فصل ۶

حرکت نوسانی

در این فصل حرکت نوسانی را بررسی خواهیم کرد. ساده‌ترین نمونه‌های این گونه حرکت‌ها تاب خوردن آونگ و حرکت جرمی است که به انتهای فنری بسته شده است. اما با افزودن نیروهای وادارنده یا بازدارنده می‌توان سامانه‌های پیچیده‌تر را هم بررسی کرد.

به دو دلیل می‌خواهیم این حرکت را بررسی کنیم. نخست این که ابزار بررسی آن فراهم است؛ بنابراین زمینه‌ای برای به کار بستن آموخته‌هایمان است. حرکت‌های نوسانی یکی از چند سامانه‌ی فیزیکی است که می‌توان آن را دقیق حل کرد. دوم، حرکت های نوسانی به فراوانی در طبیعت وجود دارند و بنابراین، شایسته‌ی بررسی اند.

در آغاز این فصل، ریاضیاتی را می‌پرورانیم که به آن نیاز داریم. در بخش بعدی خواهیم دید که چگونه می‌توان ریاضیات را در فیزیک به کار برد. این فصل را با معادله‌های دیفرانسیل خطی آغاز می‌کنیم.

۶-۱ معادله های دیفرانسیل خطی

معادله‌ی دیفرانسیل خطی معادله‌ای است که فقط شامل توان اول x و توان اول مشتق‌های آن نسبت به یک متغیر (در این فصل زمان t) است. یک نمونه از معادله‌های دیفرانسیل خطی عبارت است از $۳\ddot{x}+۷\dot{x}+x=۰$. نمونه‌ای از معادله‌ی دیفرانسیل غیر خطی $۳\ddot{x}+۷\dot{x}^{۲}+x=۰$ است. اگر سمت راست معادله صفر باشد گوییم معادله‌ی دیفرانسیل **همگن** است. اگر سمت راست معادله تابعی از t باشد گوییم **ناهمگن** است. هدف این بخش آموختن روش حل هر دوی این معادله‌های دیفرانسیل خطی است. این معادله‌ها بارها در مسئله‌های فیزیک نمایان می‌شوند و بهتر است یک بار برای همیشه حل آنها را یاد گرفت. ما به نظریه‌ی معادله های دیفرانسیل نخواهیم پرداخت بلکه به یاری مثال، روش حل آنها را خواهیم پروراند.

در همه جای این فصل فرض ما این خواهد بود که x تابعی از t است و نقطه‌ای بر بالای آن (مثل $\dot{x}$) یعنی مشتق نسبت به زمان است. اینک چند مثال: نخست ساده ترها

مثال ۶-۱ ($\dot{x}=ax$): این یک معادله‌ی دیفرانسیل ساده است و (دست کم) به دو روش می‌توان آن را حل کرد.

حل ۱: متغیرها را از هم جدا کنید و آن را به صورت $dx/x=a\,dt$ بنویسید و سپس از دو طرف انتگرال بگیرید. خواهیم داشت $\ell n\,x=at+c$ که در آن c ثابت انتگرال‌گیری است. از این جا می‌توان نوشت

$$x=Ae^{at} \qquad (۶-۱)$$

که در آن $A=e^{c}$ است و با مقدار اولیه، مانند مقدار x در $t=۰$ ، به دست می‌آید.

حل ۲: پاسخ آزمونی به صورت تابع نمایی $x=Ae^{\alpha t}$ برگزینید و آن را به همراه مشتق آن در $\dot{x}=ax$ قرار دهید. می‌بینید که $a=\alpha$ می شود. پس $x=Ae^{\alpha t}$ پاسخ معادله است.

مثال ۶-۲ ($\ddot{x}=ax$): اگر a منفی باشد، خواهیم دید که این معادله توصیف حرکت نوسانی است. اگر a مثبت باشد حرکتی را توصیف می‌کند که به طور نمایی با زمان افزایش یا کاهش می‌یابد. دستکم دو روش حل برای این معادله وجود دارد.

حل ۱: می توان مانند مثال ۱-۶ از شیوه‌ی جداسازی متغیرها استفاده کرد (فصل ۳ را ببینید) چون در این جا نیرو تنها به

متغیر مکان، x ، بستگی دارد. اگرچه این روش کارگر است، اما می‌تواند طولانی و پیچیده باشد. چون این معادله نسبت به x خطی است روش ساده‌تری برای حل آن وجود دارد.

حل۲: مانند مثال ۱-۶ ، یک تابع آزمون به صورت $x(t)=Ae^{\alpha t}$ برگزینید و سپس ببینید α چه مقداری می‌تواند داشته باشد. باز هم نمی‌توانیم A را حساب کنیم چون، از معادله حذف می‌شود. با جاگذاری $Ae^{\alpha t}$ و مشتق دوم آن در $\ddot{x}=ax$ خواهیم داشت $\alpha=\pm\sqrt{a}$. پس دو پلسخ وجود دارد و پاسخ عمومی ترکیب خطی این دو است:

$$x(t)=Ae^{\sqrt{\alpha}t}+Be^{-\sqrt{\alpha}t} \qquad (۶-۲)$$

با جاگذاری آن در $\ddot{x}=ax$ می‌توان دید که در معادله‌ی دیفرانسیل صدق می‌کند. A و B با شرایط اولیه‌ی مسئله تعیین می‌شوند. این یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دو بود(مشتق مرتبه دو داشت) و هر معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دو، دو پاسخ مستقل دارد. ما دو پاسخ مستقل آن را یافتیم. (اگر دقیق‌تر سخن بگوییم، باید گفته شود که پاسخ‌های معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دو، خانواده‌ای دو پارامتری‌اند. اما همین مقدار هم برای ما بسنده است.)

نکته‌ی بسیار مهم: واقعیت این که جمع دو پاسخ متفاوت، خود یک پاسخ است ویژگی بسیار مهم معادله‌های دیفرانسیل خطی است. معادله‌های دیفرانسیل غیر خطی مانند $\ddot{x}^{2}=bx$ این ویژگی را ندارند. چون، با به توان دو رساندن جمع دو پاسخ، جمله‌ی سومی ظاهر می‌شود و خطی بودن را ازبین می‌برد. این ویژگی را *اصل برهم‌نهی* می‌گویند. یعنی از برهم‌نهی دو پلسخ ، پاسخ دیگری به وجود می‌آید. کار کردن با نظریه‌های فیزیکی که برپایه‌ی معادله‌های خطی اند، آسان‌تر از نظریه‌هایی اند که بر پایه‌ی معادله‌های غیر خطی ساخته می‌شوند. برای نمونه، نظریه‌ی نسبیت عام برپایه‌ی معادله‌های غیرخطی است و یافتن پاسخ سامانه‌ها در نسبیت عام کار بس دشوار است.

بگذارید اندکی بیشتر در باره‌ی پاسخ (۶-۲) سخن بگوییم. اگر a منفی باشد بهتر است تعریف کنیم $a\equiv-\omega^{2}$ که در آن ω یک مقدار حقیقی است. حالاپاسخ (۶-۲) به صورت $x(t)=Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}$ درمی‌آید. با توجه به $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ می‌توان آن را به صورت توابع مثلثاتی نوشت. صورت‌های گو.ناگونی برای نوشتن این پاسخ وجود دارد که عبارتند از

$$\begin{aligned} x(t)&=Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}\\ x(t)&=C\cos\omega t+D\sin\omega t\\ x(t)&=E\cos(\omega t+\phi_{۱})\\ x(t)&=F\sin(\omega t+\phi_{۲}) \end{aligned} \qquad (۶-۳)$$

بسته به این که ویژگی‌های سامانه چه باشد، یکی از این صورت‌ها مناسب‌تر از بقیه خواهد بود. اما به هر حال آنها هم‌ارزند. در این رابطه‌ها ثابت‌های متفاوت وجود دارند اما آنها به یکدیگر مربوط اند. برای نمونه، $C=E\cos\phi_{۱}$ و $D=-E\sin\phi_{۱}$ که از فرمول کسینوس جمع زاویه‌ها به دست می‌آید.

توجه کنید که در هر یک از این صورت‌های متفاوت پاسخ $x(t)$ دو پارامتر آزاد وجود دارد که با شرایط اولیه (مثل مکان و سرعت در $t=۰$) تعیین می‌شوند. برعکس این پارامترها که آزادند، کمیت ω را سامانه‌ی فیزیکی که با آن سروکار داریم تعیین می‌کند. ω مستقل از شرایط اولیه‌ی مسئله است و سرشت سامانه را نشان می‌دهد.

اگر a مثبت باشد، بهتر است آن را به صورت $a\equiv\alpha^{۲}$ تعریف کنیم که در آن α یک عدد حقیقی است. پاسخ (۶-۲) حالا به صورت $x(t)=Ae^{\alpha t}+Be^{-\alpha t}$ درمی‌آید. این را نیز با استفاده از $e^{\theta}=\cosh\theta+\sinh\theta$ می‌توان برحسب توابع مثلثاتی هایپربولیک نوشت. صورت‌های متفاوت این پاسخ به قرار زیراند.

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t} \\ x(t) &= C\cosh\alpha t + D\sinh\alpha t \\ x(t) &= E\cosh(\alpha t + \phi_1) \\ x(t) &= F\sinh(\alpha t + \phi_2) \end{aligned} \tag{٦-٤}$$

باز هم می‌بینیم که ثابت‌های گوناگون در این صورت‌های پاسخ $x(t)$ نمایان می‌شوند.

اگرچه پاسخ (٦-٢) برای هر دو علامت a کاملا درست است اما برای $a<0$ معمول است که یا آن را به صورت توابع مثلثاتی ویا به صورت $e^{\pm\alpha t}$ بنویسند تا روشنگری بیشتر داشته باشد.

ما به سودمندی شیوه‌ی گمانه زنی پاسخ به صورت تابع نمایی پافشاری می‌کنیم. این روش محدود کننده و سبک به نظر می‌رسد، اما بقیه‌ی مثال‌های این فصل نشان خواهند داد که این چنین نیست.

مثال ٣-۶ ($\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+ax=0$) : این آخرین مثال ریاضی ماست. پس از آن به فیزیک خواهیم پرداخت. دراینجا من عدد ٢ را به ضریب $\dot{x}$ افزوده‌ام تا رابطه‌های بعدی زیباتر باشند. توجه کنید که حالا نیرو (اگر لحظه‌ای از ریاضیات بگذریم و به فیزیک نگاه کنیم) عبارت است از $-2\gamma\dot{x}-ax$ (ضربدر m) که به هر دوی x و v بستگی دارد. بنابراین، شیوه‌ی جداسازی متغیرها که در فصل ٣ پروراندیم در اینجا کارگر نیست و نمی‌توان از آن استفاده کرد. پس، فقط شیوه‌ی گمانه‌زنی پاسخ به صورت تابع نمایی، $Ae^{\alpha t}$، باقی می‌ماند. حال ببینیم چه چیزی از آن به دست می‌آوریم. با جا گذاری $x(t)=Ae^{\alpha t}$ در معاله‌ی دیفرانسیل داده شده و حذف جمله‌ی مشترک $Ae^{\alpha t}$ خواهیم داشت:

$$\alpha^2+2\gamma\alpha+a=0 \tag{٦-٥}$$

که یک معادله‌ی درجه دو برحسب α است و پاسخ‌های آن عبارتند از $-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-a}$. این دو ریشه را α_1 و α_2 بنامید. در نتیجه، پاسخ عمومی معادله به صورت زیر است

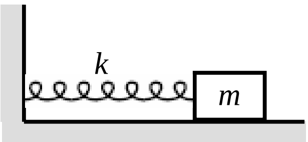
$$x(t)=Ae^{\alpha_1 t}+Be^{\alpha_2 t}=e^{-\gamma t}\left(Ae^{t\sqrt{\gamma^2-a}}+Be^{-t\sqrt{\gamma^2-a}}\right) \tag{٦-٦}$$

اگر $\gamma^2-a<0$ باشد می‌توان آن را برحسب سینوس و کسینوس نوشت و در نتیجه، حرکت نوسانی داریم که به خاطر ضریب $e^{-\gamma t}$ کاهشی است (یا افزایشی است اگر $\gamma<0$ باشد. اما از نظر فیزیکی، این حالت به ندرت پیش می‌آید.)

در دو مثال اول، پاسخ‌ها روشن بودند. در این مثال، اما نمی‌توان با نگاه کردن به پاسخ گفت « خب، این پاسخ هم بدیهی است». بنابراین ، روش ما برای حل معادله در شکل $Ae^{\alpha t}$ آن قدرها هم سبک نیست.

٢-۶ نوسانگر هماهنگ ساده

اینک می‌توانیم به مسئله‌های فیزیکی بپردازیم. با نوسانگر هماهنگ ساده آغاز می‌کنیم. این حرکتی است که ذره‌ای تحت تاثیر نیرویی مانند $F(x)=-kx$ انجام می‌دهد. مثال کلاسیکی حرکت نوسانی هماهنگ، جرم متصل به فنری بدون جرم است که همانند شکل (٦-١) روی میز بدون اصطکاک قرار دارد. نیروی فنر به صورت $F(x)=-kx$ است که در آن x مقدار جابه‌جایی (کشیده شدن یا فشرده شدن فنر) از حالت ترازمندی است و دلیل آن را در فصل٥ دیدیم. این قانون هوک است و تا هنگامی که کشیده شدن یا فشرده شدن فنر خیلی زیاد نباشد، برقرار است. برای فنر واقعی این قانون به این صورت برقرار نیست. برای این سامانه، $F=ma$ می گوید $-kx=m\ddot{x}$ یا



شکل ١-٦

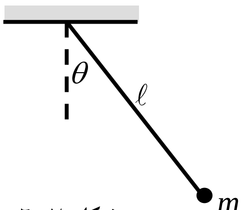
$$\ddot{x}+\omega^2 x=0 \quad , \quad \omega\equiv\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{۶-۷}$$

این همان معادله است که در مثال ۲ در بالا حل کردیم. می‌توانیم از رابطه‌ی (۶-۳) پاسخ آن را به صورت زیر بنویسیم.

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi) \tag{۶-۸}$$

این پاسخ مثلثاتی نشان می‌دهد که حرکت برای همه‌ی زمان‌ها نوسانی است. ω بسامد زاویه‌ای است و ما آن را در فصل ۵ بررسی کردیم. اگر t به اندازه‌ی $2\pi/\omega$ افزایش پیدا کند ، شناسه‌ی کسینوس به اندازه‌ی 2π بزرگ می‌شود و مکان ذره به جایی می‌رسد که از آن نقطه حرکتش را آغاز کرده بود. *دوره* (زمان لازم برای کامل کردن یک چرخه) عبارت است از $T\equiv 2\pi/\omega$. بسامد برحسب دور برثانیه (هرتز)، عبارت است از $\nu=1/T=\omega/2\pi$. ثابت A (یا اگر منفی باشد، قدر مطلق آن) دامنه است. یعنی بیشینه جابه‌جایی از مبداء. سرعت این حرکت به صورت تابعی از زمان عبارت است از $v(t)\equiv\dot{x}(t)=-A\omega\sin(\omega t+\phi)$. ثابت‌های A و ϕ را شرایط اولیه تعیین می‌کنند؛ برای نمونه، اگر $x(0)=0$ و $\dot{x}(0)=v$ باشند، آنگاه باید داشته باشیم $A\cos\phi=0$ و $-A\omega\sin\phi=v$. پس، $\phi=\pi/2$ و $A=-v/\omega$ (یا $\phi=-\pi/2$ و $A=v/\omega$ که باز هم به همان پاسخ می‌انجامد). بنابراین، داریم $x(t)=-(v/\omega)\cos(\omega t+\pi/2)$ که اگر به صورت $x(t)=(v/\omega)\sin(\omega t)$ بنویسیم زیباتر می‌نماید.

مثال ۴-۶ (آونگ ساده): آونگ ساده، سامانه‌ی کلاسیک دیگری است که به تقریب حرکت نوسانی هماهنگ ساده انجام می‌دهد. فرض کنید طول ریسمان آونگ ℓ و $\theta(t)$ انحراف آن از خط قائم باشند (شکل ۲-۶). مولفه‌ی مماسی نیروی گرانشی وارد به جرم آونگ $-mg\sin\theta$ است. پس، $F=ma$ در راستای مماسی می‌گوید



شکل ۲-۶

$$-mg\sin\theta=m(\ell\ddot{\theta}) \tag{۶-۹}$$

(طول کمان متناظر با θ برابر است با $\ell\theta$) . کشش ریسمان به همراه مولفه‌ی شعاعی (در راستای ریسمان) نیروی گرانش، شتاب شعاع را به وجود می‌آورند و می‌توان از آن استفاده کرد و کشش ریسمان را حساب کرد. ما در اینجا به آن نیاز نداریم. اکنون به گستره‌ی تقریب‌ها گام می‌گذاریم. فرض کنید دامنه‌ی نوسان کوچک است. یعنی فرض کنید θ به اندازه‌ای کوچک است که می‌توان از تقریب $\sin\theta\approx\theta$ استفاده کرد. بدون این تقریب نمی‌توان برای مسئله پاسخ بسته (پاسخی برحسب توابع ابتدایی) یافت. حال اگر از این تقریب در رابطه‌ی (۶-۹) استفاده کنیم، رابطه‌ی (۶-۹) به صورت زیر درمی‌آید.

