاک به ماسه اعمال می‌شود درازتر می‌شود و این دو یکدیگر را جبران می‌کند.

هم‌چنین، اگر ماسه به طور سریع و ناگهانی در روی تسمه به حال سکون در بیاید آنگاه نیروی اصطکاک بزرگ و طول مسیری که این نیرو به ماسه اعمال می‌شود کوتاه است و این دو یکدیگر را جبران می‌کنند. هر طور که به مسئله نگاه کنید، کار نیروی اصطکاک همان مقدار غیر صفر است.

در مسئله‌های دیگر، ناکشسانی از اول آشکار است و چالش حل آنها به کار بردن درست $F=dp/dt$ به جای $F=ma$ است . چون جرم تغییر می‌کند $F=ma$ می‌تواند شما را گمراه کند. به مثالی برای این وضعیت ها توجه کنید.

مثال ۷–۸ (زنجیر وترازو): زنجیری به طول L و چگالی جرمی $\sigma\,\mathrm{kg/m}$ را بربالای کفه‌ی ترازویی قائم نگه می‌داریم به طوری که انتهای پایین زنجیر با کفه‌ی ترازو تماس داشته باشد. زنجیر را رها می‌کنیم تا بیفتد. ترازو چه مقداری را برحسب تابعی از طول سقوط نکرده‌ی زنجیر نشان می‌دهد؟ (توجه کنید که ترازو نیرویی را نشان می‌دهد که به جسم روی خود وارد می‌کند).

حل ۱: فرض کنید y طول آن بخش از زنجیر باشد که هنوز در هواست و F نیرویی باشد که ترازو به زنجیر وارد می‌کند.

نیروی برآیند که به زنجیر وارد می‌شود $F-(\sigma L)g$ است (رو به بالا را مثبت فرض کردیم). تکانه‌ی زنجیر برابر است با $(\sigma y)\dot{y}$. توجه کنید که این مقدار منفی است چون $\dot{y}$ رو به پایین و در نتیجه منفی است. از برابری نیروی برآیند و تغییر تکانه داریم

$$F-\sigma Lg=\frac{d(\sigma y\dot{y})}{dt}=\sigma y\ddot{y}+\sigma\dot{y}^{۲} \qquad (۸-۴۱)$$

بخشی از زنجیر که هنوز در هواست، سقوط آزاد می‌کند و بنابراین، $\ddot{y}=-g$ است. هم‌چنین برای سقوط آزاد داریم $\dot{y}=-\sqrt{۲g(L-y)}$. اگر این دو را در رابطه‌ی (۸-۴۱) قرار دهیم خواهیم داشت

$$F=\sigma Lg-\sigma yg+۲\sigma(L-y)g=۳\sigma(L-y)g \qquad (۸-۴۲)$$

این پاسخ به ازای $y=L$ مقدار درستی به دست می‌دهد. این هم از ویژگی‌های گیرایی است که درست پیش ازآنکه آخرین جزء زنجیر بر روی کفه‌ی ترازو بنشیند، مقدار نیرویی که ترازو نشان می‌دهد $۳(\sigma L)g$ است. هنگامی که همه‌ی زنجیر بر روی ترازو قرار گرفت، عقربه‌ی ترازو ناگهان مقدار σLg را نشان خواهد داد.

حل ۲: نیروی عمودی که ترازو به زنجیر وارد می‌کند، دو کار انجام می‌دهد و بنابراین، دو بخش دارد. یک بخش این نیرو آن قسمت از زنجیر را که بر روی کفه‌ی ترازو نشسته است در آن جا نگه می‌دارد. این همان نیروی وزن قسمتی از زنجیر است که روی کفه‌ی ترازوست و برابر با $F_w=\sigma(L-y)g$ است. برای‌یافتن بخش دوم نیرو، باید تغییر تکانه‌ی، dp ، آن قسمت از زنجیر را حساب کرد که در زمان dt به کفه‌ی ترازو می‌رسد. مقدار جرمی که در زمان dt بر روی کفه‌ی ترازو می‌نشیند $dm=\sigma|dy|=\sigma|\dot{y}|dt=-\sigma\dot{y}dt$ است. سرعت این جرم در آغاز $\dot{y}$ است و با برخورد به کفه‌ی ترازو به طور ناگهانی به صفر کاهش می‌یابد. پس، تغییر تکانه آن $dp=\circ-(dm)\dot{y}=\sigma\dot{y}^{۲}dt$ است. نیروی لازم برای ایجاد این تغییر تکانه

$$F_{dp/dt}=\frac{dp}{dt}=\sigma\dot{y}^{۲} \qquad (۸-۴۳)$$

است. چون $\dot{y}=\sqrt{۲g(L-y)}$ است ؛ پس نیروی کل که از سوی ترازو به زنجیر وارد می‌شود

$$F=F_w+F_{dp/dt}=\sigma(L-y)g+۲\sigma(L-y)g=۳\sigma(L-y)g \qquad (۸-۴۴)$$

است. توجه کنید که تا وقتی که همه‌ی طول زنجیر کاملا در کفه‌ی ترازو ننشسته است، داریم $F_{dp/dt}=۲F_w$ که مستقل از y است.

