فصل ۵

پایستگی انرژی و تکانه

۵-۱ قانون های پایستگی

قانون‌های پایستکی در فیزیک اهمیت زیادی دارند. برای فهمیدن کمی و کیفی این که در سامانه‌ی فیزیکی چه می گذرد کمک زیادی می‌کنند.

هنگامی که می‌گوییم چیزی "پایسته" است ، منظور این است که آن چیز با زمان تغییر نمی‌کند. در یک سامانه‌ی فیزیکی (مانند غلتیدن توپی از بالای تپه و یا برهم‌کنش مجموعه‌ای از ذرات) اگر کمیتی پایسته باشد، حرکت پایانی سامانه به مقدار زیادی مقید می‌شود. اگر بتوان به تعداد کافی کمیت پایسته برای یک سامانه نوشت (معمولا می‌توانیم، دستکم برای مسئله‌هایی که ما در این کتاب بررسی می‌کنیم) می‌توان حرکت پایانی آن را به یک حالت شدنی محدود کرد و بنابراین، مسئله را حل کرده‌ایم.

پایستگی انرژی و تکانه دو تا از اصلی‌ترین قانون‌های پایستگی در فیزیک‌اند. قانون پایستگی سوم، قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای، هم اصلی است و در فصل ۸ به آن خواهیم پرداخت.

برای حل مسئله حتما *ضروری* نیست که از پایستگی انرژی و تکانه استفاده کنیم. در مکانیک ،قانون‌های پایستگی از قانون‌های نیوتون به دست می‌آیند و بنابراین، اگر دوست داشتید می‌توانید از $F = ma$، اصول اولیه و غیره برای حل مسئله استفاده کنید. اما به زودی خسته و دلسرد می‌شوید. نکته‌ی اصلی در باره‌ی قانون‌های پایستگی این است که کار را آسان‌تر می‌کنند و ابزاری برای فهمیدن رفتار کلی سامانه فراهم می‌آورند.

۵-۱-۱ پایستگی انرژی در یک بعد

ذره‌ای با جرم m را در نظر بگیرید که در یک بعد حرکت می‌کند و به آن نیروی $F = F(x)$ وارد می‌شود. یعنی نیرو تنها تابعی از مکان ذره است. معادله‌ی حرکت این ذره بنابه $F = ma$ عبارت است از

$$m\ddot{x} = F(x) \qquad (۵-۱)$$

اگر بنویسیم $\ddot{x} \equiv a = v\, dv/dx$ آنگاه رابطه‌ی (۵-۱) به صورت زیر در می‌آید

$$mv\,\frac{dv}{dx} = F(x) \qquad (۵-۲)$$

متغیرهای این معادله‌ی دیفرانسیل از هم جدا پذیرند. اگر v ها را در یک طرف و x ها را در سوی دیگر نگه داریم و از دو طرف انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$\int mv'dv' = \int_{x_\circ}^{x} F(x')dx' \qquad (۵-۳)$$

یا

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲} = E + \int_{x_\circ}^{x} F(x')dx' \qquad (۵-٤)$$

در رابطه‌ی (۵-٤) ، E ثابت انتگرال‌گیری است و مقدارش به گزینه‌ی $x_\circ$ بستگی دارد.

اگر **تابع انرژی پتانسیل**، $V(x)$، را با رابطه‌ی زیر تعریف کنیم

$$V(x) \equiv -\int_{x_\circ}^{x} F(x')dx' \qquad (۵-۵)$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲}+V(x)=E \qquad (۵-۶)$$

جمله‌ی نخست سمت چپ رابطه‌ی (۶-۵) **انرژی جنبشی** است: $T\equiv mv^{۲}/۲$. چون رابطه‌ی (۶-۵) در همه‌ی نقاط مسیر حرکت ذره برقرار است، پس جمع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ذره مقدار ثابتی است. یعنی اگر ذره انرژی پتانسیل از دست بدهد (یا به دست آورد) آنگاه سرعتش افزایش (یا کاهش) پیدا می‌کند. رابطه‌ی (۶-۵) بیان **قانون پایستکی انرژی** است.

هر دو کمیت E و $V(x)$ به گزینه‌ی دلخواه $x_{۰}$ در رابطه‌ی (۴-۵) بستگی دارند. این بدان معنی است که E و $V(x)$ به تنهایی بی‌معنی‌اند. فقط تفاوت E ها وتفاوت $V(x)$ ها در دو نقطه یا دو حالت معنی دارند؛ این تفاوت‌ها مستقل از گزینه‌ی $x_{۰}$ اند. برای مثال، گفتن این که در ارتفاع y انرژی پتانسیل گرانشی جسمی $-\int F\,dy=-\int(-mg)\,dy=mgy$ است معنی ندارد. باید بگوییم mgy انرژی پتانسیل نسبت به سطح زمین است (اگر $x_{۰}$ را سطح زمین برگزینیم). اگر می‌خواستیم می‌توانستیم بگوییم انرژی پتانسیل نسبت به نقطه‌ای در ۷ متری زیر زمین $mgy+(۷\mathrm{m})mg$ است. اگرچه غیر معمول، اما این گزاره کاملا درست است.

اگر رابطه‌ی (۶-۵) را در دو نقطه‌ی $x_{۱}$ و $x_{۲}$ بنویسیم واز یکدیگر کم کنیم، خواهیم داشت

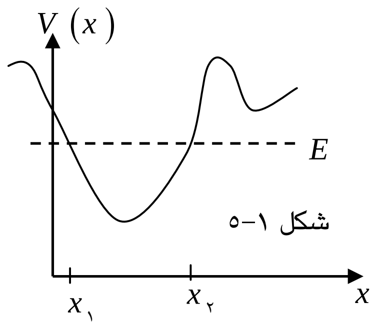
$$\frac{۱}{۲}mv^{۲}(x_{۲})-\frac{۱}{۲}mv^{۲}(x_{۱})=V(x_{۱})-V(x_{۲})=\int_{x_{۱}}^{x_{۲}}F(x')\,dx' \qquad (۵-۷)$$

حالا روشن است که فقط اختلاف انرژی‌ها اهمیت دارند. اگر انتگرال رابطه‌ی (۷-۵) را *کار* انجام یافته روی ذره برای حرکت از مکان $x_{۱}$ به مکان $x_{۲}$ تعریف کنیم، آنگاه *قضیه‌ی کار- انرژی* را به دست می‌آوریم.