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0 \quad , \quad \omega=\sqrt{g/\ell} \tag{۶-۱۰}$$

پاسخ این معادله‌ی دیفرانسیل را می‌شناسیم و در مثال ۲ آن را دیدیم. بنابراین داریم

$$\theta(t)=A\cos(\omega t+\phi) \tag{۶-۱۱}$$

A و ϕ با شرایط اولیه تعیین می‌شوند. می‌بینیم که آونگ حرکت نوسانی انجام می‌دهد. حرکت واقعی با دامنه‌های به اندازه‌ی کافی کوچک به این حرکت بسیار نزدیک است.

مثال ۵-۶ (افزایش جرم): جرم m به فنری با ثابت k وصل است وبا آن نوسان می‌کند. دامنه‌ی نوسان d است. در لحظه‌ای که جرم در مکان $x=d/2$ است و به سمت راست می‌رود، با ذره‌ی دیگری به جرم m برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. سرعت سامانه‌ی جدید با جرم $2m$ درست پس از برخورد، نصف سرعت سامانه‌ی اولیه درست پیش از برخورد است (این را

از پایستگی تکانه می دانیم– فصل ۵ را ببینید). مکان $x(t)$ حرکت سامانه‌ی جدید با جرم $۲m$ را بیابید و دامنه‌ی نوسان آن را حساب کنید.

حل: نخست باید سرعت را درست پیش از برخورد حساب کنیم. حرکت پیش از برخورد به صورت $x = d\cos(\omega t + \phi)$ بوده است که در آن $\omega = \sqrt{k/m}$ است. فرض کنید زمان برخورد $t = ۰$ است (فرق نمی کند چه زمانی را در معادله‌ی حرکت قرار دهیم). بنابراین داریم $d/۲ = x(۰) = d\cos\phi$ و از این جا به دست می‌آید $\phi = \pm\pi/۳$. پس، سرعت درست پیش از برخورد عبارت است از

$$v(۰) \equiv \dot{x}(۰) = -\omega d\sin\phi = -\omega d\sin(\pm\pi/۳) = \mp(\sqrt{۳}/۲)\omega d \qquad (۶–۱۲)$$

ما علامت مثبت را می‌خواهیم؛ چون گفته شده است که جرم به سمت راست حرکت می‌کند. یافتن حرکت پس از برخورد حالا به یک مسئله‌ی شرایط اولیه کاهش یافته است: جرم $۲m$ در انتهای فنری با ثابت k است که در مکان اولیه‌ی $d/۲$ سرعت اولیه‌اش $(\sqrt{3}/4)\omega d$ (نصف سرعت بالا) است. در وضعیت‌هایی که مکان و سرعت اولیه را می‌دانیم بهتر است $x(t)$ را به صورت رابطه‌ی (۳–۶) بنویسیم

$$x(t) = C\cos\omega' t + D\sin\omega' t \qquad (۶–۱۳)$$

زیرا در $t = ۰$ مکان ذره با C و سرعت آن با $\omega' D$ داده می‌شوند (نگاه کنید به توضیح پس از رابطه‌ای (۳–۶). پس، به کار بردن شرایط اولیه ساده اند. در اینجا من از ω' استفاده کردم تا بگویم که بسامد حرکت پس از برخورد با بسامد حرکت پیش از برخورد فرق دارد. حالا جرم دو برابر شده است و در نتیجه داریم $\omega' = \sqrt{k/2m} = \omega/\sqrt{2}$. اینک می‌توانیم از شرایط اولیه استفاده کنیم. به دست می‌آید

$$\begin{aligned} x(۰) &= \frac{d}{۲} \;\Rightarrow\; C = \frac{d}{۲} \\ v(۰) &= \left(\frac{\sqrt{۳}}{٤}\right)\omega d \;\Rightarrow\; \omega' D = \left(\frac{\sqrt{۳}}{٤}\right)\omega d \;\Rightarrow\; D = \frac{\sqrt{٦}}{٤}d \end{aligned} \qquad (۶–۱٤)$$

و سرانجام پاسخ نهایی عبارت است از

$$x(t) = \frac{d}{۲}\cos\omega' t + \frac{\sqrt{٦}d}{٤}\sin\omega' t \qquad , \qquad \omega' = \sqrt{\frac{k}{۲m}} \qquad (۶–۱۵)$$

یافتن دامنه را به تمرین‌ها واگذار می‌کنیم. برای این کار بهتر است از نمایش مختلط استفاده کرد. اگر کمیت $A \equiv \sqrt{C^۲ + D^۲}$ را تعریف کنید رابطه‌ی (۱۳–۶) را می‌توانید به صورت زیر بنویسید

$$\begin{aligned} x(t) &= A\left(\frac{C}{A}\cos\omega' t + \frac{D}{A}\sin\omega' t\right) \\ &= A\left(\cos\delta\cos\omega' t + \sin\delta\sin\omega' t\right) = A\cos(\omega' t - \delta) \end{aligned} \qquad (۵–۱٦)$$

از این جا دیده می‌شود که دامنه حرکت برابر است با $A = \sqrt{۱۰}\,d/٤$.

یک نتیجه‌ی آموزشی میان بُر: در طول آموزش فیزیک، شما در مجال‌های بسیاری با معادله‌های حرکت نوسانگر $\ddot{z} + \omega^۲ z = ۰$ روبرو خواهید شد که در آن $\omega^۲$ عدد مثبتی است و به پارامترهای مختلف سامانه بستگی دارد. هرگاه چنین معادله‌ای را دیدید، بدون این که نگران پیچیدگی ظاهری مسئله باشید، بدون تلاش اضافی پاسخ را $A\cos(\omega t + \phi)$ برگزینید. اگر به معادله‌ی از

نوع $\ddot{z}+\omega^{2}z=0$ رسیدید، می‌دانید که سامانه حرکت نوسانی ساده دارد و بسامد آن جذر ضریب z است.

- **انرژی در نوسانگر ساده**

این بخش را با نگاهی گذرا به انرژی نوسانگر ساده به پایان می‌بریم. جسمی که حرکت نوسانی ساده انجام می‌دهد تحت تاثیر قانون نیروی $F=-kx$ است. حرکت آن عبارت است از $A\cos(\omega t+\phi)$. بنابراین ، انرژی پتانسیل مربوط به این نیرو عبارت است از

$$V=\frac{1}{2}kx^{2}=\frac{1}{2}kA^{2}\cos^{2}(\omega t+\phi) \tag{6-17}$$

اگر از $x(t)$ مشتق بگیریم سرعت به دست می‌آید و می‌توان انرژی جنبشی را حساب کرد

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^{2}=\frac{1}{2}m\omega^{2}A^{2}\sin^{2}(\omega t+\phi)=\frac{1}{2}kA^{2}\sin^{2}(\omega t+\phi) \tag{6-18}$$

در تساوی دوم ω^{2} را با k/m جای‌گزین کردیم. می‌بینید که V و T بین صفر و $kA^{2}/2$ نوسان می‌کنند و نوسان آنها کاملا ناهم فاز است: یعنی هنگامی که V بیشینه است T صفر می‌شود و برعکس. به ویژه چون $\cos^{2}\theta+\sin^{2}\theta=1$ است انرژی کل پایسته است:

$$E=T+V=\frac{1}{2}kA^{2} \tag{6-19}$$

و باید هم برای هر نیروی پایستار این چنین باشد.

۶-۳ نوسانگر میرا

در فصل ۵ دیدیم که در همسایگی ترازمندی پایدار، ذره‌ی تحت تاثیر نیروی پایستار را همواره می‌توان به تقریب، یک نوسانگر هماهنگ پنداشت. اگر سامانه انرژی از دست بدهد، یعنی پس از گذشت مدتی، دامنه‌ی نوسان آن کاهش یابد و یا پس از گذشت زمان به اندازه‌ی کافی دراز، از نوسان باز ایستد، باید این رفتار بگونه‌ای در معادله‌ی حرکت به حساب بیاید. به بیان دیگر، معادله‌ی حرکت باید شامل نیرویی باشد که به سرعت بستگی دارد، نیرویی ناپایستار به صورت $F_{f}=-bv$. این نیرو به میرایی نوسان خواهد انجامید.

تا هنگامی که با جابه‌جایی‌های کوچک در همسایگی نقطه‌ی ترازمندی سرو کار داریم، می‌توان جابه‌جایی x و مشتق نسبت به زمان آن، $\dot{x}$، را کوچک فرض کرد و از کمیت‌هایی مانند $\dot{x}^{2}, x\dot{x}, x^{2}$ چشم‌پوشی کرد. بنابراین، برای نوسان‌های میرا نیروی برآیند وارد به سامانه عبارت است از: $F=-kx-b\dot{x}$. جمله‌ی دوم می‌تواند مقاومت هوا، یا هر محیط دیگری باشد که جسم در آن حرکت می‌کند و بخشی از انرژی خود را به آن محیط می‌دهد. bمقدار ثابتی است که به شکل جسم و نوع محیط بستگی دارد. معادله‌ی حرکت، قانون دوم نیوتون، اینک به صورت زیر درمی‌آید:

$$F=m\ddot{x}=-kx-b\dot{x} \quad\Rightarrow\quad \ddot{x}+\frac{b}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0 \tag{6-20}$$

معادله‌های از این دست، در بسیاری از شاخه‌های فیزیک وجود دارند. مثل نوسان مدار الکتریکی با القائیدگی L ، مقاومت R و خازن C که به طور سری به هم بسته شده‌اند و با معادله‌ی زیر توصیف می‌شود. $L\ddot{q}+R\dot{q}+q/C=0$ که در آن متغیر q بار موجود بر روی یکی از صفحه‌های خازن است.

با تعریف کمیت‌های $\omega \equiv k/m$ و $۲\gamma \equiv b/m$ معادله‌ی (۲۰-٦) به صورت $\ddot{x}+۲\gamma\dot{x}+\omega^۲x=\circ$ درمی‌آید. این معادله همان معادله‌ای است که در مثال۳-٦ پاسخ‌های آن را یافتیم (در اینجا $a\to\omega^2$). اما حالا ما باید محدودیت‌های فیزیکی $\gamma>\circ$ و $\omega^۲>\circ$ را هم در نظر بگیریم. برای سادگی فرض کنید $\Omega^۲\equiv\gamma^۲-\omega^۲$ باشد. حالا می‌توانیم پاسخ معادله‌ی (۲۰-٦) را همانند رابطه‌ی (٦-٦) بنویسیم: معادله‌ی (۲۰-٦) را مانند معادله‌ی مثال۳-٦ می‌توان با پاسخ هایی از گونه‌ی $x=e^{\alpha t}$ حل کرد. اگر از $x=e^{\alpha t}$ نسبت به زمان مشتق بگیریم و در (۲۰-٦) جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$m\alpha^۲+b\alpha+k=\circ \qquad (۲۱-٦)$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از:

$$\alpha=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^۲-\omega^۲} \qquad (۲۲-٦)$$

که در آن $\omega^۲\equiv k/m$ و $۲\gamma\equiv b/m$ تعریف شده‌اند. اینک رابطه‌ی (۲۰-٦) به صورت زیر درمی‌آید

$$\ddot{x}+۲\gamma\dot{x}+\omega^۲x=\circ \qquad (۲۳-٦)$$

و پاسخ‌های آن عبارتند از

$$x(t)=e^{-\gamma t}(Ae^{\Omega t}+Be^{-\Omega t}) \quad , \quad \Omega\equiv\sqrt{\gamma^۲-\omega^۲} \qquad (۲٤-٦)$$

توجه کنید که ω مانند رابطه‌ی (۷-٦)، بسامد نوسان نامیرا است. اگردو طرف رابطه‌ی (۲۰-٦) را در $\dot{x}$ ضرب کنید؛ خواهیم داشت:

$$m\ddot{x}\dot{x}+kx\dot{x}+b\dot{x}^۲=\circ \qquad (۲۵-٦)$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dt}(\tfrac{۱}{۲}m\dot{x}^۲+\tfrac{۱}{۲}kx^۲)+b\dot{x}^۲=\circ \qquad (۲٦-٦)$$

دو عبارت داخل پرانتز را می‌شناسیم ؛ نخستین آنها انرژی جنبشی و دومی انرژی پتانسیل نیروی بازدارنده‌ی، $F=kx$، است. پس، جمله درون پرانتز انرژی کل سامانه، $T+V$، است . چون

$$\frac{d}{dt}(T+V)=-b\dot{x}^۲ \qquad (۲۷-٦)$$

بنابراین، آهنگ انجام کار نیروی $-b\dot{x}$ برابراست با $-b\dot{x}^۲$. از این رابطه به روشنی دیده می‌شود که اگر سامانه، علاوه بر نیروهای پایستار (در این حالت kx) تحت تأثیر نیروهای ناپایستار (در اینجا $b\dot{x}$) هم باشد، آنگاه انرژی سامانه پایسته نمی‌ماند، یعنی $d(T+V)/dt\neq\circ$ و آهنگ تغییر انرژی کل سامانه، با آهنگ انجام کار نیروهای ناپایستار برابر است.

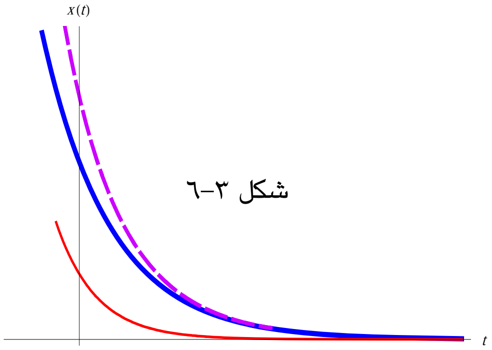
اگر $b<\circ$ باشد، نوسانگر به جای از دست دادن انرژی؛ انرژی به دست خواهد آورد. پس، فرض می‌کنیم که $b>\circ$ است و سه حالت را بررسی می‌کنیم:

۱-۳-۶ تند میرایی:

اگر b به اندازه‌ای بزرگ باشد که $\gamma>\omega$ باشد (یعنی داشته باشیم $\Omega^۲>\circ$) آنگاه هر دو ریشه‌ی α حقیقی و منفی می‌شوند (چون $b>\circ$ است و $\gamma>\Omega\equiv\sqrt{\gamma^۲-\omega^۲}$) و معادله‌ی (۲٤-٦) به صورت زیر درمی‌آید .

$$x(t) = Ae^{-(\gamma-\Omega)t} + Be^{-(\gamma+\Omega)t} \qquad (٦-٢٨)$$

که در آن A و B دو ثابت دلخواه اند. می‌بینیم که جابه‌جایی x به طور نمایی به صفر میل می‌کند و حرکت نوسانی **نیست** . برای زمان های طولانی، جمله‌ی دوم در رابطه‌ی (٦-٢٨) سریع‌تر از جمله‌ی نخست به صفر میل می‌کند. در نتیجه، جمله‌ی برجسته مربوط به ریشه‌ی کوچکتر ($\alpha_- \equiv \gamma - \Omega$) است و حرکت به صورت $e^{-(\gamma-\Omega)t}$ فروافت می کند. این رفتار در شکل (٦-٣) نشان داده شده است. خم کلفت(آبی) جمله‌ی نخست ($e^{-(\gamma-\Omega)t}$) رابطه‌ی (٦-٢٨) است. خم نازک (قرمز) نماینده‌ی جمله‌ی دوم ($e^{-(\gamma+\Omega)t}$) و خم نقطه چین (بنفش) جمع آنهاست. همان گونه که از شکل پیداست خم مربوط به مجموع دو جمله خیلی زود به خم جمله‌ی اول می‌گراید و خم مربوط به جمله‌ی دوم سریع به صفر میل می‌کند. زمان سرشتی که جابه‌جایی x در آن مدت $1/e$ می‌شود عبارت است از $1/\alpha_-$.



شکل ٦-٣

٦-٣-٢ کند میرایی

حالتی را در نظر بگیرید که $\gamma < \omega$ یا $\Omega^2 < 0$ باشد. در این صورت ریشه‌های α موهومی و مزدوج مختلط یکدیگر می‌شوند: $\alpha = -\gamma \pm i\,\omega'$. در این جا $\omega' \equiv \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ تعریف شده است. برای این حالت معادله‌ی (٦-٢٤) به صورت زیر درمی‌آید

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\omega' t} + Be^{-i\omega' t}\right) \qquad (٦-٢٩)$$

حالا عبارت داخل پرانتز رفتاری نوسانی دارد زیرا می‌توانیم آن را با استفاده از قاعده‌ی $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ برحسب توابع مثلثاتی، سینوس و کسینوس، بنویسیم. پس، رابطه‌ی (٦-٢٩) به صورت زیر در می‌آید و نشان می‌دهد که حرکت نوسانی با بسامد ω' است.

$$x(t) = e^{-\gamma t} D\cos(\omega' t + \phi) \qquad (٦-٣٠)$$

توجه کنید که ثابت‌های D و ϕ در رابطه‌ی (٦-٣٠) به ثابت‌های A و B در رابطه‌ی (٦-٢٩) مربوط‌اند و می‌توان به سادگی نشان داد $A + B = D\cos\phi$ و $A - B = i\,D\sin\phi$ اند. چون $x(t)$ یک کمیت اندازه پذیر فیزیکی است یعنی مقدار جابه‌جایی از نقطه‌ی ترازمندی است، باید مقداری حقیقی باشد. بنابراین، D حقیقی است و این لازم می‌دارد که $A^* = B$ باشد. این حرکت نوسانی است و دامنه‌ی آن $De^{-\gamma t}$ است. به خاطر $e^{-\gamma t}$ دامنه با زمان به طور نمایی کاهش می‌یابد و سرانجام برای t های بزرگ به صفر می‌گراید. این رفتار در شکل ٦-٤ نشان داده شده است.

