فصل ۷

گرانش، نیروهای مرکزی و قانون های کپلر

۷-۱ نیروهای مرکزی:

بنا به تعریف، نیروی مرکزی نیرویی است که در راستای شعاع است و اندازه آن تنها به فاصله تا چشمه‌ی نیرو بستگی دارد. (یعنی به زاویه‌ی حول چشمه وابسته نیست). تعریف هم‌ارز این است که بگوییم، نیرویی مرکزی نیرویی است که پتانسیل آن تنها به فاصله از چشمه بستگی دارد. یعنی اگر چشمه در مبداء مختصات باشد آنگاه انرژی پتانسیل به صورت $\mathbf{V}(\mathbf{r})=V(r)$ باشد. یک چنین پتانسیلی به نیروی مرکزی می‌انجامد، چون

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=-\nabla V(r)=-\frac{dV}{dr}\hat{\mathbf{r}} \tag{۷-۱}$$

یعنی $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ در راستای شعاع است و تنها به r وابسته است. نیروهای گرانش و الکتروستاتیک با پتانسیل $V(r)\propto 1/r$ مرکزی اند. افزون بر این، آن ها پایستار هم هستند. نیروی فنر با پتانسیل $V(r)\propto(r-\ell)^{2}$ هم مرکزی است؛ که در آن ℓ طول حالت ترازمندی فنر است.

دو حقیقت مهم درباره‌ی نیروهای مرکز وجود دارد (۱): در طبیعت فراگیرند، پس بهتر است آنها را بشناسیم (۲): کار کردن با آنها آسان‌تر از آن است که فکر می‌کنید، زیرا وقتی V تنها تابع r باشد، معادله‌های حرکت بسیار ساده‌تر می‌شوند.

در این فصل نخست به نیروی گرانش خواهیم پرداخت و سپس نیروهای مرکزی را در حالت عمومی بررسی خواهیم کرد و سرانجام دو باره به گرانش باز خواهیم گشت و به مدارهای سیاره ها خواهیم پرداخت.

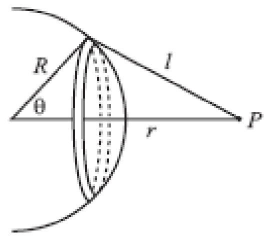
۷-۲ گرانش

نیروی گرانش را به گونه‌ای همه می شناسیم. نیرویی است که ما را در روی زمین نگه می‌دارد و عامل گردش زمین در مداری پیرامون خورشید است. گرانش همین کار را با دیگر سیاره‌های سامانه‌ی خورشیدی هم می‌کند و برای جرم‌های آسمانی دیگر هم در کار است. در واقع، گرانش به خاطر جرم‌دار بودن اجسام است و یکی از چهار نیروی بنیادی طبیعت است که از ویژگی جرم ریشه می‌گیرد. بنابراین، نیروی گرانش بین هر دو جسم دارای جرم وجود دارد.

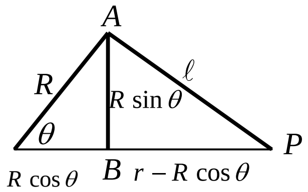
نیروی گرانش که از سوی جرم نقطه‌ای M به جرم نقطه‌ای دیگر m در فاصله‌ی r از جرم نخست وارد می‌شود به وسیله‌ی قانون نیوتون داده شده است.

$$F(r)=\frac{-GMm}{r^{2}} \tag{۷-۲}$$

در اینجا علامت منها نشانگر آن است که این نیرو ربایشی است. اگر جرم نقطه‌ای M را با کره‌ای که جرمش M و شعاعش R است جایگزین کنیم، چه نیرویی به جرم نقطه‌ای m وارد می‌شود؟ با فرض این‌که کره، تقارن کروی دارد یعنی چگالی جرم تنها تابعی از r است، پاسخ هنوز هم $-GMm/r^{2}$ است. کره درست همانند جرم نقطه‌ای رفتار می‌کند که در مرکز آن قرار دارد. این یک نتیجه بسیار خوشایندی است. اگر این چنین نمی‌بود، عالم بسیار پیچیده‌تر از آنچه که هست می‌شد. به ویژه؛ توصیف رفتار کره‌های آسمانی دشوارتر می‌شد. برای اثبات این نتیجه، آسانتر است که نخست انرژی پتانسیل کره را حساب کنیم و سپس از آن مشتق بگیریم و نیرو را به دست آوریم. این کار بهتر از آن است که نیرو را مستقیم حساب کنیم. کافی است این نتیجه را برای یک پوسته‌ی کروی نازک نشان دهیم؛ چون هر کره‌ای عبارت است از جمع پوسته‌هایی که بر روی هم چیده شده‌اند. شیوه‌ی ما برای محاسبه‌ی انرژی پتانسیل حاصل از یک پوسته‌ی کروی در نقطه‌ی P، این است که پوسته را به



شکل ۱–۷



شکل ۲–۷

حلقه‌هایی که در شکل (۱–۷) نشان داده شده است تقسیم کنیم. فرض کنید شعاع پوسته R است و نقطه‌ی P به فاصله‌ی r از مرکز پوسته قرار دارد و حلقه با خطی که به مرکز کره وصل می‌شود زاویه‌ی θ بسازد. فاصله‌ی ℓ نقطه‌ی P تا حلقه، تابعی از R و r و θ است. می‌توان آن را به صورت زیر حساب کرد. در شکل (۲–۷) طول خط AB برابر است با $R\sin\theta$ و طول خط BP مساوی $r-R\cos\theta$ است. بنابراین، طول ℓ در مثلث ABP عبارت است از:

$$\ell=\sqrt{(R\sin\theta)^2+(r-R\cos\theta)^2}=\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta} \qquad (۳–۷)$$

مساحت حلقه بین θ و $\theta+d\theta$ حاصل ضرب پهنای ($R\,d\theta$) و پیرامون آن ($2\pi R\sin\theta$) است. اگر چگالی جرمی پوسته را با ($\sigma=M/(4\pi R^2)$ نشان دهیم، می‌بینیم که در اثر این حلقه‌ی باریک، انرژی پتانسیل جرم m در نقطه‌ی P برابر $-Gm\sigma(R\,d\theta)(2\pi R\sin\theta)/\ell$ است. انرژی پتانسیل گرانشی

$$V(r)=-\frac{Gm_1m_2}{\ell} \qquad (۴–۷)$$

یک کمیت عددی است و هر جزء جرم روی حلقه در نقطه‌ی P سهمی در پتانسیل دارد. این سهم‌های کوچک با هم جمع می‌شوند. فاصله‌ی همه‌ی جزء جرم‌های روی حلقه تا نقطه‌ی P با هم برابرند و انرژی پتانسیل کل در نقطه‌ی P تنها به این فاصله بستگی دارد. جهت این فاصله بی‌ربط است (بر خلاف نیرو) . پس انرژی پتانسیل کل حاصل از کره در نقطه‌ی P عبارت است از جمع پیوسته‌ی سهم همه‌ی حلقه‌های کره:

$$V(r)=-\int_0^{\pi}\frac{2\pi\sigma GR^2m\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta}}=\frac{2\pi\sigma GRm}{r}\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta}\Big|_0^{\pi} \qquad (۵–۷)$$

توجه کنید که وجود $\sin\theta$ در صورت کسر، انتگرال‌گیری را آسان کرد. حال باید دو حالت را در نظر بگیریم. (۱) اگر $r>R$ باشد (یعنی بیرون کره) داریم:

$$V(r)=-\frac{2\pi\sigma GRm}{r}[(r+R)-(r-R)]=-\frac{G(4\pi R^2\sigma)m}{r}=-\frac{GMm}{r} \qquad (۶–۷)$$

که همان پتانسیل ذره‌ای به جرم M جایگزیده در مرکز پوسته است: چیزی که به دنبال آن بودیم. (۲) اگر $r<R$ باشد (درون کره) ، آنگاه داریم:

$$V(r)=-\frac{2\pi\sigma GRm}{r}[(r+R)-(R-r)]=-\frac{G(4\pi R^2\sigma)m}{R}=-\frac{GMm}{R} \qquad (۷–۷)$$

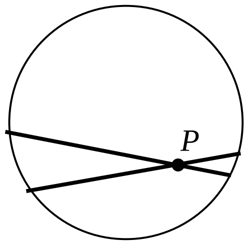
که مستقل از r است. حال که پتانسیل $V(r)$ را یافتیم، می‌توانیم گرادیان آن را حساب کنیم و در یک منها ضرب کنیم تا $F(r)$ را به دست آوریم. چون V تنها تابعی از r است گرادیان آن $\hat{\mathbf{r}}(d/dr)$ خواهد بود. پس:

$$\begin{aligned} F(r)&=-\frac{GMm}{r^2} \qquad ; \quad r>R \\ F(r)&=0 \qquad ; \quad r<R \end{aligned} \qquad (۸–۷)$$

این نیروها، البته در جهت شعاع اند. کره‌ی توپر جمع پوسته‌های زیادی است که بر روی هم نهاده شده اند. پس ، اگر نقطه‌ی P در بیرون کره باشد، آنگاه نیرو در نقطه‌ی P عبارت است از $-GMm/r^2$ که در آن M جرم کل کره است. این نتیجه برای

پوسته‌هایی هم که چگالی جرمی متفاوت دارند (اما چگالی جرمی هر پوسته همگن است) درست است.

اگر P در درون کره باشد، آنگاه فقط جرم موجود در درون کره‌ای هم مرکز که از P می‌گذرد مهم است، چون، بنا به معادله‌ی دوم رابطه (۸-۷) نیروی همه‌ی پوسته‌هایی که در بیرون از این ناحیه قرار دارند صفر می شود. تا جایی که به گرانش مربوط است جرم «بیرون» از P انگار وجود ندارد.

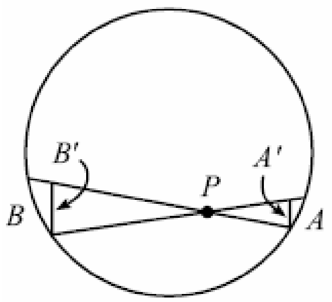


شکل (۳-۷)

البته خیلی روشن نیست که چرا نیرو در درون پوسته‌ی کروی صفر است. نقطه‌ی P را در شکل (۳ -۷) در نظر بگیرید. جزء جرم dm واقع در سمت راست پوسته، نیروی بزرگتری را در نقطه‌ی P ایجاد می‌کند تا جزء جرم موجود در سمت چپ آن. این به خاطر وابستگی $1/r^2$ است. فاصله‌ی جزء جرم dm موجود در سمت راست تا نقطه‌ی P کم تر از فاصله‌ی جزء جرم موجود در سمت چپ آن است. اما همانگونه که در شکل می‌بینید؛ جرم موجود در سمت چپ P بیشتر از جرم موجود در سمت راست آن است. این دو اثر یکدیگر را حذف می‌کنند. در مثال زیر این فرایند حذف شدن را نشان می‌دهیم.

مثال۱-۷: نخست نشان دهید که نیروی جرم های موجود در دو انتهای مخروط کوچک شکل (۳-۷) یکدیگر را در نقطه‌ی P حذف می‌کنند و سپس با استفاده از این نتیجه ثابت کنید که نیروی گرانش در درون پوسته‌ی کروی صفر است.

حل: در شکل (٤-۷) فرض کنید a فاصله رویه‌ی A تا نقطه‌ی P و b فاصله‌ی رویه‌ی B تا P باشند. مقاطع "عمودی" مخروط ها را بکشید و آنها را به ترتیب A' و B' بنامید. نسبت سطح های A' و B' عبارت است از a^2/b^2 که در واقع نسبت جرم‌های موجود در آنهاست. نکته‌ی کلید در اینجا آن است که زاویه‌ی بین صفحه‌های A و A' با زاویه‌ی بین صفحه‌های B و B' برابر است زیرا خط بین A و B در هر دو انتها، دایره را با یک زاویه قطع می‌کند. پس، نسبت مساحت‌های A و B هم a^2/b^2 است. اما نیروی گرانش به صورت $1/r^2$ کاهش پیدا می‌کند و این اثر دقیقاً نسبت مساحت‌های a^2/b^2 را حذف می‌کند. به بیان دیگر: مقدار جرم موجود در سطح‌های A و B با توان دو فاصله تا نقطه‌ی P افزایش می‌یابد و نیرو با عکس مجذور فاصله کاهش پیدا می‌کند. این دو یکدیگر را خنثی می‌کند. پس، نیروی‌های حاصل از A و B (که می‌توان جرم‌های نقطه‌ای پنداشت، چون مخروط را باریک فرض می‌کنیم) در نقطه P از نظر اندازه با هم برابر و در خلاف جهت یکدیگرند. در نتیجه نیرو در نقطه P صفر است.

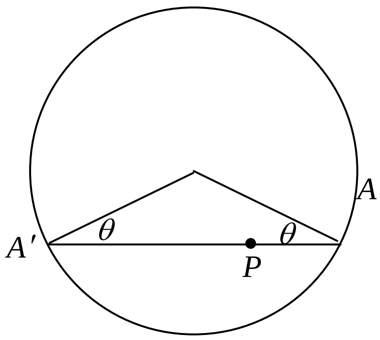


شکل٤-۷)

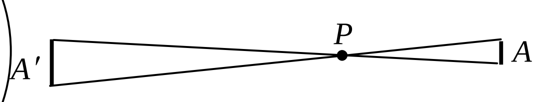
شاید به جاست که یک بار دیگر، با روشنی بیشتر این موضوع را بیان کنیم که نیروی گرانش در درون پوسته‌ی کروی صفر است و این درست به خاطر وابستگی $1/r^2$ نیروی گرانش است. نیروی کولمب نیز که به صورت $1/r^2$ تغییر می‌کند، این ویژگی را دارد. اگر چه سرشت نیروهای گرانش و کولمب متفاوت‌اند. دوباره نیروی وارد به نقطه P در درون یک پوسته‌ی کروی را در نظر بگیرید که جرم (یا بار الکتریکی) موجود در سطح کوچک A روی کره ایجاد می‌کند. نکته این است که می‌توانیم سطح کوچک A' را در سوی دیگر نقطه‌ی P بسازیم (شکل ٥-۷). کافی است از هر نقطه روی مرزهای A خطی بکشیم که از P بگذرد و به سطح پوسته برسد. به این ترتیب سطح A' (یا مرزهای آن) روی پوسته مشخص می‌شود. حال می‌خواهیم نشان

دهیم که نسبت سطح A' به سطح A با نسبت مربع فاصله‌های A' و A از P برابر است. چون نیرو با $1/r^2$ متناسب است نیروی حاصل از A' نیروی حاصل از A را در نقطه‌ی P حذف می‌کند. اگر A به نقطه‌ی P نزدیکتر باشد سطح A نیزآنگاه با نسبت درستی کوچکتر می‌شود تا نیرو را حذف کند. نخست، نسبت مساحت‌ها را بررسی کنیم. در شکل (۵-۷) اگر از P به ناحیه‌ی A نگاه کنیم، مرزهای A زاویه‌ی فضایی $d\Omega$ را می‌پوشاند. بنا به تعریف A' نیز به زاویه‌ی فضایی یکسان $d\Omega$ باز شده است. مساحت بخشی از یک کره به شعاع ρ و به مرکز P با زاویه‌ی فضایی $d\Omega$ برابر است با $\rho^2 d\Omega$ (این تعریف زاویه‌ی فضایی است) چون $d\Omega$ بسیار کوچک است، این سطح تقریباً تخت است. در نتیجه، با سطح ناحیه‌ای که عمود بر خط گذرنده از P و به فاصله‌ی ρ از آن است (سطح A' یا B' در شکل ٤-۷)، برابر است. در نتیجه، نسبت سطح‌های A و A' در شکل (۵-۷) همان نسبت مربع فاصله‌ی آنها از P است.

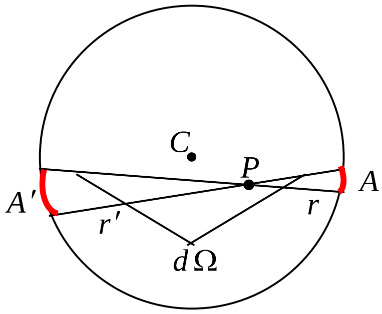
البته سطح‌های روی پوسته بزرگتر از سطح‌های عمودی در شکل (٦-۷) اند. چون خمیده‌اند، اما هر دو با یک زاویه خمیده‌اند. اگر در شکل (۷-۷)به مثلث متساوی‌الساقین نگاه کنید، می‌بینید که خط‌های مماس بر پوسته به شعاع‌ها عمودند. بنابراین، هر دو سطح خمیده به اندازه‌ی $1/\cos\theta$ از سطح‌های عمودی بزرگترند.



شکل ۷-۷

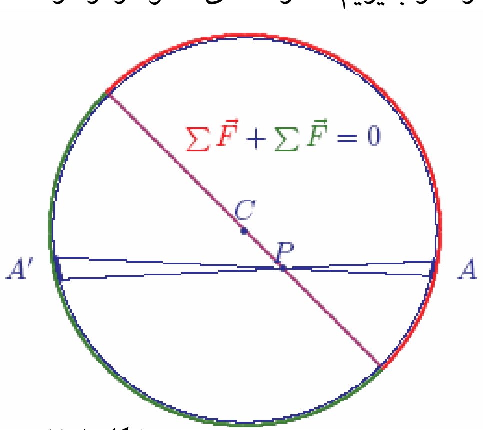


شکل ٦-۷



شکل ۵-۷

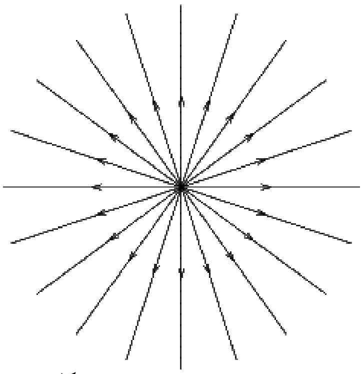
در نتیجه، نسبت سطح‌های خمیده همان نسبت مربع فاصله‌های آنها از نقطه‌ی P است. این نشان می‌دهد که به ازای هر جزء سطح در روی پوسته‌ی کروی، جزء سطح دیگری در سوی دیگر وجود دارد که در P نیرویی یکسان و در خلاف جهت ایجاد می‌کند. اما، این هنوز کافی نیست. باید مطمئن شویم که هر گاه روی کره انتگرال می‌گیریم هر کدام از این سطح‌های جزیی فقط یکبار به حساب می‌آیند. خوشبختانه، این کار آسان است. می‌توانیم صفحه‌ای را در نظر بگیریم که از نقطه‌ی P و مرکز کره می‌گذرد و با انتگرال‌گیری روی سطحی که در یک طرف این صفحه قرار دارد نیروی وارد به نقطه‌ی P را حساب کنیم. سطحی که این نیرو را حذف می‌کند در سوی دیگر صفحه‌ی گذرنده از P و مرکز کره قرار دارد، شکل (۸-۷).
بنابراین، همه‌ی کره را در نظر گرفتیم. این اثبات بخش نخست قضیه‌ی نیوتون است که به صورت زیر بیان می‌شود.



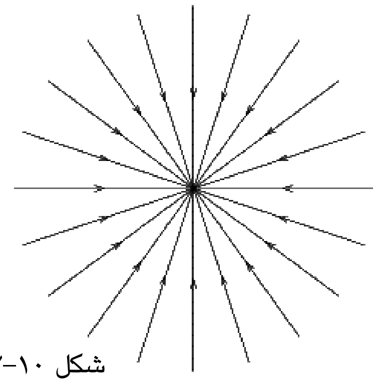
شکل ۸-۷

قضیه: نیروی وارد به یک جرم نقطه‌ای یا بار الکتریکی نقطه‌ای از سوی پوسته‌ی کروی یا بار یکنواخت، در درون پوسته صفر و در بیرون پوسته برابر با نیرویی است که اگر همه‌ی جرم یا بار در مرکز کره متمرکز می‌شد، به جرم یا بار نقطه‌ای وارد می‌کرد.