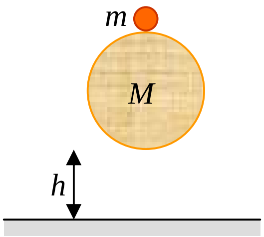
مثال های تکمیلی

ت-۱ جرم $۴m$ به سوی راست و جرم m به سوی چپ حرکت می‌کنند. سرعت هر دو جرم v است. جرم‌ها با هم برخورد کشسان می‌کنند. سرعت آزمایشگاهی جرم‌ها را پس از برخورد به دست آورید.

(الف): محاسبه را در چارچوب آزمایشگاه انجام دهید.

(ب): محاسبه را در چارچوب مرکزجرم انجام دهید.

ت-۲ ذره‌ای به جرم m در راستای محور x با سرعت v حرکت می‌کند و با ذره‌ی ساکنی به جرم Nm (N عدد ثابتی است) برخورد کشسان می‌کند. مشاهده می‌شود که پس از برخورد مولفه‌ی x سرعت آنها باهم برابراند. بردار سرعت ذره‌ی Nm با محور x چه زاویه‌ای می‌سازد؟



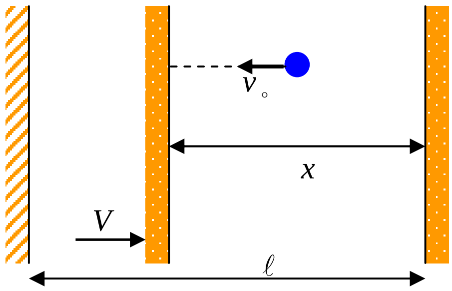
شکل ٦-٨

ت-۳ توپ کوچکی به جرم m برابر شکل (٦-٨) بر روی توپ بزرگتری به جرم M وقطر d قرار دارد. ارتفاع پایین‌ترین نقطه‌ی توپ بزرگ‌تر از زمین h است. توپ‌ها رها می‌شوند. فرض کنید $m \ll M$ است. توپ کوچک پس از برخورد کشسان با توپ بزرگ‌تر تا چه ارتفاعی از سطح زمین بالا می‌رود؟ برخورد توپ بزرگ‌تر با زمین کشسان است.

ت-۴ توپی بین دو دیوار حرکت می‌کند و هر بار که به یکی از دیوارها برخورد می‌کند از آن وامی‌جهد و با سرعت $v_\circ$ به سوی سطح دیگر حرکت می‌کند (شکل ۷-۸). اگر برخورد توپ با این دیوارها کشسان و فاصله‌ی بین دو دیوار ℓ باشد:

(الف): نیروی میانگین F وارد به هر دیوار را حساب کنید.

(الف): نیروی میانگین F وارد به هر دیوار را حساب کنید.



شکل ۷-۸

(ب): اگر دیوار سمت چپ به آهستگی با سرعت $V \ll v_\circ$ به سوی دیوار دیگر حرکت کند، تعداد برخوردها در واحد زمان افزایش می‌یابد (چون مسافت بین دیوارها کوتاه‌تر می‌شود و سرعت توپ در اثر برخورد با دیوار متحرک افزایش پیدا می‌کند.) نیروی F را برحسب فاصله‌ی x دیوارها بیابید.

(پ): نشان دهید که کار انجام شده برای جابه‌جایی دیوار از ℓ به x با افزایش انرژی جنبشی توپ برابر است.

ت-۵ ذره‌ای به جرم m و با سرعت $v_\circ$ با ذره‌ای در حالت سکون و با جرم M برخورد کشسان می‌کند. زاویه‌ی پراکندگی در چارچوب **مرکزجرم** θ است.

(الف): سرعت نهایی جرم m را در چارچوب آزمایشگاه به دست آورید.

(ب): چه کسری از انرژی جنبشی جرم m تلف شده است؟

ت-۶ *ضریب بازگردانی* ε در برخورد شاخ‌به‌شاخ دو ذره با نسبت سرعت نسبی دو ذره پش از برخورد به سرعت نسبی پیش از برخورد آنها تعریف می‌شود.

(الف): در برخورد کاملا ناکشسان صریب بازگردانی ε چقدر است؟

(ب): ضریب بازگردانی در برخورد کشسان دو ذره چقدر است؟

(پ): توپی از ارتفاع h رها می‌شود و تا ارتفاع $H_۱$ از سطح زمین وامی‌جهد. نشان دهید که $\varepsilon = \sqrt{H_۱/h}$.

(ت): باد مناسب برای توپ بسکتبال باید چنان باشد که ضریب بازگردانی توپ ۰٫۸۵ باشد. توپی با این ضریب بازگردانی از ارتفاع $۱٫۲\,\mathrm{m}$ بالای یک سطح چوبی رها می‌شود. توپ تا چه ارتفاعی به بالا وامی‌جهد.