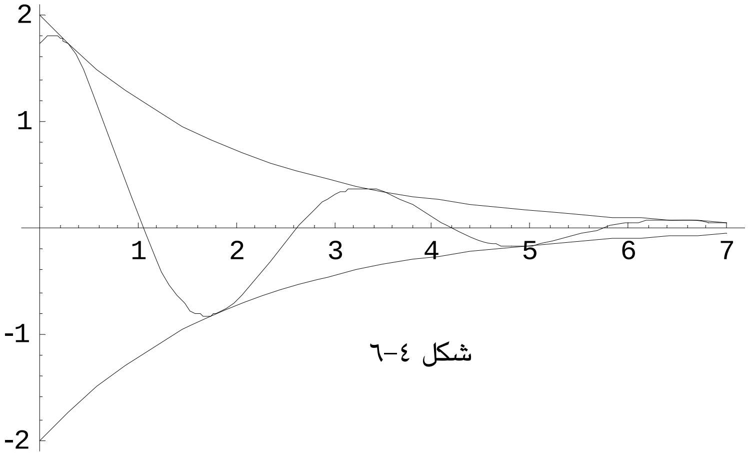
توجه کنید که ω' همواره از بسامد نوسانگر نامیرا $\omega = \sqrt{k/m}$ کوچکتر است. زمان لازم برای این که دامنه به اندازه‌ی $1/e$ مقدار بیشینه کاهش پیدا کند، **زمان و اهلش** نوسانگر نام دارد و برابر است با $1/\gamma = 2m/b$. گاهی از کمیت دیگری به نام ضریب کیفیت یا ضریب " Q " نوسانگر استفاده می‌شود که عددی بدون بعد است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q = \frac{m\omega}{b} = \frac{\omega}{2\gamma} \qquad (٦-٣١)$$

هرچه میرایی کند باشد، Q بزرگتر است. در یک دوره نوسان، دامنه با ضریب $e^{2\pi\gamma/\omega'}$ کاهش می‌یابد. تعداد دوره ها در یک زمان واهلش تقریباً برابر Q/π است. کمیت ω' **بسامد طبیعی** سامانه نام دارد. ω' و ω با رابطه‌ی زیر به یکدیگر مربوط اند.

$$\omega'^{۲} = \omega^{۲} - \gamma^{۲} = \omega^{۲} - \frac{b^{۲}}{۴m^{۲}} \qquad (۶-۳۲)$$

رابطه (۳۱-۶) نشان می‌دهد که نوسان در ناحیه‌ی بین دو خم $De^{-\gamma t}$ و $-De^{-\gamma t}$ قرار خواهد داشت.



شکل ۴-۶

اگر $\gamma \ll \omega$ باشد آنگاه $\omega' \approx \omega$ می‌شود و به تقریب دیگر میرایی هم نخواهیم داشت. هر گاه $\gamma \approx \omega$ باشد خواهیم داشت $\omega' \approx ۰$. این یعنی نوسان‌ها هم آهسته اند و در این صورت دشوار است که بگوییم آیا نوسان وجود دارد یا نه، چون در مقیاس زمانی $۱/\gamma \approx ۱/\omega$ (که در مقایسه با $۱/\omega'$ زمان کوتاهی است) از بین می‌رود. کوتاه آنکه، جنبه‌های اساسی حرکت به نسبت γ/ω' بستگی دارد. اگر $\gamma/\omega' \ll ۱$ باشد، $D\,e^{-\gamma t}$ در مدت زمان چندین نوسان خیلی کم کاهش می‌یابد. این گونه کُند-میرایی را میرایی سبک می‌نامند. اگر $\gamma/\omega' \gg ۱$ باشد، پس از چند نوسان $D\,e^{-\gamma t}$ به تُندی به صفر می‌گراید. این حالت میرایی را کندمیرایی سنگین می‌نامند.

۶-۳-۳ میرایی بحرانی

حالت حدی $\gamma = \omega$، حالت میرایی بحرانی است. در این حالت $\Omega^{۲} = ۰$ است و α دو ریشه‌ی یکسان دارد. بنابراین، پاسخ‌های (۲۹-۶) یا (۳۰-۶) تنها یک ثابت (A + B) خواهد داشت.

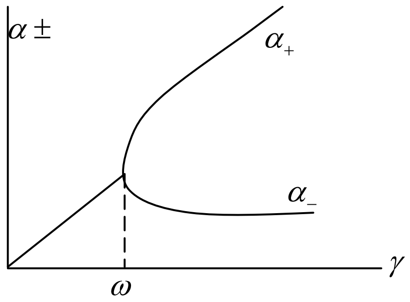
$$x(t) = \frac{۱}{۲}Ae^{-\gamma t} + \frac{۱}{۲}Be^{-\gamma t} = \frac{۱}{۲}(A+B)e^{-\gamma t} \qquad (۶-۳۳)$$

روشن است که این پاسخ نمی‌تواند پاسخ عمومی معادله‌ی حرکت، رابطه‌ی(۲۰-۶) ، باشد (معادله دیفرانسیل مرتبه دو باید دو پاسخ متمایز داشته باشد. ترکیب خطی آنها پاسخ عمومی است). پس باید به جستجوی پاسخ مستقل دوم باشیم. در این حالت خاص، $x = te^{-pt}$ پاسخ دوم است و درستی آن را با جایگزینی مستقیم در رابطه‌ی (۲۰-۶) می‌توان آزمود. پس، پاسخ عمومی عبارت است از:

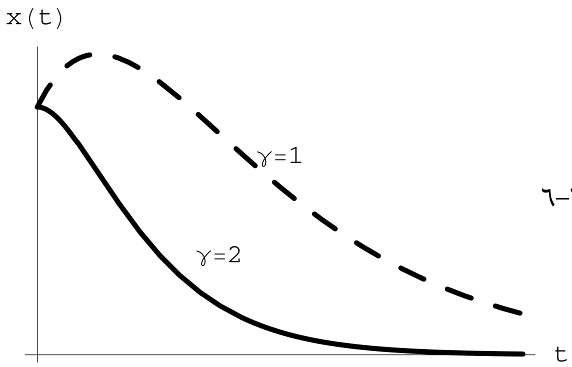
$$x(t) = (a + bt)e^{-\gamma t} \qquad (۶-۳۴)$$

رابطه‌ی (۳۴-۶) حرکت میرایی بحرانی را توصیف میکند. روشن است که این پاسخ نماینده‌ی یک حرکت نوسانی نیست و جابه‌جایی به ازای زمان‌های طولانی به طور مجانبی به صفر می‌رسد. از میرایی بحرانی در بسیاری مواقع استقبال می‌شود. برای نمونه، در ابزار اندازه‌گیری، علاقمندیم نوسان عقربه حول مکان دقیق آن هرچه زودتر از میان برود. هنگامی که میرایی از

حالت بحرانی کمتر است ($\gamma < \omega$) زمان سرشتی واکنش ابزار همان زمان واهلش $1/\gamma$ است که البته با افزایش γ **کاهش** می‌یابد. هنگامی‌که $\gamma > \omega$ است حالت **تند میرایی** داریم و همانگونه که دیدیم زمان سرشتی $1/\alpha_-$ است و دشوار نیست که ببینیم با افزایش γ، با کاهش α_- روبرو خواهیم بود و در نتیجه زمان واکنش ابزار (زمانی که طول می‌کشد تا نوسان عقربه از میان برود) یعنی $1/\alpha_-$ **افزایش** می‌یابد. بنابراین، کوچکترین زمان واکنش با گزینه‌ی $\gamma = \omega$ به دست می‌آید که همانا میرایی بحرانی است. شکل (٥-٦) این رفتار را نشان می‌دهد. در شکل (٦-٦) رابطه‌ی (٣٤-٦) برای دو مقدار γ نشان داده شده است ($\gamma = 1$ و $\gamma = 2$). برای $\gamma = 1$ می‌بینیم که در آغاز $x(t)$ از خود حرکت نوسانی نشان می‌دهد و به زودی این حرکت نوسانی ناپدید می‌شود و خم آن به طور نمایی کاهش پیدا می‌کند. برای $\gamma = 2$ به سختی می‌توان برای زمان‌های بسیار کوتاه اثری از وجود حرکت نوسانی را مشاهده کرد. برای γ های بزرگ نوسان به تندی از میان می رود.



شکل ٥-٦



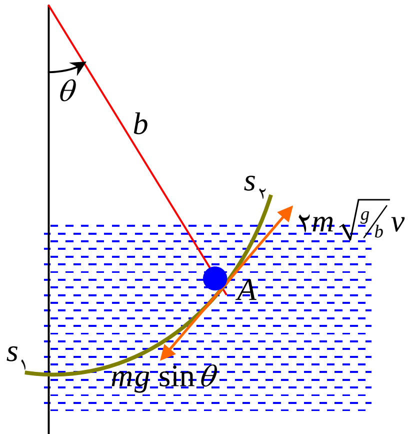
شکل ٦-٦

مثال۶-۶ آونگی را در نظر بگیرید که در آن جرم m از نقطه‌ی ثابتی با ریسمانی به طول b آویخته شده است (شکل۷-۶). وزنه‌ی m در درون محیطی گرانرو (مانند آب یا روغن) فرو رفته است. این محیط نیروی کند کننده را فراهم می‌کند که با سرعت متناسب است. ضریب تناسب برابر است با $2m\sqrt{g/b}$ و g شتاب گرانش است. در آغاز، جرم m از نقطه‌ای که با خط عمودی زاویه‌ی کوچک α می‌سازد، از حالت سکون رها می‌شود. سرعت و جابه‌جایی زاویه‌ای را در زمان t به دست آورید.

حل: در راستای حرکت (خم s_1s_2) به جرم m دو نیرو وارد می‌شود: (۱) مؤلفه‌ی نیروی گرانی در راستای خم: $mg\sin\theta$ و (۲) نیروی بازدارنده‌ی محیط گرانرو $2m\sqrt{g/b}\,b\dot{\theta}$. در اینجا از مختصات θ استفاده می‌کنیم. اگر زاویه‌ی θ را برحسب رادیان در نظر بگیریم، طول کمان پیموده شده برای زاویه‌های کوچک θ برابر $s_1A = b\theta$ است. معادله‌ی حرکت بنا به قانون دوم نیوتون عبارت است از

$$mb\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - 2m\sqrt{g/b}\,b\dot{\theta} \qquad (٣٥-٦)$$

چون جابه‌جایی اولیه کوچک است ($\theta <<$) می‌توان از تقریب $\sin\theta \approx \theta$ استفاده کرد. با این تقریب معادله‌ی حرکت بالا را به صورت زیر می‌نویسیم.



شکل ۷-۶

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{b}\theta - 2\dot{\theta}\sqrt{g/b} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{b}\theta + 2\sqrt{g/b}\,\dot{\theta} = 0 \qquad (۶-۳۶)$$

این همان معادله‌ی حرکت نوسان میرا (رابطه ۶-۲۰) است که به جای متغیر x از θ استفاده شده است و به جای k ثابت mg/b نشسته است و $b \to 2m\sqrt{g/b}$ برای تعیین این که کدام یک از حالت های حرکت نوسانی در این سامانه روی می‌دهد، توجه کنید که در اینجا $\omega^2 = g/b = k/m$ است. در نتیجه داریم

$$\gamma^2 = \frac{b^2}{4m^2} = \frac{4m^2 g/b}{4m^2} = \frac{g}{b} = \omega^2 \qquad (۶-۳۷)$$

پس حرکت، میرایی بحرانی است و باتوجه به رابطه (۶-۳۴) پاسخ معادله‌ی حرکت حرکت عبارت است از

$$\theta = (A + Bt)e^{-\gamma t} = (A + Bt)e^{-\sqrt{g/b}\,t} \qquad (۶-۳۸)$$

ثابت‌های A و B را از شرایط اولیه‌ی مسئله می‌توان به دست آورد: در زمان $t = 0$ ذره با خط عمود زاویه‌ی α داشت و از حالت سکون رها شده بود در نتیجه: $\theta(t=0) = \alpha$, $\dot{\theta}(t=0) = 0$ پس،

$$\alpha = \theta(t=0) = A \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = Be^{-\gamma t} - \gamma(A + Bt)e^{-\gamma t}$$
$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}(t=0) = 0 = B - \gamma\alpha \quad \Rightarrow \quad B = \gamma\alpha = \sqrt{g/b}\,\alpha \qquad (۶-۳۹)$$

و در نتیجه داریم

$$\theta = \alpha \; e^{-\sqrt{g/b}\,t}(1 + \sqrt{g/b}\,t) \qquad , \qquad \dot{\theta} = -\frac{g\alpha t}{b}\; e^{-\sqrt{g/b}\,t} \qquad (۶-۴۰)$$

باز هم می‌بینید که حرکت نوسانی نیست و به طور نمایی با زمان به حالت تعادلی خود برمی‌گردد.

فیزیک محاسباتی 1 نوسانگر میرا

نوسانگر میرای خطی را در نظر بگیرید که در آن جابجایی با سرعت متناسب است. معادله‌ی حرکت عبارت است از:

$$\ddot{X}[t] + \gamma\dot{X}[t] + \omega_0^2 X[t]$$

(الف): این معادله را با شرایط اولیه‌ی $X[t] = X_0$ و $\dot{X}[0] = v_0$ حل کنید.

(ب): پاسخ های حالت های کندمیرا، تندمیرا و میرایی بحرانی را رسم کنید.

(پ): نمودار فضای فاز را برای حالت کندمیرا بکشید.

(ت) : معادله‌ی حرکت مرتبه‌ی دوم نوسانگر میرا را برحسب دو معادله‌ی مرتبه اول

$$\dot{X}[t] = v[t] \quad , \quad \dot{v}_0[t] = -\gamma v[t] - \omega_0 X[t]$$

بیان کنید. برای حالت کندمیرا با گزینه‌های $\gamma = 0.1$ و $\omega_0 = 1$ از دستور PlotVectorField در بسته‌ی Graphics 'PlotField' پیکان‌های مماس بر مسیر را رسم کنید و سپس آن را با رسم به همراه مسیر نشان دهید.

(ج): از دستور تبدیل لاپلاس استفاده کنید و معادله‌ی میرایی را حل کنید.

مثال ۷-۶ (سرعت بیشینه) : جسمی را به یک فنر می‌بندیم واز مکان $x_\circ$ از حالت سکون رها می‌کنیم تا با بسامد ω نوسان کند. این آزمایش را در یک محیط مایع (مثلا در زیر آب) تکرار می‌کنیم. می‌بینیم، حرکت جسم تندمیرا (با ضریب میرایی γ) می‌شود. نسبت بیشینه سرعت دو حالت را بیابید. در حالت حدی $\gamma \ll \omega$ و برای حالت میرایی بحرانی این نسبت را حساب کنید.

حل: برای حالت اول که میرایی وجود ندارد و سامانه با بسامد طبیعی ω نوسان می‌کند، معادله‌ی حرکت عبارت است از $x(t) = C\cos(\omega t + \phi)$. ثابت های C و ϕ را از شرایط اولیه به دست می‌آوریم: معادله‌ی سرعت عبارت است از: $v(t) = dx(t)/dt = -C\omega\sin(\omega t + \phi)$ واز شرط اولیه‌ی $v(\cdot) = \cdot$ به دست می‌آید: $v(\circ) = \circ - C\omega\sin\phi \;\Rightarrow\; \phi = \circ$. شرط اولیه‌ی $x(\cdot) = x_\circ$ می‌گوید $C = x_\circ$. در نتیجه، برای این حالت داریم

$$x(t) = x_\circ\cos(\omega t) \quad , \quad v(t) = -\omega x_\circ\sin(\omega t) \tag{٦-٤١}$$

بیشینه‌ی سرعت هنگامی است که $\sin(\omega t) = ۱$ باشد. پس، اندازه‌ی بیشینه سرعت برای این حالت $\omega x_\circ$ است. در حالت دوم وقتی نوسانگر در مایع قرار دارد، پاسخ با رابطه‌ی (۲۸-٦) داده شده است :

$$x(t) = Ae^{-(\gamma-\Omega)t} + Be^{-(\gamma+\Omega)t}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A(\gamma-\Omega)e^{-(\gamma-\Omega)t} - B(\gamma+\Omega)e^{-(\gamma+\Omega)t} \tag{٦-٤٢}$$

ثابت‌های A و B با شرایط اولیه به دست می‌آیند: از شرط اولیه‌ی $x(t) = x_\circ$ داریم

$$x(\circ) = x_\circ \;\Rightarrow\; A + B = x_\circ$$

$$v(\circ) = \circ \;\Rightarrow\; -(\gamma-\Omega)A - (\gamma+\Omega)B = \circ \tag{٦-٤٣}$$

از حل هم‌زمان این دو معادله A و B به دست می‌آیند: $A = \frac{\gamma+\Omega}{2\Omega}x_\circ$ و $B = -\frac{\gamma-\Omega}{2\Omega}x_\circ$. پس

$$x(t) = \frac{x_\circ}{۲\Omega}[(\gamma+\Omega)e^{-(\gamma-\Omega)t} - (\gamma-\Omega)e^{-(\gamma+\Omega)t}] \tag{٦-٤٤}$$

با مشتق گرفتن از این رابطه و با استفاده از $\gamma^2 - \Omega^2 = \omega^2$ ، معادله‌ی سرعت عبارت خواهد شد از

$$v(t) = -\frac{\omega^۲ x_\circ}{۲\Omega}[e^{-(\gamma-\Omega)t} - e^{-(\gamma+\Omega)t}] \tag{٦-٤٥}$$

یافتن بیشینه‌ی این سرعت آسان است. از آن مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم. بیشینه سرعت در زمان

$$t_{\max} = \frac{۱}{۲\Omega}\ell n(\frac{\gamma+\Omega}{\gamma-\Omega}) \tag{٦-٤٦}$$

پدید می‌آید. با جاگذاری این زمان در رابطه‌ی (٤٥-٦) داریم

$$v(t_{\max}) = -\frac{\omega^۲ x_\circ}{۲\Omega}\exp[-\frac{\gamma}{۲\Omega}\ln(\frac{\gamma+\Omega}{\gamma-\Omega})][\sqrt{\frac{\gamma+\Omega}{\gamma-\Omega}} - \sqrt{\frac{\gamma-\Omega}{\gamma+\Omega}}] = -\omega x_\circ\left(\frac{\gamma-\Omega}{\gamma+\Omega}\right)^{\gamma/۲\Omega} \tag{٦-٤٧}$$

حالا می‌توان نسبت ، R ، دو سرعت بیشینه‌ی خواسته شده را حساب کرد

$$R = \left(\frac{\gamma+\Omega}{\gamma-\Omega}\right)^{\gamma/۲\Omega} \tag{٦-٤٨}$$

در حالت حدی $\gamma \ll \omega$ داریم

$$\Omega \equiv \sqrt{\gamma^{۲}-\omega^{۲}} = \gamma\sqrt{۱-\frac{\omega^{۲}}{\gamma^{۲}}} = \gamma\left(۱-\frac{\omega^{۲}}{\gamma^{۲}}\right)^{۱/۲} \approx \gamma\left(۱-\frac{۱}{۲}\frac{\omega^{۲}}{\gamma^{۲}}+\ldots\right) = \gamma-\frac{۱}{۲}\frac{\omega^{۲}}{\gamma} \qquad (۶-۴۹)$$

و بنابراین، نسبت بیشینه سرعت‌ها ، رابطه‌ی (۴۸-۶) ، عبارت خواهد بود از

$$R = \left(\frac{\gamma+(\gamma-\omega^{۲}/۲\gamma)}{\gamma-(\gamma-\omega^{۲}/۲\gamma)}\right)^{\gamma/۲(\gamma-\omega^{۲}/\gamma)} \approx \left(\frac{۲\gamma}{\omega^{۲}/۲\gamma}\right)^{۱/۲} = \frac{۲\gamma}{\omega} \qquad (۶-۵۰)$$

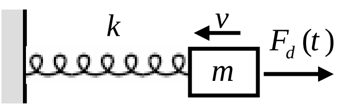
توجه کنید که در صورت کسر اول و نیز در مخرج ، از $\omega^{۲}/۲\gamma$ در مقایسه با γ چشم پوشی کردیم.