اثبات بخش دوم قضیه: اینک ما از مفهوم "خط‌های میدان" استفاده می‌کنیم تا بخش دوم قضیه را ثابت کنیم. می‌توان درباره‌ی نیروهای الکترو مغناطیسی به صورت زیر نگاه کرد. بار الکتریکی میدان الکتریکی تولید می‌کند که روی بارهای دیگر اثر می‌گذارد، به آنها نیرو وارد می‌کند. میدان الکتریکی را می‌توان با خط‌های میدان نشان داد که از بار مثبت آغاز (شکل۹-۷) و به بار منفی پایان می‌گیرند (شکل۱۰-۷). هرگز از فضای تهی آغاز نمی‌شوند و در فضای تهی نیز پایان نمی‌گیرند؛ از بار آغاز و به بار ختم می‌شوند. خط‌های میدان در جهت میدان الکتریکی‌اند و چگالی خط‌های میدان با شدت میدان الکتریکی متناسب است. یک بار تنها در همه سو به طور یکسان خط میدان گسیل می‌کند.اگر در دور و بر، بار دیگری وجود نداشته باشد، این خط‌های میدان پایان نمی‌گیرند و در نتیجه پخش می‌شوند. روی سطحی به شعاع r، خط‌ها روی مساحت $4\pi r^2$ پخش می‌شوند بنابراین چگالی خط‌های میدان به صورت $1/r^2$ کاهش می‌یابد. در نتیجه، میدان الکتریکی و بنابراین نیرو به صورت $1/r^2$ کاهش پیدا می‌کند. این دلیل بنیادی نیروی کولمب است. برای گرانش نیز خط‌های میدان بسیار شبیه خط‌های میدان نیروی الکتریکی است. چون در اینجا فقط یک نوع بار ـ که همان جرم است ـ وجود دارد و بارهای هم‌نام یکدیگر را می‌ربایند، می‌توان فرض کرد که خط های میدان از بینهایت می‌آیند و در روی جرم‌ها به هم می‌رسند. مثل خط‌های میدان الکتریکی؛ خط‌های میدان گرانشی هم نمی‌توانند در جایی که جرم وجود ندارد پایان بگیرند. خوب؛ این چه ربطی به قضیه‌ی نیوتون دارد؟ پوسته جرم کروی همگن را در نظر بگیرید. توزیع جرم روی آن تقارن کروی دارد. این یعنی نیرو باید شعاعی و در هر دو سوی یکسان باشد. بگذارید این را نشان دهیم. نخست نیرو را در نقطه‌ای مانند $\mathbf{r}$ در نظر بگیرید. اگر توزیع جرم را حول محور $\mathbf{r}$ بچرخانیم، این نیرو نباید در نقطه‌ی $\mathbf{r}$ تغییر کند و این یعنی نیرو در جهت $\mathbf{r}$ است؛ زیرا همه‌ی مؤلفه‌های عمودی نیرو هم با چرخش توزیع جرم خواهند چرخید (این یعنی ناوردایی چرخشی). پس، اگر یکبار بدانیم که نیرو شعاعی است آنگاه روشن است که نیرو در همه‌ی جهت‌ها یکسان است و اندازه‌ی آن تنها تابعی از $|\mathbf{r}|$ است. چون نیرو در درون پوسته صفر است، پس هیچ میدان گرانشی و در نتیجه خط میدان در درون پوسته وجود ندارد. همه‌ی خط‌های میدان از بینهایت شروع و به پوسته پایان می‌گیرند، صرف نظر از اینکه شعاع پوسته چه باشد، تعداد خط‌های نیرو که جرم کل روی کره تولید می‌کند، برای هر شعاعی یکسان است. این گزاره‌ی درستی است، چون اگر از فاصله‌ی دور به پوسته نگاه کنیم به صورت یک جرم نقطه‌ای به نظر خواهد آمد. بنابراین، همه‌ی خط‌هایی که از بینهایت سرچشمه می‌گیرند مستقل از این که شعاع پوسته چیست، باید به آن نقطه برسند (شکل۱۱-۷). خط‌های میدان در بیرون از پوسته نیز نمی‌توانند ناپدید یا ظاهر شوند زیرا در آنجا جرم وجود ندارد. پس در بیرون پوسته، خط‌های میدان کاملاً مستقل از شعاع پوسته است و در نتیجه مانند همانی است که به وسیله‌ی جرم نقطه‌ای جایگزیده در مرکز پوسته تولید می‌شود.



شکل ۹-۷



شکل ۱۰-۷

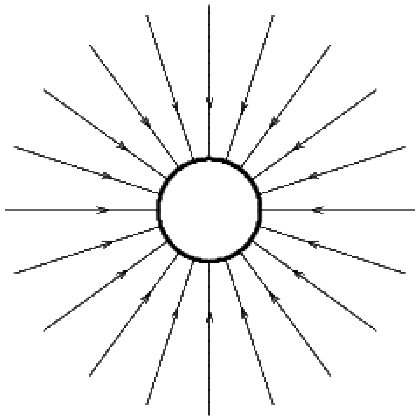
این پایان اثبات قضیه است. قضیه‌ی نیوتون پی‌آمدهای مهمی دارد. یکی از آنها نیروی گرانش وارد به جرم نقطه‌ای m است که در درون توزیع جرم کروی متقارن قراردارد و مرکز این توزیع جرم در مبداء مختصات است. اگر جرم نقطه‌ای در فاصله‌ی $\mathbf{r}$ از مرکز این توزیع باشد، آنگاه بنا به قضیه‌ی نیوتون، نیرویی که توزیع جرم وارد به آن وارد می‌کند، برابر است با:

$$-\hat{\mathbf{r}}\frac{GMm}{r^{۲}} \qquad (۷-۹)$$

که در آن M جرم موجود در **درون کره‌ی r** است.

این نتیجه‌ی قضیه، برای یکی از نظریه‌های شگفت‌آور درباره‌ی عالم ـ وجود ماده‌ی تاریک ـ بسیار مهم است.

کدام یک بنیادی‌تر است؟ قانون $۱/r^{۲}$ یا خط های میدان؟ پاسخ سرراست این است که بگوییم نیرو به صورت $۱/r^{۲}$ است و این به ما اجازه می‌دهد تا نشان دهیم که نگاره‌ی خط های میدان معنی دارد. از سوی دیگر؛ می‌توانیم بگوییم خط‌های میدان بنیادی‌ترند و چون خط‌های میدان روی سطح کره پخش می‌شوند و سطح کره با $r^{۲}$ متناسب است پس خط های میدان به ما می‌آموزد که نیرو به صورت $۱/r^{۲}$ است. واقعیت این است که براساس توصیفی بنیادی‌تر از سرشت این نیروها، ما بر این باوریم که نگاره‌ی خط‌های میدان بنیادی‌ترند. تا هنگامی که ما با سه بعد سر و کار داریم، البته فرقی نمی‌کند اما در نظریه‌هایی که ابعاد اضافی دارند؛ بنیادی پنداشتن خط‌های میدان اهمیت پیدا می‌کند. در n بعد، چون سطح کره‌ای به شعاع r به صورت $r^{n-۱}$ افزایش پیدا می‌کند، نیروهای الکتریکی و گرانشی به صورت $۱/r^{n-۱}$ کاهش می‌یابند! از قضیه‌ی نیوتون نتیجه می‌شود که نیروی گرانش بین دو جسم متقارن کروی مانند آن است که جرم‌شان در مرکزشان متمرکز باشد. این را از خطی بودن وقانون سوم نیوتون می‌توان نتیجه گرفت. دو جسم کروی A و B را در نظر بگیرید. نیروی که A به اجزاء جرم در روی B وارد می‌کند، مانند نیرویی است که اگر تمامی جرم A در مرکزش متمرکز می‌بود، به B وارد می کرد. بنا به قانون سوم نیوتون، این هم‌چنین بدان معنی است که نیروی وارد به جسم A از هر نقطه‌ی جرمی در B برابر با نیرویی است که اگر کل جرم B در مرکز آن متمرکز می‌بود، ایجاد می کرد؛ و می‌دانیم که این همانند نیروی بین دو جرم نقطه‌ای واقع در مرکز A و B است. یک نتیجه‌ی جالب این گفتار آن است که دو جسم کروی به یکدیگر گشتاور وارد نمی‌کنند. این نکته را به زودی در آغاز بخش ۵-۷ خواهیم دید



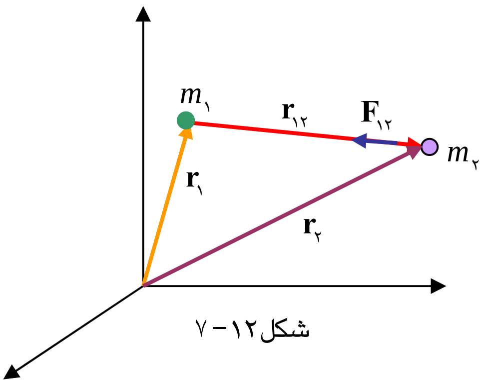
شکل ۱۱-۷

- **نیروی گرانش بین دو توده‌ی جرمی**

رابطه‌ی (۱-۷) نیروی گرانش بین دو جرم نقطه‌ای m و M را توصیف می‌کند که به فاصله‌ی r از یکدیگر قرار دارند. اگر به جای جرم‌های نقطه‌ای، توده‌های جرم می‌داشتیم چگونه می‌توانستیم نیروی گرانش بین آنها را حساب کنیم؟ برای این که بتوانیم این محاسبه را انجام دهیم، ناگزیریم اندکی نمادگذاری ها را تغییر دهیم. فرض کنید جرم‌های نقطه‌ای $m_{۱}$ و $m_{۲}$ نسبت به چارچوبی در مکان های $\mathbf{r}_{۱}$ و $\mathbf{r}_{۲}$ باشند؛ آنگاه رابطه‌ی (۱-۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت که نیروی وارد از سوی ذره‌ی $m_{۲}$ به ذره‌ی $m_{۱}$ است:

$$\mathbf{F}_{۲۱}(\mathbf{r}_{۱},\mathbf{r}_{۲}) = -G\,\frac{m_{۱}m_{۲}}{r_{۲۱}^{۲}}\hat{\mathbf{r}}_{۲۱} \qquad (۷-۱۰)$$

و در آن $\mathbf{r}_{۱}$ و $\mathbf{r}_{۲}$ بردارهای مکان $m_{۱}$ و $m_{۲}$ اند. $\mathbf{r}_{۱۲} = \mathbf{r}_{۱} - \mathbf{r}_{۲}$ برداری است از $m_{۱}$ به $m_{۲}$. هم‌چنین $r_{۲۱} = |\mathbf{r}_{۲۱}|$ و بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}_{۲۱}$ عبارت است از $\hat{\mathbf{r}}_{۲۱} = \mathbf{r}_{۲۱}/r_{۲۱}$. این بردارها در شکل (۱۲-۷) نشان داده شده‌اند. چون نیروی گرانش نسبت به جرم‌ها خطی است (یعنی با توان اول جرم ها متناسب است) می‌توانیم نیروی گرانش وارد به یک جرم نقطه‌ای از سوی یک توزیع فضایی جرم $\rho(\mathbf{r})$ را حساب کنیم



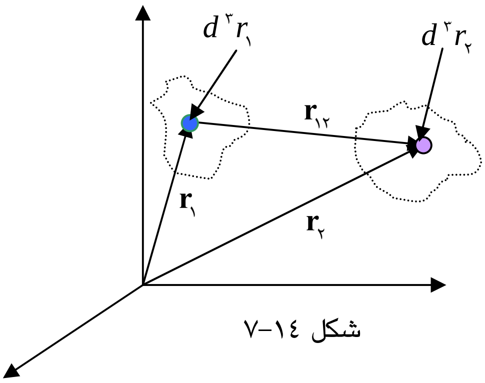
شکل ۷-۱۲

$$\mathbf{F}_{21} = -Gm_2 \int_{V_1} d^3 r_1 \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1)}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} \qquad (۷-۱۱)$$

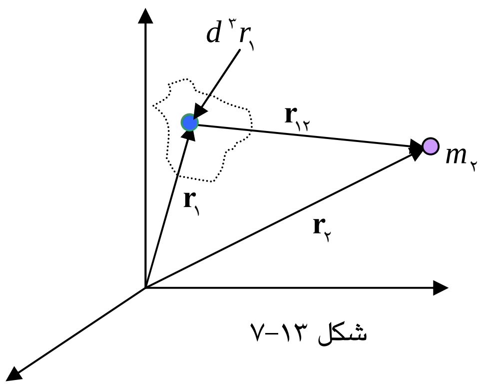
که در آن انتگرال روی توزیع جرم گرفته می‌شود (شکل۷-۱۳). توجه کنید که بردار مکان نسبی $\mathbf{r}_{21}$ به $\mathbf{r}_1$ بستگی دارد. می‌توانیم این شیوه را تعمیم بدهیم و فرض کنیم که m_2 هم به جای جرم نقطه‌ای، جسمی دارای بعد با توزیع جرم است. فرض کنید چگالی جرم جسم ۱ برابر $\rho_1(\mathbf{r})$ و چگالی جرمی جسم ۲ مساوی $\rho_2(\mathbf{r})$ باشد آنگاه رابطه‌ی (۷-۱۰) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{F}_{21} = -G \int_{V_1}\int_{V_2} d^3 r_2 d^3 r_1 \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2)}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} \qquad (۷-۱۲)$$

که نیروی گرانش بین دو جسم است (شکل۷-۱٤). باز هم توجه کنید که $\mathbf{r}_{21}$ با هر دوی $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ تغییر می‌کند. ترتیب انتگرال‌گیری مهم نیست.



شکل ۷-۱٤

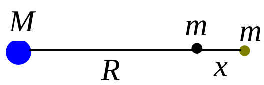


شکل ۷-۱۳

۷-۳ نیروهای کشندی

در زمین همواره با پدیده‌ی کشند (بالا آمدن و فرو افتادن آب اقیانوس‌ها) روبرو هستیم. علت این پدیده آن است که نیروی گرانش وارد به زمین از سوی یک جرم نقطه‌ای (یا یک جسم کروی مانند خورشید و ماه) در همه جای زمین یکنواخت نیست. هم جهت و هم اندازه‌ی این نیرو در جاهای مختلف روی زمین با هم فرق دارد. جهت نیروی وارد به قسمت های مختلف زمین به این دلیل با هم فرق دارند که خطهای نیرو در چشمه‌ی به وجود آورنده‌ی نیرو واگرا می‌شوند. اندازه‌ی نیرو در مکان‌های مختلف زمین هم به این دلیل با هم فرق دارند که نیروی گرانش به صورت $1/r^2$ تغییر می‌کند و البته فاصله‌ی نقاط مختلف زمین تا چشمه‌ی نیرو متفاوت است. این اثرها سبب می‌شوند که آب اقیانوس‌ها بالا بیایند و کشندهای روزانه به وجود آورند. بررسی پدیده‌ی کشند به دو دلیل سودمند است. نخست آنکه یک پدیده‌ی واقعی جهان است. دوم این که دستاویز خوبی برای به کار بردن بسط تیلور و تقریب زنی است. پیش از آنکه حالت عمومی را بررسی کنیم، به دو حالت خاص نیروی کشندی افقی و نیروی کشندی عمودی می پردازیم.

۷-۳-۱ نیروی کشندی افقی



شکل ۷-۱۵

در شکل(۷-۱۵) دو ذره به جرم‌های m در نقاط $(R,0)$ و $(R+x,0)$ قرار دارند. فرض کنید $x \ll R$. پرسش این است: سیاره‌ای به جرم M در مبداء مختصات است. تفاوت نیروی گرانش وارد به این دو جرم از سوی سیاره چیست؟ با توجه به این که $x \ll R$ است، تفاوت

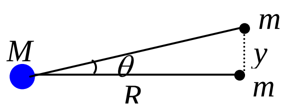
نیروی گرانش عبارت است از:

$$\frac{-GMm}{(R+x)^{۲}}-\frac{-GMm}{R^{۲}}\approx\frac{-GMm}{R^{۲}+۲Rx}+\frac{GMm}{R^{۲}}=\frac{GMm}{R^{۲}}\left(\frac{-۱}{۱+۲x/R}+۱\right)$$
$$\approx\frac{GMm}{R^{۲}}[-(۱-۲x/R)+۱]=\frac{۲GMmx}{R^{۳}} \qquad (۷-۱۳)$$

این نتیجه برابر است با x ضربدر مشتق نیرو نسبت به x (مشتق گیری همان حساب کردن تفاضل‌ها است). این تفاوت نیروی گرانش در دو نقطه در راستای خطی است که جرم‌های m را به هم وصل می‌کند و اثرش این است که جرم‌های m را از هم دور کند. این نیرو به طور خطی با فاصله‌ی x دو جرم m متناسب و با $R^{۳}$ نسبت وارون دارد. نتیجه‌ی بالا نیروی کشندی افقی است.

۷-۳-۲ نیروی کشندی عمودی

در شکل (۱٦-۷) دو ذره به جرم m در نقاط $(R,۰)$ و (R,y) قرار دارند و $y \ll R$ است. سیاره‌ی M در مبداء مختصات قرار دارد. اختلاف نیروی گرانش که سیاره به این دو ذره وارد وارد می کند چقدر است؟ فاصله‌ی هر دو جرم از M (با توجه به قضیه‌ی فیثاغورث) یکسان و برابر R است (با تقریب از مرتبه‌ی دو در y/R). پس، اندازه‌ی نیروهای وارد به آنها اساساً یکسان است (تا مرتبه‌ی نخست در y/R). جهت آنها تنها چیزی است که متفاوت است. از شکل (۱٦-۷) می توان دید که نیروی وارد به جرم پایینی مولفه‌ی y ندارد، اما نیروی وارد به جرم بالایی مؤلفه‌ی y دارد. بنابراین، تفاوت نیروهای وارد به این دو جرم تنها در مولفه‌ی y آنهاست. اندازه‌ی این مؤلفه برای جرم بالایی عبارت است از:



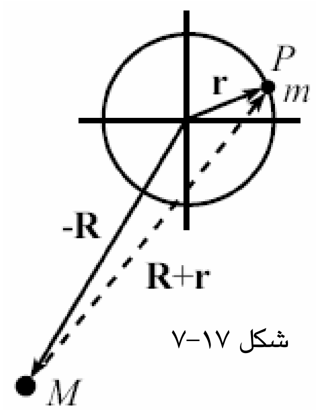
شکل ۱٦-۷

$$\frac{GMm}{R^{۲}}\sin\theta\approx\frac{GMm}{R^{۲}}\left(\frac{y}{R}\right)=\frac{GMmy}{R^{۳}} \qquad (۷-۱٤)$$

این تفاوت نیرو در راستای خطی است که جرم‌ها را به هم وصل می‌کند و اثرش آن است که جرم‌ها را به هم نزدیک می‌کند. مانند حالت پیش، نیروی کشندی عمودی هم با جدایی y به‌طور خطی و با فاصله تا چشمه به صورت عکس مکعب متناسب است. این تقاوت، نیروی کشندی عمودی است.

۷-۳-۳ حالت عمومی

حال نیروی کشندی وارد بر جرمی دلخواه را حساب می کنیم که در مدار دایره‌ای شکل به شعاع r قرار دارد. در شکل (۱۷-۷) فرض کنید مرکز دایره در مبداء مختصات است (دایره= زمین) و نیرو را جرم M جایگزیده در $-\mathbf{R}$ ایجاد می کند.



شکل ۱۷-۷

می خواهیم نیروی کشندی حاصل از M را نسبت به مبداء حساب کنیم. توجه کنید که برداری که M را به یک نقطه مانند P در روی دایره مربوط می کند $\mathbf{R}+\mathbf{r}$ است و طبق معمول فرض می‌کنیم $|\mathbf{R}|\gg|\mathbf{r}|$ باشد. نیروی گرانش ربایشی را می‌توان به صورت $\mathbf{F}(\mathbf{x})=-GMm\,\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^{۳}$ نوشت که در آن $\mathbf{x}$ برداری از M به نقطه‌ی مورد نظر است. یعنی فرض کنید $\mathbf{x}=\mathbf{R}+\mathbf{r}$. بنابراین، نیروی کشندی عبارت است از تفاوت نیروی گرانش وارد به جرم m در نقطه‌ی P و نیروی وارد به جرم m در مبداء مختصات.