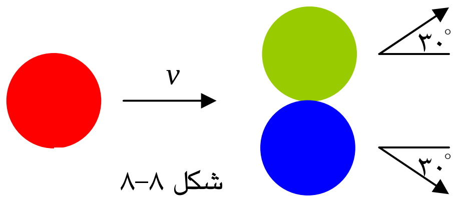
(ج): اگر ε ثابت باشد و ارتفاع اولین جهش توپ $H_۱$ باشد، نشان دهید که ارتفاع $n-$امین جهش توپ $H_n = \varepsilon^{۲n} h$ است.

ارتفاع هشتمین جهش توپ را حساب کنید.

مسئله ها

۸-۱ **(زاویه ی پراکندگی برابر)**: جرم $2m$ با سرعت v حرکت می‌کند و با جرم ساکن m برخورد کشسان انجام می‌دهد. اگر زاویه‌ی پراکندگی جرم ها نسبت به مسیر اولیه با هم برابر باشند این زاویه را بیابید.

۸-۲ **(سه توپ بیلیارد)**: یک توپ بیلیارد با سرعت v به سوی دو توپ کنارهم چنان نشانه گیری شده است که برابر شکل (۸-۸) به وسط آنها برخورد کند. در این آرایش، در اثر برخورد، توپ های سمت راست با سرعت‌های مساوی و با زاویه‌های برابر 30° نسبت به مسیر توپ سمت چپ پراکنده می شوند. سرعت هر سه توپ را پس از برخورد بیابید.



شکل ۸-۸

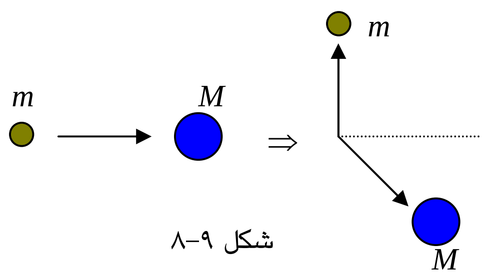
۸-۳ **(سرعت های نهایی)**: جرم $3m$ با سرعت v به راست و جرم m با سرعت v به چپ حرکت می‌کنند و با هم برخورد کشسان می‌کنند. سرعت‌های نهایی را در چارچوب آزمایشگاه به دو روش زیر حساب کنید:

(الف): محاسبه را در چارچوب آزمایشگاه انجام بدهید.

(ب): محاسبه را در چارچوب مرکزجرم انجام بدهید و سپس به چارچوب آزمایشگاه ببرید.

۸-۴ **(پراکندگی 90°)**: جرم m با سرعت v حرکت و با جرم ساکن M برخورد کشسان می‌کند. اگر پس از برخورد، m با زاویه‌ی 90° پراکنده شود (شکل ۸-۹) سرعت نهایی آن چقدر است؟ کمترین مقدار نسبت M/m چقدر باید باشد تا این انحراف 90° ممکن شود. (توجه: این مسئله در هر دو چارچوب آزمایشگاه و مرکزجرم قابل حل است. مسئله را در هر دو چارچوب حل کنید.)

۸-۵ در چارچوب آزمایشگاه توپی به جرم m با سرعت v به سمت راست می‌رود و با توپ دیگری به جرم $2m$ که در حال سکون است برخورد می‌کند. درچارچوب مرکزجرم دیده می‌شود که ۳/٤ انرژی در اثر برخورد به گرما تبدیل شده است. فرض کنید این برخورد در یک بعد انجام می‌گیرد.



شکل ۸-۹

(الف): سرعت‌های اولیه‌ی توپ‌ها را در چارچوب مرکزجرم حساب کنید.

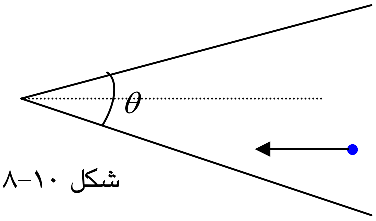
(ب): سرعت‌های نهایی توپ‌ها را در چارچوب مرکزجرم حساب کنید.

(پ): سرعت‌های نهایی توپ‌ها را در چارچوب آزمایشگاه بیابید.

۸-۶ **(سرعت بیشینه)**: جرم M در راستای محور x حرکت می‌کند و با جرم ساکن m برخورد کشسان می‌کند. برخورد لازم نیست که شاخ به شاخ باشد و بنابراین، زاویه‌های انحراف جرم‌ها از مسیر اولیه یکسان نیستند. اگر جرم m با زاویه‌ی θ منحرف شود، برای این که سرعتش در راستای y بیشینه مقدار ممکن را داشته باشد، θ چقدر باید باشد؟ (*راهنمایی:* برخورد را در چارچوب مرکزجرم تجسم کنید.)

۸-۷ **(زاویه‌های پراکندگی برابر)**: **(الف)** همانند مسئله‌ی ۸-۱، جرم $2m$ با سرعت V_0 حرکت می‌کند و با جرم ساکن m برخورد کشسان می‌کند. اگر جرم‌ها با زاویه‌ی یکسان نسبت به جهت جرم فرودی پراکنده شوند این زاویه را بیابید.