در حالت میرایی بحرانی ($\gamma \approx \omega$ و $\Omega \approx ۰$)، اگر برای سادگی تعریف کنیم $\Omega/\gamma \equiv \varepsilon$. می‌توانیم رابطه‌ی (۴۸-۶) را به صورت زیر بنویسیم:

$$R = \left(\frac{۱+\Omega/\gamma}{۱-\Omega/\gamma}\right)^{\gamma/۲\Omega} = \left(\frac{۱+\varepsilon}{۱-\varepsilon}\right)^{۱/۲\varepsilon} = \left(\frac{(۱+\varepsilon)^{۲}}{۱-\varepsilon^{۲}}\right)^{۱/۲\varepsilon} \approx (۱+۲\varepsilon)^{۱/۲\varepsilon} \approx e \qquad (۶-۵۱)$$

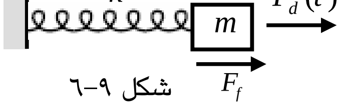
با اندک محاسبه‌ی جبری مانند بالا می‌توان نشان داد که در این دو حالت حدی $t_{\max}$ به ترتیب عبارتند از $\ell n(۲\gamma/\omega)/\gamma$ و $۱/\gamma \approx ۱/\omega$.

۴-۶ حرکت نوسانی واداشته و میرا



شکل ۸-۶

نخست نوسانگر ساده‌ی بدون نیروی میراننده را در نظر بگیرید که به آن نیروی وابسته به زمان $F_d(t)$ اعمال می‌شود. مانند جرمی که به انتهای فنری بسته شده است و به جرم یک نیروی جنباننده‌ی دوره‌ای (وابسته به زمان) وارد می‌شود: $F_d(t) = F_{\circ}\cos(\omega_{\circ}t)$. در شکل (۸-۶)یک چنین سامانه‌ای نشان داده شده است. بنابراین، معادله‌ی حرکت این سامانه بنا به $F = ma$ عبارت است از $m\ddot{x} = -kx + F_{\circ}\cos(\omega_{\circ}t)$. نیروی $F_d(t)$ نیروی وادارنده است و حرکت اینک نوسانی واداشته است. $F_{\circ}$ دامنه‌ی نیروی وادارنده نام دارد و $\omega_{\circ}$ بسامد وادارنده است. به سامانه‌ی ما افزون بر نیروی وادارنده، ممکن است نیروی میراننده ، مانند نیروی پسار هوا، هم وارد شود. در این صورت معادله‌ی حرکت اندکی پیچیده‌تر می‌شود اما در شیوه‌ی حل مسئله که در زیر به آن می‌پردازیم تاثیر چندانی ندارد. در این صورت، حرکت شبیه حرکت نوسانگر میرا می‌شود که به آن نیروی وادارنده نیز اعمال می‌شود و از این رو آن را *حرکت واداشته میرا* خواهیم نامید. در شکل (۹- ۶) افزون بر نیروی وادارنده، نیروی میراننده (پسار) با F_f نشان داده شده است. بنابراین، بگذارید در این حالت به مسئله عمومی‌تر نگاه کنیم. در اینجا روشن است که برای نیروی وادارنده، قانون نیروی خاصی را به صورت $F_{\circ}\cos(\omega_{\circ}t)$ برگزیدیم. این یک نیروی دوره‌ای در زمان است. در حالت عمومی‌تر می‌توان آن را به صورت نمایی، $F_{\circ}e^{i\omega_{\circ}t}$، نوشت. درست است که این یک تابع مختلط



شکل ۹-۶

است و نیرو کمیت اندازه پذیر و در نتیجه یک مقدار حقیقی است. اما این شکل عمومیت دارد. بخش حقیقی و یا بخش موهومی آن، هر دو، کمیت‌های حقیقی‌اند و نیروهای از نوع سینوس و کسینوس را به دست می‌دهد. افزون براین، هر نیروی دوره‌ای را می‌توان به صورت جمع توابع سینوسی و کسینوسی، یا به طور کلی به شکل جمعی از جمله‌های نمایی نوشت. این اساس قضیه‌ی فوریه است. بنابراین، فهمیدن واکنش سامانه به این قانون نیرو، زیرساخت یافتن واکنش سامانه به هر نیروی دوره‌ای

است.

از شکل (۹-٦) دیده می‌شود که به جرم m سه نیرو وارد می‌شود: نیروی فنر $-kx$ ، نیروی پسار $-bv$ و نیروی وادارنده $F_\circ e^{i\omega_\circ t}$. برآیند این نیروها نشان می‌دهد که به جرم m نیرویی به صورت $F(x,\dot{x},t)$ وارد می‌شود که جمع هر سه است: $F(x,\dot{x},t)=-b\dot{x}-kx+F_0 e^{i\omega_0 t}$. معادله‌ی حرکت سامانه عبارت است از

$$m\ddot{x}=-b\dot{x}-kx+F_\circ e^{i\omega_\circ t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}+۲\gamma\dot{x}+\omega^۲=C_\circ e^{i\omega_\circ t} \tag{٦-٥٢}$$

که در آن γ ،ω و $C_\circ$ کمیت‌های داده شده اند. این یک معادله‌ی دیفرانسیل ناهمگن است. ناهمگن به این معنی است که سمت راست آن دیگر صفر نیست. چگونه می‌توان این معادله را حل کرد؟ این معادله در شکل کنونی‌اش خیلی فیزیکی به نظر نمی‌آید؛ چون یک جمله‌ی مختلط دارد. همان‌گونه که گفتم می‌توان جمله‌ی سمت راست را با $F_\circ\cos(\omega_\circ t)$ جایگزین کرد. اما در اینجا ما نگران فیزیکی بودن آن نیستیم. در مثال ۷-٦ این جایگزینی را انجام خواهیم داد. سرو کله‌ی معادله‌های از نوع (٥٢-٦) به فراوانی در فیزیک ظاهر می‌شود و بهتر است یک بار برای همیشه حل آنها را ببینیم.

در این جا هم از روش پاسخ آزمون استفاده می‌کنیم. پاسخی را حدس می‌زنیم و آن را به همراه مشتق‌هایش در معادله‌ی دیفرانسیل (٥٢-٦) جا گذاری می‌کنیم تا ببینیم با چه شرایطی در معادله صدق می‌کند. چون در سمت راست رابطه‌ی (٥٢-٦) جمله‌ای به صورت $e^{i\omega_0 t}$ داریم پس، پاسخ را به صورت $x(t)=Ae^{i\omega_0 t}$ برمی‌گزینیم. ضریب A به $\omega_\circ$ بستگی خواهد داشت و ما آن را به زودی خواهیم دید.

اگر از $x(t)=Ae^{i\omega_0 t}$ مشتق بگیریم و $\dot{x}$ و $\ddot{x}$ را به دست آوریم و در رابطه‌ی (٥٢-٦) جاگذاری و از دو طرف ضریب غیر صفر $e^{i\omega_0 t}$ را حذف کنیم، خواهیم داشت

$$(-\omega_\circ^۲)A+۲\gamma(i\,\omega_\circ)A+\omega^۲A=C_\circ \tag{٦-٥٣}$$

از این جا می‌توانیم A را برحسب بقیه‌ی کمیت های داده شده به دست آورد. داریم

$$A=\frac{C_\circ}{-\omega_\circ^۲+۲i\,\gamma\omega_\circ+\omega^۲} \tag{٦-٥٤}$$

بنابراین، پاسخ معادله‌ی (٥٢-٦) عبارت است از

$$x(t)=\left(\frac{C_\circ}{-\omega_\circ^۲+۲i\,\gamma\omega_\circ+\omega^۲}\right)e^{i\omega_\circ t} \tag{٦-٥٥}$$

توجه کنید که در رابطه‌ی (٥٥-٦) هیچ *پارامتر آزادی* وجود ندارد که برای یافتن آنها به شرایط اولیه نیاز داشته باشیم. ما یک پاسخ **خاص** یافته‌ایم .

حالا که آزاد نیستیم تا پارامترهای رابطه‌ی (٥٥-٦) را تغییر بدهیم، چگونه می‌توان شرایط اولیه‌ی مسئله را که دلخواه اند، راضی کرد؟ پاسخ این پرسش نگران کننده این است که رابطه‌ی (٥٥-٦) عمومی ترین پلسخ معادله‌ی دیفرانسیل (٥٢-٦) نیست. یادتان می‌آید که هر معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دو باید دو پاسخ داشته باشد و دو پارامتر هم دارد که ثابت‌های انتگرال‌گیری اند؟ عمومی‌ترین پاسخ معادله‌ی (٥٢-٦) عبارت است از پاسخ (٥٥-٦) بعلاوه‌ی پاسخ" معادله‌ی دیفرانسیل همگن"، یعنی رابطه‌ی (٦-٦). رابطه‌ی (٦-٦) پاسخ معادله‌ی (٥٢-٦) اما بدون سمت راست آن است (با $a\to\omega^2$). بنابراین، جمع دو پاسخ (٦-٦) و (٥٥-٦) به یقین پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل ما، معادله‌ی (٥٢-٦) است؛ چون ما پاسخ (٦-٦) را به ویژه چنان به دست آورده‌ایم که اگر در سمت چپ معادله‌ی (٥٢-٦) جاگذاری کنیم، سمت چپ آن صفر می‌شود. بنابراین، افزودن آن به پاسخ خاص تساوی را در معادله‌ی (٥٥-٦) برهم نمی‌زند؛ چون سمت چپ خطی است و اصل برنهش هم به دادمان رسید. پس ، پاسخ

عمومی معادله‌ی (۵۲-۶) عبارت است از

$$x(t)=e^{-\gamma t}\left(Ae^{t\sqrt{\gamma^{2}-\omega^{2}}}+Be^{-t\sqrt{\gamma^{2}-\omega^{2}}}\right)+\left(\frac{C_{0}}{-\omega_{0}^{2}+2i\gamma\omega_{0}+\omega^{2}}\right)e^{i\omega_{0}t} \qquad (۶-۵۶)$$

حالا A و B با شرایط اولیه‌ی مسئله تعیین می‌شوند.

با توجه به اصل برنهش، اینک روشن است که اگر معادله‌ی دیفرانسیل ما اندکی متفاوت می‌بود و بیش از یک جمله در سمت راست خود می‌داشت، مانند

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^{2}=C_{1}e^{i\omega_{1}t}+C_{2}e^{i\omega_{2}t} \qquad (۶-۵۷)$$

راه‌کار حل آن چگونه می‌تواند باشد: نخست معادله را فقط با جمله‌ی اول سمت راست حل می‌کنیم. سپس معادله را فقط با جمله‌ی دوم سمت راست حل می‌کنیم. این دو پاسخ را با هم جمع می‌کنیم و پاسخ معادله‌ی همگن، یعنی رابطه‌ی (۶-۶) را بر آنها می‌افزاییم تا پاسخ عمومی معادله‌ی (۵۷-۶) به دست آید. این کار را به این خاطر می‌توان انجام داد که سمت چپ معادله‌ی (۵۷-۶) خطی است واز اصل برنهی می‌توان استفاده کرد. سرانجام این که اگر چندین جمله در سمت راست داشته باشیم ، مانند

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^{2}=\sum_{n}C_{n}e^{i\omega_{n}t} \qquad (۶-۵۸)$$

باید n معادله را حل کنیم، هر بار فقط با یکی از n جمله‌ی سمت راست. سپس پاسخ‌ها را باهم جمع کنیم و سرانجام پاسخ معادله‌ی همگن، رابطه‌ی (۶-۶)، را هم به آنها اضافه کنیم. اگر تعداد جمله‌های سمت راست بینهایت باشد، ایرادی ندارد این بهترین حالت کاربرد اصل برنهی است. باید بینهایت جمله را با هم جمع کنیم.

نکته: آنچه که در بالا آمد به همراه نتیجه‌ی بنیادی تحلیل فوریه، اجازه می‌دهد تا بتوانیم هر معادله‌ی دیفرانسیل از نوع

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^{2}=f(t) \qquad (۶-۵۹)$$

را (دستکم، در بنیاد) حل کنیم.

بر اساس تحلیل فوریه هر تابع $f(t)$ خوش رفتاری را می‌توان به مولفه‌های فوریه‌ی آن تجزیه کرد و نوشت

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (۶-۶۰)$$

در این جمع پیوسته (یعنی انتگرال) $g(\omega)d\omega$ به جای C_n در رابطه‌ی (۵۸-۶) نشسته است. بنابراین، اگر در سمت راست (۵۹-۶)، تابع $f(t)$ نماینده‌ی فقط یک جمله باشد (یعنی یک جمله از نوع $e^{i\omega t}$) و پاسخ آن را با $x(t)=S_{\omega}(t)$ نشان بدهیم ($S_{\omega}(t)$ همان پاسخ (۵۵-۶) است بدون ضریب C_0)، آنگاه بنابه اصل برنهی پاسخ کامل معادله‌ی (۵۹-۶) عبارت است از

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\omega)S_{\omega}(t)d\omega \qquad (۶-۶۱)$$

یافتن ضریب $g(\omega)$ دشوارترین یا پیچیده ترین بخش این تحلیل است، ما به آن نخواهیم پرداخت ولی دانستن این که می‌توان هر معادله‌ای از نوع (۵۹-۶) را حل کرد خوب است. ♣

مثال ۸-۶ (سامانه‌ی واداشته‌ی میرا): فنری با ثابت k را در نظر بگیرید. جرم m برابر شکل (۹-۶) به انتهای آن بسته شده است. نیروی پسار متناسب با سرعت $F_f=-bv$ به آن وارد می‌شود. افزون براین، نیروی وادارنده‌ی $F_d(t)=F_d\cos\omega_d t$ به جرم اثر می‌کند. مکان جرم را به صورت تابعی از زمان بیابید.