نخستین کار ما این است که جمله‌ی $|\mathbf{R}+\mathbf{r}|$ را با استفاده از $r \ll R$ بازنویسی کنیم.

$$|\mathbf{R}+\mathbf{r}|=\sqrt{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\cdot(\mathbf{R}+\mathbf{r})}=\sqrt{R^2+r^2+2\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}\approx R\sqrt{1+2\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}/R^2}\approx R\left(1+\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{R^2}\right) \qquad (۷-۱۵)$$

دوباره با استفاده از $r \ll R$ داریم:

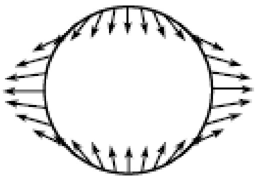
$$\frac{\mathbf{F}_t(\mathbf{r})}{GMm}\approx-\frac{\mathbf{R}+\mathbf{r}}{R^3(1+\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}/R^2)^3}+\frac{\mathbf{R}}{R^3}\approx\frac{\mathbf{R}+\mathbf{r}}{R^3(1+3\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}/R^2)}+\frac{\mathbf{R}}{R^3}\approx-\frac{\mathbf{R}+\mathbf{r}}{R^3}\left(1-\frac{3\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{R^2}\right)+\frac{\mathbf{R}}{R^3} \qquad (۷-۱٦)$$

چون $\hat{\mathbf{R}}\equiv\mathbf{R}/R$ است، سرانجام داریم. (یکبار دیگر از $r \ll R$ استفاده کنید)

$$\mathbf{F}_t(r)\approx\frac{GMm(3\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{r})-\mathbf{r})}{R^3} \qquad (۷-۱۷)$$

این نیروی کشندی است. می‌توان آن را ساده‌تر نوشت. اگر M را روی قسمت منفی محور x قرار دهیم، (برای این کار کافی است محورها را بچرخانیم) در این صورت خواهیم داشت: $\hat{\mathbf{R}}=\hat{\mathbf{x}}$ و $\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{r}=x$ و رابطه بالا می‌گوید که نیروی کشندی در نقطه‌ی $P=(x\,,y)$ عبارت است از:

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{r})\approx\frac{GMm}{R^3}(3x\hat{\mathbf{x}}-(x\hat{\mathbf{x}}+y\hat{\mathbf{y}}))=\frac{GMm}{R^3}(2x\,,-y) \qquad (۷-۱۸)$$



شکل ۱۸-۷

در شکل (۱۸-۷) نیروهای کشندی در مکان‌های مختلف دایره نشان داده شده است. اگر زمین جسم سخت می‌بود، آنگاه نیروهای کشندی بر روی آن بی‌اثر می‌شد. اما آب اقیانوس‌ها به راحتی جابه‌جا می‌شوند. آب‌های روی کره‌ی زمین در راستای خط بین زمین- ماه و نیز بین زمین- خورشید برآمدگی پیدا می‌کنند. در زیر این برآمدگی‌های آب، زمین می‌چرخد و کسی که روی زمین است می‌بیند که این برآمدگی‌ها نسبت به زمین می‌چرخند. همان گونه که از شکل (۱۸-۷) می‌بینیم، این اثر در هر روز دو برآمدگی و دو فرو رفتگی ایجاد می‌کند. البته تعداد برآمدگی‌ها دقیقا دو تا نیست چون کره‌ی ماه دور زمین می‌گردد، اما این حرکتی آهسته است و یک ماه طول می‌کشد. بنابراین، برای منظور ما ، فرض ثابت بودن کره‌ی ماه پذیرفتنی است. توجه کنید که ماه آب‌های روی زمین را که در سمت دورتر از آن قرار دارد، **پس نمی‌راند**، بلکه آنها را هم به سوی خود می کشد. اما این کشش، ضعیف‌تر از کشش بخش خاکی زمین است. کشندها اثرهای مقایسه‌ای اند.

دو نکته: ۱. دو جرم یکسان را در روی زمین در نظر بگیرید که فاصله‌ی معینی از هم دارند. نیروی گرانشی خورشید بر روی آنها بسیار بزرگ‌تر از نیروی گرانشی ماه است؛ در حالی‌که نیروی کشندی مربوط به خورشید روی آنها اندکی کوچک‌تر از نیروی کشندی مربوط به ماه است. به طور کیفی، نسبت نیروهای گرانش برابر است با

$$\frac{F_S}{F_M}=\left(\frac{GM_S}{R_{E,S}^2}\right)\Bigg/\left(\frac{GM_M}{R_{E,M}^2}\right)=\frac{6{,}10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}}{3{,}4\times10^{-5}\ \mathrm{m/s^2}}\approx175 \qquad (۷-۱۹)$$

و نسبت نیروهای کشندی عبارت است از

$$\frac{F_{t,S}}{F_{t,M}}=\left(\frac{GM_S}{R_{E,S}^3}\right)\Bigg/\left(\frac{GM_M}{R_{E,M}^3}\right)=\frac{4{,}10^{-14}\ \mathrm{s^{-2}}}{9{,}10^{-14}\ \mathrm{s^{-2}}}\approx0{,}45 \qquad (۷-۲۰)$$

۲. رابطه‌ی (۲۰-۷) نشان می‌دهد که اثرهای کشندی ماه به تقریب دو برابر اثرهای کشندی خورشید است. این آموزه‌ی جالبی را در باره‌ی چگالی‌های ماه و خورشید به دست می‌دهد. برای مثال، نیروی کشندی از سوی ماه متناسب است با

$$\left(\frac{GM_M}{R_{E,M}^3}\right)=\left(\frac{G\,(4\pi r_M^3/3)\,\rho M}{R_{E,M}^3}\right)\propto \rho M\left(\frac{r_M}{R_{E,M}}\right)^3\approx \rho M\,\theta_M^3 \qquad (۷-۲۱)$$

که در آن θ_M نصف اندازه‌ی زاویه‌ی رویت ماه است. نیروی کشندی خورشید هم یک چنین رابطه‌ای دارد. اما اندازه‌های زاویه های رویت ماه و خورشید، به تقریب با هم برابرند. این را می توانید با نگاه کردن به آنها (بهتر است با یک عدسی این کار را بکنید) و یا با توجه به این که گرفتِ کامل خورشید پدیده‌ی کمیاب است، ببینید. بنابراین، دو رابطه‌ی (۲۰-۷) و (۲۱-۷) با هم می گویند که چگالی ماه به تقریب دو برابر چگالی خورشید است.

۴-۷ **گشتاور** : **تکانه ی زاویه ای**

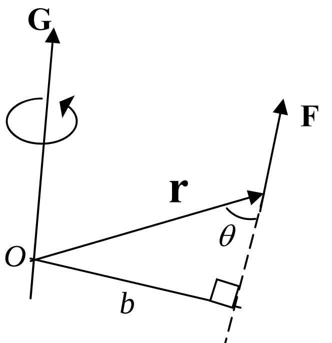
گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ که به ذره‌ای واقع در مکان $\mathbf{r}$ وارد می‌شود، نسبت به مبدأ O با حاصل ضرب برداری

$$\mathbf{G}=\mathbf{r}\times\mathbf{F} \qquad (۷-۲۲)$$

زیر تعریف می‌شود. مولفه‌های برداری $\mathbf{G}$ **گشتاور حول محورهای** $\mathbf{x}$ ، $\mathbf{y}$ ، $\mathbf{z}$ اند.

$$G_x=yF_z-zF_y\ ,\ G_y=zF_x-xF_z\ ,\ G_z=xF_y-yF_x \qquad (۷-۲۳)$$

جهت بردار $\mathbf{G}$ همانند بردار یکه عمود بر صفحه‌ی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ است و محوری را تعریف می‌کند که نیرو می‌خواهد حول این محور، ذره را به چرخش وادارد. اندازه‌ی گشتاور $\mathbf{G}$ برابر است با $G=rF\,Sin\theta=bF$ که در آن زاویه‌ی θ، زاویه‌ی بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ است و b فاصله‌ی عمودی از مرکز تا راستای نیرو است. این کمیت هادر شکل (۱۹-۷) نشان داده شده اند. گشتاور نیرو در دینامیک جسم سخت نقش مهمی دارد و ما در فصل های آینده به آن خواهیم پرداخت. به همین ترتیب، بردار **تکانه‌ی زاویه‌ای** (یا **گشتاور تکانه**) یک *ذره نقطای* حول مرکز را که در مکان $\mathbf{r}$ با تکانه‌ی $\mathbf{p}$ حرکت می‌کند می‌توان تعریف کرد.



شکل ۱۹-۷

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}=m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} \qquad (۷-۲٤)$$

مولفه‌های تکانه‌ی زاویه‌ای روی محور x ، y و z عبارتند از:

$$L_x=m\,(y\,\dot{z}-z\,\dot{y})\quad ,\quad L_y=m(z\,\dot{x}-x\,\dot{z})\quad ,\quad L_z=m(x\dot{y}-y\dot{x})$$

برای تأکید در تمایز بین $\mathbf{p}$ و $\mathbf{L}$ ، بیشتر وقت‌ها $\mathbf{p}$ را **تکانه‌ی خطی** می‌نامند. توجه کنید که بردار $\mathbf{L}$ به این بستگی دارد که مبداء مختصات را کجا برگزینیم. آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای را با مشتق‌گیری نسبت به زمان از رابطه‌ی (۲٤-۷) می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\mathbf{L}}=m\,\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})=m\,(\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}+\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}) \qquad (۷-۲۵)$$

(توجه کنید که قاعده‌ی مشتق‌گیری از حاصلضرب، درباره‌ی حاصلضرب بردارها هم درست است به شرط آنکه ترتیب بردارها حفظ شود). جمله‌ی نخست در رابطه‌ی (۲۵-۷) یعنی $\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}$ برابر صفر است چون این جمله ضرب برداری یک بردار در خودش است. جمله‌ی دوم، $m\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}$، را می‌توان به صورت $\mathbf{r}\times(m\ddot{\mathbf{r}})=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ نوشت که همان بردار گشتاور $\mathbf{G}$ است. پس، به نتیجه‌ی مهمی رسیدیم: آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای با گشتاور نیروی اعمال‌شده برابر است.

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{G} \tag{۷–۲۶}$$

این نتیجه را با آهنگ تغییر تکانه‌ی خطی، یعنی $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}$ مقایسه کنید.

چون تعریف ضرب برداری به قرارداد پیچش انگشتان دست راست (قاعده انگشتان دست راست) بستگی دارد؛ جهت بردارهای $\mathbf{G}$ و $\mathbf{L}$ نیز به این قرارداد وابسته است. بردارهایی از این دست را بردار **مساحت** می‌نامند. از تعریف $\mathbf{G}$ و $\mathbf{L}$ چنان برمی‌آید که حاصل‌ضرب برداری دو بردار معمولی $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$ یعنی $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ یک بردار معمولی نیست زیرا جهت آن با تغییر دستوارگی دستگاه مختصات وارون می‌شود. جهت بردار معمولی مستقل از سامانه‌ی مختصات است و بردار **قطبی** نام دارد. برداری که جهتگیری آن به دستوارگی دستگاه مختصات بستگی داشته باشد، بردار **محوری** یا **شبه‌بردار** نام دارد.

بردار گشتاور نیرو، $\mathbf{G}$، و بردار تکانه‌ی زاویه‌ای $\mathbf{L}$ بردارهای محوری اند. با این حال، ضرب خارجی بردار محوری و بردار قطبی، خود یک بردار قطبی می‌شود. تمایز بین بردارهای قطبی و محوری تنها هنگامی به وجود می‌آید که بخواهیم هر دو دستگاه مختصاتِ راست دستواره و چپ دستواره را در نظر بگیریم. بردارهای محوری بیشتر به چرخش حول یک محور مربوط اند. بنابراین، آنچه که به طور فیزیکی به آن تأکید می‌شود جهت در راستای یک محور نیست، بلکه راستگرد یا چپ‌گرد بودن چرخش حول محور است.

۷–۵ نیروهای مرکزی؛ پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای

بنا به تعریف، هر نیرویی که راستای آن در امتداد شعاع باشد و اندازه‌اش فقط به فاصله از مرکز نیرو بستگی داشته باشد، **نیروی مرکزی** نامیده می‌شود. بنابراین، هر نیرویی که جهتش همواره به سوی یک نقطه‌ی ثابت یا بیرون از نقطه‌ی ثابت باشد نیروی مرکزی است. نقطه‌ی ثابت را **مرکز نیرو** می‌گویند. اندازه‌ی نیروی مرکزی فقط تابعی از فاصله تا نقطه‌ی ثابت است. اگر مبدأ مختصات را این نقطه‌ی ثابت انتخاب کنیم این بدان معنی است که نیروی مرکزی $\mathbf{F}$ همواره با بردار مکان $\mathbf{r}$ موازی است. چون ضرب برداری دو بردار موازی همواره صفر است، پس شرط این که $\mathbf{F}$ مرکزی باشد این است که گشتاور آن حول مرکز صفر باشد.

$$\mathbf{G} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = 0 \tag{۷–۲۷}$$

از رابطه‌ی (۲۶–۷) نتیجه می‌شود که اگر نیرو مرکزی باشد آنگاه تکانه‌ی زاویه‌ای مقدار ثابتی است و داریم:

$$\text{اگر } \mathbf{F} \text{ مرکزی باشد} \quad \Leftarrow \quad \mathbf{L} = \text{ثابت} \tag{۷–۲۸}$$

این قانون **پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای** در ساده‌ترین شکل آن است و برای منظور کنونی ما بسنده است. بحث فراگیرتر آن را به آینده واگذار می‌کنیم. چرا تکانه ی زاویه‌ای را با $\mathbf{r}\times\mathbf{P}$ تعریف کردیم و نه با چیز دیگری مانند $r^{۲}p^{\circ}\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{p})$ ؟ چون با این تعریف به برخی ویژگی‌های زیبای $\mathbf{L}$ که در رابطه‌ی (۲٤–۷) تعریف شد، می‌رسیم. یکی از این ویژگی‌ها را با قضیه ۱–۷ بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱–۷ اگر ذره‌ای فقط تحت تاثیر نیروی مرکزی باشد آنگاه تکانه‌ی زاویه‌ای آن پایسته است. یعنی

$$\text{اگر } \ V(\mathbf{r}) = V(r) \quad \text{آنگاه } \ \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \tag{۷–۲۹}$$

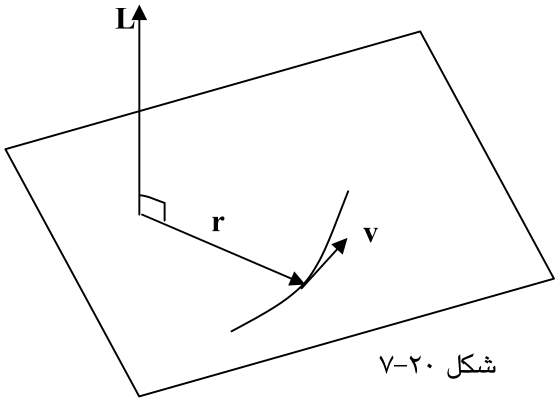
اثبات: اثبات این قضیه در بالا داده شد. بگذارید یک بار دیگر آن را بیان کنیم

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p}+\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{v}\times(m\mathbf{v})+\mathbf{r}\times\mathbf{F}=0 \qquad (۷-۳۰)$$

چون $\mathbf{F}$ نیروی مرکزی است و $\mathbf{F}\propto\mathbf{r}$ (یادتان می‌آید این را در کجا گفتیم ؟) در نتیجه، جمله‌ی دوم صفر است. جمله‌ی اول هم صفر است چون ضرب خارجی بردار $\mathbf{v}$ با خودش است. ■

در رابطه‌ی (۷-۲۸) و نیز در رابطه‌ی (۷-۳۰) به واقع دو گزاره مهم نهفته است: (**الف**) جهت $\mathbf{L}$ ثابت است. (**ب**) اندازه‌ی $\mathbf{L}$ ثابت است. اینک به این دو گزاره می‌پردازیم.

جهت $\mathbf{L}$ ، جهت بردار یکه‌ی عمود بر صفحه‌ی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$ است. این که جهت $\mathbf{L}$ ثابت است یعنی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ باید همواره در یک صفحه‌ی باشند. به بیان دیگر، حرکت ذره در همه‌ی زمان‌ها محدود به صفحه‌ای است که با بردارهای اولیه‌ی مکان و سرعت ساخته می‌شود. شکل (۷-۲۰) را ببینید. از نظر فیزیکی این البته روشن است؛ زیرا نیرو مرکزی است و در نتیجه مولفه‌ای در راستای عمود بر صفحه ندارد (به خاطر بیاورید: نیروی مرکزی همواره با بردار مکان موازی است) و چون مولفه‌ی عمودی سرعت اولیه صفر است، باید برای همه‌ی زمان‌ها صفر باقی بماند. بگذارید این نتیجه را به صورت قضیه بیان بکنیم.



شکل ۷-۲۰

قضیه‌ی ۷-۲ اگر ذره‌ای فقط تحت تاثیر نیروی مرکزی باشد حرکت آن همواره در یک صفحه انجام می‌گیرد.

اثبات: صفحه‌ی P را که با بردارهای $\mathbf{r}_0$ (مبداء مختصات را در مکان چشمه‌ی نیرو برگزیده ایم) و $\mathbf{v}_0$ ساخته می‌شود در زمان t_0 در نظر بگیرید (توجه کنید که این صفحه برای حالتی که بردار $\mathbf{r}_0=0$ یا $\mathbf{v}_0=0$ باشد خوش تعریف نیست. اما در این حالت‌های خاص به آسانی می‌توان نشان داد که حرکت شعاعی است که محدودیتی بیش از حرکت در صفحه است.) P صفحه‌ای است که به بردار $\mathbf{n}_0=\mathbf{r}_0\times\mathbf{v}_0$ عمود است. اما در قضیه‌ی (۷-۱) نشان دادیم که $\mathbf{r}\times\mathbf{v}\equiv\mathbf{r}\times\mathbf{p}/m$ با زمان تغییر نمی‌کند. بنابراین، برای همه‌ی زمان‌های t داریم $\mathbf{r}\times\mathbf{v}=\mathbf{n}_0$ و چون $\mathbf{r}$ به یقین بر $\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ عمود است پس $\mathbf{r}$ به $\mathbf{n}_0$ هم عمود است. این یعنی $\mathbf{r}$ در صفحه‌ی P قرار دارد. ■

به این قضیه نگاهی شهودی بیندازیم: چون بردارهای اولیه‌ی مکان، سرعت و شتاب (که با $\mathbf{F}$ متناسب است و بنابراین، با $\mathbf{r}$ هم متناسب است) همگی در صفحه‌ی P قرار دارند. پس، در آن لحظه دو سوی صفحه هم‌ارزند و برای ذره انگیزه‌ای وجود ندارد که از صفحه خارج شود و به یک سوی آن برود. پس، در آن لحظه در صفحه باقی می‌ماند. همین استدلال را برای هر لحظه‌ی بعدی هم می‌توان تکرار کرد و نتیجه گرفت که ذره برای همیشه در صفحه باقی می‌ماند.