(ب): اگر بخواهیم جرم‌ها با زاویه‌های یکسان پراکنده شوند، بیشینه مقداری که به جای ضریب"۲" در $2m$ می‌تواند باشد چیست ؟

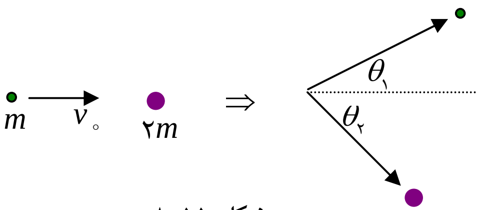


شکل ۸-۱۰

۸-۸ **(سالن مثلث)**: در سالن مثلث شکل بسیار درازی با زاویه‌ی راس θ، توپی را برابر (شکل ۸-۱۰) موازی نیمساز راس به سوی دیوار پرتاب می‌کنیم . توپ چند بار از دیوار وامی جهد؟ فرض کنید دیوار اصطکاک ندارد.

۸-۹ **(رابطه‌ی برداری سرعت ها)**: جرم m با سرعت v حرکت می‌کند و با جرم ساکن $2m$ به طور کشسان برخورد می‌کند. اگر سرعت نهایی ذره‌ها به ترتیب $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ باشند نشان دهید که $\mathbf{v}_2$ باید به $\mathbf{v}_2+2\mathbf{v}_1$ عمود باشد.

۸-۱۰ **(برخورد در هوا)**: توپی را به طور قایم به بالا پرتاب می‌کنیم. در لحظه‌ای که به نقطه‌ی اوج می‌رسد با توپ یکسانی که با سرعت v و افقی حرکت می‌کند برخورد کشسان انجام می‌دهد (برخورد لزوما شاخ به شاخ نیست). بیشینه فاصله‌ی افقی که توپ دوم پیش از رسیدن دوباره به نقطه‌ی برخورد می‌پیماید چقدر است؟

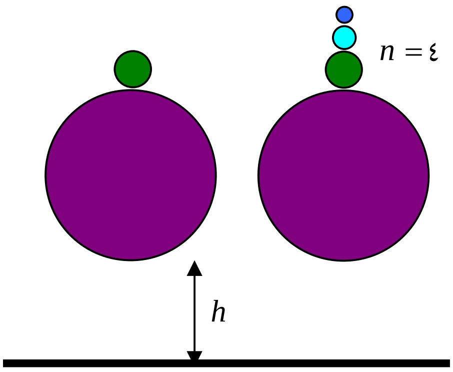


شکل ۸-۱۱

۸-۱۱ **(سرعت‌ها و زاویه‌های نهایی)**: جرم m با سرعت v_0 حرکت می‌کند و همانند شکل (۸-۱۱) با جرم $2m$ برخورد کشسان می‌کند. فرض کنید سرعت‌های نهایی برابرند. این سرعت را حساب کنید و یکی از زاویه‌های پراکندگی، θ_1 یا θ_2 را بیابید. (*راهنمایی*: بهترین روش حل مسئله برای یافتن زاویه‌ها این است که رابطه‌های مناسب را به توان دو برسانید و از $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ استفاده کنید.)

۸-۱۲ **(انرژی‌های یکسان)**: جرم m با سرعت v_0 حرکت می‌کند و با جرم $2m$ برخورد کشسان می‌کند (شکل ۸-۱۱) . فرض کنید انرژی‌های نهایی جرم‌ها برابرند. سرعت‌های نهایی v_1، v_2 و یکی از زاویه‌های پراکندگی، θ_1 یا θ_2 را بیابید.

۸-۱۳ **(توپ بسکتبال، توپ تنیس، تیله.....)**: یک توپ تنیس با جرم کوچک m_2 بر روی یک توپ بسکتبال با جرم بزرگتر m_1 برابر شکل (۸-۱۲) قرار دارد. پایین توپ بسکتبال در ارتفاع h از سطح زمین است. توپ ها را رها می‌کنیم.



شکل ۱۲-

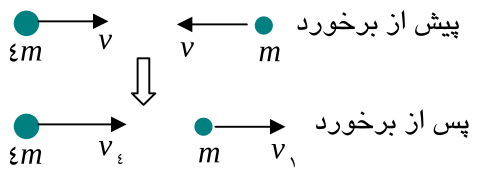
(الف): توپ تنیس تا چه ارتفاعی از زمین به بالا وامی‌جهد؟ توجه: محاسبه را در تقریب $m_1 \gg m_2$ انجام دهید و فرض کنید که واجهش توپ‌ها کشسان است. برای این که تصویر روشنی از مسئله داشته باشید فرض کنید هنگام رها شدن توپ‌ها، آنها به اندازه‌ی بسیار اندکی از هم فاصله دارند و به هم نچسبیده اند.