قضیه ۱- ۵ ***تغییر انرژی جنبشی ذره بین دو نقطه‌ی $x_{۱}$ و $x_{۲}$ با کار انجام یافته بر روی ذره برای رفتن از نقطه‌ی $x_{۱}$ به نقطه‌ی $x_{۲}$ برابر است.***

اگر جهت‌های نیرو و حرکت یکی باشند (یعنی علامت‌های $F(x)$ و dx در رابطه‌ی (۷-۵) یکسان باشند) کار مثبت است و سرعت افزایش می‌یابد. اگر جهت نیرو در خلاف جهت حرکت باشد، کار منفی است و سرعت کاهش می‌یابد.

با انتخاب نقطه‌ی مرجع $x_{۰}$ برای انرژی پتانسیل، تابع $V(x)$ کاملا مشخص می‌شود. اگر خم $V(x)$ و خط مربوطه به مقدار ثابت E را با هم رسم کنیم (شکل ۱-۵ را ببینید) تفاوت آن دو، انرژی جنبشی را به دست می‌دهد. ذره نمی‌تواند به جاهایی برود که $V(x)>E$ است. چون در این صورت انرژی جنبشی آن منفی می‌شود و این بی‌معنی است ؛ چون بنابه تعریف، انرژی جنبشی $mv^{۲}/۲$ است که همواره یک کمیت مثبت است. نقاطی که در آنها $V(x)=E$ است " نقاط بازگشت" اند. در این نقطه‌ها ذره می‌ایستد (انرژی جنبشی و در نتیجه سرعتش صفر می‌شود) و جهت حرکتش را عوض می کند.



شکل ۱-۵

شکل (۱-۵) ذره‌ای را نشان می‌دهد که بین نقطه‌های $x_{۱}$ و $x_{۲}$ به دام افتاده است و بین این دو نقطه پس و پیش می‌رود و در نوسان است. از این دیدگاه، تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ بسیار سودمند است؛ چون ویژگی‌های عمومی حرکت را بدون انجام محاسبه آشکار می‌کند.

نکته۱: در رابطه‌ی (۷-۵) به نقطه‌ی مرجع $x_{۰}$ اشاره نشده است؛ با این وجود، این رابطه‌ای با معنی و درست است. پس، به نظر بی‌خردانه می‌آید که نقطه‌ی مرجع $x_{۰}$ را وارد بحث خود کردیم. این کار به گونه‌ای شبیه این است که برای یافتن تفاوت عددهای ۱۷ و ۸ اول اندازه‌ی این عددها را نسبت به۵ بسنجیم (که می‌شود ۱۲و ۳) و سپس۳ را از ۱۲ کم کنیم و۹ را به دست آوریم. این تفریق ساده در مورد انتگرال‌ها دشوار است. بنابراین، به سود ماست که یک بار برای همیشه انتگرال را انجام دهیم

و همه‌ی مکان‌ها را با عدد معین $V(x)$ بسنجیم و سپس اگر خواستیم اختلاف V ها را حساب کنیم. ♣

نکته ۲: اگر نیرو تنها به x بستگی داشته باشد، همواره می‌توان تابعی از $\dot{x}=v$ و x یافت که مقدار آن با زمان تغییر نمی‌کند (پایسته می‌ماند). این گونه توابع را" انتگرال‌های اول" می‌گویند. انرژی E در رابطه‌ی (٥-٦) از این دست است. می‌توان آن را به گونه‌ی دیگری هم به دست آورد. انرژی جنبشی را در نظر بگیرید

$$T \equiv \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \tag{٥-٨}$$

اگر از این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیریم، خواهیم داشت :

$$\dot{T} = m\dot{x}\ddot{x} = m\ddot{x}\dot{x} = F(x)\dot{x} \tag{٥-٩}$$

اگر از (٥-٩) نسبت به زمان انتگرال بگیریم، داریم:

$$T = \int F(x)\dot{x}dt = \int F(x)\frac{dx}{dt}dt = \int F(x)dx \tag{٥-١٠}$$

با توجه به تعریف *انرژی پتانسیل*:

$$V(x) = -\int_{x_\circ}^{x} F(x')dx' \tag{٥-٥}$$

رابطه‌ی (١٠-٥) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T + V = E = \text{ثابت} \tag{٥-٦}$$

که همان رابطه‌ی (٦-٥) است. باز هم یادآوری می‌کنم: در رابطه‌ی (٥-٥) حد پایین انتگرال، $x_\circ$، ثابت دلخواه است که به ثابت انتگرال‌گیری در (١٠-٥) مربوط است. این بدان معنی است که در انرژی کل E یک مقدار افزودنی دلخواه هم وجود دارد.

توجه داشته باشید که رابطه‌ی (٥-٥) را می‌توان وارون نوشت و نیرو را از انرژی پتانسیل به دست آورد.

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \equiv -V'(x) \tag{٥-١١}$$

می‌بینیم که در یک بعد، نیروهایی که تنها به x بستگی دارند به پایستگی انرژی می‌انجامند. نیروهای از این دست **نیروی *پایستار*** نام دارند. برای پایستار بودن نیرو در سه بعد، کافی نیست که نیرو تنها تابعی از مکان باشد، بلکه شرط دیگری نیز لازم است. در بخش ٢-١-٥ با جزییات بیشتری به نیروهای پایستار خواهیم پرداخت.