حل: نیروی کل وارد به جرم $F(x,\dot{x},t)=-b\dot{x}-kx+F_d\cos\omega_d t$ است . از $F=ma$ داریم

$$\ddot{x}+۲\gamma\dot{x}+\omega^{۲}x=F\cos\omega_d t=\frac{F}{۲}(e^{i\omega_d t}+e^{-i\omega_d t}) \qquad (۶-۶۲)$$

که در آن $۲\gamma\equiv b/m$، $\omega^{۲}\equiv k/m$ و $F\equiv F_d/m$ اند. توجه کنید که در اینجا دو بسامد ω و ω_d وجود دارند که لزوما به هم دیگر مربوط نیستند. رابطه‌ی (۶-۵۵) به همراه اصل برنهی می‌گویند که پاسخ خاص معادله‌ی (۶-۶۲) عبارت است از

$$x_p(t)=\left(\frac{F/۲}{-\omega_d^{۲}+۲i\gamma\omega_d+\omega^{۲}}\right)e^{i\omega_d dt}+\left(\frac{F/۲}{-\omega_d^{۲}-۲i\gamma\omega_d+\omega^{۲}}\right)e^{-i\omega_d dt} \qquad (۶-۶۳)$$

بنابراین، پاسخ عمومی عبارت است از جمع این پاسخ با پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل همگن که در رابطه‌ی (۶-۲۹) داده شده است. در رابطه‌ی (۶-۶۳) وجود i ها آن را موهومی نشان می‌دهد و این خوب نیست زیرا x مکان است و در نتیجه باید یک کمیت حقیقی باشد. می‌توانیم i ها را از رابطه‌ی بالا حذف کنیم. برای این کار صورت و مخرج هر یک از جمله‌ها را در مزدوج مختلط مخرج ضرب کنید و از قاعده‌ی $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ استفاده کنید. پس از اندکی عملیات جبری خواهیم داشت

$$x_p(t)=\left(\frac{F(\omega^{۲}-\omega_d^{۲})}{(\omega^{۲}-\omega_d^{۲})^{۲}+۴\gamma^{۲}\omega_d^{۲}}\right)\cos\omega_d t+\left(\frac{۲F\gamma\omega_d}{(\omega^{۲}-\omega_d^{۲})^{۲}+۴\gamma^{۲}\omega_d^{۲}}\right)\sin\omega_d t \qquad (۶-۶۴)$$

نکته: می‌توانستیم پاسخ معادله‌ی (۶-۶۲) را با انتخاب قسمت حقیقی پاسخ معادله‌ی (۶-۵۲) یعنی با پاسخ (۶-۵۵) هم به دست آوریم . البته با جاگذاری‌های $a\to\omega^{۲}$ و $C_{۰}\to F$. این کار شدنی است زیرا اگر قسمت حقیقی معادله‌ی (۶-۵۲) را نگاه کنیم داریم:

$$\frac{d^{۲}}{dt^{۲}}\left(\mathrm{Re}(x)\right)+۲\Omega\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Re}(x)\right)+\omega^{۲}\left(\mathrm{Re}(x)\right)=\mathrm{Re}\left(Fe^{i\omega_{۰}t}\right)=F\cos(\omega_{۰}t) \qquad (۶-۶۵)$$

به بیان دیگر، اگر $x(t)$ در معادله‌ی (۶-۵۲) با طرف دوم به صورت $Fe^{i\omega_{0}t}$ صدق کند، آنگاه قسمت حقیقی $x(t)$ یعنی $\mathrm{Re}(x)$ در همان معادله با طرف دوم $F\cos\omega_{۰}t$ صدق می‌کند. بنابراین، روشن است که قسمت حقیقی پاسخ (۶-۵۵) به نتیجه‌ی (۶-۶۴) می‌انجامد.

اگر دوست ندارید از اعداد مختلط استفاده کنید، هنوز راه دیگری برای حل معادله‌ی (۶-۶۲) با طرف دوم به صورت $\cos\omega_d t$ وجود دارد. کافی است پاسخ آزمونی به صورت $A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t$ برگزینید و آن را در معادله قرار دهید و سپس A و B را به دست آورید. باز هم به پاسخ (۶-۶۴) می‌رسید. جزییات آن را به مسئله ها واگذار می کنیم. ♣

پاسخ (۶-۶۴) را می‌توان ساده‌تر نوشت. کافی است کمیت R را به صورت زیر تعریف کرد

$$R\equiv\sqrt{(\omega^{۲}-\omega_d^{۲})^{۲}+(۲\gamma\omega_d)^{۲}} \qquad (۶-۶۶)$$

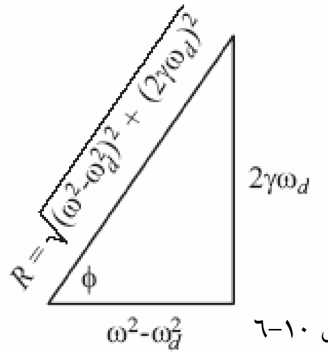
حالا پاسخ خاص معادله‌ی (۶-۶۲) یعنی رابطه‌ی (۶-۶۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x_p(t)=\frac{F}{R}\left(\frac{(\omega^{۲}-\omega_d^{۲})}{R}\cos\omega_d t+\frac{۲\gamma\omega_d}{R}\sin\omega_d t\right)\equiv\frac{F}{R}\cos(\omega_d t-\phi) \qquad (۶-۶۷)$$

فاز ϕ با رابطه‌های زیر داده شده است

$$\cos\phi=\frac{\omega^{۲}-\omega_d^{۲}}{R}\,,\quad \sin\phi=\frac{۲\gamma\omega_d}{R}\ \Rightarrow\ \tan\phi=\frac{۲\gamma\omega_d}{\omega^{۲}-\omega_d^{۲}} \qquad (۴-۶۸)$$

مثلثی که زاویه‌ی ϕ را توصیف می کند در شکل (۶-۱۰) نشان داده شده است. توجه کنید که $۰\le\phi<\pi$ ، چون در رابطه‌ی (۶-۶۸) $\sin\phi$ بزرگتر یا مساوی صفر است. معادله‌ی (۶-۶۷) پاسخ خاص معادله‌ی دیفرانسیل (۶-۶۲) است و برای این که پاسخ عمومی را بیابیم، همان‌گونه که به آن اشاره کردیم باید پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل همگن را نیز که در رابطه‌ی (۶-۲۴)



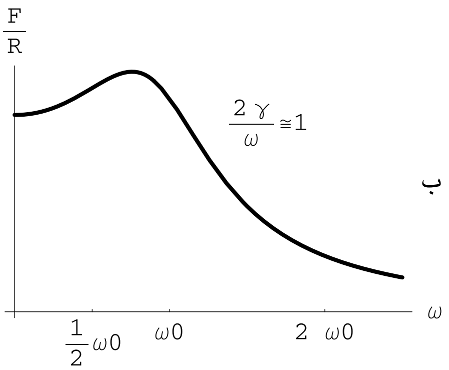
شکل ١٠-٦

داده شده است به پاسخ (٦٧-٦) اضافه کنیم. پس ، سرانجام برای پاسخ کامل خواهیم داشت:

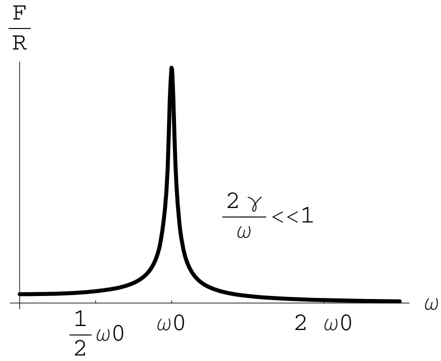
$$x(t)=\frac{F}{R}\cos(\omega_d t-\phi)+e^{-\gamma t}\left(Ae^{\Omega t}+Be^{-\Omega t}\right) \qquad (٦٩-٦)$$

A و B را شرایط اولیه تعیین می‌کنند. توجه کنید که اگر در سامانه میرایی وجود نداشته باشد (یعنی $\gamma>0$) پاسخ قسمت همگن (جمله‌ی دوم در رابطه‌ی (٦٩-٦)) به ازای زمان‌های بزرگ به صفر می‌گراید و تنها پاسخ خاص باقی می‌ماند. به بیان دیگر، سامانه به یک $x(t)$ مشخص میل می‌کند که مستقل از شرایط اولیه است.

دامنه‌ی F/R و فاز ϕ هر دو تابعی از ω_d اند. رفتار آنها به $2\gamma/\omega$ بستگی دارد. این رفتار برای F/R در شکل (١١-٦) نشان داده شده است. برای میرایی سبک، دامنه‌ی F/R در $\omega_d=\omega$ بیشینه است. در این حالت حدیِ **تشدید** دامنه $F/2\gamma\omega$ است .



شکل ١١-٦ ب



شکل ١١-٦ الف

با $\gamma\to 0$ دامنه به $F/2\gamma\omega\to\infty$ میل می کند؛ چیزی که برای نوسانگر نامیرا انتظار داریم.

١-٥-٦ تشدید

دامنه‌ی حرکت با $1/R$ متناسب است. برای ω_d و γ داده شده بیشینه‌ی آن در $\omega=\omega_d$ است. برای ω و γ بیشینه‌ی آن در $\omega_d=\sqrt{\omega^2-2\gamma^2}$ است (برای به دست آوردن این مقدار به ازای ω و γ از R مشتق بگیرید و کمینه‌ی آن را بیابید.) در حالت میرایی سبک، یعنی برای $\omega\gg\gamma$ این مقدار به $\omega\approx\omega_d$ کاهش می‌یابد. واژه‌ی تشدید برای توصیف حالتی به کار می‌رود که دامنه بیشترین مقدار ممکن خود را دارد. به طور شهودی هم می‌توان پذیرفت که این حالت (تشدید) هنگامی روی بدهد که بسامد وادارنده و بسامد فنر باهم برابر باشند. اما فاز، ϕ ، حرکت در حالت تشدید چقدر است؟ با استفاده از رابطه‌ی (٦٨-٦) می‌بینیم که وقتی $\omega\approx\omega_d$ است $\tan\phi\approx\pm\infty$ می‌شود. پس در حالت تشدید داریم $\phi=\pi/2$ (توجه بکنید که این مقدار $\pi/2$ است و نه $-\pi/2$ ؛ چون $\sin\phi$ مثبت است.) و حرکت ذره با ضریبی از دوره‌ی نوسان نیروی وادارنده عقب است. برای نمونه، اگر جرم چسبیده به فنر به سمت راست حرکت کند و از مبداء بگذرد (یعنی هنوز باید ١/٤ چرخه‌ی نوسان را بپیماید تا به بیشینه‌ی مسافت x برسد) نیرو در بیشینه‌ی خودش قرار دارد و هنگامی که ذره به بیشینه‌ی جابه‌جایی خود می‌رسد نیرو به صفر رسیده است.

از نگاه انرژی هم می‌توان دریافت که وقتی نیرو بیشینه است که جرم بیشترین سرعت را دارد. اگر بخواهیم دامنه بزرگتر بشود باید به سامانه تا جایی که می‌توانیم انرژی بدهیم. برای این کار باید بر روی سامانه کار انجام دهیم. یعنی تا جایی که بتوانیم

بر روی سامانه کار انجام می‌دهیم. برای این که بیشینه کار ممکن را روی سامانه انجام دهیم باید نیرو تا مسافت بزرگتری به سامانه اعمال شود و این یعنی نیرو را باید هنگامی به سامانه اعمال کنیم که جرم بیشترین سرعت خود را داشته باشد (وقتی که جرم از مبداء می‌گذرد و سرعت می‌گیرد). کوتاه آنکه، سرعت v مشتق مسافت x است و بنابراین به اندازه‌ی $۱/۴$ چرخه‌ی نوسان از x جلوتر است. چون در حالت تشدید می‌خواهیم نیرو و سرعت هم فاز باشند، پس باید نیرو نیز به اندازه‌ی $۱/۴$ چرخه‌ی نوسان از x جلوتر باشد.

۲-۵-۶ فاز ϕ

فاز حرکت با رابطه‌ی (۶-۶۸) به صورت زیر داده شده است

$$\tan\phi = \frac{۲\gamma\omega_d}{\omega^۲ - \omega_d^۲} \qquad (۶-۷۰)$$

اینک می خواهیم برای چند مقدار ω_d بینیم فاز ϕ چه مقدارهایی را می‌پذیرد.

- اگر $\omega_d \approx ۰$ (یا دقیق تر $\omega_d \ll \omega$) باشد، آنگاه $\phi \approx ۰$ می‌شود، یعنی حرکت و نیرو هم فازند. فهمیدن ریاضی این رفتارساده است. برای $\omega_d \approx ۰$ هر دوی $\ddot{x}$ و $\dot{x}$ کوچک اند (چون آنها به ترتیب با $\omega_d^۲$ و ω_d متناسب اند). پس در رابطه‌ی (۶-۶۲) دو جمله‌ی نخست قابل چشم پوشی‌اند و داریم $x \propto \cos\omega_d t$. یعنی فاز حرکت صفر است. دلیل فیزیکی‌اش این است که چون حرکت اساسا شتاب ندارد، نیروهای برآیند صفر است. این بدان معنی است که نیروی وادارنده و نیروی فنر یکدیگر را حذف می‌کنند (یعنی این دو نیرو به اندازه ی ۱۸۰°با هم اختلاف فاز دارند) و البته نیروی میراننده هم وجود دارد اما قابل چشم پوشی است زیرا با سرعت متناسب است و داریم $\dot{x} \approx ۰$. اما نیروی فنر هم به اندازه‌ی ۱۸۰° با حرکت اختلاف فاز دارد (به خاطر علامت منفی در $F=-kx$) بنابراین، نیروی وادارنده با حرکت هم فاز می‌شود.
- اگر $\omega_d \approx \omega$ باشد، آنگاه $\tan\phi \approx \pi/۲$ می‌شود که حالت تشدید است و در بالا به آن پرداختیم.
- اگر $\omega_d \approx \infty$ باشد، (دقیق تر $\omega_d \gg \omega$) آنگاه $\phi \approx \pi$ می‌شود. دلیل ریاضی آن، این است که اگر $\omega_d \approx \infty$ باشد، جمله‌ی $\ddot{x}$ در معادله‌ی (۶-۶۲) بر جمله‌های دیگر چیره می‌شود. در نتیجه، داریم $\ddot{x} \propto \cos\omega_d t$. پس، $\ddot{x}$ با نیرو هم فاز است. اما x و $\ddot{x}$ به هم ۱۸۰° اختلاف فاز دارند. این سبب می‌شود که x و نیرو به اندازه‌ی ۱۸۰° اختلاف فاز پیدا کنند. دلیل فیزیکی: اگر $\omega_d \approx \infty$ باشد، آنگاه جرم چسبیده به فنر به سختی حرکت می‌کند؛ چون از رابطه‌ی (۶-۶۷) می‌دانیم که دامنه با $۱/R$ و بنابراین، با $۱/\omega_d^۲$ متناسب است. این دامنه می‌گوید که سرعت با $۱/\omega_d$ متناسب است. پس، هر دوی x و v همواره کوچک اند. اما اگر x و v هر دو همواره کوچک باشند می‌توان از نیروی فنر که با x متناسب است چسم‌پوشی کنیم. هم‌چنین می‌توان از نیروی میراننده که با v متناسب است چشم‌پوشی کرد. آنجه باقی می‌ماند عبارت است از جرمی که به آن تنها نیروی وادارنده اعمال می‌شود. البته رفتار ذره‌ای را که تنها تحت اثر نیروی نوسانی حرکت می‌کند، می شناسیم: جرم متصل به فنر. جرمی را که در این حالت به فنر بسته‌ایم نمی تواند بگوید که آیا تحت اثر نیروی وادارنده‌ی نوسانی حرکت می‌کند یا به وسیله‌ی نیروی فنر پس و پیش می‌شود. برای جرم هر دو یکی است. پس، باید در هر دو صورت فاز حرکت یکسان باشد. اما در مسئله‌ی ما علامت منفی در $F=-kx$ می‌گوید که نیرو به اندازه‌ی ۱۸۰° با حرکت اختلاف فاز دارد. پس، برای $\omega_d \approx \infty$ نیز نتیجه همان است.

۶-۶ نوسانگرهای جفت شده

تاکنون در بخش‌های پیش ، تنها با یک تابع وابسته به زمان، $x(t)$، سروکار داشتیم. اگر دو تابع وابسته به زمان، $x(t)$ و $y(t)$ داشته باشیم که به وسیله‌ی دو معادله ی دیفرانسیل "جفت شده" به هم مربوط باشند چه کنیم؟ معادله‌های دیفرانسیل زیر را برای نمونه در نظر بگیرید

$$2\ddot{x}+\omega^2(5x-3y)=0 \qquad , \qquad 2\ddot{y}+\omega^2(5y-3x)=0 \tag{6-71}$$

به این گونه معادله‌ها می گوییم معادله های دیفرانسیل جفت شده، چون x و y در هردوی آنها وجود دارند و چندان روشن نیست که چگونه می‌توان آنها را از هم جدا کرد و x و y را به دست آورد. در حال حاضر کاری نداریم که این گونه معادله‌ها از کجا می‌آیند. به زودی با وضعیت‌های فیزیکی که به این گونه معادله‌های جفت شده می‌انجامند روبرو خواهیم شد. نخست می‌خواهیم شیوه‌ی حل آن ها را بیاموزیم، یعنی $x(t)$ و $y(t)$ را چنان بیابیم که در رابطه‌ی (۷۱-۶) صدق کنند. دستکم دو شیوه برای حل معادله‌های دیفرانسیل جفت شده وجود دارد. بگذارید آن‌ها را ببینیم

روش ۱: گاهی می‌توان ترکیب‌های خطی از معادله‌های داده شده را یافت که زیبا و آشنا هستند. معادله‌های رابطه‌ی (۷۱-۶) این ویژگی را دارند. اگر آن ها را باهم جمع کنیم خواهیم داشت

$$(\ddot{x}+\ddot{y})+\omega^2(x+y)=0 \tag{6-72}$$

خب! در این رابطه می‌بینیم که x و y تنها به صورت جمع مختصات ظاهر شده‌اند. اگر تغییر متغیری به صورت $z\equiv x+y$ تعریف کنیم آنگاه رابطه‌ی (۷۲-۶) به معادله‌ی نوسانگر هماهنگ ساده و آشنای $\ddot{z}+\omega^2 z=0$ تبدیل می‌شود که پاسخش را می‌شناسیم

$$x+y=A_1\cos(\omega t+\phi_1) \tag{6-73}$$

و البته می‌دانیم که ثابت‌های A_1 و ϕ_1 را شرایط اولیه تعیین می‌کنند. اگر تفاضل معادله‌های رابطه‌ی (۵۹-۶) را حساب کنیم، خواهیم داشت

$$(\ddot{x}-\ddot{y})+4\omega^2(x-y)=0 \tag{6-74}$$

این رابطه هم مانند رابطه‌ی (۷۲-۶) است و x و y تنها به صورت تفاضل مختصات در آن ظاهر شده‌اند. رابطه‌ی (۷۴-۶) هم همانند معادله‌ی نوسانگر هماهنگ ساده است و پاسخ آن را می‌دانیم

$$x-y=A_2\cos(2\omega t+\phi_2) \tag{6-75}$$

حالا اگر معادله‌های (۷۳-۶) و (۷۵-۶) را باهم حل کنیم، $x(t)$ و $y(t)$ به دست می‌آیند. داریم:

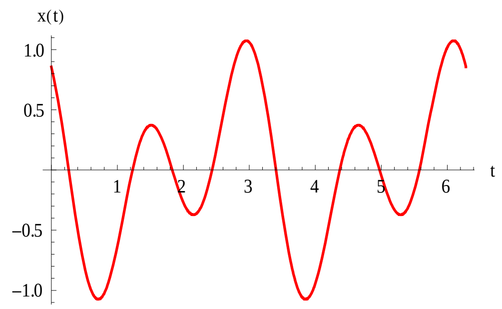
$$\begin{aligned} x(t)&=B_1\cos(\omega t+\phi_1)+B_2\cos(2\omega t+\phi_2) \\ y(t)&=B_1\cos(\omega t+\phi_1)-B_2\cos(2\omega t+\phi_2) \end{aligned} \tag{6-76}$$

در این جا $B_i=A_i/2$ اند.