(ب): در حالتی که n توپ بر روی هم چیده شده باشند (هر کدام بسیار

سبکتر از توپزیری) ارتفاع آخرین توپ را که وامی جهد بیابید. پاسخ برای $n=5$ چیست؟

حل مثال های تکمیلی

ت-۱ (الف) در چارچوب آزمایشگاه : در این چارچوب وضعیت پیش از برخورد و پس از برخورد در شکل (۱۳-۸) نشان داده شده اند. سرعت های نهایی را v_4 و v_1 بنامید و سوی راست را جهت مثبت فرض کنید. از پایستگی تکانه داریم



شکل ۱۳-۸

$$4mv + m(-v) = 4mv_4 + mv_1 \qquad (8-45)$$
$$\Rightarrow 3v = 4v_4 + v_1$$

از پایستگی انرژی به دست می‌آید

$$\frac{1}{2}(4m)v^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(4m)v_4^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad (8-46)$$
$$\Rightarrow \quad 5v^2 = 4v_4^2 + v_1^2$$

می‌توان این دو معادله را همزمان حل کرد و دو مجهول v_4 و v_1 را به دست آورد. لازمه‌ی این کار حل معادله‌ی درجه ۲ است. بهتر است به جای آن از قضیه‌ی ۱-۸ استفاده کنیم که می‌گوید در برخورد کشسان یک بعدی سرعت نسبی پس از برخورد با منهای سرعت نسبی پیش از برخورد برابر است. پس، داریم

$$v_1 - v_4 = -\big((-v) - v\big) \;\Rightarrow\; v_1 - v_4 = 2v \qquad (8-47)$$

با جاگذاری $v_1 = 2v + v_4$ در رابطه‌ی (۴۵-۸) خواهیم داشت

$$3v = 4v_4 + (2v + v_4) \;\Rightarrow\; v_4 = \frac{1}{5}v \quad , \quad v_1 = \frac{11}{5}v \qquad (8-48)$$

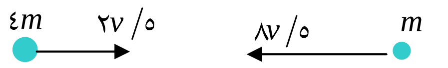
آزمودن این که این نتیجه در پایستگی انرژی و تکانه صدق می‌کند، آسان است.

(ب) چارچوب مرکزجرم: سرعت مرکز جرم عبارت است از

$$v_{CM} = \frac{(4m)v + m(-v)}{5m} = \frac{3}{5}v \qquad (8-49)$$

برای حل مسئله سه گام زیر باید برداشته شود.

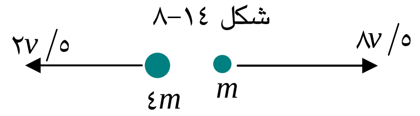
۱- **رفتن به چارچوب مرکزجرم:** سرعت‌های اولیه در چارچوب مرکزجرم عبارتند از $v - v_{CM} = 2v/5$ و $(-v) - v_{CM} = -8v/5$. وضعیت پیش از برخورد در چارچوب مرکزجرم در شکل(۱۴-۸) نشان داده شده است



پیش از برخورد در چارچوب مرکزجرم

شکل ۱۴-۸

۲-**محاسبه‌ی برخورد در چارچوب مرکز جرم**: این گام ساده است. پس از برخورد جهت سرعت ذره‌ها وارون می‌شوند. وضعیت در شکل (۱۵-۸) دیده می‌شود.



پس از برخورد در چارچوب مرکزجرم

شکل ۱۵-۸

۳- **بازگست به چارچوب آزمایشگاه**: برای این که سرعت‌های آزمایشگاهی را به دست آوریم باید به سرعت ذره‌ها در چارچوب مرکزجرم، سرعت مرکز جرم را اضافه کنیم:

$$v_{۴} = -\frac{۲v}{۵} + v_{CM} = -\frac{۲v}{۵} + \frac{۳v}{۵} = \frac{v}{۵}$$
$$v_{۱} = \frac{۸v}{۵} + v_{CM} = \frac{۸v}{۵} + \frac{۳v}{۵} = \frac{۱۱}{۵}v \qquad (۵-۵۰)$$

ت-۲ (الف) چارچوب آزمایشگاه: اگر v_x ها برابر باشند، آنگاه از پایستگی p_x داریم

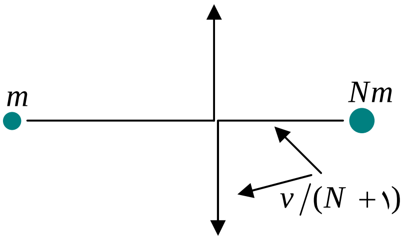
$$mv = mv_x + (Nm)v_x \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{v}{N+۱} \qquad (۸-۵۱)$$

پایستگی p_y می‌گوید که اگر سرعت Nm برابر با v_y باشد، سرعت m باید Nv_y و در خلاف جهت آن باش چون p_y اولیه صفر است. از پایستگی انرژی به دست می‌آید

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲} = \frac{۱}{۲}m\left(\left(\frac{v}{N+۱}\right)^{۲} + \left(Nv_y\right)^{۲}\right) + \frac{۱}{۲}(Nm)\left(\left(\frac{v}{N+۱}\right)^{۲} + v_y^{۲}\right)$$
$$\Rightarrow v^{۲} = (۱+N)\left(\frac{v}{N+۱}\right)^{۲} + (N^{۲}+N)v_y^{۲} \qquad (۸-۵۲)$$
$$\Rightarrow \frac{N}{N+۱}v^{۲} = N(N+۱)v_y^{۲} \quad \Rightarrow \quad v_y = \frac{v}{N+۱}$$

پس، می‌بینیم که سرعت جرم Nm عبارت است از $v_x = v_y = v/(N+۱)$. چون این دو مولفه‌ی سرعت با هم برابراند، جرم Nm با زاویه‌ی ۴۵° نسبت به محور x حرکت می‌کند و این زاویه مستقل از N است.