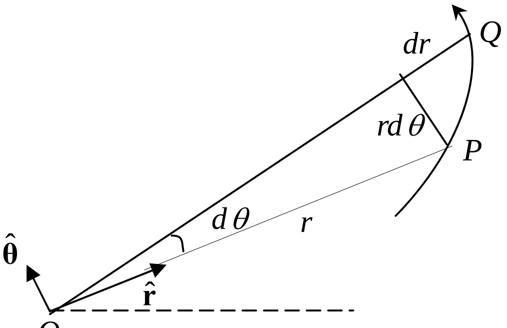
برای فهمیدن بخش دوم قانون، یعنی ثابت‌بودن اندازه‌ی $\mathbf{L}$ ؛ بهتر است به مختصات قطبی r و θ در صفحه‌ی حرکت توجه کنیم. در بازه‌ی زمانی کوتاه dt ، مختصات ذره به اندازه dr و $d\theta$ تغییر می‌کند. مسافت پیموده‌شده در راستای شعاعی dr و در راستای عمود بر شعاع $r\,d\theta$ اند (نگاه کنید به شکل ۷-۲۱). بنابراین، سرعت دو مؤلفه دارد: یکی در راستای شعاع و دیگری عمود بر شعاع. این مولفه‌ها عبارتند از:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot r \qquad , \qquad v_\theta = \frac{r\,d\theta}{dr} = r\dot\theta \tag{۷-۳۱}$$

پس، اندازه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای عبارت است از:

$$L = mrv_\theta = mr^{۲}\dot\theta \tag{۷-۳۲}$$

به دست آوردن رابطه‌ی (۳۲-۷) ساده است. چون بردار $\mathbf{L}$، حاصل‌ضرب برداری $\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ است. می‌توان آن را به صورت $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \mathbf{r}\times(m\,\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times(m v_r\,\hat{\mathbf{r}} + m v_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$ نوشت که در آن $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بردارهای یکه در راستای r و θ اند. اگر به جای $v_r = \dot r$ و $v_\theta = r\dot\theta$ قرار دهیم خواهیم داشت: $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times(m\,\dot r\,\hat{\mathbf{r}} + m\,r\,\dot\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$. ضرب برداری جمله‌ی اول صفر است؛ چون $\mathbf{r} = r\,\hat{\mathbf{r}}$ است. یعنی بردار $\mathbf{L}$ در راستای شعاع مولفه ندارد و این البته از اول هم روشن بود، چون برداری است که به $\mathbf{r}$ عمود است. پس، $\mathbf{L}$ تنها یک مولفه در راستای $\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}}$ یا در راستای محور عمود بر صفحه، $\hat{\mathbf{z}}$ ، دارد و مقدار آن عبارت است از: $L = m r^2\dot\theta$ که همان رابطه‌ی (۳۲-۷) است. اینک به توصیف هندسی ثابت بودن $\mathbf{L}$ می‌پردازیم. دوباره به شکل (۲۱-۷) بنگرید و فرض کنید که ذره‌ای به جرم m مسیر خمیده را تحت تأثیر یک نیروی مرکزی با مرکز نیروی O می‌پیماید. برای



شکل ۲۱-۷

زاویه‌ی $d\theta$ بسیار کوچک مساحت مثلث کوچک OPQ برابر است با $dA = (۱/۲)(r\cdot rd\theta) = (۱/۲)(r^{۲}d\theta)$. این مساحتی است که بردار شعاعی در جابه‌جایی به اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی $d\theta$ جارو می‌کند. آهنگ جاروکردن این مساحت عبارتست از

$$\frac{dA}{dt} = \frac{۱}{۲}r^{۲}\frac{d\theta}{dt} = \frac{۱}{۲}r^{۲}\dot\theta = \frac{L}{۲m} \tag{۷-۳۳}$$

یا $r^{۲}\dot\theta = ۲\dot A$. یعنی $r^{۲}\dot\theta$ (**گشتاور سرعت**) دو برابر آهنگ مساحتی است که بردار شعاعی $\mathbf{r}$ جارو می‌کند. چون L و m در رابطه‌ی (۳۳-۷) مقدارهای ثابت اند، پس، آهنگ جارو شدن مساحت هم مقدار ثابتی است. این بیان **قانون دوم کپلر** است .

یکی از کاربردهای مهم رابطه‌ی (۳۳-۷) حرکت سیاره‌هاست. حرکت سیاره‌ها تحت اثر نیروی گرانش انجام می‌گیرد که گونه‌ی خاصی از نیروهای مرکزی است ولی نتیجه‌ی (۳۳-۷) برای هر نیروی مرکزی عمومی صادق است. رابطه (۳۳-۷) حتی برای نیروهای ناپایستار هم به کار می‌رود (مثل، ذره‌ای که به انتهای نخی بسته شده است و نخ به آهستگی به سوی مرکز کشیده می‌شود.) بیان هم‌ارز این قانون را می‌توان به طور مستقیم از رابطه‌ی (۳۲-۷) نتیجه گرفت: مولفه‌ی عمود بر شعاع سرعت، v_θ، با عکس فاصله از مرکز، r ، تغییر می‌کند: $v_\theta = L/mr$.

وقتی که نیرو هم مرکزی و هم پایستار است؛ دو قانون پایستگی انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای، رابطه‌ی (۲۸-۷) یا (۳۰-۷) آگاهی های فراوانی درباره‌ی حرکت ذره به دست می‌دهند که دربخش بعد به آن می پردازیم.

اگر به جای مختصات قطبی از مختصات کارتزی استفاده می‌کردیم؛ رابطه‌ی (۳۳-۷) به صورت زیر درمی‌آمد

$$(x\,\dot y - y\,\dot x) = ۲\dot A \tag{۷-۳۴}$$

(اثبات به عهده‌ی دانشجو واگذار شده است). این رابطه آموزنده است. سمت چپ آن مساوی L/m است که $۱/m$ برابر مؤلفه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای در راستای محور z است

$$L_z = m\,r^{۲}\dot{\theta} = m(x\,\dot{y} - y\,\dot{x}) = ۲m\,\dot{A} \qquad (۷-۳۵)$$

(چون حرکت محدود به صفحه‌ی $x-y$ است $\mathbf{L}$ فقط یک مولفه دارد که در راستای محور z است و بنابراین ، بر صفحه‌ی $x-y$ عمود است.) برای نیروهای مرکزی چون L ثابت حرکت است، پس، اگر m ثابت باشد، **سرعت سطحی** $\dot{A}$ هم ثابت است. اگر سرعت حرکت ذره خیلی زیاد نباشد که سبب تغییر در جرم جسم بشود آنگاه سرعت سطحی ثابت می‌ماند. این نگرانی به سبب نسبیت انیشتین برای سرعت‌های زیاد اهمیت پیدا می‌کند.

توجه کنید که ثابت‌بودن سرعت سطحی برای مدار خاصی حول مرکز نیروست و نباید از آن نتیجه گرفت که برای هر مداری مقدارش همان است. در حالت کلی؛ مقدار ثابت $\dot{A}$ برای مدارهای گوناگون، متفاوت است. با این حال، مثال زیر وضعیت جالبی را توصیف می‌کند که در آن برای نیرویی، سرعت سطحی همه‌ی مدارهای دایره‌ای با مرکزهای منطبق بر مرکز نیرو یکسان است.

مثال ۲-۷ نیروی مرکزی ربایشی $f(r)$ را چنان بیابید که همه‌ی مدارهای دایره‌ای هم مرکز با مرکز نیرو، سرعت سطحی یکسان داشته باشند.

حل: نیرویی که جسم را وادار به حرکت دایره‌ای می‌کند $mv^{۲}/r$ است که در آن m و v ، به ترتیب جرم و سرعت جسم و r شعاع مدار است. پس، $mv^{۲}/r = f\,(r)$. اما $v = r\dot{\theta}$ و بنابراین

$$\frac{m\,(r\dot{\theta})^{۲}}{r} = \frac{m}{r^{۳}}\left(r^{٤}\dot{\theta}^{۲}\right) = f\,(r)$$

چون $r^{۲}\dot{\theta} = ۲\dot{A}$ مقدار ثابتی است که اگر آن را با $۲h$ نشان دهیم، خواهیم داشت $f\,(r) = ٤mh^{۲}/r^{۳}$. بنابراین، نیروی ربایشی که به ازای آن مدارهای دایره‌ای سرعت سطحی یکسان دارند، نیرویی است که با عکس توان سوم شعاع تغییر کند. این هم‌چنین بدین معنی است که اگر مرکز مدارها و مرکز نیرو بر هم منطبق باشند، آنگاه برای این قانون نیرو، تکانه‌ی زاویه‌ای همه‌ی مدار های دایره‌ای یکسان و برابر $L = ۲mh$ اند.

۶-۷ پتانسیل موثر

مهم‌ترین نیروی پایستار مرکزی، نیروی گرانش و نیروی الکتروستاتیک است که از "قانون عکس مجذور" یا از قاعده‌ی $۱/r^{۲}$ پیروی می‌کنند. در این بخش به این حالت خاص خواهیم پرداخت. بحث خود را با مسئله‌ی خاصی که حل معادله‌های حرکت آن ساده‌تر است و آن‌ها را می‌شناسیم آغاز می‌کنیم: نوسانگر هماهنگ سه بعدی.

۱-۶-۷ نوسانگر هماهنگ هم‌سانگرد

ذره‌ای را در نظر بگیرید که تحت اثر نیروی بازگرداننده‌ی متناسب با فاصله از مرکز، حرکت می‌کند.

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} \qquad (۷-۳٦)$$

که در آن k مقدار ثابتی است. برای معادله‌ی حرکت، از $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ استفاده کنید. داریم

$$m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = ۰ \qquad (۷-۳۷)$$

و اگر آن را برحسب مؤلفه‌هایش بنویسیم، خواهیم داشت

$$m\ddot{x} + kx = ۰, \qquad m\ddot{y} + ky = ۰, \qquad m\ddot{z} + kz = ۰ \qquad (۷-۳۸)$$

می‌بینیم که معادله‌ی حرکت برای هر کدام از مؤلفه‌ها همانند معادله‌ی حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ی یک بعدی (رابطه ۷-۶) است. این سامانه، نوسانگر *هم‌سانگرد* نامیده می‌شود؛ چون همه‌ی جهت‌ها (و نه تنها آنهایی که در راستای محورها هستند!) هم ارزند. نوسانگر نا هم‌سانگرد (ما به آن نخواهیم پرداخت) هم با معادله‌های مشابه توصیف می‌شود اما ثابت k درهر جهت متفاوت است. پاسخ‌های عمومی معادله‌های (۳۸-۷) همان رابطه‌ی (۸-۶)است:

$$\begin{aligned} x &= c_x \cos\omega t + d_x \sin\omega t \\ y &= c_y \cos\omega t + d_y \sin\omega t \\ z &= c_z \cos\omega t + d_z \sin\omega t \end{aligned} \tag{۷-۳۹}$$

و $\omega^2 \equiv k/m$ است . اگر بخواهیم آنها را با نماد برداری بنویسیم، داریم

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}\cos\omega t + \mathbf{d}\sin\omega t \tag{۷-۴۰}$$

روشن است که حرکت دوره‌ای است و دوره‌ی آن $\tau \equiv 2\pi/\omega$ است (پاسخ‌ها را می‌توان به شکل‌های دیگر هم نوشت؛ به رابطه های (۳-۶) مراجعه کنید. بردارهای دلخواه $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ مانند حالت نوسانگر یک بعدی، با شرایط اولیه تعیین می‌شوند. اگر در زمان $t = 0$ ذره در مکان $\mathbf{r}_\circ$ با سرعت $\mathbf{v}_\circ$ حرکت کند، آنگاه داریم

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}_\circ \qquad , \qquad \mathbf{d} = \mathbf{v}_\circ/\omega \tag{۷-۴۱}$$

می‌دانیم که برای نیروهای پایستار قانون پایستگی انرژی همواره برقرار است. در بخش ۵-۷ نشان دادیم که اگر نیرو مرکزی باشد پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای هم داریم. قانون نیرو دررابطه‌ی (۳۶-۷) نیروی مرکزی پایستار است و بنابراین، باید انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای، هر دو، پایسته باشند. بگذارید این قانون‌های پایستگی را در باره‌ی این نیرو به روشنی نشان دهیم. از رابطه‌ی (۴۰-۷) به روشنی دیده می‌شود که $\mathbf{r}$ در صفحه‌ی $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ قرار دارد. بنابراین ، جهت $\mathbf{L}$ مشخص است. با استفاده از

$$\dot{\mathbf{r}} = -\omega\mathbf{c}\sin\omega t + \omega\mathbf{d}\cos\omega t \tag{۷-۴۲}$$

داریم

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = m\omega\,\mathbf{c}\times\mathbf{d} = m\mathbf{r}_\circ\times\mathbf{v}_\circ \tag{۷-۴۳}$$

چون $\mathbf{v}_\circ$ و $\mathbf{r}_\circ$ مقدارهای معینی هستند؛ پس روشن است که $\mathbf{L}$ مقدار ثابتی است.

انرژی پتانسیل قانون نیروی $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ ، یا برحسب مولفه‌هایش $\mathbf{F} = (-kx, -ky, -kz) = -k\mathbf{r}$ ، همان رابطه‌ای است که در فصل ۵ دیدیم:

$$V = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k\,(x^2 + y^2 + z^2) \tag{۷-۴۴}$$

پس، به سادگی می‌توان انرژی کل سامانه را حساب کرد.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}k\mathbf{r}^2 = \frac{1}{2}k\,(\mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_\circ^2 + \frac{1}{2}k\mathbf{r}_\circ^2 \tag{۷-۴۵}$$

که باز هم می‌بینیم مقدار ثابتی است.

آیا می توان شکل مسیر حرکت سامانه را یافت؟ پاسخ البته مثبت است. برای این کار بهتر است رابطه‌ی (۴۰-۷) را به صورتی دیگر، اما هم ارز نوشت: فرض کنید θ زاویه‌ی ثابتی است. در این صورت رابطه‌ی (۴۰-۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos(\omega t - \theta) + \mathbf{b}\sin(\omega t - \theta) \qquad (۷-٤٦)$$

بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ به وسیله‌ی رابطه‌های زیر به بردارهای $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ مربوط اند

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\cos\theta - \mathbf{b}\sin\theta \quad , \quad \mathbf{d} = \mathbf{a}\sin\theta + \mathbf{b}\cos\theta$$

یا (۷-٤۷)

$$\mathbf{a} = \mathbf{c}\cos\theta + \mathbf{d}\sin\theta \quad , \quad \mathbf{b} = -\mathbf{c}\sin\theta + \mathbf{d}\cos\theta$$

زاویه‌ی θ یک پارامتر آزاد است و آزادیم که هر جور خواستیم آن را انتخاب کنیم. می‌توان آن را چنان برگزید که بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برهم عمود باشند. برای این کار باید داشته باشیم

$$\circ = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -(\mathbf{c}^{۲} - \mathbf{d}^{۲})\sin\theta\cos\theta + \mathbf{c}\cdot\mathbf{d}(\cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta)$$

یا (۷-٤۸)

$$\tan ۲\theta = \frac{۲\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{\mathbf{c}^{۲} - \mathbf{d}^{۲}}$$

حال محور x را در راستای $\mathbf{a}$ و محور y را در راستای $\mathbf{b}$ برگزینید. در این نمایش، رابطه‌ی (۷-٤٦) به صورت زیر درمی‌آید

$$x = a\cos(\omega t - \theta) \quad , \quad y = b\sin(\omega t - \theta) \quad , \quad z = \circ \qquad (۷-٤۹)$$

و با حذف t از این رابطه‌ها معادله‌ی مسیر به دست می‌آید

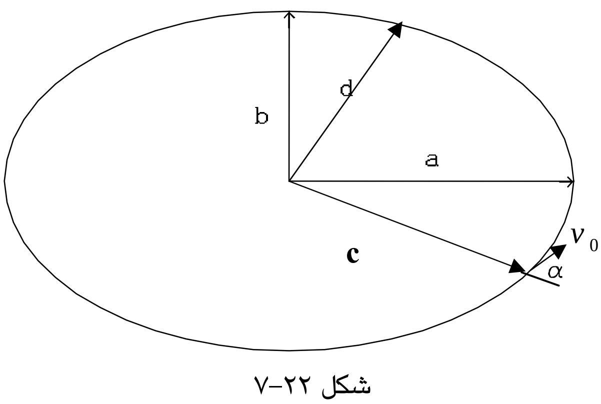
$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱ \quad , \quad z = \circ \qquad (۷-۵۰)$$

این معادله را می شناسیم. معادله‌ی بیضی است که مرکزش در مبداء مختصات است. $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم نیم‌محورهای آن و بردارهای $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ نیم‌قطرهای متناظر بیضی‌اند. این وضعیت درشکل (۲۲-۷) نشان داده شده است

ساده‌ترین روش یافتن اندازه‌های نیم محورهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ از شرایط اولیه (یعنی از $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$)، استفاده از ثابت های Eو L است.

اگر معادله‌های سطر اول را در رابطه‌ی (۷-٤۷) به توان دو برسانیم و باهم جمع کنیم خواهیم داشت $a^{۲} + b^{۲} = c^{۲} + d^{۲}$. هم چنین داریم $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}\times\mathbf{d}$. اگر زاویه‌ی بین $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ را α بنامیم، آنگاه $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}\times\mathbf{d} \Rightarrow ab = cd\sin\alpha$. با حذف $a^{۲}$ یا $b^{۲}$ بین این دو رابطه ، خواهیم داشت

$$a^{٤} - (c^{۲} + d^{۲})a^{۲} + c^{۲}d^{۲}\sin^{۲}\alpha = \circ \qquad (۷-۵۱)$$



شکل ۲۲-۷

معمولا بزرگترین ریشه‌ی این معادله را برای a برمی‌گزینند و آن را نیم محور بزرگ بیضی می‌نامند.

۲-۶-۷ قانون‌های پایستگی و پتانسیل موثر

اینک به حالت عمومی نیروی پایستار مرکزی می‌پردازیم. همانگونه که در فصل ٥ دیدیم، برای هر نیروی پایستار، تابع انرژی پتانسیل $V(r)$ وجود دارد که تنها به مختصات شعاعی وابسته است. هم‌چنین دو قانون پایستگی داریم؛ یکی پایستگی انرژی و دیگری پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای است

$$\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2+V(r)=E=\text{ثابت}\qquad \text{و}\qquad m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{L}=\text{ثابت} \tag{۷-٥۲}$$

باتوجه به آنچه که در بخش٥-۷ گفته شد؛ از قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای نتیجه می‌شود که حرکت به صفحه محدود است و از این‌رو مسئله در اساس، مسئله‌ی دوبعدی است. در زیر نشان خواهیم داد که این مسئله‌ی به ظاهر سه بعدی را می‌توان در واقع به مسئله یک بعدی کاهش داد. این که بتوان به جای سه مختصات از یک مختصه استفاده کرد، ساده سازی بسیار مهمی است. اگر در صفحه‌ی حرکت از مختصات قطبی استفاده کنیم، آنگاه دو قانون پایستگی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(r)=E\\ &mr^2\dot{\theta}=L\end{aligned} \tag{۷-٥۳}$$

البته، این دو رابطه چیز تازه‌ای نیستند. اگر فراموش کرده‌اید بخش ۷-٤ را نگاه کنید. با این حال، بدون این که بخواهیم حتی آنها را حل کنیم و r و θ را به دست آوریم، از این دو رابطه اطلاعات فراوانی درباره‌ی حرکت ذره می‌توان به دست آورد. توجه کنید که اگر از رابطه‌ی دوم در (۷-٥۳)، $\dot{\theta}$ را برحسب L به دست آوریم و در رابطه‌ی نخست قرار دهیم، $\dot{\theta}$ حذف می‌شود و رابطه‌ای برحسب r و $\dot{r}$ به دست می‌آید.

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)=E \tag{۷-٥٤}$$

این رابطه را *معادله‌ی شعاعی انرژی* می‌نامند. برای L معین و داده شده‌ای، این رابطه شبیه رابطه‌ی (٥-٦) برای حرکت یک بعدی است که حالا به جای $V(x)$ *انرژی پتانسیل مؤثر* زیر جایگزین شده است.

$$V_{eff}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}+V(r) \tag{۷-٥٥}$$

فهمیدن اهمیت جمله‌ی اضافی $L^2/(2mr^2)$ در تابع انرژی پتانسیل بالا دشوار نیست. این جمله‌ی اضافی به «نیرویی» به شکل $L^2/(mr^3)$ منطبق است که همانا نیروی «مرکزگرین» $mr\dot{\theta}^2$ است که در آن $\dot{\theta}$ برحسب L نوشته شده است.