قانون پایستگی انرژی آگاهی‌های فراوانی درباره‌ی حرکت به دست می‌دهد. این آگاهی‌ها بدون این که مجبورباشیم ازچیزی انتگرال بگیریم و مکان x جسم را به صورت تابعی از زمان آوریم، به دست می‌آیند. اگر مکان و سرعت اولیه داده شده باشند، می‌توان مقدار ثابت E را حساب کرد. اگر در رابطه‌ی (٥-٦) به جای T مقدار $mv^2/2$ قراردهیم، ،خواهیم داشت

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V(x) \tag{٥-١٢}$$

که سرعت ذره را (به جز علامت آن) در هر مکانی به دست می‌دهد. چون انرژی جنبشی آشکارا مقدار مثبتی است، حرکت به ناحیه‌ای محدود است که در آن ناحیه $V(x) \le E$ است. دو مثال زیر می‌تواند به توضیح این نکته یاری کند. ♣

با داشتن $V(x)$ می‌توان به سادگی از آن مشتق گرفت و نیروی $F(x)$ را به دست آورد. اما اگر $F(x)$ داده شده باشد، برای یافتن $V(x)$ باید از $F(x)$ انتگرال‌گرفت که می‌تواند دشوارتر باشد. این دشواری بستگی به این دارد که قانون نیرو تا چه

اندازه پیچیده باشد.

مثال ۱-۵ (انرژی پتانسیل گرانشی): دو جرم M و m را در نظر بگیرید که فاصله‌شان r است. قانون گرانش نیوتون می‌گوید بین این دو جرم نیروی ربایشی با اندازه‌ی GMm/r^{2} وجود دارد. انرژی پتانسیل این سامانه‌ی دوجرمی در فاصله‌ی r از یکدیگر نسبت به فاصله‌ی $r_{\circ}$ آنها ، عبارت است از

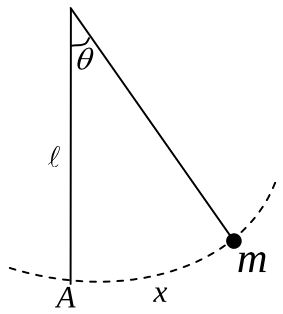
$$V(r)-V(r_{\circ})=-\int_{r_{\circ}}^{r}\frac{-GMm}{r'^{2}}dr'=\frac{-GMm}{r}+\frac{GMm}{r_{\circ}} \tag{۵-۱۳}$$

(علامت منها در انتگرالنده به خاطر ربایشی بودن نیرو است). ∞ گزینه‌ی مناسی برای $r_{\circ}$ است؛ چون در این صورت جمله‌ی دوم صفر می‌شود. از این پس این گزینه را حفظ خواهیم کرد. با این گزینه رابطه‌ی (۱۳-۵) به صورت زیر در می‌آید.

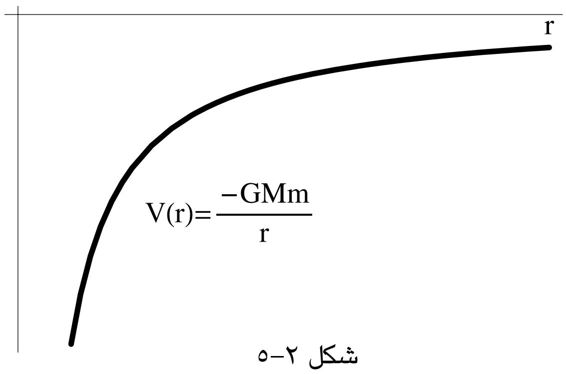
$$V(r)=-G\,\frac{Mm}{r} \tag{۵-۱٤}$$

این تابع در شکل (۲-۵) نشان داده شده است.

مثال ۲-۵ (آونگ ساده): آونگ ساده‌ای از گلوله‌ای به جرم m تشکیل شده است که برابر شکل (۳-۵) از میله‌ی سبکی (از جرم میله چشم‌پوشی شده است) به طول ℓ آویزان است (در اینجا به جای ریسمان میله را جایگزین کرده‌ایم تا بتوانیم حرکت در نقطه‌ی آویز را هم بررسی کنیم). گلوله با سرعت v از مکان ترازمندی آغاز به حرکت می‌کند. برای مقدارهای متفاوت v چه نوع حرکت هایی شدنی است؟



شکل ۳-۵

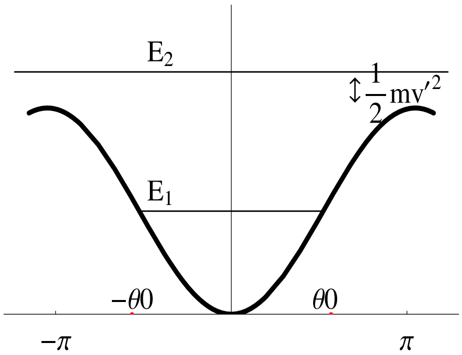


شکل ۲-۵

حل: مسافتی را که گلوله می‌پیماید $x=\ell\theta$ است. θ جابه‌جایی زاویه‌ای گلوله از پائین‌ترین نقطه‌ی مسیر آن است. تابع انرژی پتانسیل نیروی بازگرداننده‌ی $F=-mg\sin\theta=-mg\sin(x/\ell)$ برابر است با

$$V=mg\ell[1-\cos(x/\ell)]=mg\ell(1-\cos\theta) \tag{۵-۱۵}$$

نمودار این تابع در شکل (٤-۵) نشان داده شده است. (توجه کنید: نقاط $\theta=\pi,\ \theta=-\pi$ را می‌توانید ببینید.) حرکت از $\theta=0$ آغاز می‌شود و گلوله با سرعت v شروع به حرکت می‌کند. چون ثابت دلخواه موجود در V را چنان انتخاب کرده‌ایم که $V(0)=0$ باشد، در نتیجه انرژی کل $E=mv^{2}/2$ است. اگر $E<2mg\ell$ باشد (انرژی E_1 در شکل (٤-۵))، حرکت به



شکل ٤-٥

بین دو زاویه‌ی $\pm\theta_\circ$ محدود خواهد بود و داریم $V(\theta_\circ)=E$ یعنی:

$$mg\ell(1-\cos\theta_\circ)=\frac{1}{2}mv^2 \qquad (5-16)$$

$$\Rightarrow 1-\cos\theta_\circ=\frac{v^2}{2g\ell}$$

در این نقاط (یعنی در $\pm\theta_\circ$) انرژی جنبشی صفر می‌شود و گلوله‌ی آونگ به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. پس، حرکت نوسانی است و دامنه‌ی آن $\theta_\circ$ است. از سوی دیگر اگر گلوله را چنان هل دهیم که $E>2mg\ell$ (انرژی E_2 در شکل ٤-٥) باشد، آنگاه انرژی جنبشی هرگز صفر نمی‌شود.