(ب) چارچوب مرکز جرم: در چارچوب مرکزجرم v_x های نهایی باید برابر باشند. چون تفاوتشان با v_x ها در چارچوب آزمایشگاه (که باهم برابراند) به اندازه‌ی v_{CM} است. اما در چارچوب مرکزجرم جهت سرعت‌ها پس از برخورد وارون می‌شوند. بنابراین، در چارچوب مرکزجرم $v_x = ۰$ است. در نتیجه، پس از برخورد در چارچوب مرکزجرم هر دو جرم در راستای محور y (در جهت مثبت یا منفی) حرکت خواهند کرد. پس، وضعیت همانند شکل (۸-۱۶) خواهد شد. سرعت مرکزجرم در چارچوب آزمایشگاه $v_{CM} = v/(N+۱)$ است. پس این سرعت، سرعت اولیه‌ی v_x جرم Nm در چارچوب مرکزجرم است (و در نتیجه سرعت نهایی v_y است، چون در چارچوب مرکز جرم سرعت‌ها تغییر نمی‌کنند.) حال اگر با افزودن v_{CM} به این سرعت ها به چارچوب آزمایشگاه برگردیم،



شکل ۸-۱۶

می بینیم که سرعت جرم Nm در چارچوب آزمایشگاه عبارت است از $v_x = v_y = v/(N+۱)$ و بنابراین، با زاویه‌ی ۴۵° نسبت به محور x حرکت می‌کند و این زاویه مستقل از N است.

ت-۳ درست پیش از آن که توپ بزرگ‌تر با زمین برخورد کند، هر دو توپ به اندازه‌ی h سقوط می‌کنند. با استفاده از $mv^{۲}/۲ = mg$ دیده می‌شود که سرعت هر دو توپ $v = \sqrt{۲gh}$ است. این سرعت توپ‌ها درست پیش از برخورد آنها نیز است. توپ بزرگ با زمین برخورد می‌کند و با همان سرعت v به سوی بالا برمی‌گردد. در مسیر رو به بالا با توپ کوچک‌تر

برخورد کشسان می‌کند. توجه خود را به این برخورد متمرکز کنید. از پایستگی تکانه داریم

$$Mv - mv = Mu + mw \quad \Rightarrow \quad u = \left(۱ - \frac{m}{M}\right)v - \frac{m}{M}w \tag{۸-۵۳}$$

u و w به ترتیب سرعت رو به بالای توپ‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر پس از برخوردشان است. از سوی دیگر، پایستگی انرژی می‌گوید

$$Mv^۲ + mv^۲ = Mu^۲ + mw^۲ \tag{۸-۵۴}$$

با قرار دادن مقدار u از رابطه‌ی (۸-۵۳) در رابطه‌ی (۸-۵۴) به دست می‌آید

$$\left(۱ + \frac{m}{M}\right)v^۲ = \left(۱ - \frac{m}{M}\right)^۲ v^۲ - ۲\frac{m}{M}vw\left(۱ - \frac{m}{M}\right) + \frac{m^۲}{M^۲}w^۲ + \frac{m}{M}w^۲ \tag{۸-۵۵}$$

چون $m \ll M$ است از جمله‌های مانند $m^۲/M^۲$ می‌توان چشم‌پوشی کرد. به دست می‌آید

$$\frac{m}{M}w^۲ - ۲\frac{m}{M}v\,w - ۳\frac{m}{M}v^۲ = ۰ \tag{۸-۵۶}$$

که معادله‌ای درجه ۲ نسبت به v است. ریشه‌های آن عبارت‌اند از $-v$ و $۳v$. ریشه‌ی اول مربوط به وضعیتی مانند تونل‌زنی کوانتومی است؛ یا این که توپ کوچک از درون توپ بزرگ عبور کرده باشد. بنابراین، این پاسخ برای ما پذیرفتنی نیست. انرژی توپ کوچک پس از برخورد پایسته می‌ماند. بنابراین

$$\frac{۱}{۲}m\left(۳v^۲\right) + mgd = mgH \quad \Rightarrow \quad H = \frac{۹v^۲}{۲g} + d$$

$$\Rightarrow H = \frac{۹(۲gh)}{۲g} + d = d + ۹h \tag{۸-۵۷}$$

ت-۴ **(الف)**: نیروی میانگین وارد به دیوار نسبت تکانه‌ی انتقالی به مدت زمان آن است: $F = \Delta p/\Delta t$. تغییر تکانه‌ی توپ در هر برخورد برابر است با

$$\Delta p = p_f - p_i = mv_\circ - \left(-mv_\circ\right) = ۲mv_\circ \tag{۸-۵۸}$$

زمان بین دو برخورد پی‌درپی برابر است با $\Delta t = ۲\ell/v_\circ$. بنابراین،

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{۲mv_\circ}{۲\ell/v_\circ} = \frac{mv_\circ^۲}{\ell} \tag{۸-۵۹}$$