از معادله‌ی شعاعی انرژی می‌توان به همان‌گونه استفاده کرد که ما در فصل ۲-٥ استفاده کردیم (نگاه کنید به معادله‌ی (۱۲-٥) و گفتار بعد از آن.) چون r^2 کمیت مثبت است، حرکت به ناحیه‌هایی از r محدود است که داشته باشیم

$$V_{eff}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)\le E \tag{۷-٥٦}$$

فاصله‌ی شعاعی بیشینه و کمینه در جاهایی اتفاق می‌افتد که در رابطه (۷-٥٦) علامت تساوی برقرار باشد. برای مثال؛ نوسانگر

هماهنگ همسانگرد را در نظر بگیرید که $V(r)=kr^{۲}/۲$ است. بنابراین، تابع انرژی پتانسیل مؤثر عبارت است از $V_{eff}(r)=(L^{۲}/۲mr^{۲})+kr^{۲}/۲$. کمینه‌ی این تابع در $r=\left(L^{۲}/mk\right)^{۱/۴}$ است؛ درست مانند تعادل پایدار در حالت نوسانگر یک بعدی. وقتی E با کمینه‌ی V_{eff} برابر باشد $\dot{r}$ باید همواره صفر باشد. این را به آسانی می‌توان از رابطه‌ی (۵۴-۷) دید. در کمینه‌ی V_{eff} تغییرات r نسبت به زمان صفر است. یعنی فاصله‌ی کمینه‌ی $r=\left(L^{۲}/mk\right)^{۱/۴}$ تغییر نمی‌کند. بنابراین، ذره روی دایره‌ای حول مرکز حرکت می‌کند و مولفه‌ی سرعت روی پیرامون دایره $r\dot{\theta}$ است.

مکان کمینه، یعنی $r=\left(L^{۲}/mk\right)^{۱/۴}$ را می‌توان به گونه‌ی دیگری هم به دست آورد. چون این مقدار r فاصله‌ی تعادلی است، پس برآیند نیروها باید به ازای آن صفر باشد. نیروهای موجود، نیروی ربایشی یا بازگرداننده‌ی kr و نیروی «مرکز گریز» $L^2/(mr^3)$ اند. اگر این دو نیرو را مساوی هم قرار دهیم مقدار کمینه‌ی r به دست می‌آید. برای هر مقدار E که بزرگتر از کمینه‌ی $V_{eff}(r)$ باشد، حرکت به ناحیه‌ی $b\le r\le a$ محدود می‌شود. a و b مقدارهای حدی r اند که از حل معادله‌ی (۵۶-۷) به دست می‌آیند. اگر در آغاز، ذره در فاصله‌ی $r_{\circ}$ از مرکز نیرو باشد و در جهتی که با شعاع زاویه‌ی α می‌سازد با سرعت $v_{\circ}$ حرکت کند (شکل ۲۲-۷ را ببینید). آنگاه مقدارهای E و L عبارتند از

$$E=\frac{۱}{۲}mv_{\circ}^{۲}+\frac{۱}{۲}kr_{\circ}^{۲}\qquad,\qquad L=mr_{\circ}v_{\circ}\sin\alpha \tag{۷-۵۷}$$

برای یافتن مقادیر حدی r ،یعنی a و b ، اینک باید رابطه (۵۶-۷) را به ازای این مقدارهای E و L حل کرد. بنابراین، داریم

$$\frac{L^{۲}}{۲mr^{۲}}+\frac{۱}{۲}kr^{۲}\le\frac{۱}{۲}mv_{\circ}^{۲}+\frac{۱}{۲}kr_{\circ}^{۲} \tag{۷-۵۸}$$

اگر دو طرف را در $۲r^{۲}/k$ ضرب کنیم و به جای L مقدار $mv_{\circ}r_{\circ}\sin\alpha$ را قرار دهیم، خواهیم داشت $r^{۴}-(r_{\circ}^{۲}+(m/k)v_{\circ}^{۲})r^{۲}+(m/k)r_{\circ}^{۲}v_{\circ}^{۲}\sin^{۲}\alpha=\circ$. ریشه‌های این معادله مقدارهای حدی a و b را به دست خواهند داد. توجه به این نکته نیز جالب است که این رابطه همانند رابطه (۵۱-۷) است. کمیت $L=mr^2\dot{\theta}$ مقدار ثابتی است و با زمان تغییر نمی‌کند. مقدار آن را شرایط اولیه تعیین می‌کند. برای مثال، با دادن مقدارهای اولیه‌ی r و $\dot{\theta}$.

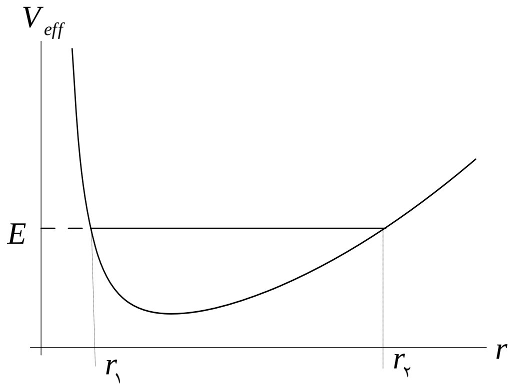
پتانسیل "موثر" مفهوم بسیار سودمندی است و می‌گوید اگر می‌خواهیم یک مسئله‌ی دو بعدی (که ممکن است از یک مسئله‌ی سه بعدی آمده باشد) را با نیروی مرکزی حل کنیم، می‌توانیم آن را با اندک تغییر در تابع پتانسیل به صورت مسئله‌ی یک بعدی درآوریم. می‌توان فراموش کرد که اصلا در مسئله‌ی ما متغیری به نام θ وجود داشته است و مسئله‌ی یک بعدی را برای یافتن $r(t)$ حل کنیم. البته پس از یافتن $r(t)$، می‌توان از $\dot{\theta}(t)=L/mr^{۲}$ استفاده و $\theta(t)$ هم به دست آورد.

توجه بکنید که دلیل این که می‌توان مسئله‌ای دو بعدی را به مسئله‌ی یک بعدی کاهش داد، این است که کمیت مستقل از زمان L در مسئله وجود دارد و r و θ را به هم مربوط می‌کند. بنابراین ، سرشت مسئله به جای دو بعدی بودن، یک بعدی است.

برای این که ببینیم چگونه r با زمان تغییر می‌کند، کافی است نمودار V_{eff} را رسم کنیم. برای مثال، فرض کنید $V(r)=Ar^{۲}$ است. این پتانسیل فنری است که طول حالت ترازمندیش صفر است. بنابراین داریم

$$V_{eff}=\frac{L^{۲}}{۲mr^{۲}}+Ar^{۲} \tag{۷-۵۹}$$

برای رسم نمودار این V_{eff}، باید L و A را بدانیم. با وجود این، شکل عمومی آن شبیه شکل (۲۳-۷) است. در این شکل، انرژی



شکل ۲۳-۷

E (که آن هم باید داده شود) هم نشان داده شده است. فاصله‌های $r_۱$ و $r_۲$ نقاط برگشت اند. در این نقطه‌ها $V_{eff} = E$ است و سامانه به ازای این مقدار E بین $r_۱$ و $r_۲$ پس و پیش می‌رود (برای پتانسیل $Ar^۲$ در این مثال، حرکت روی مسیر بیضی انجام می‌گیرد و $r_۱$ و $r_۲$ طول نیم‌محورهای آن است. این مسئله را ما پس از آموختن برخی شیوه‌ها به عنوان مثال در همین فصل حل خواهیم کرد.) اگر E با کمینه‌ی V_{eff} برابر باشد آنگاه $r_۱ = r_۲$ می شود. در این صورت، r مقدار ثابتی می‌شود، یعنی مسیر حرکت یک دایره می‌شود. توجه کنید که E نمی تواند کمتر از کمینه‌ی V_{eff} باشد.

نکته: گاهی جمله‌ی $L^۲/۲mr^۲$ در پتانسیل موثر را *سد تکانه‌ی زاویه‌ای* می‌گویند. اثر این جمله آن است که از نزدیک شدن بیش از اندازه‌ی ذره به مبداء (که ما آن را چشمه‌ی نیرو برگزیدیم) جلوگیری کند. نکته این است که $L = mr^۲\dot{\theta}$ مقدار ثابتی است و بنابراین با کوچک شدن r (یعنی نزدیک شدن جسم به مبداء) $\dot{\theta}$ باید بزرگ شود. اما آهنگ افزایش $\dot{\theta}$ بیشتر از آهنگ کاهش r است ؛ چون r با توان دو در $L = mr^2\dot{\theta}$ ظاهر می‌شود با افزایش تند $\dot{\theta}$ سرانجام به جایی می‌رسیم که انرژی جنبشی مماسی $mr^۲\dot{\theta}^۲/۲$ بیش از مقداری می‌شود که پایستگی انرژی اجازه می‌دهد. اگر $V(r)$ سریع تر از $-۱/r^۲$ به $-\infty$ میل کند، این گفتار دیگر درست نیست. می‌توانید آن را ببینید، کافی است تابعی برای V_{eff} برگزینید و آن را رسم کنید که به جای اینکه با $r \to ۰$ به $+\infty$ میل کند به $-\infty$ برود. در این صورت دیده می شود که کاهش $V(r)$ به اندازه‌ای سریع است که افزایش انرژی جنبشی را جبران می‌کند.) ♣

توجه کنید که لازم نیست از پتانسیل موثر استفاده کنیم. می‌توانیم معادله‌ی دیفرانسیل حرکت را حل کنیم. وارد کردن پتانسیل موثر به ما اجازه می‌دهد که به رفتار سامانه آسان‌تر پی ببریم.

۷-۷ گرانش؛ قانون های کپلر

دو معادله‌ی مربوط به پایستگی انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای، رابطه‌های (۵۳-۷) و (۵٤-۷)، برای حل مسئله حرکت جسم در میدان نیروی مرکزی کافی اند. اما باید مشخص کنیم که منظور ما از واژه‌ی"حل" در اینجا چیست. این واژه اندکی مبهم است. یعنی باید بگوییم چه کمیتی را می‌خواهیم برحسب کدام کمیت‌ها به دست آوریم. دو کار می‌توان کرد. می‌توان r و θ را برحسب t حساب کرد و یا r را برحسب θ به دست آورد. رهیافت نخست این برتری را دارد که به ما اجازه می‌دهد سرعت‌ها و مکان ذره را در هر لحظه‌ی t بدانیم. رهیافت دوم اگرچه نمی‌گوید حرکت ذره چگونه است اما این برتری را دارد که نشان می‌دهد مسیر ذره در فضا چگونه است. هنگامی که با نیروی گرانش و قانون‌های کپلر سروکار داریم رهیافت دوم کارسازتر است. با وجود این، ما به هر دو رهیافت می‌پردازیم.

۷-۷-۱ یافتن $r(t)$ و $\theta(t)$

از رابطه‌ی (۷-۵٤) اندازه‌ی $\dot{r}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-\frac{L^2}{2mr^2}-V(r)} \qquad (۷-٦۰)$$

برای این که بتوان از این رابطه $r(t)$ واقعی را به دست آورد، باید E و L را بدانیم (این دو کمیت همان گونه که پیش‌تر نیز گفتیم، با مقدارهای اولیه‌ی r ،$\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ به دست می‌آیند.) همچنین $V(r)$ را هم باید بدانیم. رابطه‌ی (۷-٦۰) معادله‌ی دیفرانسیل است و برای حل آن باید متغیرها را از هم جدا کرد و سپس از دو طرف آن انتگرال گرفت. یعنی باید معادله‌ی زیر را حل کرد.

$$\int\frac{dr}{\sqrt{E-L^2/(2mr^2)-V(r)}}=\pm\int\sqrt{2/m}\,dt=\pm\sqrt{2/m}\,(t-t_0) \qquad (۷-٦۱)$$

این بدان معنی است که مجبوریم انتگرال زشت سمت چپ را حساب کنیم تا t را برحسب r به دست آوریم. پس از آنکه $t(r)$ را یافتیم آن را وارون کنیم تا $r(t)$ به دست بیاید. در این صورت می‌توانیم با جاکذاری این $r(t)$ در $\dot{\theta}=L/mr^2$، رابطه‌ی (۷-۵۳)، $\dot{\theta}$ را حساب کنیم و سرانجام از آن انتگرال بگیریم و $\theta(t)$ را بیابیم. خبر بد در این فرایند به ظاهر طولانی این است که برای بسیاری از توابع پتانسیل $V(r)$ نمی‌توان انتکرال سمت چپ رابطه‌ی (۷-٦۱) را برحسب توابع معمولی حساب کرد. تنها انگشت شماری $V(r)$ های خوب وجود دارد که می‌توان برای آنها انتگرال را حساب کرد. حتی برای آن ها هم محاسبه درد آور است. خبر خوب این است که همین چند پتانسیل $V(r)$ خوب، پتانسیل‌هایی اند که به آنها علاقمندیم. به ویژه پتانسیل گرانش که به صورت $1/r$ است (پتانسیل فنر هم که با r^2 متناسب است، خوب است). با وجود این، نمی‌خواهیم این شیوه را برای گرانش به کار ببریم؛ به جای آن از رهیافت زیر استفاده خواهیم کرد.

- **یافتن $r(\theta)$**

می‌توان dt را از معادله‌های (۷-۵۳) و (۷-۵٤) حذف کرد. برای این کار نخست جمله‌ی $\dot{r}^2$ را در سمت چپ معادله‌ی (۷-۵٤) تنها نگه می‌داریم و سپس آن را به مجذور معادله‌ی نخست تقسیم می کنیم. ضریب dt^2 حذف می‌شود و خواهیم داشت

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{2mE}{L^2}-\frac{1}{r^2}-\frac{2mV(r)}{L^2} \qquad (۷-٦۲)$$

اینک می‌توان (در بنیاد) از این رابطه جذر گرفت، متغیرها را جدا کرد و سپس انتگرال گرفت تا θ برحسب r به دست بیاید. پس از این عملیات می‌توان یافته‌ی خود را وارون کرد و r را بر حسب θ به دست آورد. برای این کار البته باید $V(r)$ را بدانیم. پس، بگذارید $V(r)$ را برای خود تعریف کنیم و مسئله را تا پایان حل کنیم. مهم‌ترین پتانسیل، گرانش، را بررسی می‌کنیم.

- **محاسبه‌ی $r(\theta)$**

هدف ما در این بخش یافتن r بر حسب θ در پتانسیل گرانشی است. فرض کنید با سامانه‌ی خورشید و زمین سر و کار داریم و جرم‌های آنها را به ترتیب با $M_\odot$ و m نشان می‌دهیم. انرژی پتانسیل گرانشی زمین ـ خورشید عبارت است از:

$$V(r)=-\frac{\alpha}{r} \quad \text{که در آن} \quad \alpha\equiv GM_\odot m \qquad (۷-٦۳)$$

فرض کنید که خورشید در مرکز مختصات ساکن نشسته است. چون $M_\odot >> m$ این فرض تقریب خوبی است (اگر بخواهیم مسئله را دقیق و بدون تقریب حل کنیم باید از جرم کاهیده استفاده کنیم). در این صورت، معادله‌ی (۶۲-۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2m\alpha}{rL^2} \qquad (7\text{-}64)$$

همان‌گونه که در بالا گفتم، می‌توان جذر گرفت، متغیرها را جدا کرد و سپس انتگرال گرفت و $\theta(r)$ را به دست آورد و سرانجام آن را وارون کرد و $r(\theta)$ را یافت. اگر چه این شیوه سر راست است اما بسیار شلوغ است. در اینجا با شگرد دیگری $r(\theta)$ را حساب خواهیم کرد: چون جمله‌های $1/r$ در رابطه‌ی (۶۴-۷) فراوانند، آسانتر است که به جای r معادله را برای $1/r$ حل کنیم. با توجه به $d(1/r)/d\theta = -(dr/d\theta)/r^2$ و با جایگزینی $y \equiv 1/r$ در (۶۴-۷) خواهیم داشت:

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = -y^2 + \frac{2m\alpha}{L^2}y + \frac{2mE}{L^2} \qquad (7\text{-}65)$$

در این مرحله، می‌توان از شیوه‌ی جدا سازی متغیرها استفاده کرد. برای سادگی در نوشتن بگذارید $z \equiv y - m\alpha/L^2$ را تعریف کنیم . اینک رابطه‌ی (۶۵-۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -z^2 + \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2\left(1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right) \equiv -z^2 + B^2 \quad ; \quad B \equiv \frac{m\alpha}{L^2}\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \qquad (7\text{-}66)$$

بنابراین، می‌توان متغیرها را جدا کرد و از دو طرف انتگرال گرفت:

$$\int_{z_1}^{z}\frac{dz'}{\sqrt{B^2 - z'^2}} = \int_{\theta_1}^{\theta} d\theta' \quad \Rightarrow \quad \cos^{-1}\left(\frac{z'}{B}\right)_{z_1}^{z} = (\theta - \theta_1)$$
$$\Rightarrow z = [(\theta-\theta_1) + \cos^{-1}(z_1/B)] \equiv B\cos(\theta - \theta_0) \qquad (7\text{-}67)$$

معمولاً محور را چنان انتخاب می‌کنند که $\theta_\circ = 0$ باشد. پس، می‌توان از $\theta_\circ$ چشم‌پوشی کرد. چون $z \equiv 1/r - m\alpha/L^2$ و نیز B با معادله‌ی (۶۶-۷) تعریف شده‌اند. پس رابطه‌ی (۶۷-۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2}(1+\varepsilon\cos\theta) \qquad (7\text{-}68)$$

که در آن ε *خروج از مرکز* حرکت ذره است و به صورت زیر تعریف شده است

$$\varepsilon \equiv \sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \qquad (7\text{-}69)$$

خوب! این یافتن $r(\theta)$ را برای پتانسیل $V(r) \propto 1/r$ کامل می‌کند. چندان بد هم نبود با یک صفحه محاسبه به آن رسیدیم، اگر چه اندکی پیچیده بود اما خیلی هم تحمل ناپذیر نبود.

مقدارهای حدی r کدامند؟ کمینه‌ی r جایی است که سمت راست رابطه‌ی (۶۸-۷) یعنی، $(1+\varepsilon)m\alpha/L^2$ بیشینه مقدارش را دارد. پس،

$$r_{\min} = \frac{L^2}{m\alpha(1+\varepsilon)} \qquad (7\text{-}70)$$

بیشینه‌ی r چیست؟ پاسخ این پرسش بستگی به این دارد که ε بزرگتر یا کوچکتر از یک باشد.

- $\varepsilon < 1$ (در این حالت مدار دایره یا بیضی است. آن را خواهم دید) در این صورت کمینه‌ی سمت راست رابطه‌ی (۶۸-۷)

- برابر است با $(1-\varepsilon)\,m\alpha/L^2$ و بنابراین داریم

$$r_{\max}=\frac{L^2}{m\alpha(1-\varepsilon)} \qquad \text{برای} \quad \varepsilon<1 \tag{۷–۷۱}$$

- $\varepsilon\geq 1$ (در این حالت مدار سهمی یا هذلولی است) و سمت راست رابطه‌ی (۶۸–۷) به ازای $\cos\theta=-1/\varepsilon$ برابر صفر می‌شود و در نتیجه

$$r_{\max}=\infty \qquad \text{برای} \quad \varepsilon\geq 1 \tag{۷–۷۲}$$

اینک همه چیز آماده است تا مدارهای حرکت را بررسی کنیم. پیش از آن، به چند مثال می‌پردازیم. این مثال‌ها فهمیدن نیمه کیفی بحث را آسان می‌کنند.

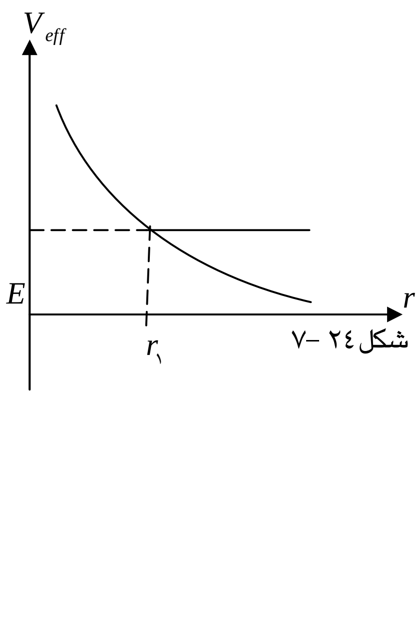
مثال ۳–۷ **(قانون نیروی عکس مجذور فاصله):**

نیروی $\mathbf{F}=\left(k/r^2\right)\hat{\mathbf{r}}$ را در نظر بگیرید که در آن k ثابت است. شکل این نیرو مانند نیروی گرانش است که به جای k کمیت $-Gm_im_j$ نشسته است. نیروی الکتروستاتیک نیز از همین شکل پیروی می‌کند و به جای k مقدار $q_iq_j/4\pi\varepsilon_0$ قرار دارد. k ممکن است مثبت یا منفی باشد. اگر k مثبت باشد نیرو رانشی است، و اگر k منفی باشد نیرو ربایشی است. معادله‌ی شعاعی انرژی، (۵۴–۷)، برای این حالت عبارت است از

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{k}{r}=E \tag{۷–۷۳}$$

چون پتانسیل مربوط به این نیرو k/r است. پس انرژی پتانسیل مؤثر برابر است با: $V_{eff}(r)=L^2/(2mr^2)+k/r$. برای هر دو حالت رانشی و ربایشی در باره‌ی مسیر حرکت ذره‌ای در این میدان نیرو بحث کنید.