هنگامی که گلوله به بالاترین نقطه عمودی خود می‌رسد هنوز انرژی آن مثبت است یعنی:

$$\frac{1}{2}mv'^2=E-2mg\ell=\frac{1}{2}mv^2-2mg\ell \qquad (5-17)$$

در چنین حالتی، حرکت به جای این که نوسانی باشد، چرخشی پیوسته می‌شود.

۲-۱-۵ نیروهای پایستار

کار هر نیرویی (نیرو می‌تواند به x ، v ، t و یا هر چیز دیگری وابسته باشد) برروی یک جسم با رابطه‌ی

$$W\equiv\int F dx \qquad (5-18)$$

تعریف می شود. (ما هنوز هم خود را به حرکت در یک بُعد محدود می‌کنیم. تعمیم رابطه‌ی بالا به سه بُعد را در بخش بعدی خواهیم دید.) اگر جسم از نقطه‌ی x_1 شروع به حرکت کند و به نقطه‌ی x_2 برود، بدون نگرانی از چگونگی حرکت (سرعت جسم می‌تواند زیاد یا کم شود و یا براثر نیروی دیگری جهتش را تغییر دهد) همواره می‌توان گفت که کار نیرو با تغییر در انرژی جنبشی جسم برابر است.

$$W\equiv\int_{x_1}^{x_2}F dx=\int_{x_1}^{x_2}ma\,dx=\int_{x_1}^{x_2}m\left(\frac{vdv}{dx}\right)dx=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2 \qquad (5-19)$$

برای برخی نیروها، کار مستقل از این است که جسم چگونه حرکت می‌کند. نیرویی که (در یک بعد) تنها به مکان وابسته باشد این ویژگی را دارد؛ چون انتگرال رابطه‌ی (۷-۵) فقط به نقاط آغازین و پایانی بستگی دارد. انتگرال $W\equiv\int F\,dx$ سطح زیر خم F برحسب x است و این سطح مستقل از این است که ذره چگونه از x_1 به x_2 می رود.

برای نیروهای دیگر، کار به چگونگی حرکت ذره بستگی دارد. نیروهایی که به t و v وابسته‌اند از این گروه اند. چون در این صورت مهم است که چه *هنگام* و با چه *سرعتی* ذره از x_1 به x_2 می‌رود. نیروی اصطکاک مثال معمول این گروه از نیروهاست. اگر قطعه‌ای را در روی میز از x_1 به x_2 بلغزانید، کار نیروی اصطکاک $-\mu mg\,|\Delta x|$ می‌شود. اما اگر همین قطعه را به مدت یک ساعت با دست روی میز به چپ و راست یا به پس و پیش هل دهید تا سرانجام به x_2 برسد، آنگاه مقدار کار منفی که اصطکاک روی قطعه انجام می‌دهد بسیار بزرگ خواهد بود. چون اصطکاک همواره با حرکت جسم مخالفت می‌کند، سهم آن در انتگرال $W\equiv\int F\,dx$ همیشه منفی است و هرگز حذف شدن رخ نمی‌دهد (برای هر جابه‌جایی جزیی مقدارهای منفی برهم

افزوده می‌شوند.). بنابراین، حاصل انتگرال یک عدد منفی بزرگ است.

در مورد نیروی اصطکاک موضوع از این قرار است که نیروی μmg فقط تابعی از مکان نیست. در هرمکان اصطکاک می‌تواند در جهت راست یا چپ باشد، بستگی به این دارد که ذره در کدام سو حرکت می‌کند. پس، اصطکاک به سرعت بستگی دارد. درست است که نیروی اصطکاک تابع *علامت* سرعت است اما همین کافی است که فقط به مکان وابسته بودن آن را نابود کند. پس، **نیروی پایستار** را نیرویی تعریف می‌کنیم که کارش روی یک جسم برای رفتن از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر مستقل از این باشد که سفر چگونه انجام می‌گیرد. با توجه به بحثی که در بالا کردیم، می‌دانیم که نیروی یک بعدی وقتی پایستار است که فقط به x وابسته باشد (در دو یا سه بعد برای پایستار بودن نیرو شرط دیگری لازم است و در بخش۳-۵ به آن خواهیم پرداخت.) نکته این است: می‌توان برای هر نیرویی کار تعریف کرد؛ اما فقط برای نیروهای پایستار می‌توان از انرژی پتانسیل مربوط به آن نیرو سخن گفت. پتانسیل برای هر مقدار x یک عدد، $V(x)$، نسبت می‌دهد که با $V(x)=-\int_{x_\circ}^{x} F dx$ داده می‌شود. اگر این انتگرال به مسیر بستگی داشته باشد، خوش تعریف نمی‌شود و نمی‌دانیم چه عددی به $V(x)$ نسبت بدهیم. پس تنها از انرژی پتانسیل مربوط به نیروهای پایستار سخن می‌گوییم. سخن گفتن از انرژی پتانسیل نیروی اصطکاک، به ویژه، بی‌معنی است.