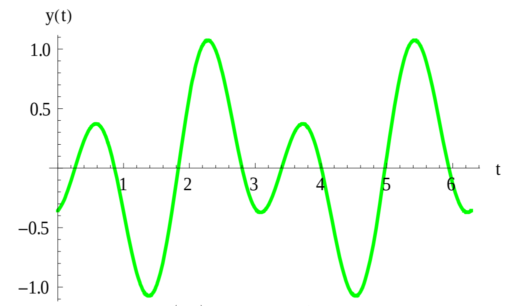
خب! توانستیم معادله‌های دیفرانسیل جفت شده را حل کنیم و توابع $x(t)$ و $y(t)$ را به صورت ترکیب خطی دو پاسخ آشنا بنویسیم. نکته‌ی مهمی که در فرایند حل این معادله‌ها به آن دست یافتیم این است که توانستیم معادله‌های (۷۳-۶) و (۷۵-۶) را به دست آوریم. ترکیب‌های $(x+y)$ و $(x-y)$ "**مختصات بهنجار**" سامانه نام دارند. در هر کدام از این دو معادله تنها یک بسامد وجود دارد. بسامد نوسان برای $(x+y)$ عبارت است از ω و برای $(x-y)$ بسامد نوسان چیز دیگری است: 2ω.

حرکت $x(t)$ و $y(t)$ در حالت عمومی پیچیده است و دشوار است که تنها با نگاه کردن به آن‌ها بتوان گفت که هر یک فقط از دو بسامد تشکیل شده است (البته در مثال ما $x(t)$ و $y(t)$ هر یک ترکیبی خطی از دو حرکت نوسانی با بسامد ω و 2ωاست)

در شکل‌های (۱۲-۶) ما $x(t)$ و $y(t)$ مربوط به رابطه‌ی (۷۶-۶) را نشان داده ایم. همان‌گونه که دیده می‌شود، دشوار است

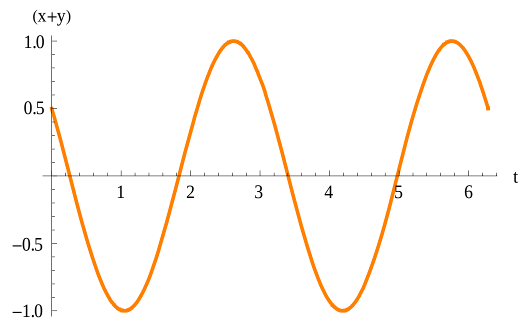


شکل ۱۲-۶ (الف)

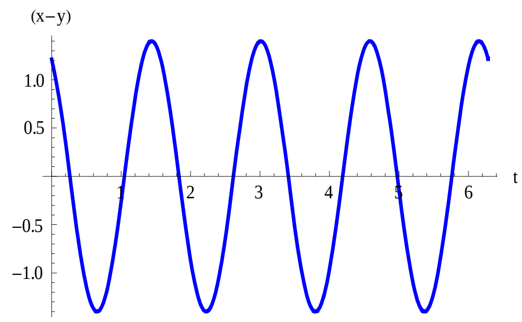


شکل ۱۲-۶ (ب)

که بگوییم بسامد حرکت در آنها چیست. اما اگر $(x+y)$ و $(x-y)$ را رسم کنیم می‌بینیم که برای هر حرکت سامانه، آنها با گذشت زمان همواره توابع خوش رفتار سینوسی خواهند بود. در مقایسه با رفتار ناخوش آیند x و y این قابل توجه است. در شکل‌های (۱۳-۶) ترکیب‌های $(x+y)$ و $(x-y)$ نشان داده شده اند. برای این که این نکته را به روشنی ببینید و کمکی در



شکل۱۳-۶ الف

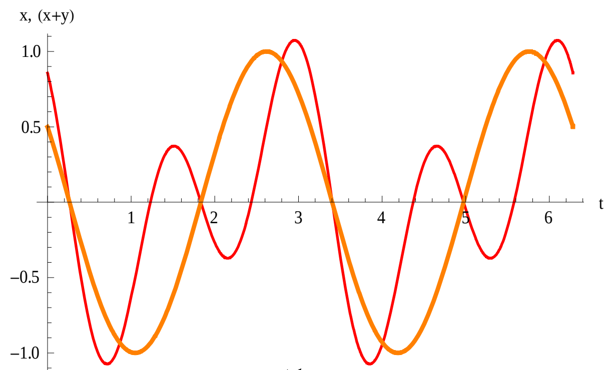


شکل ۱۳-۶ ب

فهمیدن مفهوم "حالت‌های بهنجار" باشد، در شکل (۱۴-۶) هر دوی x و $(x+y)$ را در یک نمودار رسم کرده‌ام. به تفاوت رفتار آنها توجه کنید.

روش ۲: در مثال بالا حدس زدن ترکیب‌های خطی معادله‌های رابطه‌ی (۷۱-۶) آسان بود وما را به یافتن $(x+y)$ و $(x-y)$ و نیز به x و y رهنمون شد. در مسئله‌های دیگر فیزیکی گمانه‌زنی به این آسانی نیست. خوشبختانه، شیوه‌ای عمومی ومطمئن وجود دارد که ما را به پاسخ و حالت‌های بهنجار می‌رساند. در زیر این فرایند را دنبال می‌کنیم. با توجه به آنچه که در بخش ۱-۶ گفتیم، پاسخ‌های آزمون را به صورت $x=Ae^{i\alpha t}$ و $x=Be^{i\alpha t}$ برگزینید. برای آسانی من آن ها را به صورت زیر

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{i\alpha t} \qquad (۷۷-۶)$$



شکل ۱۴-۶

می‌نویسم. ما نمی‌دانیم و در واقع روشن هم نیست که وابستگی x و y به t یکسان باشند، با وجود این، بگذارید کارمان را پی بگیریم و ببینیم چه پیش می‌آید. همچنین، توجه کنید که من i را به روشنی در توان این پاسخ های آزمون وارد کردم. این کار از عمومیت مسئله نمی‌کاهد. اگر α موهومی باشد آنگاه توان این پاسخ‌ها حقیقی خواهند شد. این یک گزینه‌ی شخصی است که i

را در توان پاسخ‌های آزمون به کار ببریم یا نه. اگر این پاسخ های آزمون و مشتق های آنها را در معادله‌های (۷۱-۶) قرار دهیم و به $e^{i\alpha t}$ تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} ۲A(-\alpha^۲)+۵A\,\omega^۲-۳B\,\omega^۲ &= ۰ \\ ۲B(-\alpha^۲)+۵B\,\omega^۲-۳A\,\omega^۲ &= ۰ \end{aligned} \tag{۶-۷۸}$$

یا به طور هم‌ارز، می‌توان نوشت

$$\begin{pmatrix} -۲\alpha^۲+۵\omega^۲ & -۳\omega^۲ \\ -۳\omega^۲ & -۲\alpha^۲+۵\omega^۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \tag{۶-۷۹}$$

که یک معادله‌ی همگن برای A و B است و هنگامی پاسخ غیر بدیهی (بدیهی به این معنی که هر دوی A و B صفرند) دارد که دترمینان ضرایب آن صفر باشد. به بیان دیگر

$$\begin{vmatrix} -۲\alpha^۲+۵\omega^۲ & -۳\omega^۲ \\ -۳\omega^۲ & -۲\alpha^۲+۵\omega^۲ \end{vmatrix}=۰ \quad \Rightarrow \quad ۴\alpha^۲-۲۰\alpha^۲\omega^۲+۱۶\omega^۴=۰ \tag{۶-۸۰}$$

این یک معادله‌ی درجه دو نسبت به $\alpha^۲$ است و ریشه‌هایش عبارتند از $\alpha=\pm\omega$ و $\alpha=\pm ۲\omega$. بنابراین ، چهار پاسخ داریم.
اگر $\alpha=\pm\omega$ باشد و آن را در در معادله‌های (۷۹-۶) قرار دهیم خواهیم داشت $A=B$ (هر دو علامت به یک نتیجه می‌انجامد.)
اگر $\alpha=\pm ۲\omega$ باشد، آنگاه با جاگذاری در معادله‌های (۷۹-۶) خواهیم داشت $A=-B$. توجه کنید که نمی‌توانیم A و B را حساب کنیم؛ بلکه فقط می‌توانیم نسبت آنها را به دست آوریم. حالا بنا به اصل برنهی، چهار پاسخ را با هم جمع می‌کنیم و پاسخ عمومی x و y را به صورت زیر می‌نویسیم (ما آنها را به شکل بردار نوشتیم که پی‌گیری‌شان آسان‌تر باشد)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A_۱\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}e^{i\omega t}+A_۲\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}e^{-i\omega t}+A_۳\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}e^{۲i\omega t}+A_۴\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}e^{-۲i\omega t} \tag{۶-۸۱}$$

چهار مقدار ثابت A_i را شرایط اولیه تعیین می‌کنند. این رابطه را می‌توان اندکی آشناتر نوشت. اگر x و y توصیف مکان ذره-ها باشند باید حقیقی باشند. بنابراین، $A_۱$ و $A_۲$ لازم است که مزدوج مختلط یکدیگر باشند. همین طور برای $A_۳$ و $A_۴$. اگر تعریف کنیم $A_۲^*=A_۱\equiv(B_۱/۲)e^{i\phi_۱}$ و $A_۴^*=A_۳\equiv(B_۲/۲)e^{i\phi_۲}$ می‌توانیم پاسخ بالا را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=B_۱\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}\cos(\omega t+\phi_۱)+B_۲\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix}\cos(۲\omega t+\phi_۲) \tag{۶-۸۲}$$

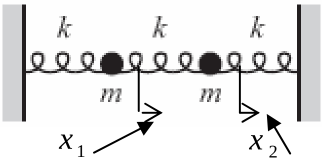
که در آن $B_{۱,۲}$ و $\phi_{۱,۲}$ اعداد حقیقی‌اند و با شرایط اولیه تعیین می‌شوند. پس، می‌بینیم که دوباره به همان پاسخ پیشین، رابطه‌ی (۷۶-۶) ، رسیدیم.

رابطه‌ی (۸۲-۶) به روشنی نشان می‌دهد که ترکیب‌های $(x+y)$ و $(x-y)$ (مختصات بهنجار) به ترتیب با بسامدهای ω و ۲ω نوسان می‌کنند؛ زیرا در ترکیب $(x+y)$ جمله‌ی $B_۲$ وجود ندارد و در ترکیب $(x-y)$ جمله‌ی $B_۱$ نیست.

روشن است که اگر $B_۲=۰$ باشد داریم $x=y$. یعنی هردو با یک بسامد، ω، نوسان می‌کنند. اگر $B_۱=۰$ باشد آنگاه $x=-y$ می شود و هر دو با بسامد یکسان ۲ω نوسان خواهند کرد. این دو نوسان با یک بسامد خالص برای هر دو را" *حالت های بهنجار"* می‌نامند. آنها به ترتیب با بردارهای $(۱,۱)$ و $(۱,-۱)$ نشان داده شده اند. در مثال زیر اهمیت حالت‌های بهنجار روشن خواهد شد.

مثال ۹-۶ (دو جرم و سه فنر): دو جرم یکسان m با سه فنر یکسان با ثابت فنر k برابر شکل (۱۵-۶) به یکدیگر و به دو

دیوار وصل اند. عمومی‌ترین پاسخ مکان‌های دو ذره را برحسب تابعی از زمان پیدا کنید. مختصات بهنجار آنها کدامند و حالت های بهنجار چیستند؟



شکل ۱۵-۶

حل: ما مسئله را به هر دو روش بالا حل خواهیم کرد. فرض کنید x_1 و x_2 به ترتیب مکان‌های جرم‌های سمت چپ و سمت راست از نقاط ترازمندی آنها باشد. x_1 و x_2 را به سمت راست مثبت فرض کنید. در این صورت فنر سمت چپ به اندازه‌ی x_1 به راست کشیده می‌شود و در نتیجه، نیرویی برابر kx_1 و به سمت چپ به جرم سمت چپ وارد می‌کند. فنر میانی اندکی پیچیده تر است؛ چون جابه‌جایی هر دو جرم برآن اثر می‌گذارند. اما به آسانی می‌توان دید که فنر میانی به اندازه‌ی $x_2 - x_1$ کشیده می‌شود. زیرا به اندازه‌ی x_1 به سمت راست فشرده می‌شود و به اندازه‌ی x_2 به سمت راست کشیده می‌شود. در نتیجه داریم: کشیدگی منهای فشردگی = کشیدگی خالص فنر میانی. پس، فنر میانی نیرویی به اندازه‌ی $k(x_2 - x_1)$ و به سمت راست به جرم سمت چپ وارد می‌کند. بنابراین، نیروی خالص وارد به جرم سمت چپ عبارت است از

$$\text{نیروی وارد به جرم سمت چپ} = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2 \qquad (6\text{-}83)$$

به همین ترتیب، نیروهای وارد به جرم سمت راست را می‌توان حساب کرد: فنر سمت راست به اندازه‌ی x_2 فشرده شده است. این فنر نیروی kx_2 به جرم سمت راست وارد می‌کند. جهت این نیرو به چپ است. فنر میانی به اندازه‌ی $x_2 - x_1$ کشده شده است و نیروی $k(x_2 - x_1)$ را به جرم سمت راست اعمال می‌کند. جهت این نیرو هم به سوی چپ است. پس نیروی خالص وارد به جرم سمت راست عبارت است از

$$\text{نیروی وارد به جرم سمت راست} = -k(x_2 - x_1) - kx_2 = kx_1 - 2kx_2 \qquad (6\text{-}84)$$

حال می‌توان با استفاده از $F = ma$ معادله‌های حرکت را برای این دو جرم نوشت.

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 \qquad (6\text{-}85)$$
$$m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2$$

اکر تعریف کنیم $\omega^2 \equiv k/m$ آنگاه رابطه‌ی بالا را میتوان به صورت زیر نوشت

$$\ddot{x}_1 + 2\omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 = 0$$
$$\ddot{x}_2 + 2\omega^2 x_2 - \omega^2 x_1 = 0 \qquad (6\text{-}86)$$

روش ۱: این دو معادله دوستانه به نظر می‌آیند و می‌توان با بهره گیری از روش ۱ دید که جمع و تفاضل آنها ترکیب‌های خطی دلخواه ما هستند. اگر آنها را با هم جمع کنیم داریم

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega^2(x_1 + x_2) = 0 \qquad (6\text{-}87)$$

و اگر از هم کم کنیم خواهیم داشت:

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3\omega^2(x_1 - x_2) = 0 \qquad (6\text{-}88)$$

پاسخ‌های این دو معادله برای $(x_1 + x_2)$ و $(x_1 - x_2)$ مختصات بهنجارند و آنها را می‌شناسیم

$$x_1 + x_2 = A_+ \cos(\omega t + \phi_+)$$
$$x_1 - x_2 = A_- \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_-) \qquad (6\text{-}89)$$

حالا از جمع و تفاضل این مختصات طبیعی، $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به دست می‌آیند. داریم

$$x_1(t) = B_+ \cos(\omega t + \phi_+) + B_- \cos(\sqrt{3}\,\omega t + \phi_-)$$
$$x_2(t) = B_+ \cos(\omega t + \phi_+) - B_- \cos(\sqrt{3}\,\omega t + \phi_-) \qquad (6\text{-}90)$$

در این جا هم $B_i = A_i/2$ و به همراه ϕ_i ها با شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

روش ۲ : برای تمرین هم که شده باشد بگذارید این مسئله را به روش دترمینان هم حل کنیم. باز هم پاسخ‌های آزمون را به صورت $x_1 = Ae^{i\alpha t}$ و $x_2 = Be^{i\alpha t}$ برگزینید. پاسخ های آزمون را به همراه مشتق‌هایشان در رابطه‌های (۸۶-۶) جاگذاری کنید. پس از تقسیم کردن به $e^{i\alpha t}$ خواهیم داشت

$$-\alpha^2 A + 2\omega^2 A - \omega^2 B = 0$$
$$-\alpha^2 B + 2\omega^2 B - \omega^2 A = 0 \qquad (6\text{-}91)$$

و یا اگر به صورت بردار بنویسیم، داریم

$$\begin{pmatrix} -\alpha^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\alpha^2 + 2\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (6\text{-}92)$$

و برای این که پاسخ‌های غیر بدیهی برای A و B داشته باشیم دترمینان ضرایب باید برابر صفر باشد:

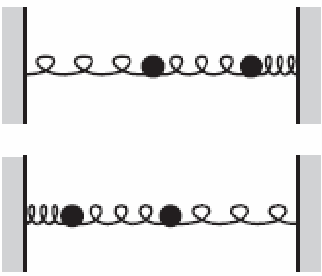
$$\begin{vmatrix} -\alpha^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\alpha^2 + 2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^4 - 4\alpha^2\omega^2 + 3\omega^4 = 0 \qquad (6\text{-}93)$$

باز هم به یک معادله‌ی درجه دو نسبت به α^2 رسیدیم. ریشه‌های آن $\alpha = \pm\omega$ و $\alpha = \pm\sqrt{3}\,\omega$ اند. از جاگذاری $\alpha = \pm\omega$ در رابطه‌ی (۸۱-۶) می‌بینیم که $A = B$ و از جاگذاری $\alpha = \pm\sqrt{3}\,\omega$ درمی‌یابیم که $A = -B$. بنابراین، شکل عمومی پاسخ‌ها عبارتند از

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{i\omega t} + A_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-i\omega t} + A_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{\sqrt{3}i\omega t} + A_4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-\sqrt{3}i\omega t}$$
$$\equiv B_+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(\omega t + \phi_+) + B_-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_-) \qquad (6\text{-}94)$$

که با رابطه‌ی (۹۰-۶) هم‌ارز است.