حل: **(الف) حالت رانشی** ($k>0$): در این حالت $V_{eff}(r)$ به طور یکنواخت کاهش می‌یابد. از ∞ در $r=0$ تا صفر در $r=\infty$ به طور یکنواخت فرو می‌افتد. این رفتار در شکل (۲۴–۷) نشان داده شده است. معنی این حرف آن است که $V_{eff}(r)$ دارای کمینه نیست و بنابراین، حرکت دایره‌ای شدنی نیست. البته به ازای هر مقدار مثبت E ، معادله‌ی $V_{eff}(r)=E$ دارای پاسخ است: $r=\left(1/4mE\right)\left(2mk\pm\sqrt{(4m^2k^2)+8mEL^2}\right)$ اگرریشه‌ی مثبت r را r_1 بنامیم، این کمینه مقداری است که r می‌تواند داشته

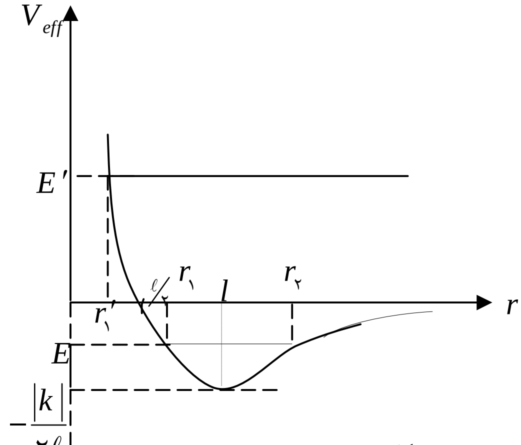


شکل ۲۴–۷

باشد. این کمینه یگانه است. اما r مقدار بیشینه ندارد. ذره‌ای که سرعت اولیه‌ی آن در راستای شعاع وبه سوی مرکز است، باید در مداری حرکت کند که r تا r_1 کاهش پیدا کند (و در r_1 جهت سرعت آن کاملاً وارون می‌شود) و سپس بدون حد افزایش یابد. r_1 درواقع نقطه‌ی **بازگشت** است و مدار هذلولی است. در بخش بعدی به شکل مدارها خواهیم پرداخت.

(ب): حالت ربایشی ($k<0$): پیش از آنکه گونه‌های ممکن حرکت را برای این حالت بررسی کنیم، برای سادگی کمیت $\ell\equiv L^2/m\,|k|$ را تعریف می‌کنیم که بعد طول دارد. تابع انرژی پتانسیل موثر اینک عبارت است از

$$V_{eff}(r) = |k|\left(\frac{\ell}{۲r^{۲}} - \frac{۱}{r}\right) \tag{۷-۷۴}$$



شکل ۲۵-۷

این تابع در شکل (۲۵-۷) نشان داده شده است. در $r=\ell$ مقدار $V_{eff}(r)$ کمینه و برابر با $V_{eff}(r=\ell) = -|k|/۲\ell$ است.توجه کنید که به ازای $r=\ell/۲$ داریم $V_{eff}(r=\ell/۲) = ۰$. برحسب این که انرژی سامانه چه داشته باشد، رفتارش متفاوت خواهد بود :

(۱) : $E=-|k|/۲\ell$: این مقدار انرژی البته همان مقدارکمینه‌ی V_{eff} است. پس $\dot{r}$ باید همواره صفر باشد و ذره در مدار دایره‌ای به شعاع ℓ حرکت می‌کند. سرعت مداری جسم را به آسانی می‌توان از انرژی جنبشی $T=E-V$ به دست آورد. چون انرژی پتانسیل $V=-|k|/r$ است و $r=\ell$. پس، $V=-|k|/\ell$ و باید داشته باشیم.

$$T = \frac{|k|}{۲\ell} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{|k|}{m\ell}} \tag{۷-۷۵}$$

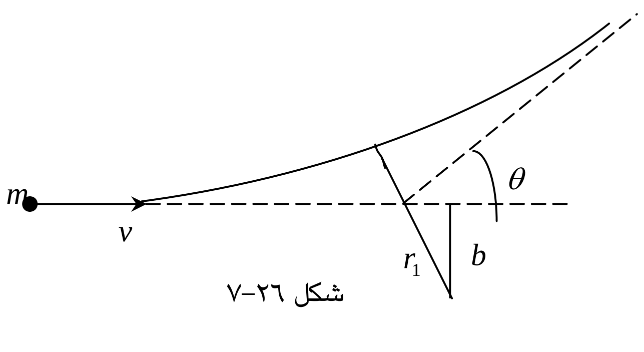
همین نتیجه را می‌توانستیم از برابری نیروی ربایشی $|k|/\ell^{۲}$ و نیروی «مرکز گریز» $mv^{۲}/\ell$ به دست آوریم. به این نتیجه‌ی جالب نیز توجه کنید که برای حرکت روی مدار دایره‌ای انرژی پتانسیل همواره منهای دو برابر انرژی جنبشی است.

(۲) $-|k|/۲\ell < E < ۰$: در شکل (۲۵-۷) این وضعیت با انرژی E نشان داده شده است. می‌بینیم که فاصله‌ی شعاعی به بازه‌ی بین $r_۱$ و $r_۲$ محدود است. $r_۱$ کوچکترین فاصله‌ای است که جسم می‌تواند به مرکز نیرو نزدیک شود. $r_۲$ بیشترین فاصله از مرکز نیروست و خواهیم دید که در این حالت مدار بیضی است.

(۳) $E=۰$: در این حالت نزدیک‌ترین فاصله‌ی ذره به مرکز نیرو $r_۱=\ell/۲$ و بیشینه فاصله $r_۲=\infty$ اند. ذره به اندازه‌ای انرژی دارد که به بینهایت بگریزد. انرژی جنبشی آن با افزایش فاصله به صفر میل کند. در این حالت مدار سهمی است.

(۴) $E>۰$: این وضعیت در شکل (۲۵-۷) با E' نشان داده شده است و فقط کمترین فاصله تا مرکز نیرو را دارد. این بار ذره می‌تواند با انرژی جنبشی غیرصفر به بینهایت بگریزد و مدار یک هذلولی است.

مثال ۴-۷ (نزدیکترین فاصله): ذره‌ی بارداری با بار q در میدان نیروی ذره‌ی باردار q' حرکت می‌کند $qq'>۰$. برابر شکل (۲۶-۷) بار q از فاصله‌ای دور با سرعت v به مرکز نیرو نزدیک می‌شود. مسیر حرکت ذره چنان است که اگر روی خط راست ادامه یابد، با فاصله‌ی b از کنار مرکز نیرو



شکل ۲۶-۷

می‌گذرد. نزدیکترین فاصله‌ای که ذره می‌تواند به مرکز نیرو نزدیک شود کدام است؟ فاصله‌ی b را **پارامتر برخورد** می‌گویند.

حل : چون ذره از فاصله‌های بسیار دور به حرکت درمی‌آید (از بینهایت) بنابراین انرژی پتانسیل اولیه‌ی را می‌توان صفر فرض کرد (مبداء پتانسیل را بینهایت فرض می‌کنیم). پس، انرژی کل ذره برابر است با: $E = mv^{۲}/۲$. افزون بر این، چون مؤلفه‌ی عمودی $\mathbf{r}$ تا v همان b است،پس تکانه‌ی زاویه‌ای حرکت $L = mvb$ است. (از رابطه (۵۳-۷) می‌دانیم که این ثابت حرکت است). پس، نزدیک‌ترین فاصله به چشمه‌ی نیرو، $r_۱$، را با جایگزینی مقادیر L و E در معادله‌ی شعاعی انرژی می‌توان به دست آورد. در اینجا $k = qq'/۴\pi\varepsilon_\circ$ است و نیز می‌دانیم که در نزدیکترین فاصله‌ی ذره از چشمه‌ی نیرو $\dot{r} = ۰$ است. بنابراین، رابطه‌ی (۵۳-۷) یعنی معادله‌ی شعاعی انرژی، به صورت زیر درمی‌آید.

$$r_۱^{۲} - ۲ar_۱ - b^{۲} = \circ \qquad ; \qquad a = \frac{qq'}{۴\pi\varepsilon_\circ m v^{۲}} \tag{۷-۷۶}$$

و پاسخ مثبت این معادله‌ی درجه دو $r_۱ = a + \sqrt{a^{۲} + b^{۲}}$ است.

مثال ۵-۷ (سرعت گریز): کمینه سرعت لازم پرتابه‌ای که از سطح زمین شلیک می‌شود باید چقدر باشد تا پرتابه بتواند از میدان گرانش زمین بگریزد؟ زمین را کره‌ای به جرم M و شعاع R فرض کنید. بستگی آن به زاویه‌ی پرتاب چگونه است؟

حل: فرض کنید پرتابه با سرعت v و با زاویه‌ی α نسبت به خط عمود پرتاب شود. انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای به ترتیب عبارتند از $E = mv^{۲}/۲ - GMm/R$ و $L = mRv\sin\alpha$. در اینجا G ثابت گرانش نیوتون است. برای این‌که انرژی را برحسب کمیت‌های آشنا بنویسیم، توجه داریم که نیرو گرانش وارد به یک ذره در سطح زمین $mg = GMm/R^{۲} \Rightarrow GM = R^{۲}g$ است. پس، $E = mv^{۲}/۲ - Rgm$. پرتابه هنگامی به بینهایت خواهد گریخت که $E \geq ۰$ یا $v \geq \sqrt{۲Rg}$ باشد. بنابراین، کمینه سرعت لازم برای گریز $v_e = \sqrt{۲Rg}$ است که **مستقل** از زاویه‌ی پرتاب α (تا هنگامی که از نیروی پس‌کشی هوا چشم پوشی کنیم) است. با استفاده از اندازه‌های $R = ۶۳۷۰\,\mathrm{km}$ و $g = ۹{,}۸۱\,\mathrm{ms}^{-۲}$، مقدار عددی سرعت گریز از زمین $v_e = ۱۱{,}۲\,\mathrm{kms}^{-۱}$ می‌شود. اگر سرعت شلیک پرتابه از این مقدار کوچکتر باشد، پرتابه به ارتفاع بیشینه‌ی خود خواهد رسید و دوباره به زمین فرو خواهد افتاد. در مثال بعدی این فاصله را حساب می‌کنیم.

مثال۶-۷ (ارتفاع بیشینه‌ی پرتابه): اگر سرعت v، پرتاب ذره‌ای، با سرعت حرکتش در مدار دایره‌ای درست در بالای سطح زمین ، v_c، برابر باشد. بیشینه ارتفاعی که پرتابه به ازای زاویه‌ی پرتاب α می‌تواند داشته باشد، چقدر است؟

حل: بیشینه فاصله‌ی $r_۲$ از مرکز زمین، بزرگترین ریشه معادله‌ی $V_{eff}(r) = E$ است. مقدارهای E و L را از مثال ۵-۷ داریم. پس،

$$V_{eff}(r) = |k|\left(\frac{\ell}{۲r^{۲}} - \frac{۱}{r}\right) = \frac{L^{۲}}{۲mr^{۲}} - \frac{|k|}{r} \tag{۷-۷۷}$$

و چون $k = GMm = gR^{۲}m$ است، بنابراین

$$\frac{L^{۲}}{۲mr^{۲}}-\frac{mgR^{۲}}{r}=\frac{۱}{۲}mv^{۲}-mgR$$

$$R^{۲}v^{۲}\sin^{۲}\alpha-۲gR^{۲}r=(v^{۲}-۲Rg)r^{۲}$$

یا

$$(۲Rg-v^{۲})r^{۲}-۲R^{۲}gr+R^{۲}v^{۲}\sin^{۲}\alpha=0 \qquad (۷-۷۸)$$

سرعت حرکت در مدار دایره‌ای را می‌توان از رابطه‌های (۷-۷۵) و $GM=R^{۲}g$ حساب کرد:

$v_c=\sqrt{|k|/m\ell}=\sqrt{Rg}=۷{,}۹\,\mathrm{km\,s^{-۱}}$. بنابراین، رابطه $V_{eff}(r)=E$ به صورت زیر ساده می‌شود.

$r^{۲}-۲Rr+R^{۲}\sin^{۲}\alpha=۰\Rightarrow r_{۲}=R(۱+\cos\alpha)$. برای پرتاب عمودی، بیشینه فاصله $۲R$ و برای هر زاویه‌ی دیگر $\alpha\neq0$ از این مقدارکمتر است. در حد تقریباً پرتاب افقی $\alpha\approx\pi/۲$ مدار تقریباً دایره‌ای به شعاع R است. این مثال نشان می‌دهد که کدام مسئله‌ها را می‌توان به آسانی با معادله‌ی شعاعی انرژی حل کرد. این معادله به ویژه، هنگامی که می‌خواهیم فقط r را به دست بیاوریم (و نه زاویه‌ی قطبی θ یا زمان t را) بسیار سودمند است.

مثال ۷-۷ (ترازهای انرژی اتم هیدروژن): این مسئله‌ای نیست که بتوان با شیوه‌های فیزیک کلاسیک حل کرد؛ با این حال ترازهای انرژی به دست‌آمده از مکانیک کوانتومی را می‌توان با اعمال شرط «کوانتش» از مکانیک کلاسیک هم به دست آورد. درواقع، از نظر تاریخی، به همین روش هم به دست آمدند: بنا به «نظریه‌ی قدیمی کوانتومی بوهر» الکترون در اتم نمی‌تواند به جز مدارهای معین گسسته؛ مدار دیگری را اشغال کند. بوهر برای حالت مدارهای دایره‌ای این شرط کوانتش را که تکانه‌ی زاویه ای L مضرب درستی از $\hbar$ (عدد پلانک تقسیم بر ۲π) باید باشد اعمال کرد. در این حالت ثابت $k=-e^{۲}/٤\pi\varepsilon_0$ است و e بار الکتریکی پروتون یا منهای بار الکتریکی الکترون است. پس برای $L=n\hbar$ شعاع a_n مدار، بنا به رابطه‌ی $\ell\equiv L^{۲}/m|k|$ عبارت است از

$$a_n=\frac{٤\pi\varepsilon_0 L^{۲}}{me^{۲}}=n^{۲}a_{۱} \qquad (۷-۷۹)$$

که در آن $a_{۱}$، شعاع نخستین مدار بوهر و مقدارش $a_{۱}=٤\pi\varepsilon_0\hbar^{۲}/me^{۲}=٥{,}۲۹\times۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m}$ است. تراز انرژی مربوط به این مدارها عبارت اند از

$$E_n=-\frac{e^{۲}}{۸\pi\varepsilon_0 a_n}=-\frac{۱}{n^{۲}}\frac{e^{۲}}{۸\pi\varepsilon_0 a_{۱}} \qquad (۷-۸۰)$$

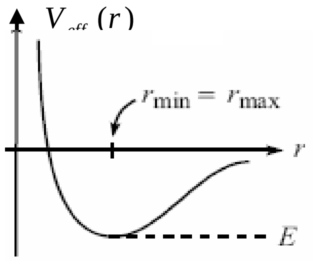
این مقدارها با انرژی گذارهای اتمی که از بیناب‌نگاری اتم هیدروژن به دست می‌آیند، سازگاری خوبی دارند.

۲-۷-۷ مدارها

اینک در موقعیتی هستیم که می‌توانیم شکل مدارهای حرکت یک جسم در میدان نیروی مرکزی را برحسب این که انرژی جسم چه باشد، به دست آوریم. کافی است با جزییات بیشتری حالت‌های با ε مختلف را بررسی کنیم. گریز از مرکز ε در رابطه‌ی (۷-٦۹) تعریف شده است.

- **دایره** $(\varepsilon = ۰)$

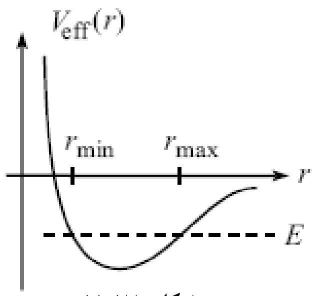
اگر $\varepsilon = ۰$ باشد،آنگاه از رابطه‌ی (۶۹-۷) داریم $E = -m\alpha^{۲}/۲L^{۲}$. منفی بودن انرژی ناشی از این است که منفی بودن انرژی پتانسیل بیش از مثبت بودن انرژی جنبشی است. ذره در چاه پتانسیل به دام افتاده است و از رابطه‌های (۷۰-۷) و (۷۱-۷) داریم $r_{\min} = r_{\max} = L^{۲}/m\alpha$. بنابراین، ذره در مدار دایره‌ای با شعاع $L^{۲}/m\alpha$ حرکت می کند. بیان هم ارز را از رابطه‌ی (۶۸-۷) می توان نتیجه گرفت که r مستقل از θ است. توجه کنید که اگر بخواهیم فقط حرکت دایره‌ای را بررسی کنیم نیازی به همه‌ی محاسبه‌های بخش ۱-۷-۷ نیست. به ازای L معین، انرژی $-m\alpha^{۲}/۲L^{۲}$ کمترین مقدار E است که معادله‌ی شعاعی انرژی مجاز می‌دارد (برای این که انرژی کمینه باشد باید $\dot{r} = ۰$ باشد و می توان نشان داد که کمینه‌ی پتانسیل موثر، $L^2/2mr^2 - \alpha/r$ نیز به این مقدار E می‌انجامد.) اگر $V_{eff}(r)$ را رسم کنیم وضعیت همانند شکل (۲۷-۷) است. ذره در ته چاه پتانسیل به دام افتاده است و هیچ حرکتی در راستای r ندارد.



شکل ۲۷-۷

- **بیضی** $(۰ < \varepsilon < ۱)$

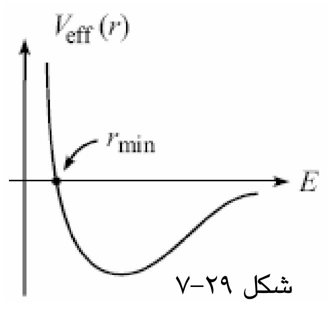
اگر $۱ > \varepsilon > ۰$ باشد، رابطه‌ی (۶۹-۷) می‌گوید $-m\alpha^{۲}/۲L^{۲} < E < ۰$ و از معادله‌های (۷۰-۷) و (۷۱-۷) مقدارهای $r_{\min}$ و $r_{\max}$ به دست می‌آیند. البته هنوز روشن نیست که مدار بیضی است؛ این را باید نشان داد. اگر $V_{eff}(r)$ را رسم کنیم همانند شکل (۲۸-۷) خواهد شد. ذره در بین $r_{\min}$ و $r_{\max}$ نوسان می‌کند و انرژی آن منفی است. بنابراین ، ذره در چاه پتانسیل به دام افتاده است.



شکل ۲۸-۷

- **سهمی** $(\varepsilon = ۱)$

اگر $\varepsilon = ۱$ باشد آنگاه رابطه‌ی (۶۹-۷) می گوید $E = ۰$ است. این مقدار E یعنی این که ذره درست به اندازه‌ای انرژی دارد که بتواند خود را به بینهایت برساند (با $r \to \infty$ سرعت ذره به صفر می‌گراید). کمینه فاصله‌ی ذره تا چشمه‌ی نیرو از رابطه‌ی (۷۰-۷) به دست می‌آید و برابر است با $r_{\min} = L^{۲}/۲m\alpha$ و بیشینه‌ی آن را رابطه‌ی (۷۱-۷) به دست می‌دهد: $r_{\max} = \infty$. بازهم روشن نیست که مدار سهمی است و باید سهمی بودنش را ثابت کرد. اگر $V_{eff}(r)$ را رسم کنیم همانند شکل (۲۹-۷) خواهد شد. از شکل دیده می‌شود که ذره در راستای r پس و پیش نمی‌رود و در نتیجه نوسان نمی‌کند. اگر در آغاز ذره به سوی مرکز نیرو در حال حرکت باشد تا فاصله‌ی $r_{\min}$ به آن نزدیک می‌شود و سپس از این نقطه برمی‌گردد و به بینهایت می‌رود. اگر ذره در آغاز از مرکز نیرو در حال دور شدن باشد، به بینهایت می‌رود و دیگر هرگز به چشمه‌ی نیرو نزدیک نمی‌شود، زیرا در بینهایت انرژی آن صفر می‌شود.