۳-۱-۵ کار و انرژی پتانسیل

وقتی که توپی فرو می‌افتد، آیا افزایش سرعت آن به خاطر کاری است که نیروی گرانش روی توپ انجام می‌دهد یا در اثر کاهش انرژی پتانسیل توپ است؟ خب، هردو (یا دقیق‌تر اگر بگوییم یکی از آنها). کار و انرژی پتانسیل دو بیان متفاوت از یک چیزاند (دستکم برای نیروهای پایستار این چنین است). هر کدام از این بیان‌ها را به کار ببریم به نتیجه‌ی درست می‌رسیم. اما باید هوشیار بود و از هر دو بیان استفاده نکرد و اثر گرانش را روی توپ "دوبار" به حساب نیاورد. از کدام بیان باید استفاده کرد به این بستگی دارد که چه چیزی را"سامانه" می‌نامیم؛ درست مانند $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ و نمودار آزاد نیروها، این جا هم برای استفاده از انرژی و کار مشخص کردن سامانه مهم است.

قضیه‌ی کار- انرژی که با قضیه ۱-۵ بیان شد، به یک ذره مربوط بود. اگر با سامانه‌ای سروکار داشته باشیم که از چند بخش تشکیل شده باشد چه کنیم؟ قضیه‌ی عمومی کار- انرژی می‌گوید کاری که نیروی *خارجی* روی یک سامانه انجام می‌دهد با تغییر انرژی سامانه برابر است. این انرژی می‌تواند جنبشی، پتانسیل یا گرما (که در واقع انرژی جنبشی است) باشد. چون جرم نقطه‌ای ساختار درونی ندارد نمی‌توان آن را گرم کرد. ازاین رو، بیان عمومی قضیه‌ی کار–انرژی به قضیه‌ی ۱-۵ کاهش می‌یابد. اما برای دیدن این که اگر سامانه ساختار درونی داشته باشد چگونه باید با آن کنار آمد به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳-۵ (بالا بردن کتاب): کتابی را با سرعت ثابت از روی میز بلند می‌کنیم. چون سرعت ثابت است انرژی جنبشی تغییر نمی‌کند. می‌خواهیم ببینیم برای گزینه‌های مختلف "سامانه" قضیه‌ی کار- انرژی چه می‌گوید.

- **سامانه=(کتاب)**: در این حالت نیروی دست و گرانش هر دو نسبت به سامانه نیروهای خارجی‌اند. کتاب سامانه‌ی ماست؛ چون انرژی آن تغییر نمی‌کند، پس بنابه قضیه‌ی کار- انرژی داریم

$$W_{\text{دست}} + W_{\text{گرانش}} \quad \Leftrightarrow \quad mgh + (-mgh) = ۰$$

- **سامانه =(کتاب+ زمین)** : در این صورت دست تنها نیروی خارجی است. نیروی گرانش بین کتاب و زمین نیروی داخلی است و انرژی پتانسیل داخلی تولید می‌کند. بنا به قضیه‌ی کار- انرژی داریم

$$W_{\text{دست}} = \Delta V_{\text{کتاب-زمین}} \quad \Leftrightarrow \quad mgh = mgh$$

- **سامانه= (کتاب+ زمین + دست)**: در این حالت هیچ نیروی خارجی وجود ندارد. انرژی درونی سامانه تغییر می‌کند. چون انرژی پتانسیل زمین- کتاب افزایش و انرژی پتانسیل *دست* کاهش پیدا می‌کنند. برای این که کتاب را بلند کنید باید مقداری کالری بسوزانید. پس، قضیه‌ی کار- انرژی می‌گوید

$$0=\Delta V_{\text{دست}}+\Delta V_{\text{کتاب-زمین}} \quad\Leftrightarrow\quad 0=mgh+(-mgh)$$

در حقیقت، کارآیی بدن انسان ۱۰۰٪ نیست و بنابراین، آنچه که به واقع در اینجا روی می‌دهد این است که انرژی پتانسیل دست بیشتر از mgh کاهش پیدا می‌کند و مقداری گرما تولید می‌کند. جمع این دو تغییر انرژی با $-mgh$ برابر است.

نتیجه: به سامانه می‌توان به گونه‌های متفاوت نگریست. انرژی پتانسیل در یک نگرش ممکن است مناسب و در نگرشی دیگر نامناسب باشد. در عمل آسان‌تر است که با انرژی پتانسیل کار کنیم. پس، در مورد توپی که رها می‌شود معمولا گرانش را در سامانه‌ی "توپ- زمین" نیروی داخلی می‌گیریم. اگر سامانه را فقط توپ فرض کنیم آنگاه نیروی گرانش نیروی خارجی است.

۵-۲ حرکت در همسایگی نقطه‌ی ترازمندی؛ نوسانگر هماهنگ

ذره‌ی تنها هنگامی در حال ترازمندی است که نیروی کل وارد بر آن صفر باشد. برای نیروی پایستار این بدان معنی است که با توجه به رابطه‌ی (۵-۱۱) خم انرژی پتانسیل در مکان ترازمندی ذره، افقی باشد. یعنی مشتق پتانسیل که نیروست باید در نقطه‌ی ترازمندی صفر باشد. حالا حرکت ذره‌ای را در همسایگی نقطه‌ی ترازمندی در نظر بگیرید. بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود، فرض کنید نقطه‌ی ترازمندی در مبداء مختصات، $x=0$، است. مقدار ثابت موجود در V را چنان انتخاب کنید که پتانسیل در $x=0$ صفر شود: $V(0)=0$. اگر تنها به جابه‌جایی‌های کوچک علاقمند باشیم می‌توانیم $V(x)$را در همسایگی $x=0$، یعنی در همسایگی نقطه‌ی ترازمندی، بسط تیلور- مک لورین بدهیم:

$$V(x)=V(0)+xV'(0)+\frac{1}{2}x^2V''(0)+\cdots \tag{۵-۲۰}$$

که در آن $V'=dv/dx$ و $V''=d^2v/dx^2$ و ... اند. جمله‌ی اول بسط بالا صفر است؛ چون مبداء پتانسیل را چنان انتخاب کردیم که $V(0)=0$ باشد. چون $x=0$ نقطه‌ی ترازمندی است، پس $V'(x=0)$ صفر است (چون در نقطه‌ی ترازمندی نیرو صفر است و V' به نیرو مربوط است.) . پس، جمله‌ی دوم بسط بالا هم صفر است. در نتیجه، در همسایگی $x=0$ آنچه که باقی می‌ماند عبارت است از

$$V(x)=\frac{1}{2}x^2V''(0) \tag{۵-۲۱}$$

یا

$$V(x)=\tfrac{1}{2}kx^2 \quad ; \qquad k=V''(0) \tag{۵-۲۲}$$

حرکت در همسایگی هر نقطه‌ی ترازمندی را با تقریب خوب می‌توان با این تابع پتانسیل توصیف کرد، آن را همه جا می‌بینیم. در مکانیک کوانتومی هم همان قدر اهمیت دارد که درمکانیک کلاسیک اهمیت دارد. از این رو بررسی جزئیات آن سودمند است.