حالت‌های بهنجار را با قرار دادن $B_- = 0$ یا $B_+ = 0$ در رابطه‌ی (۹۰-۶) یا در رابطه‌ی (۹۴-۶) به دست می‌آوریم. پس ، حالت های بهنجار $(1,1)$ و $(1,-1)$ است. چگونه باید این حالت‌های بهنجار را تجسم کرد و آنها را نشان داد؟ حالت بهنجار $(1,1)$ با بسامد ω نوسان می‌کند. در این حالت $B_- = 0$ است وبرای همه‌ی زمان‌ها داریم $x_1(t) = x_2(t) = B_+\cos(\omega t + \phi_+)$ ، یعنی هر دو جرم مانند هم حرکت نوسانی پس و پیش دارند. در شکل (۱۶-۶) این حالت نوسانی نشان داده شده است. روشن است که بسامد این حرکت ω است. چون تا جایی که به دو جرم مربوط می‌شود، انگار فنر میانی وجود ندارد و هر جرم فقط تحت تاثیر یک فنر نوسان می‌کند و در نتیجه بسامد هر کدام ω است. در شکل (۱۶-۶) دیده می‌شود که دو جرم

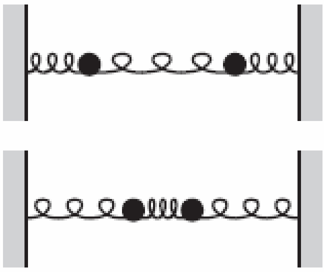


شکل ۱۶-۶

چگونه با هم به سمت چپ و یا به سمت راست می‌روند. حالت بهنجار $(1,-1)$ با بسامد $\sqrt{3}\,\omega$ نوسان می‌کند. در این حالت $B_+ = 0$ است و از رابطه‌های (۹۰-۶) یا (۹۴-۶) پیداست که برای همه زمان‌ها $x_1(t) = -x_2(t) = B_-\cos(\sqrt{3}\,\omega t + \phi_-)$ است. یعنی جرم ها در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند. این رفتار در شکل (۱۷-۶) نشان داده شده است.

روشن است که در این حالت بسامد حرکت باید بزرگتر از حالت قبلی باشد، زیرا در این حالت، فنر میانی کشیده یا فشرده

می‌شود و در نتیجه، به جرم ها نیروی بیشتری وارد می‌شود و از این رو بسامد حرکت بزرگتر می‌شود.



شکل ۱۷-۶

حالت بهنجار (۱,۱) در بالا به مختصات بهنجار x_1+x_2 مربوط است. بسامد هر دوی x_1 و x_2 در این حالت ω است. اما دلیل این تناظر ربطی به این ندارد که ضریب‌های x_1 و x_2 هر دو ۱ است. بلکه به این دلیل است که حالت نوسانی دیگر، یعنی $(1,-1)\propto(x_1-x_2)$ سهمی در x_1+x_2 ندارد. در مثال بالا تعداد ۱ ها زیاد است و این اجازه نمی‌دهد تا به روشنی ببینیم چه چیزی به کدام حالت مربوط است. فرض کنید مسئله‌ای را حل کرده ایم و پاسخ آن به صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B_1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\cos(\omega_1 t+\phi_1)+B_2\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}\cos(\omega_2 t+\phi_2) \qquad (6-95)$$

در این مثال مختصات بهنجار مربوط به حالت بهنجار (۳,۲) عبارت است از $5x+y$ ؛ چون در یک چنین ترکیبی است که دیگر $\cos(\omega_2 t+\phi_2)$ ظاهر نمی‌شود. بگذارید این را با جزییات بیشتری ببینیم. از رابطه‌ی (۹۵-۶) داریم

$$\begin{aligned} x &= 3B_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+B_2\cos(\omega_2 t+\phi_2) \\ y &= 2B_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)-5B_2\cos(\omega_2 t+\phi_2) \end{aligned} \qquad (6-96)$$

حالا دیده می‌شود که در ترکیب $5x+y$ دیگر $\cos(\omega_2 t+\phi_2)$ وجود ندارد. به همین ترتیب $2x-3y$ مختصات بهنجار مربوط به حالت بهنجار $(1,-5)$ است که با بسامد ω_2 نوسان می‌کند و در آن دیگر $\cos(\omega_1 t+\phi_1)$ وجود ندارد.

مثال‌های تکمیلی

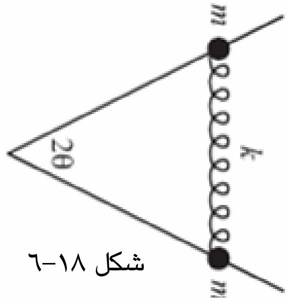
ت-۱ فرض کنید $x_1(t)$ و $x_2(t)$ پاسخ‌های معادله‌ی دیفرانسیل $\ddot{x}^2=bx$ باشند. نشان دهید که $x_1(t)+x_2(t)$ پاسخ معادله‌ی $\ddot{x}^2=bx$ **نیست**.

ت-۲ معادله‌ی $\ddot{x}=ax$ را در نظر بگیرید. اگر $a=0$ باشد، پاسخ معادله‌ی $\ddot{x}=0$ عبارت است از $x(t)=C+Dt$. نشان دهید که در حد $a\to 0$ رابطه‌ی (۲-۶) به این پاسخ کاهش پیدا می‌کند. (توجه کنید که $a\to 0$ زبان گویایی برای منظور ما نیست.) روش درست برای بیان این حد چیست؟

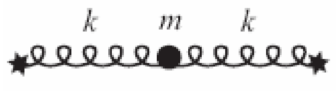
ت-۳ پرتابه‌ای به جرم m در مبداء مختصات به فنری با ثابت k و طول طبیعی صفر وصل است. پرتابه با سرعت v_0 و با زاویه‌ی θ شلیک می‌شود.

(الف): $x(t)$ و $y(t)$ را بیابید.

(ب): نشان دهید که به ازای $\omega\equiv\sqrt{k/m}$ های کوچک، مسیر این پرتابه به مسیر پرتابه‌ی معمولی کاهش می‌یابد. هم‌چنین نشان دهید که به ازای ω های بزرگ مسیر آن به مسیر حرکت نوسانگر ساده تقلیل پیدا می‌کند، یعنی به حرکت نوسانی در راستای خط راست، کاهش پیدا (دستکم پیش از آن که پرتابه با زمین برخورد کند.) به جای" ω کوچک" و " ω بزرگ" چه گزاره‌ی مناسب‌تری را پیشنهاد می‌کنید؟



شکل ۱۸-۶

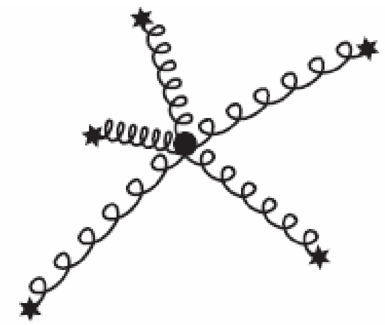


شکل ۱۹-۶

(**پ**): به ازای چه مقدار ω پرتابه در برخورد با زمین در راستای خط قائم حرکت می‌کند؟

ت-۴ ریسمانی به طول L و چگالی جرمی $\lambda\,\mathrm{kg/m}$ از روی قرقره‌ی بدون جرم گذشته است و از دو طرف آن آویزان است. یک انتهای ریسمان به اندازه‌ی $x_\circ$ در زیر مکان میانگین دو انتها و دیگری به اندازه‌ی $x_\circ$ بالای آن قرار دارد. ریسمان را با سرعت اولیه‌ی $v_\circ$ از این وضعیت رها می‌کنیم. برای این که ریسمان قرقره را ترک نکند، این سرعت اولیه چقدر باید باشد؟

ت-۵ دو میله‌ی بدون اصطکاک با هم زاویه‌ی ۲θ می‌سازند و در روی یک سطح افقی قرار دارند. دو ذره هر یک به جرم m مقیدند در روی میله‌ها حرکت کنند. جرم‌ها با فنری با ثابت k به یکدیگر وصل‌اند. طول طبیعی فنر در وضعیتی است که در شکل (۱۸-۶) نشان داده شده است. اگر حرکت چنان باشد که همواره فنر موازی وضعیت نشان داده شده در شکل باقی بماند، بسامد حرکت نوسانی را به دست آورید.



شکل ۲۰-۶

ت-۶ (**الف**) جرم m برابر شکل (۱۹-۶) به دو فنر با ثابت‌های یکسان وصل است. طول طبیعی فنرها صفر است و انتهای دیگر آن‌ها در به نقطه‌های ثابتی وصل‌اند. جرم m ابتدا در مکان ترازمندی خود است. به آن تلنگری در جهت دلخواه وارد می‌شود. حرکت سامانه را توصیف کنید. (اگرچه نیازی نیست، اما می‌توانید از گرانش چشم‌پوشی کنید.)

(**ب**): جرم m برابر شکل (۲۰-۶) به n فنر با ثابت‌های $k_1, k_2, \cdots, k_n$ وصل است. طول طبیعی فنرها صفر اند. انتهای دیگر فنرها به نقاط ثابتی در فضا وصل‌اند. . جرم m ابتدا در مکان ترازمندی خود است. به آن تلنگری در جهت دلخواه وارد می‌شود. حرکت سامانه را توصیف کنید. (بازهم، اگرچه نیازی نیست، اما می‌توانید از گرانش چشم‌پوشی کنید.)

مسئله ها

۱-۶ (**نیروی** kx) : ذره‌ای به جرم m تحت نیروی $F(x) = kx$ قرار دارد؛ $K > ۰$. عمومی‌ترین پاسخ $x(t)$ کدام است؟ اگر ذره از نقطه‌ی $x_\circ$ شروع به حرکت کند به ازای کدام مقدار خاصِ سرعت اولیه، پس از زمانی طولانی ذره خیلی از مبداء دور نخواهد شد؟

۲-۶ (**دامنه**): معادله‌ی حرکت جسمی به صورت $x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$ است. دامنه‌ی این حرکت را حساب کنید.

۳-۶ نشان دهید که پاسخ‌های نوسانگر هماهنگ در شکل‌های $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ و $x(t) = D\cos(\omega t + \phi)$ هم‌ارزند. رابطه‌ی بین (A, B) و (D, ϕ) را به دست آورید.

۴-۶ فنری با ثابت k و طول طبیعی ℓ را در نظر بگیرید. جرم m را به فنر می‌بندیم و مجموعه را قائم نگه می‌داریم.

(**الف**): طول حالت ترازمندی فنر (یعنی طول فنر وقتی که دیگر جرم نوسان نمیکند) را بیابید.

(**ب**) : بسامد طبیعی نوسانگر قائم را پیدا کنید.

(**پ**): همین فنر را با همان جرم در روی میز افقی بدون اصطکاک قرار می دهیم و آن را به نوسان در می‌آوریم. بسامد

نوسانهای بهنجار فنر را در این حالت با حالت قائم مقایسه کنید.

۶-۵ برای نوسانگر ساده (مانند جرمی که به فنر وصل است) با انرژی پتانسیل U و انرژی جنبشی T

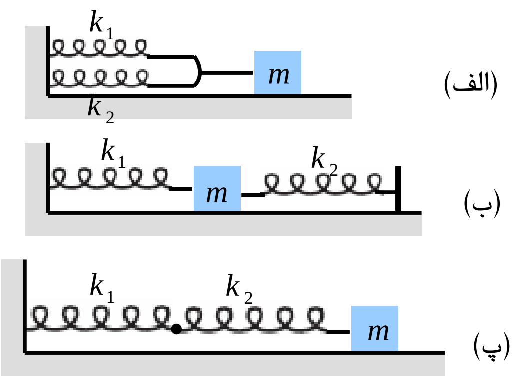
(الف): $U(t)$ و $T(t)$ راروی یک نمودار برحسب t رسم کنید.

(ب): $U(x)$ و $T(x)$ راروی یک نمودار برحسب x رسم کنید.

(پ): میانگین زمانی U و T را برای یک دوره ی نوسان حساب کنید.

(ت): میانگین فضایی U و Tرا برای یک دوره ی نوسان حساب کنید.

۶-۶ دو فنر با طول‌های طبیعی یکسان، اما با ثابت های فنر متفاوت k_1 و k_2 به قطعه‌ای به جرم m وصل اند. قطعه روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد. ثابت موثر k_{eff} را برای هر یک از سه حالت (الف) ، (ب) و (پ) در شکل (۲۱-۶) حساب کنید. ضریب ثابت موثر با رابطه‌ی $\sum F = -k_{eff}\, x$ تعریف می‌شود.



شکل ۲۱-۶

۶-۷ جسمی به جرم m به فنری با ثابت k وصل است و با بسامد f_1 نوسان می‌کند. فنر را دو نیم می‌کنیم و جسم را به یکی از نیمه‌ها می‌بندیم. جسم با بسامد f_2 نوسان می‌کند. نسبت f_2/f_1 را با توجه به قسمت (پ) مسئله‌ی ۶-۶ حساب کنید.

۶-۸ کشیدن فنرهای واقعی معمولا آسان‌تر از فشردن آنهاست. این واقعیت را می‌توان با نسبت دادن ثابت‌های متفاوت برای $x > ۰$ و $x < ۰$ توصیف کرد. برای نمونه فنری را در نظر بگیرید که نیروی بازگرداننده آن به صورت زیر است.

$$F = \begin{cases} -kx & ; \quad x > ۰ \\ -۲kx & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$

جرم m روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد و به این فنر وصل است. جرم را می‌کشیم و به اندازه‌ی $x = A$ آن را جابه‌جا و سپس رها می‌کنیم تا نوسان کند.

(الف): دوره‌ی حرکت را پیدا کنید. آیا دوره‌ی حرکت به A بستگی دارد؟ آیا این حرکت نوسانی هماهنگ ساده است؟

(ب): بیشینه مقدار منفی x که جرم به آن می‌رسد چقدر است؟ آیا نسبت به نقطه‌ی $x = ۰$ این نوسان متقارن است؟

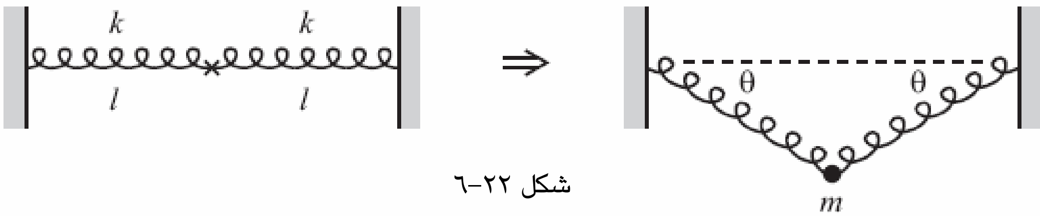
۶-۹ به جرم m نیروی بازدارنده‌ی $-bv$ و نیروی وادارنده‌ی $F_d \cos \omega_d t$ وارد می‌شود، اما نیروی فنر وجود ندارد. پاسخ $x(t)$ حرکت را به صورت $x(t) = A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t$ یا یکی از شکل‌های مناسب هم‌ارز بنویسید (A و B را حساب کنید). اگر پاسخ را به صورت $x(t) = C\cos(\omega_d t - \phi)$ برگزیدید، C و ϕ را بیابید. (*راهنمایی:* رابطه‌ی ۵۲-۶ را نگاه کنید)

۶-۱۰ دو فنر بدون جرم یکسان با ثابت k و طول طبیعی ℓ را به هم می‌بندیم و انتهای آزاد فنرها را برابر شکل (۲۲-۶) به دو دیوار روبرو به فاصله‌ی 2ℓ از هم وصل می‌کنیم. جرم m را به نقطه‌ی میانی می‌بندیم و آن را به آرامی پایین می‌آوریم تا در جایگاه ترازمندیش به حال سکون در آید. در این مکان ترازمندی، هر یک از فنرها با افق زاویه‌ی θ می سازد.

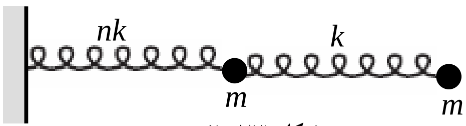
(الف): مقدار m را برحسب θ (و شاید k، ℓ و g) به دست آورید.