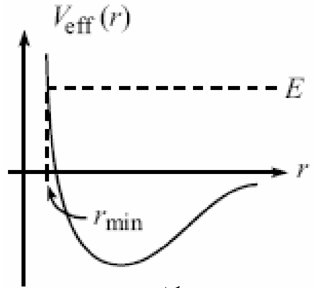


شکل ۲۹-۷

- هذلولی $(\varepsilon > ۱)$

اگر $\varepsilon > ۱$ باشد، از معادله‌ی (۶۹-۷) می‌بینیم که $E > ۰$ است. یعنی انرژی ذره در بینهایت هم هنوز غیر صفر است (با $r \to \infty$ پتانسیل به صفر می‌گراید و سرعت ذره به مقدار غیر صفر $\sqrt{۲E/m}$ می‌رسد.) باز هم کمینه فاصله از مرکز نیرو با رابطه‌ی (۷۰-۷) داده می‌شود و از رابطه‌ی (۷۱-۷) می‌بینیم $r_{\max} = \infty$. در اینجا هم هنوز روشن نیست که مسیر هذلولی است و باید آن

را نشان داد. در شکل (۳۰-۷) پتانسیل موثر رسم شده است و نشان می‌دهد که ذره در راستای r حرکت نوسانی ندارد.



شکل ۳۰-۷

۳-۷-۷ اثبات شکل مدارها

برای این که نشان دهیم به ازای مقدارهای مختلف ε شکل مدار چگونه است، به رابطه‌ی (۶۷-۷) برمی‌گردیم. در واقع، این رابطه نمایش برش‌های مخروطی است. به یاد بیاورید که ما کمیت با بعد طول $\ell \equiv L^2/m|k| = L^2/m\alpha$ را پیش‌تر شناساندیم. برای پی‌گیری این بحث ازمختصات کارتزی استفاده میکنیم. اگر رابطه‌ی (۶۸-۷) را در $r\ell$ ضرب کنیم و به یاد داشته باشیم که $\cos\theta = x/r$ و $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ آنگاه رابطه‌ی (۶۸-۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$\ell = (r+\varepsilon x) \tag{۷-۸۱}$$

یا $r=\ell-\varepsilon x$. با جاگذاری $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ و پس از مجذور کردن این رابطه خواهیم داشت

$$x^2+y^2=\ell^2-2\ell\varepsilon x+\varepsilon^2 x^2 \tag{۷-۸۲}$$

حالا این رابطه را برای مقدارهای مختلف ε بررسی می کنیم.

- دایره ($\varepsilon=0$)

به ازای $\varepsilon=0$ رابطه ی (۸۲-۷) به صورت $x^2+y^2=\ell^2$ درمی‌آید که معادله‌ی دایره‌ای به شعاع $\ell=L^2/m\alpha$ است و مرکز آن در مبداء مختصات قرار دارد، جایی که چشمه‌ی نیرو در آنجا ست.

- بیضی ($0<\varepsilon<1$)

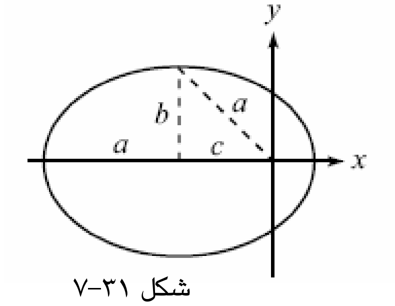
در این حالت اگر در رابطه‌ی (۸۲-۷) نسبت به x مربع کامل بسازیم می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$(1-\varepsilon^2)x^2+2\varepsilon\ell x+\frac{\varepsilon^2\ell^2}{1-\varepsilon^2}+y^2=\frac{\ell^2}{1-\varepsilon^2} \tag{۷-۸۳}$$

اگر دو طرف رابطه‌ی بالا را به $\ell^2/(1-\varepsilon^2)$ تقسیم کنیم می‌توان آن را با اندک عملیات جبری به صورت زیر نوشت:

$$\frac{(x+a\varepsilon)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ; \quad a=\frac{\ell}{1-\varepsilon^2} \quad , \quad b=\frac{\ell}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{۷-۸۴}$$

که معادله‌ی بیضی به مرکز $(-\ell\varepsilon/(1-\varepsilon^2), 0)$ است. a و b به ترتیب نیم‌محورهای بزرگ و کوچک این بیضی‌اند. نیم فاصله‌ی بین کانون‌های آن $c=\sqrt{a^2-b^2}=\ell\varepsilon/(1-\varepsilon^2)$ است. بنابراین، یک کانون در مبداء مختصات قرار دارد. این بیضی در شکل (۳۱-۷) نشان داده شده است. توجه کنید که $\varepsilon=c/a$ گریز از مرکز آن است. توجه کنید که برای بیضی $E<0$ است و نیم‌محور ها را می‌توانیم برحسب انرژی به صورت زیر بنویسیم



شکل ۳۱-۷

$$a=\frac{\ell}{1-\varepsilon^2}=\frac{|\alpha|}{2|E|} \quad , \quad b^2=a\ell=\frac{L^2}{2m|E|} \tag{۷-۸۵}$$

پس، طول نیم‌محور بزرگ، a، با مقدار E داده می‌شود و ℓ را تکانه‌ی زاویه‌ای L تعیین می‌کند.

جالب است که بپرسیم هر بخش مدار را ذره در چه زمانی می‌پیماید. پاسخ پرسش را با توجه به رابطه‌ی میان تکانه‌ی زاویه‌ای و آهنگ روبش مساحت، رابطه‌ی (۳۳-۷) ، می توان به دست آورد. داریم $dA/dt=L/2m$. بنابراین ، تنها کاری که باید انجام

داد این است که مساحت روبیده شده با بردار شعاعی را حساب و سپس آن را در $۲m/L$ ضرب کرد. به ویژه، چون سطح بیضی $A=\pi ab$ است، برای دوره‌ی مدار داریم $\tau=(۲m\pi ab)/L$. پس می‌توانیم بنویسیم

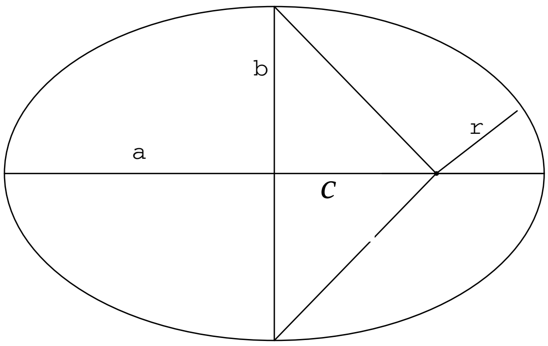
$$\left(\frac{\tau}{۲\pi}\right)^۲=\frac{m^۲a^۲b^۲}{L^۲}=\frac{m^۲a^۳\ell}{m|\alpha|\ell}\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{\tau}{۲\pi}\right)^۲=\frac{m}{|\alpha|}a^۳ \qquad (۷-۸۶)$$

از رابطه‌ی (۷-۸۵) به آسانی دیده می‌شود که برای مدار دایره با شعاع a، رابطه‌ی بالا به پاسخ درستی می‌انجامد. برای سیاره یا ماهواره‌ای که پیرامون جرم مرکزی M می‌چرخد داریم

$$\left(\frac{\tau}{۲\pi}\right)^۲=\frac{a^۳}{GM} \qquad (۷-۸۷)$$

که بیان *قانون سوم کپلر* برای حرکت سیاره‌هاست: مربع دوره‌ی مدار با توان سوم نیم‌محور بزرگ متناسب است.

مثال۸-۷ (مدار زمین): مدار زمین بیضی با مرکزگریزی $\varepsilon=۰{,}۰۱۶۷$ است. مرکز نیروی گرانش (خورشید) در یکی از کانون های آن به فاصله‌ی c از مرکز بیضی قرار دارد. اگر مدار زمین به با محور کوچک به دو نیم تقسیم شود چه مدت زمان اضافی زمین در یک نیمه نسبت به نیمه‌ی دیگر سپری خواهد کرد؟



شکل ۳۲-۷

حل: از شکل (۳۲- ۷)روشن است که مساحت جارو شده توسط بردار شعاعی برابر است با

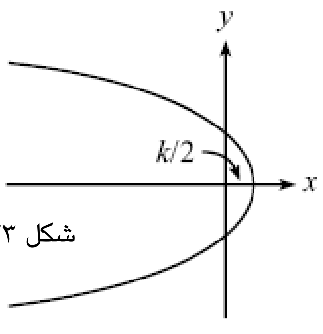
(نصف مساحت بیضی) $\pm$ (مساحت مثلث با قاعده‌ی $۲b$ و ارتفاع c)

یا به بیان دیگر $(۱/۲)\pi ab\pm cb$. بنابراین، باتوجه به رابطه‌ی (۳۳-۷) داریم $t=A\,۲m/L$ که در آن A سطح روبیده شده است و t زمان روبش آن است. پس نسبت زمان‌های روبیده شدن نیمه‌ی چپ و نیمه‌ی راست بیضی عبارت است از

$$\frac{t_۱}{t_۲}=\frac{\pi ab/۲+cb}{\pi ab/۲-cb}=\frac{(۱/۲)+(\varepsilon/\pi)}{(۱/۲)-(\varepsilon/\pi)}$$

و اختلاف این دو زمان $t_۱-t_۲=۲\varepsilon/\pi$ سال یا ۳,۸۸ روز است.

- سهمی ($\varepsilon=۱$).



شکل ۳۳-۷

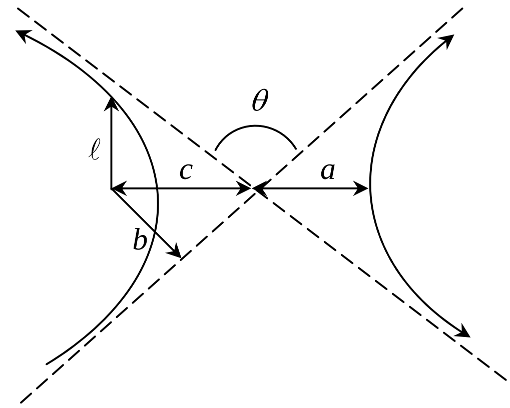
برای $\varepsilon=۱$ رابطه‌ی (۶۹-۷) به صورت $y^۲=\ell^۲-۲\ell x$ درمی‌آید. می‌توان آن را به صورت دیگر، $y^۲=-۲\ell(x-\ell/۲)$، هم نوشت که معادله‌ی سهمی با راس $(\ell/۲,۰)$ است. فاصله‌ی کانونی این سهمی $\ell/۲$ است (برای سهمی $y^۲=۴ax$ فاصله‌ی کانونی a است). پس، مدار یک سهمی است که کانون آن در مرکز نیرو قرار دارد و در شکل شکل (۳۳-۷) نشان داده شده است.

- هذلولی ($\varepsilon>۱$)

در این حالت معادله‌ی (۸۲-۷) را پس از کامل کردن مربع نسبت به x می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{(x-c)^{۲}}{a^{۲}}-\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱ \quad \text{با} \quad b^{۲}=a\ell=\frac{L^{۲}}{۲mE} \quad , \quad a=\frac{۱}{\varepsilon^{۲}-۱}=\frac{\alpha}{۲E} \qquad (۸۸-۷)$$

توجه کنید که $E>۰$ است. این معادله‌ی یک هذلولی است که مرکز آن در $(c,۰)$ قرار دارد. در شکل (۳۴-۷) نیم‌محورهای a و



شکل ۳۴-۷

b نشان داده شده‌اند. یک شاخه‌ی هذلولی (شاخه‌ی سمت چپ در شکل (۳۴-۷)) به مدار در حالت ربایشی و شاخه‌ی دیگر به حالت رانشی مربوط اند. مانند پیش، a با انرژی E و ℓ با تکانه‌ی زاویه‌ای L مشخص می‌شوند. توجه کنید که نیم‌محور کوچک b، همان پارامتر برخورد است و عبارت است از نزدیک‌ترین فاصله‌ی مسیر تا مبداء که ذره اگر روی خط راست حرکت کند می‌تواند به آن فاصله برسد (در راستای خط های مجانب) نیم‌فاصله‌ی کانونی برابر است با $c=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}=\varepsilon\ell/(\varepsilon^{۲}-۱)$. بنابراین، کانون در مرکز نیرو قرار دارد و $\varepsilon=c/a$ است .

مثال ۹-۷ (مدار یک ستاره ی دنباله دار): کمینه فاصله‌ی ستاره‌ی دنباله‌داری از خورشید نصف شعاع مدار زمین (فرض کنید دایره باشد) است و سرعت ستاره‌ی دنباله‌دار در آن نقطه دو برابر سرعت مداری زمین است. سرعت ستاره‌ی دنباله‌دار را در هنگامی که مدار زمین را قطع می‌کند بیابید. با چه زاویه‌ای مدار زمین را قطع می‌کند؟ آیا ستاره‌ی دنباله‌دار از سامانه‌ی خورشیدی خواهد گریخت؟ چه مداری را می‌پیماید؟

حل : در حضیض خورشیدی (نزدیکترین فاصله تا خورشید) $r=a_E/۲$ و $v=۲v_{C.E}$. پس انرژی عبارتست از: (با استفاده از رابطه ی (۷۵-۷))

$$E=۲mv_{C.E}^{۲}-\frac{۲GM_s m}{a_E}=۰$$

بنابراین سرعت ستاره‌ی دنباله‌دار در هنگام قطع‌کردن مدار زمین برابر است با

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲}=\frac{GM_s m}{a_E}=mv_{C.E}^{۲}$$

پس $v=\sqrt{۲}v_{C.E}$. تکانه‌ی زاویه‌ای برابر است با $L=ma_E v_{C.E}$ و بنا به تعریف ℓ داریم: $\ell=a_E$. پس زاویه‌ی قطع مدار عبارتست از $ma_E v\cos\alpha=L=ma_E v_{C.E}$ یا $\alpha=۴۵^{\circ}$. چون $E=۰$ است، ستاره‌ی دنباله‌دار تنها به اندازه‌ی لازم انرژی دارد که از سامانه‌ی خورشیدی بگریزد و مدارش سهمی است

۴-۷-۷ قانون های کپلر

اینک با کمترین کار اضافی می‌توان قانون‌های کپلر را بیان کرد. کپلر (۱۶۳۰-۱۵۱۷) پیش از نیوتون (۱۷۲۷-۱۶٤۲) می‌زیست و قانون‌های خود را با استفاده از داده‌های تجربی رصدی به دست آورد. از زمان کوپرنیکوس (۱٥٤۳-۱٤۷۳) می‌دانستند که سیاره‌ها دور خورشید می‌گردند، اما کپلر و نیوتون نخستین کسانی بودند که این دانش را به زبان کمی بیان کردند.

در قانون‌های کپلر این فرض نهفته است که خورشید به اندازه‌ی کافی پرجرم است که مکانش تغییر نکند. این یک تقریب بسیار خوبی است

- **قانون نخست**

سیاره‌ها در مدارهای بیضی حرکت می‌کنند و خورشید در یکی از کانون‌های بیضی قرار دارد.

ما این قانون را با رابطه‌ی (۸٤-۷) ثابت کردیم. البته اجسامی وجود دارند که در آسمان سرگردانند و در مدار بیضی از کنار خورشید می‌گذرند. اما این اجسام را ما سیاره نمی‌نامیم چون هرگز آنها را برای بار دوم نمی‌بینیم.

- **قانون دوم**

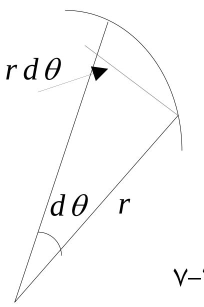
بردار شعاعی از خورشید به سیاره با آهنگی مساحت را می روبد که مستقل از مکان سیاره در مدارش است.

این قانون چیزی نیست جز بیان پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای. مساحتی را که بردار شعاعی در زمان کوتاهی می‌روبد برابر است با $dA = r(r\,d\theta)$ ؛ چون $r\,d\theta$ قاعده‌ی مثلث باریک در شکل (۳۵-۷) است. بنابراین، با استفاده از $L = mr^2\dot{\theta}$ داریم

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{L}{2m} \tag{۸۹-۷}$$

که مقدار ثابتی است، چون برای هر نیروی مرکزی، L ثابت است.

- **قانون سوم**



شکل ۳۵-۷

مربع دوره‌ی ، T ، یک مدار با مکعب طول نیم‌محور بزرگ، a ، مدار متناسب است. دقیق تر بگوییم

$$T^2 = \frac{4\pi^2 ma^3}{\alpha} = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_\circ} \tag{۹۰-۷}$$

اثبات: اگر از رابطه‌ی (۸۹-۷) نسبت به زمان روی یک دور کامل مدار انتگرال بگیریم به دست می‌آید

$$A = \frac{LT}{2m} \tag{۹۱-۷}$$

اگر مساحت $A = \pi ab$ بیضی را در این رابطه جاگذاری کنیم و از رابطه‌ی (۸۸-۷) استفاده کنیم و بنویسیم $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ آنگاه خواهیم داشت

$$\pi^2 a^4 = \left(\frac{L^2}{m(1-\varepsilon^2)}\right)\frac{T^2}{4m} \tag{۹۲-۷}$$

سمت راست رابطه‌ی بالا را به این صورت نوشتیم تا بتوانیم از $L^{۲} \equiv m\,|\alpha|\,\ell$ استفاده کنیم و جمله‌ی درون پرانتز را به صورت $\alpha a \equiv (GM_{\odot}m)a$ بنویسیم. a با رابطه‌ی (۷-۸۸) داده شده است. اما چون $\alpha\ell/(1-\varepsilon^2) \equiv \alpha a$، پس خواهیم داشت

$$\pi^{۲}a^{٤} = \frac{(GM_{\odot}ma)T^{۲}}{٤m} \tag{۷-۹۳}$$

که همان رابطه‌ی (۷-۹۰) است.

نکته: تاکنون فرض کردیم که مرکز ربایش در حال سکون است. یعنی جرم مرکز ربایش را بینهایت پنداشتیم و از حرکت آن چشم پوشیدیم. در واقعیت، جرم مرکز ربایش (مثل خورشید) محدود است و بنابراین، حرکت دو جسم حول مرکزجرم مشترک آنهاست. اگر جرم محدود مرکز ربایش را M بنامیم، مادامی که حرکت نسبی مورد بررسی است باید جرم m در مخرج رابطه‌ی (۷-۹۳) را با **جرم کاهیده** ($\mu \equiv mM/(m+M)$ جایگزین کرد. پس، قانون سوم کپلر، رابطه‌ی (۷-۹۰) را باید به صورت زیردرمی‌آید

$$T^{۲} = \frac{٤\pi^{۲}a^{۳}\mu}{GM_{\odot}m} = \frac{٤\pi^{۲}a^{۳}}{G(M_{\odot}+m)} \tag{۷-۹٤}$$

بنویسیم. پس، دوره‌ی حرکت نه تنها با مکعب نیم‌محور بزرگ متناسب است بلکه به طور وارون با مجموع جرم‌ها نیز متناسب است. در عمل، البته چون جرم خورشید، M بسیار بزرگتر از جرم سیاره‌های آن است؛ رابطه‌ی (۷-۹۰) را به جای (۷-۹٤) به کار می‌بریم. در رابطه با حرکت نسبی دو جسم، کافی است که بگوئیم اگر ناظر در روی خورشید باشد، مدار هر سیاره یک بیضی خواهد بود که خورشید در یکی از کانون‌های آن قرار دارد. به همین ترتیب، اگر ناظر بر روی سیاره باشد، خورشید مداری بیضی شکل خواهد داشت که سیاره در یکی از کانون‌های آن قرار دارد.