نکته: تابع پتانسیل $V(x)$ را می‌توان در همسایگی هر کمینه‌ی موضعی بسط داد. لازم نیست که این بسط فقط در همسایگی $x=0$ باشد. فرض کنید نقطه‌ی ترازمندی در x_0 است. یعنی x_0 کمینه‌ی موضعی $V(x)$ است. بسط تیلور آن در نقطه x_0

عبارت است از

$$V(x)=V(x_\circ)+V'(x_\circ)(x-x_\circ)+\frac{۱}{۲!}V''(x_\circ)(x-x_\circ)^{۲}+\frac{۱}{۳!}V'''(x_\circ)(x-x_\circ)^{۳}+\cdots \qquad (۵-۲۳)$$

جمله‌ی اول، $V(x_\circ)$، یک عدد است و می‌توان از آن چشم پوشید؛ چون فقط اختلاف انرژی است که معنی دارد (یا به بیان هم‌ارز چون $F=dV/dx$). بنا به تعریف، در نقطه‌ی ترازمندی $V'(x_\circ)=\circ$ است و آنچه که باقی می‌ماند جمله‌ی $V''(x_0)$ و مرتبه‌های بالاتر است. اما برای جابه‌جایی‌های کوچک، مرتبه‌های بالاتر در مقایسه با جمله‌ی $V''(x_\circ)$ کوچک و کوچک‌تر می‌شوند و نادیده گرفتن آنها تقریب بسیار خوبی به دست می‌دهد (حتی اگر $V'''(x_\circ)$ خیلی بزرگتر از $V''(x_\circ)$ باشد، می‌توانیم بازه‌ی $x-x_\circ$ را به اندازه‌ی کافی کوچک انتخاب کنیم به طوری که جمله‌ی $V'''(x_\circ)$ قابل چشم پوشی بشود.) پس داریم

$$V(x)\approx\frac{۱}{۲}V''(x_\circ)(x-x_\circ)^{۲} \qquad (۵-۲٤)$$

و اگر $V''(x_\circ)$ را برابر "ثابت فنر"، k، بنامیم، آنگاه رابطه‌ی (۵-۲٤) همانند قانون هوک می‌شود: $V(x)=(۱/۲)k(x-x_\circ)$. بنابراین، اگر دور شدن ذره‌ای از نقطه‌ی ترازمندیش به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، می‌توان به برخی پرسش‌ها در باره‌ی حرکت ذره پاسخ داد. پرسش‌هایی مانند: آیا حرکت نوسانی است؟ بسامد آن چگونه به دامنه‌اش بستگی دارد؟ ♣

با نگاه کردن به رابطه‌ی (۵-۲۱) یا (۵-۲٤) می‌بینیم که بسامد این حرکت، $\omega=\sqrt{k/m}$، عبارت است از

$$\omega=\sqrt{V''(x_\circ)/m} \qquad (۵-۲۵)$$

مثال ۵-۴: ذره‌ای در پتانسیل $V(x)=A/x^{۲}-B/x$ حرکت می‌کند. بسامد نوسان‌های کوچک آن را حول نقطه‌ی ترازمندی به دست آورید. پتانسیل بالا به حرکت سیاره مربوط است و دوباره آن را در فصل ۷ خواهیم دید.

حل: نخستین کاری که باید بکنیم محاسبه‌ی مکان ترازمندی، $x_\circ$ ، است. داریم

$$V'(x)=-\frac{۲A}{x^{۳}}+\frac{B}{x^{۲}} \qquad (۵-۲٦)$$

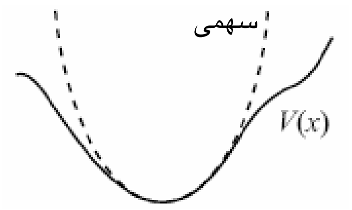
با قرار دادن $V'(x)=۰$ خواهیم داشت $x=۲A/B\equiv x_\circ$. این نقطه‌ی ترازمندی ذره است. مشتق دوم $V(x)$ عبارت است از

$$V''(x)=\frac{٦A}{x^{٤}}-\frac{۲B}{x^{۳}} \qquad (۵-۲۷)$$

با جایگزین کردن $x_\circ=۲A/B$ برای x در رابطه‌ی (۵-۲۷) بسامد حرکت به دست می‌آید

$$\omega=\sqrt{\frac{V''(x_\circ)}{m}}=\sqrt{\frac{B^{٤}}{۸mA^{۳}}} \qquad (۵-۲۸)$$