(ب): از چارچوب لختی که در آن دیوار ساکن است به مسئله نگاه کنید. در این چارچوب توپ با سرعت $v'_\circ$ حرکت می‌کند و تکانه‌ی انتقالی به دیوار برابر است با

$$\Delta p' = p'_f - p'_i = mv'_\circ - \left(-mv'_\circ\right) = ۲mv'_\circ \tag{۸-۶۰}$$

سرعت‌های $v'_\circ$ و $v_\circ$ با رابطه‌ی $v'_\circ = v_\circ + V$ به هم مربوط اند. در فاصله‌ی بین دو برخورد پی‌درپی سرعت توپ به اندازه‌ی

$$v\left(t_{n+۱}\right) - v\left(t_n\right) = ۲V \quad \Rightarrow \quad v\left(t_{n+۱}\right) = v\left(t_n\right) + ۲V \tag{۸-۶۱}$$

تغییر می‌کند. چون فرض کردیم $v_\circ \gg V$ است، زمان بین دو برخورد را می‌توان در تقریب ایستایی تخمین زد، اما به جای ℓ اینک باید x جایگزین شود: $\Delta t = ۲x\left(t\right)/v\left(t\right)$ و از اینجا آهنگ تغییر سرعت به دست می‌آید

$$\Delta v = v\left(t_{n+۱}\right) - v\left(t_n\right) = ۲V \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta v}{\Delta T} = \frac{۲V}{۲x/v} = \frac{Vv\left(t_n\right)}{x\left(t_n\right)} \tag{۸-۶۲}$$

حالا می‌توان رابطه‌ی بین x و v را به دست آورد:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=-V\frac{dv}{dx}\quad\Rightarrow\quad\frac{dv}{dx}=-\frac{۱}{V}\frac{dv}{dt}=-\frac{v}{x} \tag{۸-۶۳}$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه خواهیم داشت

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad\ell n v=-\ell n x+c\quad\Rightarrow\quad v\left(x\right)=\frac{C}{x}=\frac{v_{\circ}\ell}{x} \tag{۸-۶۴}$$

تساوی آخر از شرایط اولیه به دست آمد: در $x=\ell$ سرعت $v\left(x=\ell\right)=v_{\circ}$ است. پس، نیروی وارد به دیوار در زمان t عبارت است از

$$F=\frac{\Delta p\left(t\right)}{\Delta T\left(t\right)}=\frac{۲mv\left(t\right)}{۲x\left(t_n\right)/v\left(t_n\right)}=\frac{mv^{۲}}{x}=\frac{mv_{\circ}^{۲}\ell^{۲}}{x^{۳}} \tag{۸-۶۵}$$

(پ): کاری را که دیوار انجام می‌دهد عبارت است از

$$dW=Fd\ell\quad\Rightarrow\quad W=-\int_{\ell}^{x}F\left(x'\right)dx'=\int_{\ell}^{x}\frac{mv_{\circ}^{۲}\ell^{۲}}{x'^{۳}}dx'=\frac{mv_{\circ}^{۲}\ell^{۲}}{۲}\left(\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۱}{\ell^{۲}}\right) \tag{۸-۶۶}$$

از سوی دیگر، تغییر در انرژی جنبشی توپ برابر است با

$$\Delta K=\frac{m}{۲}v_{\circ}^{۲}\left(t\right)-\frac{m}{۲}v_{\circ}^{۲}=\frac{m}{۲}\left(\frac{v_{\circ}\ell}{x}\right)^{۲}-\frac{m}{۲}v_{\circ}^{۲}=\frac{mv_{\circ}^{۲}\ell^{۲}}{۲}\left(\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۱}{\ell^{۲}}\right) \tag{۸-۶۷}$$

و این دو باهم برابرند.

ت-۵ شرایط مسئله در چارچوب آزمایشگاه داده شده است. در این چارچوب تکانه‌ی کل سامانه $mv_{\circ}+M\left(۰\right)=mv_{\circ}$ است. چارچوب مرکزجرم چارچوبی است که نسبت به چارچوب آزمایشگاه با سرعت $u=mv_{\circ}/\left(M+m\right)$ حرکت می‌کند. این را در بخش ۱-۲-۸ نشان دادیم. پس، سرعت ذره‌ها در چارچوب مرکزجرم پیش از برخورد عبارتند از

$$v_{۱}=v_{\circ}-u=\frac{M}{m+M}v_{\circ}\quad,\quad V_{۱}=V_{\circ}-u=-\frac{m}{m+M}v_{\circ} \tag{۸-۶۸}$$

اگر فرض کنیم که سرعت‌ها پیش از برخورد در راستای محور x اند، آنگاه سرعت‌ها پس از برخورد (در چارچوب مرکزجرم) عبارتند از

$$\mathbf{v}'_{۱}=v'_{۱}\left(\hat{\mathbf{i}}\cos\theta+\hat{\mathbf{j}}\sin\theta\right)\quad,\quad\mathbf{V}'_{۱}=-V'_{۱}\left(\hat{\mathbf{i}}\cos\theta+\hat{\mathbf{j}}\sin\theta\right) \tag{۸-۶۹}$$