فیزیک محاسباتی مدارهای کپلری

نُه سیاره‌ی سامانه‌ی خورشیدی را در نظر بگیرید. از داده‌های تجربی جرم، مرکزگریزی، ε، و غیره استفاده کنید .

(الف): برای هر یک از این نه سیاره درستی قانون سوم کپلر را بررسی کنید.

(ب): مدارهای سیاره‌ها را رسم کنید. یکای فاصله را یکای نجومی برگزینید.

مسئله ها

۷-۱ (نیروی پوسته ی کروی): پوسته‌ی کروی به جرم M با شعاع داخلی $R_{۱}$ و شعاع بیرونی $R_{۲}$ را در نظر بگیرید. ذره‌ای به جرم m در فاصله‌ی r از مرکز پوسته قرار دارد. نیروی وارد به جرم m را برحسب r ($۰ \le r \le \infty$) به دست آورید و آن را رسم کنید.

۷-۲ (سیم بینهایت): ذره‌ای به جرم m به فاصله‌ی ℓ از سیم راست بسیار دراز (بینهایت) با چگالی ρ kg/m قرار دارد. نشان دهید که نیروی وارد به ذره $F = ۲G\rho m/\ell$ است. (*راهنمایی:* اگر از زاویه به عنوان متغیر استفاده کنید انتکرال‌گیری

ساده‌تر می‌شود. اگر فاصله در راستای سیم را متغیر برگزینید، آنگاه جایگزینی $\tan\theta$ کارها را آسان‌تر می‌کند).

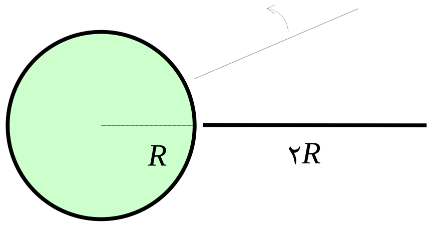
۷-۳ (صفحه‌ی گسترده): **(الف)** از صفحه‌ی بینهایت گسترده‌ای به چگالی σ سوراخی به شعاع R بریده‌ایم. اگر L خط عمود برصفحه باشد و از مرکز سوراخ بگذرد. چه نیرویی به ذره‌ای با جرم m که برروی خط و به فاصله‌ی x از مرکز سوراخ قرار دارد، وارد می‌شود؟ (*راهنمایی:* صفحه را به صورت حلقه‌های هم‌مرکز فرض کنید. .نیروی وارد به m را از سوی یک حلقه به دست آورید و سپس انتگرال بگیرید.)

(ب): اگر ذره‌ای خیلی نزدیک به مرکز سوراخ و در روی L از حالت سکون رها شود، نشان دهید که این ذره حرکت نوسانی خواهد داشت و بسامد نوسان را حساب کنید.

(پ): اگر ذره در روی L و به فاصله‌ی x از صفحه رها شود، سرعت ذره را هنگامی که از مرکز سوراخ می‌گذرد به دست آورید. پاسخ خود را برای حد x های بزرگ (یا به طور همارز، برای R کوچک) بیازمایید.

۷-۴ (میله، سفینه، زمین): **(الف)**: سیاره‌ای به جرم M وشعاع R را در نظر بگیرید. دوره‌ی یک سفینه در مداری به شعاع $۲R$ حول این سیاره چقدر است؟

(ب): میله‌ی درازی به طول $۲R$ را در نظر بگیرید که درست از سطح زمین تا شعاع $۳R$ قرار دارد (شکل ۳۶-۷) اگر شرایط اولیه چنان فراهم شده باشد که میله در حالی که همواره در راستای شعاع است حول زمین بگردد؛ دوره‌ی مدار میله را حساب کنید.



شکل ۳۶-۷

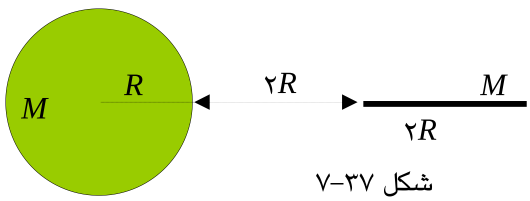
۷-۵ (سیاره‌ای از ماسه): سیاره‌ای به جرم M و شعاع R با چگالی یکنواخت از ماسه تشکیل شده است. برای این که همه‌ی دانه‌های ماسه را به بینهایت منتقل کنیم و هر دانه‌ی ماسه از دانه‌ی دیگر بسیار دور باشد، چه مقدار انرژی لازم است؟

۷-۶ (چاهی تا مرکز زمین): تلاش غیر معمول زیر را در نظر بگیرید: چاه باریکی (سطح A) را از سطح زمین تا مرکز کره‌ی زمین می‌کَنیم. لوله‌ای با همان سطح در آن قرار می‌دهیم و دیواه‌های لوله را با ماده‌ای اندود می‌کنیم تا اصطکاک نداشته باشد. درون لوله را با موادی که از چاه بیرون آورده شده است دوباره پُر می‌کنیم. اگر شعاع زمین R باشد و چگالی آن را یکنواخت و برابر $\rho\ \mathrm{kg/m^۳}$ فرض کنیم:

(الف): نیروی گرانش وارد به جرم کوچک dm در درون لوله و به فاصله‌ی r از مرکز زمین چقدر است؟

(ب): چه نیرویی در ته لوله لازم است تا اندرونه‌ی لوله را نگه دارد؟

۷-۷ (میله و کره): کره‌ی همگن به جرم M و شعاع R در فاصله‌ی $۲R$ از میله‌ی همگن و به طول $۲R$ برابر شکل (۳۷-۷) قرار دارد. اگر این دو جسم از حالت سکون رها شوند سرعت آنها درست پیش از برخوردشان در اثر ربایش گرانشی چقدر است؟



شکل ۳۷-۷

۷-۸ (دو ذره): دو جرم یکسان m به فاصله‌ی ℓ از یکدیگر قرار دارند وبا نیروی گرانش با هم برهمکنش می‌کنند. به هر دوی این ذره‌ها سرعت مماسی مناسب $v_{\circ}$ می‌دهیم تا هر کدام در دایره‌ای به شعاع $\ell/۲$ حول مرکز جرمشان بگردند.

(الف): $v_{\circ}$ را حساب کنید

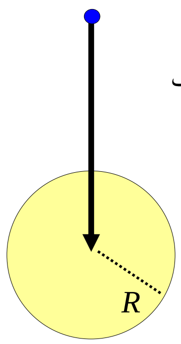
(ب): اگر یکی از این جرم‌ها را بگیریم و ساکن نگه بداریم، کمترین فاصله‌ای که جرم دوم می‌تواند به آن نزدیک شود چیست؟

(راهنمایی: (۱) جهت سرعت در نزدیکترین فاصله چیست؟ (۲) چه کمیت‌هایی پایسته اند؟)

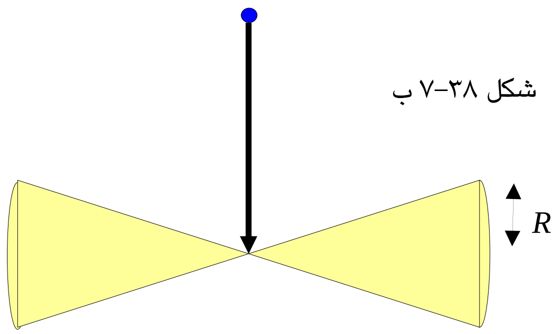
۹-۷ (دو مخروط و پوسته کروی):

(الف): پوسته ی کروی نازکی با شعاع R و چگا لی $\sigma\,\mathrm{kg/m^2}$ را در نظر بگیرید. ذره ای در بینهایت و از حالت سکون به سوی این پو.سته حرکت می کند (به خاطر نیروی گرانش). سرعت ذره در هنگامی که به مرکز پو.سته می‌رسد چقدر است؟ (فرض کنید در روی پوسته سوراخ کوچکی وجود دارد و ذره از آن سوراخ می گذرد. شکل (۳۸-۷ الف).

(ب): دو پوسته‌ی مخروطی با شعاع قاعده‌ی R و طول یال L را برابر شکل (۳۸-۷ ب) قرار داده‌ایم. ذره‌ای که از بینهایت و از حالت سکون در راستای خط عمود بر ارتفاع پوسته‌ها سقوط می کند. سرعت ذره را هنگامی که به راس مخروطها می‌رسد به دست آورید. برای هر دو بخش (الف) و (ب) فرض کنید کره و مخروط ها در فضا ثابت اند.

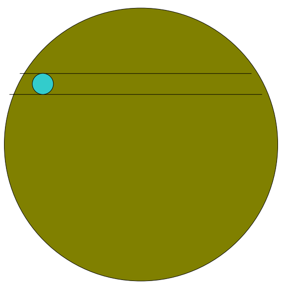


شکل ۳۸-۷ الف



شکل ۳۸-۷ ب

۱۰-۷ (سفر تند): تونل مستقیمی بین دو نقطه‌ی زمین، برابر شکل (۳۹-۷)، کنده‌ایم جسمی را از یک انتها در درون تونل رها می‌کنیم. حرکت این جسم چگونه خواهد بود؟ چه مدت طول می‌کشد تا به انتهای دیگر تونل برسد؟ از اصطکاک چشم پوشی کنید و فرض کنید که چگالی زمین (به نادرستی) یکنواخت است.



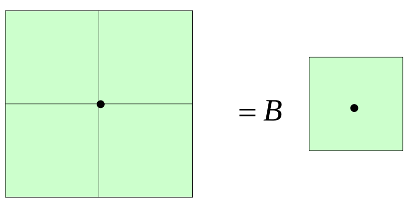
شکل ۳۹-۷

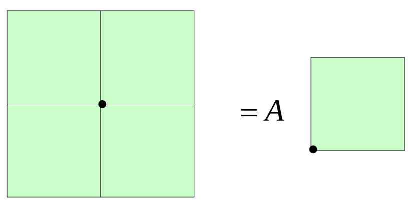
۱۱-۷ (نسبت پتانسیل ها): دو سامانه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

(۱) جرم m در گوشه‌ی یک صفحه‌ی تخت مربع به جرم M قرار دارد.

(۲) جرم m در مرکز یک صفحه ی تخت مربع به جرم M قرار دارد.

نسبت انرژی پتانسیل جرم m را در دو وضعیت بالا بیابید. (*راهنمایی*: در شکل پیشنهادی (۴۰-۷) A و B را حساب کنید





شکل ۴۰-۷

۱۲-۷ (سرعت نسبی): دو ذره به جرم‌های m و M نخست در فاصله‌ی بینهایت از هم ودر حال سکون‌اند. این دو ذره در اثر گرانش یکدیگر را جذب می‌کنند. سرعت نسبی آن‌ها هنگامی که فاصله‌شان r باشد، چقدر است؟

۷-۱۳ **(گرانش بیشینه)**: ماده‌ای خمیری‌مانند با چگالی ثابتی داریم که می‌توانیم به هر شکلی در بیاوریم. نقطه‌ی P در فضا داده شده است. خمیر را به چه شکل در آوریم تا در نقطه‌ی P بیشترین گرانش را ایجاد کند؟

۷-۱۴ **(سرعت گریز- پرش از یک سیاره)**:

(الف) : سرعت گریز ذره‌ای از روی سیاره‌ای کروی به شعاع R و جرم M را بیابید. مقدارهای عددی آن را برای زمین، ماه و خورشید حساب کنید.

(ب): یک سیاره‌ی کروی باید چه شعاعی داشته باشد تا با یک پرش، انسان بتواند از روی آن به فضا پرتاب شود. فرض کنید چگالی سیاره با چگالی زمین برابر است. (*راهنمایی:* با گمانه‌ای مانند طول پرش در این سیاره با طول پرش در زمین یکی است مسئله را حل کنید.)

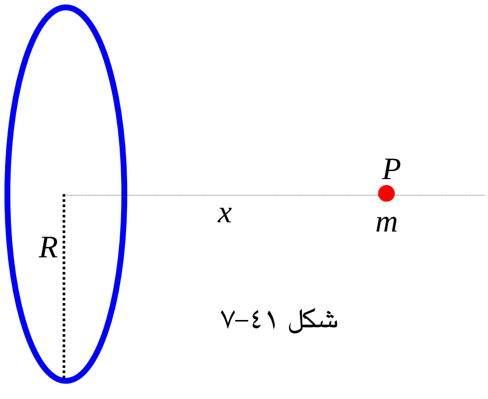
۷-۱۵ **(بازهم نسبت پتانسیل ها)**: مکعبی با چگالی یکنواخت را در نظر بگیرید. نسبت پتانسیل گرانشی ذره‌ای که در مرکز مکعب قرار دارد به پتانسیل گرانشی آن در یک گوشه‌ی مکعب چیست؟ (*راهنمایی:* این مسئله را می‌توان بدون انجام انتگرال های پیچیده هم حل کرد.)

۷-۱۶ **(نیروی گرانش)**: **(الف)** فرض کنید چگالی زمین مقدار ثابتی است. رابطه‌ای برای نیروی گرانش وارد به ذره‌ای به جرم m برحسب فاصله‌ی شعاعی r بیابید. رابطه‌ی شما باید نشان دهد که با پایین رفتن در چاهی ژرف نیروی گرانش هم کاهش پیدا می‌کند.

(ب): با این حال، چگالی زمین ثابت نیست و در واقع با پایین رفتن به درون چاه، گرانش هم *افزایش* می‌یابد. شرایطی که لازم است این وضعیت در سیاره‌ای وجود داشته باشد این است که به ازای مقدار معین A داشته باشیم $\rho_c < A\rho_{av}$. در اینجا ρ_{av} چگالی میانگین سیاره است و ρ_c چگالی در پوسته‌ی سطح سیاره است. با این فرض که چگالی تقارن کروی دارد (یعنی تنها به شعاع بستگی دارد) مقدار A را بیابید.

۷-۱۷ **(واپاشی یک سیاره)**: سیاره‌ای با چگالی جرمی یکنواخت ρ را در نظر بگیرید. اگر این سیاره خیلی تند در مدارش حول مرکز نیرو بگردد، از هم پاشیده می‌شود (جرمش از آن جدا و در فضا پراکنده می‌شود.) نشان دهید که کمینه مقدار دوره‌ی گردش برابر است با $T=\sqrt{3\pi/G\rho}$. برای $\rho=5{,}5\,\mathrm{gr/cm^3}$ (میانگین چگالی زمین) این مقدار کمینه‌ی T را حساب کنید.

۷-۱۸ **(نیروی گرانش حلقه)**: حلقه‌ای به جرم M و شعاع R را برابر شکل (۷-٤١) در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه‌ی P به فاصله‌ی x از صفحه‌ی حلقه و بر روی محور گذرنده از مرکز حلقه است.



شکل ۷-٤١

(الف): نیروی وارد به جرم m واقع در نقطه‌ی P چیست؟

(ب): انرژی پتانسیل جرم m در نقطه‌ی P چقدر است.

(پ): نشان دهید $F=-dV/dx$

(ت): اگر ذره از بینهایت و از حالت سکون در راستای محور شروع به حرکت بکند؛ هنگام گذار از مرکز حلقه سرعتش چقدر است؟

۷-۱۹ (**اگرزمین بایستد؟**): اگر زمین به ناگهان از گردش حول خورشید باز ایستد، چه مدت طول می‌کشد تا با خورشید برخورد کند؟ (*راهنمایی*: فرضکنید مسیر زمین نیمی از یک مدار بیضی بسیار باریک است و از قانون کپلر استفاده کنید)

۷-۲۰ (**مدار دایره پایدار**): در پتانسیل $V(r) = -A/r^n$ با $A > 0$ به ازای چه مقدارهای n مدار ذره‌ای دایره‌ی پایدار است؟

۷-۲۱ (**مدار دایره‌ی ناپایدار**): ذره‌ای تحت اثر نیروی $F(r) = -2A/r^3$ در مدار دایره حرکت می‌کند. نشان دهید که ذره هم چنین می‌تواند حرکت شعاعی (به سوی مرکز نیرو یا بیرون از آن) داشته باشد. (این نمونه‌ای از حرکت ناپایدار است. اندک اختلال در مدار دایره‌ای ذره سبب حرکت شعاعی آن می‌شود.) برای حرکت شعاعی ذره θ را برحسب تابعی از r بیابید.

۷-۲۲ (**پتانسیل** r^{-3}) **:** ذره‌ای در پتانسیل $V(r) = -C/(3r^3)$ حرکت می کند.

(**الف**): برای L معین، بیشینه مقدار V_{eff} را حساب کنید.

(**ب**): پتانسیل موثر را رسم کنید و با استفاده از آن بگویید که اگر ذره از بینهایت با سرعت اولیه v_0 و پارامتر برخورد b حرکت کند، به ازای چه مقدار بیشینه‌ی b به دام پتانسیل خواهد افتاد.

۷-۲۳ (**پتانسیل** r^k) : ذره‌ای به جرم m در پتانسیل $V(r) = \beta r^k$ حرکت می‌کند. اگر تکانه‌ی زاویه‌ای آن L باشد

(**الف**): شعاع r_0 مدار دایره‌ای را بیابید.

(**ب**): به ذره تلنگر کوچکی می‌زنیم به طوری‌که شعاع آن حول r_0 نوسان کند. بسامد، ω_r این نوسان‌ها را به دست آورید.

(**پ**): نسبت بسامد ω_r به بسامد حرکت (نزدیک به) دایره، $\omega_\theta = \dot{\theta}$ را حساب کنید. به ازای چند مقدار k این نسبت یک عدد گویا می‌شود. در حرکت ذره بحث کنید.

۷-۲۴ (**حرکت دایره‌ای با فنر**): ذره‌ای به جرم $2\,\mathrm{kg}$ به انتهای فنربدون جرم بسته شده است و در روی میز بدون اصطکاک قرار دارد. انتهای دیگر فنر به نقطه‌ی بدون اصطکاک ثابت شده است. فنر نیروی $3r$ به جرم وارد می‌کند که در آن r فاصله‌ی ذره تا انتهای ثابت فنر است. ذره روی دایره‌ای حرکت می‌کند و انرژی کل آن $E = 12\,\mathrm{J}$ است

(**الف**): شعاع مدار و سرعت جسم را بیابید.

(**ب**): به ذره تلنگری می‌زنیم و با این کار به آن سرعت لحظه‌ای در راستای شعاع و برابر $1\,\mathrm{m/s}$ می‌دهیم. حالت‌های سامانه را پیش و پس از ضربه در نمودار انرژی نشان بدهید.

(**پ**): برای مدار جدید کمینه و بیشینه‌ی r را حساب کنید.

۷-۲۵ (**ماهواره**): ماهواره‌ای به جرم m در مدار دایره دور زمین می‌گردد. شعاع مدار r_0 و جرم زمین M است.

(**الف**): انرژی مکانیکی ماهواره را حساب کنید.

(**ب**): فرض کنید ماهواره در لایه‌ی بالایی جو می‌گردد و هنوز به آن نیروی ضعیف پس‌کشی وارد می‌شود. در اثر این نیرو ماهواره به طور مارپیچی به زمین نزدیک می‌شود. چون نیروی پس‌کشی ضعیف است، تغییر شعاع مدار بسیار کُند خواهد بود و می‌توان فرض کرد که در هر لحظه، ماهواره در مداری دایره‌ای با شعاع r است. تغییر تقریبی شعاع مدار، Δr ، در هر دور گردش ماهواره چقدر است؟

(**پ**): تغییر تقریبی در انرژی جنبشی ماهواره را از یک مدار به مدار دیگر، به دست آورید.

۷-۲۶ (مسیر مارپیچ نمایی): به ازای L داده شده‌ای، پتانسیل $V(r)$ را چنان بیابید که مسیر ذره $r = Ae^{a\theta}$ (مسیر مارپیچ) باشد. A و a مقدارهای ثابتند. (راهنمایی: رابطه‌ای برای $\dot{r}$ بیابید که در آن θ نباشد و از معادله‌ی شعاعی انرژی استفاده کنید.)

۷-۲۷ (مسیر مارپیچ توانی): به ازای L داده شده‌ای، پتانسیل $V(r)$ را چنان بیابید که مسیر ذره به صورت $r = C\theta^k$ باشد. C و k مقدارهای ثابت اند.