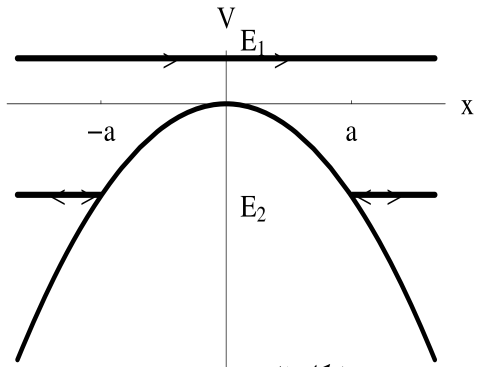
رابطه‌ی (۵-۲۵) نتیجه‌ی مهمی است. چون هر تابع $V(x)$ در بازه‌ی به اندازه‌ی کافی کوچک در همسایگی کمینه‌ی آن- نقطه‌ی ترازمندی- مانند شکل (۵-۵) شبیه یک سهمی است (به جز در حالت خاصی که $V''(x_\circ)=\circ$ است.) بنابراین، در رابطه‌ی (۵-۲۲) برای $k>\circ$ و هر انرژی $E>\circ$ دو نقطه وجود دارد که در آن دو نقطه $V(x)=E$ است. شکل (۵-٦ الف را ببینید) یعنی:



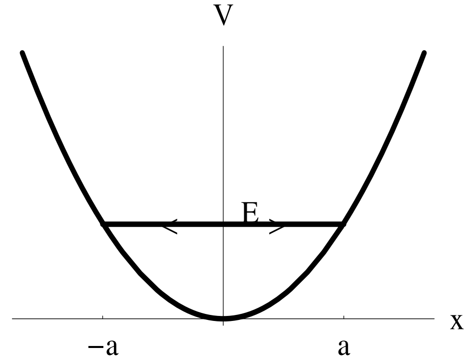
شکل ۵-۵

$$x = \pm a \quad , \quad a = \sqrt{\frac{2E}{k}} \qquad (۵-۲۹)$$

می‌بینیم که حرکت بین این دو نقطه نوسانی است. از سوی دیگر اگر $k < 0$ باشد، خم رابطه‌ی (۵-۲۲) سهمی رو به پائین خواهد بود (شکل ٦-۵ ب). در این حالت دو نوع حرکت شدنی است. اگر $E < 0$ باشد آنگاه ذره می‌تواند تا یک فاصله‌ی کمینه‌ی حدی به نقطه‌ی ترازمندی نزدیک شود، در آنجا توقف لحظه‌ای بکند و جهت خود را تغییر دهد (انرژی E_2 در شکل٦-۵ ب را ببینید). اما اگر $E > 0$ (شکل٦-۵ ب، انرژی E_1) باشد، آنگاه ذره به اندازه‌ی کافی انرژی دارد که از مانع



شکل ٦-۵ ب



شکل٦-۵ الف

بگذرد و هرگز به حالت سکون در نیاید. در این صورت ذره برای همیشه به حرکت خود در همان سوی ادامه خواهد داد. در این حرکت سرعت ذره با نزدیک شدن به $x = 0$ (نقطه‌ی ترازمندی) کاهش می‌یابد و سپس افزایش پیدا می‌کند. با توجه به رابطه‌ی (۵-۱۱) نیروی مربوط به تابع انرژی پتانسیل رابطه (۵-۲۲) عبارت است از:

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx \qquad (۵-۳۰)$$

اگر $k > 0$ باشد، نیرو ربایشی و اگر $k < 0$ باشد نیرو رانشی است. در هر دو حالت نیرو با فاصله از نقطه‌ی ترازمندی متناسب است.

اینک معادله‌ی حرکت (قانون دوم نیوتن) را می‌توان به گونه‌ی زیر نوشت:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (۵-۳۱)$$

حل این معادله بسیار آسان است. با استفاده از پایستگی انرژی، رابطه‌ی (۵-۱۲)، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V(x) \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2 \qquad (۵-۳۲)$$

و یا داریم

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2\right)^{1/2} \Rightarrow \int \left(\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2\right)^{-1/2} dx = \int dt \qquad (۵-۳۳)$$

چون درآینده با معادله‌های از این دست بارها روبرو خواهیم شد، بررسی روش حلی که بتوان در مثال‌های دیگر هم به کار برد سودمند است. پیش از پرداختن به آن، پاسخ انتگرال (۵-۳۳) را به دست می‌آوریم و به کوتاهی به فرازهای فیزیکیِ پاسخ

می‌پردازیم. پاسخ انتگرال‌های از گونه‌ی (۳۳-۵) به صورت زیر است:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^{۲}-u^{۲}}} = \sin^{-۱}\frac{u}{a}+c \qquad (۵-۳۴)$$

نخست رابطه‌ی (۳۳-۵) را به صورت بالا در بیاورید و سپس به جای u متغیر x قرار دهید:

$$\frac{dx}{\sqrt{k/m}\sqrt{(۲E/k)-x^{۲}}} = \int dt \qquad (۵-۳۵)$$

پاسخ به قرار زیر است:

$$\frac{۱}{\sqrt{k/m}}\sin^{-۱}\frac{x}{\sqrt{۲E/k}}+A=t \qquad (۵-۳۶)$$

یا

$$\sin^{-۱}\frac{x}{\sqrt{۲E/K}}+B=\sqrt{k/m}t \qquad (۵-۳۷)$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = \sqrt{۲E/k}\sin\left(\sqrt{k/m}\,t+B\right) \qquad (۵-۳۸)$$