$V'_{۱}$ و $v'_{۱}$ با در نظر گرفتن پایستگی انرژی و تکانه به دست می‌آیند.

$$\frac{m}{۲}v_{۱}^{۲}+\frac{M}{۲}V_{۱}^{۲}=\frac{m}{۲}v_{۱}'^{۲}+\frac{M}{۲}V_{۱}'^{۲} \tag{۸-۷۰}$$

$$mv_{۱}+MV_{۱}=۰=mv'_{۱}+MV'_{۱} \tag{۸-۷۱}$$

از حل این دو معادله خواهیم داشت

$$v'_{۱}=v_{\circ}\frac{M}{m+M}\quad,\quad V'_{۱}=v_{\circ}\frac{m}{m+M} \tag{۸-۷۲}$$

اگر در چارچوب مرکزجرم سرعت را به صورت $\mathbf{v}'_{۱}=\hat{\mathbf{i}}v'_{x}+\hat{\mathbf{j}}v'_{y}$ بنویسیم و به چارچوب آزمایشگاه ببریم، مولفه‌های سرعت به صورت زیر در می‌آیند

$$v_x = v'_x + u, \quad v_y = v'_y \tag{۸–۷۳}$$

بنابراین، سرعت نهایی ذره‌ی m در چارچوب آزمایشگاه برابر است با

$$v_f = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(v'_x + u\right)^2 + \left(v'_y\right)^2} = \sqrt{\left(v'_1\right)^2 + 2v'_1 u \cos\theta + u^2}$$

$$= \frac{v_0}{m+M}\sqrt{M^2 + 2Mm\cos\theta + m^2} \tag{۸–۷٤}$$

(ب): انرژی جنبشی از $K_i = mv_0^2/2$ به

$$K_f = \frac{mv_f^2}{2} = mv_0^2 \frac{\left(M^2 + 2Mm\cos\theta + m^2\right)}{2\left(m+M\right)^2} \tag{۸–۷۵}$$

تغییر پیدا می‌کند و در نتیجه کسر انرژی جنبشی گم شده برابر است با

$$\frac{K_i - K_f}{k_i} = 1 - \frac{M^2 + 2Mm\cos\theta + m^2}{\left(m+M\right)^2} = \frac{2mM\left(1-\cos\theta\right)}{\left(m+M\right)^2} \tag{۸–۷٦}$$

ت–۶ **(الف)**: پس از برخورد سرعت نسبی وجود ندارد (ذره‌ها باهم حرکت می‌کنند). پس، $\varepsilon = 0$ است.

(ب) : چارچوب مرکزجرم سرعت‌ها پس از برخورد وارون می‌شوند (و این با پایستگی انرژی و تکانه سازگار است). پس، سرعت‌های نسبی پیش از برخورد و پس از برخورد برابرند. اما ، سرعت نسبی در هر چارچوبی یکسان است و به چارچوب بستگی ندارد. پس، در هر چارچوبی $\varepsilon = 1$ است.

(پ): برای سقوط توپ، از پایستگی انرژی داریم $mgh = (1/2)mv_b^2 \Rightarrow v_b = \sqrt{2gh}$ (v_b سرعت توپ پیش از برخورد با زمین است.) به همین ترتیب، سرعت توپ پس از واجهش از سطح زمین عبارت است از $(1/2)mv_a^2 = mgH_1 \Rightarrow v_a = \sqrt{2gH_1}$. چون زمین جابه‌جا نمی‌شود (خب نه چندان) خواهیم داشت

$$\varepsilon = v_b/v_a = \sqrt{H_1/h} \quad \Rightarrow \quad H_1 = \varepsilon^2 h \tag{۸–۷۷}$$

(ت): از رابطه‌ی بالا به دست می‌آید: $H_1 = (0{,}85)^2(1{,}2\,\mathrm{m}) = 0{,}87\,\mathrm{m}$

(ج): از بررسی بالا نتیجه می‌شود که برای هر n دلخواهی داریم $H_{n+1} = \varepsilon^2 H_n$. پس، برای $n = 2$ داریم $H_2 = \varepsilon^2 H_1 \Rightarrow H_2 = \varepsilon^2\left(\varepsilon^2 h\right)$ و در نتیجه $H_3 = \varepsilon^6 h$ و.... و بنابراین، $H_n = \varepsilon^{2n} h$ (که در رابطه‌ی بازگشتی و شرایط اولیه صدق می‌کند). از استقراء ریاضی هم می‌توان این رابطه را اثبات کرد: برای $n = 1$ رابطه برقرار است. درستی آن را برای n فرض می‌کنیم و نشان می‌دهیم که برای $n+1$ هم برقرار است:

$$H_{n+1} = \varepsilon^2 H_n = \varepsilon^2\left(\varepsilon^{2n} h\right) = \varepsilon^{2(n+1)} h \tag{۸–۷۸}$$

پس، برای $n+1$ هم برقرار است. $H_8 = \varepsilon^{16} h = (0{,}85)^{16}(1{,}2\,\mathrm{m}) = 0{,}089\,\mathrm{m}$