(ب): اگر به جرم تلنگر کوچکی در امتداد قائم وارد کنیم، بسامد نوسان‌های کوچک را برحسب θ (و شاید k، ℓ و g ؛ اما از

پاسخ قسمت (الف) استفاده کنید و m را برحسب کمیت‌های دیگر بنویسید) به دست آورید.

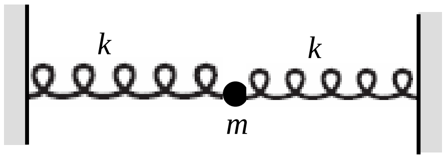


شکل ۲۲-۶

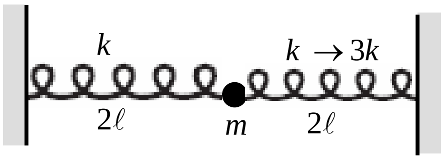


شکل ۲۳-۶

۶-۱۱ در چیدمان شکل (۲۳-۶) هر دو جرم m و ثابت‌های فنرها به ترتیب nk (n یک ضریب عددی است) و k اند. طول طبیعی فنرها یکسان است. فرض کنید که شرایط اولیه چنان فراهم شده است که با نوسان جرم‌ها، طول فنرها در هر لحظه‌ای با هم برابر باشند. از گرانش چشم پوشی کنید و n را به دست آورید.



شکل ۲۴-۶



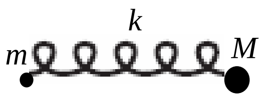
شکل ۲۵-۶

۶-۱۲ در شکل (۲۴-۶) جرم m به دو فنر وصل است. فنرها طول حالت تعادل خود را دارند. جرم m با دامنه‌ی d در راستای فنرها نوسان می‌کند. در یک لحظه که (می‌توانید این لحظه را $t=\circ$ فرض کنید) جرم در فاصله‌ی $x=d/۲$ از مکان ترازمندی قرار دارد و به سمت راست در حرکت است، فنر سمت راست را حذف می‌کنیم (با سازوکاری ثابت آن را صفر می‌کنیم.)

(الف) : معادله‌ی حرکت $x(t)$ جدید را بیابید.

(ب): دامنه‌ی نوسان جدید را حساب کنید.

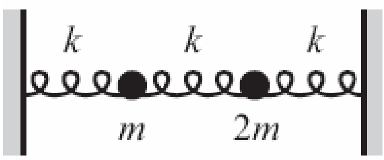
۶-۱۳ دو فنر هر یک با ثابت k و طول طبیعی ℓ را در نظر بگیرید. هر دو فنر را به اندازه‌ی ℓ می‌کشیم و برابر شکل (۲۵-۶) به جرم m و دو دیوار روبرو می‌بندیم . در یک لحظه‌ی معین ثابت فنر سمت راست با سازوکاری ناگهانی به $3k$ تغییر می‌کند اما طول طبیعی آن ℓ باقی می‌ماند. درزمان بعدی $t=(\pi/٤)\sqrt{m/k}$ مکان جرم m را بیابید. سرعت ذره در این مکان چیست؟ (در این مسئله از گرانش چشم پوشی کنید).



شکل ۲۶-۶

۶-۱۴ جرم‌های m و M با فنر بدون جرم و ثابت k برابر شکل (۲۶-۶) به هم وصل اند. جرم‌ها را از هم دور می‌کنیم و فنر به اندازه‌ی A کشیده می‌شود. سپس جرم‌ها را از حالت سکون رها می‌کنیم. مکان m را برحسب زمان پیدا کنید. فرض کنید $x=\circ$ مکان نیم راه حرکت جرم m است (*راهنمایی:* مرکزجرم چه می‌کند؟)

۶-۱۵ جرمی را به فنری با بسامد طبیعی ω وصل می‌کنیم و از مکان $x_\circ$ رها می‌کنیم. این آزمایش را در درون مایعی تکرار می کنیم. مایع سبب می شود که حرکت با ضریب میرایی γ تندمیرا شود. نسبت بیشینه‌ی سرعت‌ها را در دو وضعیت به دست آورید. در حالت‌های حدی تند میرایی $\omega \ll \gamma$ و در حد میرایی بحرانی این نسبت چه خواهد شد؟



شکل ۲۷-۶

۶-۱۶ سه فنر یکسان و جرم‌های m و $2m$ برابر شکل (۲۷-۶) به هم و به دو دیوار روبرو وصل اند. حالت های بهنجار سامانه را بیابید.

حل مثال‌های تکمیلی

ت-۱ جمع x_1+x_2 پاسخ معادله‌ی $\ddot{x}^2=bx$ است اگر داشته باشیم

$$\left(\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2}\right)^2=b(x_1+x_2) \quad \Leftrightarrow \quad (\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)^2=b(x_1+x_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{x}_1^2+2\ddot{x}_1\ddot{x}_2+\ddot{x}_2^2=b(x_1+x_2) \tag{6-97}$$

اما بنا به فرض مسئله می‌دانیم که $\ddot{x}_1^2=bx_1$ و $\ddot{x}_2^2=bx_2$ اند. بنابراین، جمله‌ی $2\ddot{x}_1\ddot{x}_2$ در سمت چپ رابطه‌ی بالا تساوی را نقض می‌کند. (توجه کنید که $2\ddot{x}_1\ddot{x}_2$ نمی‌تواند صفر باشد؛ چون در این صورت اگر هر کدام $\ddot{x}_1$ یا $\ddot{x}_2$ صفر باشند، باید x_1 یا x_2 هم صفر باشد که در این صورت پاسخی برای معادله‌ی دیفرانسیل باقی نمی‌ماند.)

ت-۲ یکای a به صورت T^{-2} است و عدد صفر بدون بعد است. بنابراین، "$a\to 0$" بیان درستی برای این حد نیست. بیان درست این است که بگوییم رابطه‌ی (۲-۶) وقتی به $x(t)=C+Dt$ کاهش می‌یابد که $\sqrt{at}\ll 1$ و یا، به طور هم‌ارز، $t\ll 1/\sqrt{a}$ باشد. در این صورت کمیت‌های با بعد یکسان مقایسه می‌شوند. هرچه a کوچک شود، t بزرگ می‌شود و بنابراین ، اگر $a\to 0$ آنگاه t می‌تواند هر مقداری را بپذیرد. با فرض $\sqrt{at}\ll 1$ می‌توان نوشت $e^{\pm\sqrt{at}}\approx 1+\sqrt{at}$ و در نتیجه رابطه‌ی (۲-۶) به صورت زیر درمی‌آید:

$$x(t)\approx A\left(1+\sqrt{at}\right)+B\left(1-\sqrt{at}\right)=(A+B)+\sqrt{a}(A-B)t\equiv C+Dt \tag{6-98}$$

C مکان اولیه و D سرعت ذره است. اگر این کمیت‌ها از مرتبه‌ی بزرگی ۱ در یکاهای مربوطه باشند، آنگاه با به دست آوردن A و B می‌بینیم که به تقریب باید منهای یکدیگر برابر و هر دو از یک مرتبه‌ی بزرگی $1/\sqrt{a}$ باشند. در نتیجه، اگر مکان اولیه و سرعت از یک مرتبه‌ی بزرگی باشند، A و B در حد $a\to 0$ واگرا می‌شوند. اگر a کوچک، اما غیر صفر شود، سرانجام t به اندازه‌ای بزرگ خواهد شد که دیگر $\sqrt{at}\ll 1$ برقرار نخواهد بود. در این حالت، شکل خطی رابطه‌ی (۲-۶) دیگر برقرار نیست.

ت-۳ (الف) نیروی وارد به پرتابه عبارت است از $\mathbf{F}=-k\mathbf{r}-mg\,\mathbf{j}$. مولفه‌ی x معادله‌ی حرکت $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ به دست می‌دهد

$$m\ddot{x}=-kx \quad \Rightarrow \quad x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t \tag{6-99}$$

که در آن $\omega\equiv\sqrt{k/m}$ است. از مولفه‌ی y داریم $m\ddot{y}=-ky-mg$. با تعریف $z\equiv y+mg/k$ این رابطه به صورت زیر درمی‌آید

$$m\ddot{z}=-kz \quad \Rightarrow \quad z=C\cos\omega t+D\sin\omega t \tag{6-100}$$

$$\Rightarrow \quad y=z-mg/k=C\cos\omega t+D\sin\omega t-mg/k$$

شرایط اولیه عبارت‌اند از $x(0)=0$ ، $\dot{x}(0)=v_0\cos\theta$ و $y(0)=0$ ، $\dot{y}(0)=v_0\sin\theta$. از این شرط‌ها به دست می‌آید $A=0$ ، $B=v_0\cos\theta/\omega$ و بنابراین،

$$x(t)=\left(\frac{v_0\cos\theta}{\omega}\right)\sin\omega t \tag{6-101}$$

از شرایط اولیه در راستای y به دست می‌آید: $C=mg/k$ و $D=(v_0\sin\theta/\omega)\cos\omega t$ و بنابراین،

$$y(t)=\left(\frac{mg}{k}\right)(\cos\omega t-1)+\left(\frac{v_0\sin\theta}{\omega}\right)\sin\omega t \tag{6-102}$$

به ازای ω های کوچک $\sin\omega t\approx\omega t$ و $\cos\omega t\approx 1-(\omega t)^2/2$. بنابراین، داریم

$$x(t)\approx\left(\frac{v_\circ\cos\theta}{\omega}\right)\omega t=(v_\circ\cos\theta)t \qquad (٦-١٠٣)$$

و با استفاده از $\omega^2=k/m$

$$y(t)\approx\left(\frac{mg}{k}\right)\left(\frac{-(k/m)t^2}{2}\right)+\left(\frac{v_\circ\sin\theta}{\omega}\right)\omega t=-\frac{1}{2}gt^2+(v_\circ\sin\theta)t \qquad (٦-١٠٤)$$

این‌ها معادله‌های حرکت پرتابه‌ی معمولی اند. برای این که تقریب بالا معنی‌دار باشد باید در تمام طول حرکت $\omega t\ll 1$ باشد. اگر فرض کنیم $\omega(2v_\circ\sin\theta/g)\ll 1$، آنگاه تقریب بالا برای $t=(2v_\circ\sin\theta)/g$ درست است و در این صورت به ازای همه‌ی زمان‌ها $y\approx 0$ می‌شود؛ یعنی پرتابه با زمین برخورد کرده است و حرکت به پایان رسیده است. در نتیجه،" ω کوچک" به معنی $\omega\ll g/(v_\circ\sin\theta)$ است. حال ω بزرگ را در نظر بگیرید. به ازای **هر** t دلخواه $x(t)$ حرکت نوسانی ساده دارد. برای این که کل حرکت نوسانی ساده باشد، باید حرکت در امتداد خط راست باشد و در نتیجه باید y/x مقدار ثابتی باشد. این بدان معنی است که جمله‌ی $(mg/k)(\cos\omega t-1)$ در $y(t)$ باید قابل چشم‌پوشی باشد. پس، لازم است که

$$\frac{v_\circ\sin\theta}{\omega}\gg\frac{mg}{k}\quad\Rightarrow\quad\frac{v_\circ\sin\theta}{\omega}\gg\frac{g}{\omega^2}\quad\Rightarrow\quad\omega\gg\frac{g}{v_\circ\sin\theta} \qquad (٦-١٠٥)$$

و این معنی" ω بزرگ" است. در این حالت، هر دوی x و y اساسا با $\sin\omega t$ متناسب‌اند. پرتابه تا بیشینه فاصله‌ی $v_\circ/\omega$ از مبداء دور می‌شود و سپس برمی‌گردد.

دو شرط بالا برای ω را می‌توان به این صورت خلاصه کرد که بدون گرانش، مقیاس زمانی، $1/\omega$، حرکت باید خیلی بزرگ‌تر یا خیلی کوچک‌تر از مقیاس زمانی حرکت پرتابی بدون فنر، $(2v_\circ\sin\theta)/g$ باشد.

(پ): می‌خواهیم وقتی $\dot x=0$ می‌شود، $y=0$ باشد. اما $\dot x=(v_\circ\cos\theta)\cos\omega t$ است که به ازای $t=\pi/2$ صفر است. پس، مقدار y در زمان $t=\pi/2$ عبارت است از $(mg/k)(0-1)+(v_\circ\sin\theta/\omega)(1)$ که اگر برابر صفر قرار دهیم و با استفاده از $\omega^2=k/m$ خواهیم داشت

$$\frac{g}{\omega^2}=\frac{v_\circ\sin\theta}{\omega}\quad\Rightarrow\quad\omega=\frac{g}{v_\circ\sin\theta} \qquad (٦-١٠٦)$$

که به حسابی درست در وسط دو حد بالاست.

ت-۴ فرض کنید x فاصله‌ی هر انتهای ریسمان از مکان میانگین باشد (یک انتها به اندازه‌ی x بالا و دیگری در زیر آن). در این صورت نیروی در امتداد ریسمان $\lambda(2x)g$ است. از $F=ma$ داریم

$$2\lambda gx=\lambda L\ddot x\quad\Rightarrow\quad\ddot x=(2g/L)x \qquad (٦-١٠٧)$$

که معادله‌ی نوسانگر ساده با است. پاسخ آزمون معادله‌ی بالا را به صورت $x(t)=Ae^{\alpha t}$ فرض کنید و در رابطه‌ی (٦-١٠٧) جایگزین کنید. به دست می‌آید

$$A\alpha^2e^{\alpha t}=\frac{2g}{L}Ae^{\alpha t}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\pm\sqrt{2g/L} \qquad (٦-١٠٨)$$

بنابراین، پاسخ عمومی معادله‌ی (٦-١٠٧) عبارت است از

$$x(t)=Ae^{\sqrt{2g/L}\,t}+Be^{-\sqrt{2g/L}\,t} \qquad (٦-١٠٩)$$

اما ما می‌خواهیم $A=\circ$ باشد؛ چون جمله‌ی اول با گذشت زمان به طور نمایی افزایش پیدا می‌کند. پس: $x(t)=Be^{-\sqrt{2g/Lt}}$. به شرط $x(t=\circ)=x_\circ$ خواهیم داشت $B=x_\circ$ و

$$x(t)=x_\circ e^{-\sqrt{2g/Lt}} \quad \Rightarrow \quad v(t)=-x_\circ\sqrt{2g/L}e^{-\sqrt{2g/Lt}} \tag{6-110}$$

بنابراین، باید انتهای بالاتر را با سرعت $v(\circ)=x_\circ\sqrt{2g/L}$ به پایین کشید.

ت-۵ مکان هر یک از جرم‌ها را در امتداد میله، نسبت به حالت ترازمندی، x بنامید. فنر به اندازه‌ی $2x\sin\theta$ کشیده می‌شود و نیروی $2kx\sin\theta$ به وجود می‌آید. مولفه‌ی این نیرو در امتداد میله $2kx\sin^2\theta$ است. از $F=ma$ در امتداد میله داریم

$$-2kx\sin^2\theta=m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \omega=\sqrt{2k/m}\sin\theta \tag{6-111}$$

ت-۶ **(الف)**: نکته‌ی مسئله در این است که چون طول طبیعی فنر صفر است، نیروی فنر را می‌توان به صورت $-k\mathbf{r}$ نوشت (که در آن $\mathbf{r}$ نسبت به انتهای ثابت فنر اندازه‌گیری می‌شود). در بردار $-\mathbf{r}$ جهت و اندازه، هر دو درست‌اند. بنابراین، اگر یکی از فنرها نسبت به انتهای ثابتش از مکان $\mathbf{r}_1$ به مکان $\mathbf{r}_2$ جابه‌جا شود، اختلاف نیروی آن $\Delta\mathbf{F}=-k(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=-k\,\Delta\mathbf{r}$ می‌شود. همین گزاره در باره‌ی فنر دوم هم درست است. توجه کنید که بردارهای $\mathbf{r}$ نسبت به انتهای ثابت هر فنر اندازه‌گیری می‌شود که با انتهای ثابت فنر اولی فرق دارد. با وجود این، تاثیری در نتیجه‌ی $\Delta\mathbf{F}=-k\,\Delta\mathbf{r}$ ندارد. پس، وقتی جرم به اندازه‌ی بردار $\Delta\mathbf{r}$ جابه‌جا می‌شود، تغییر کل نیرو $-2k\,\Delta\mathbf{r}$ است. اما، از آنجایی که در مکان ترازمندی جرم، نیرو صفر است، نیروی کل وارد به جرم در مکان $\Delta\mathbf{r}$ از نقطه‌ی ترازمندی آن برابر $-2k\,\Delta\mathbf{r}$ است. به بیان دیگر، اساسا جرم در انتهای فنری با ثابت $2k$ است. پس، فنر در امتداد خط راستی (خطی بین مکان ترازمندی و نقطه‌ی اولیه‌ای که تلنگر ذره را در آن نقطه قرار می‌دهد) حرکت نوسانی هماهنگ ساده با بسامد $\sqrt{2k/m}$ خواهد داشت. این بسامد مستقل از جهت تلنگر است.

(ب): بنابر آنچه که در قسمت (الف) گفته شد، اگر جرم نسبت به مکان ترازمندی‌اش، در مکان $\Delta\mathbf{r}$ باشد نیروی کل وارد به آن $\mathbf{F}=-(k_1+k_2+\cdots+k_n)\Delta\mathbf{r}$ است. پس، جرم اساسا به انتهای فنری با ثابت $(k_1+k_2+\cdots+k_n)$ وصل است و حرکت نوسانی ساده با بسامد $\sqrt{(k_1+k_2+\cdots+k_n)/m}$ در امتداد خط راست خواهد داشت. این بسامد مستقل از جهت اولیه‌ی تلنگر است.