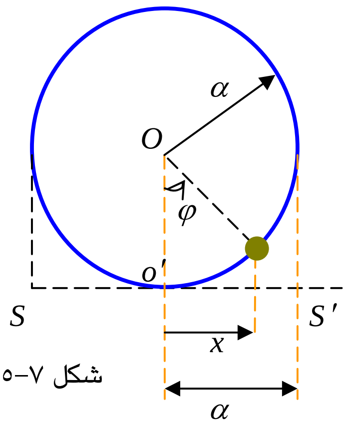
و یا به طور کلی: $x = \alpha\sin(\omega t+B)$ که در آن $\alpha \equiv \sqrt{۲E/k}$ و $\omega \equiv \sqrt{k/m}$ است. می‌بینیم که در این‌جا دو ثابت α و B وجود دارند. ثابت $\alpha \equiv \sqrt{۲E/k}$ همان a در رابطه‌ی (۲۹-۵) است؛ یعنی بیشینه‌ی جابه‌جایی از نقطه‌ی ترازمندی است. مفهوم‌های فیزیکی α و B را با مراجعه به شکل (۷-۵) می‌توان دریافت: خط SS' مولفه‌ی x حرکت ذره است و α بیشینه مقدار x از نقطه‌ی میانی، O'، خط SS' است. دایره‌ی به شعاع α را در نظر بگیرید که در $O'(x=۰)$ بر خط SS' مماس است. در هر لحظه از زمان، مکان x ذره را می‌توان با تصویر $\alpha\sin\varphi$ روی SS' نشان داد. فرض کنید $\varphi=\omega t$ است؛ یعنی اجازه دهیم زاویه‌ی φ به طور یکنواخت با آهنگ ω افزایش پیدا کند (ω **سرعت زاویه‌ای** یا **بسامد زاویه‌ای** نام دارد). آنگاه $x=\alpha\sin\omega t$ نمایش حرکت یکنواخت ذره بر روی مسیر دایره‌ای باسرعت زاویه‌ای ω است. پس، می‌بینیم که بیشینه مقدار x همان α است که دامنه یا بیشینه مقدار **جابه‌جایی** است. بسامد زاویه‌ای ω با رابطه‌ی $\omega=۲\pi f$ به بسامد واقعی f مربوط است. کمیت ωt یا $\omega t+B$ زاویه فاز و یا فاز حرکت نام دارد. به این ترتیب معنی *ثابت فاز* یا فاز اولیه B (به ازای $t=۰$) روشن است: در دایره‌ی مرجع، در زمان $t=۰$، اندازه‌ی زاویه‌ی فاز اولیه B است. اگر رابطه‌ی $x=\alpha\sin(\omega t+B)$ را با استفاده از اتحاد مثلثاتی بسط دهیم، روشنگری بیشتری به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x &= \alpha\sin(\omega t+B)=\alpha\sin\omega t\cos B+\alpha\cos\omega t\sin B \\ &= D\sin\omega t+F\cos\omega t \end{aligned} \qquad (۵-۳۹)$$

که در آن $D=\alpha\cos B$ و $F=\alpha\sin B$ اند. بنابراین، با تقسیم این دو بر هم داریم:

$$B = \tan^{-۱}\frac{F}{D} \qquad (۵-۴۰)$$

پس، می‌بینیم که در زمان $t=۰$، جابه‌جایی $x=F$ است، در نتیجه F مقدار اولیه‌ی



شکل ۷-۵

جابه‌جایی است. اگر از رابطه‌ی (۳۹-۵) نسبت به زمان مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = D\,\omega \cos \omega t - F\,\omega \sin \omega t \qquad (۵-۴۱)$$

از اینجا معنی Dآشکار می‌شود. $D\omega$ مقدار اولیه (در زمان $t=0$) سرعت است. می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$D\,\omega = \alpha\,\omega \cos B = \sqrt{2E/k}\,\sqrt{k/m}\,\cos B = \sqrt{2E/m}\,\cos B \qquad (۵-۴۲)$$

اگر فاز اولیه، B، صفر باشد؛ یعنی حرکت از نقطه ترازمندی در $x=0$ آغاز شود، برای زمان $t=0$ داریم:

$$D\,\omega = \sqrt{2E/m} = \sqrt{\frac{2(mv^2/2)}{m}} = V \qquad (۵-۴۳)$$

۱-۲-۵ پاسخ معادله‌ی نوسانگر هماهنگ

اینک می‌خواهیم به معادله‌ی (۳۱-۵) برگردیم و آن را حل کنیم. معادله‌ی (۳۱-۵) یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دو خطی است، یعنی شامل توان اول x و مشتق‌های آن است. چنین معادله‌هائی از ویژگی مهمی برخوردارند. پاسخ‌های آنها از اصل *برنهی* پیروی می‌کنند: اگر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ هر دو پاسخ معادله‌ی (۳۱-۵) باشند، آنگاه ترکیب خطی آنها نیز پاسخ است

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \qquad (۵-۴۴)$$

که در آن a_1 و a_2 مقادیر ثابت‌اند. به بیان دیگر، داریم

$$m\ddot{x} + kx = 0 = a_1(m\ddot{x}_1 + kx_1) + a_2(m\ddot{x}_2 + kx_2) = 0 \qquad (۵-۴۵)$$

فراتر از این، اگر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ پاسخ‌های مستقل خطی باشند (یعنی اگر یکی ضریبی از دیگری نباشد) آنگاه رابطه‌ی (۴۴-۵) در واقع پاسخ عمومی است. رابطه‌ی (۳۱-۵) از مرتبه‌ی دوم است و می‌توان با دو بار انتگرال گرفتن نسبت به زمان پاسخ را به دست آورد. پاسخ عمومی باید دو ثابت انتگرال‌گیری داشته باشد. بنابراین، برای یافتن پاسخ عمومی، آنچه که باید انجام داد، یافتن دو پاسخ مستقل $x_1(t)$و $x_2(t)$ است. نخست حالت $k<0$ را بررسی می‌کنیم. برای این وضعیت نقطه‌ی $x=0$ نقطه‌ای است که در آن پتانسیل $V(x) = (1/2)kx^2$ بیشینه است. رابطه‌ی (۳۱-۵) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\ddot{x} - p^2 x = 0 \quad , \quad p = \sqrt{-k/m} \qquad (۵-۴۶)$$

به آسانی می‌توان با جایگزینی دید که $x = e^{pt}$ و $x = e^{-pt}$ هر دو در این معادله صدق می‌کنند. برای نمونه $x = e^{pt}$ را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = p\,e^{pt} \quad , \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = p^2 e^{pt} \qquad (۵-۴۷)$$

در رابطه‌ی (۴۶-۵) جایگزین کنید:

$$p^2 e^{pt} - p^2 e^{pt} = 0 \qquad (۵-۴۸)$$

پس: $x = e^{pt}$ پاسخ معادله‌ی (۴۶-۵) است. به همین ترتیب، $x = e^{-pt}$ در رابطه‌ی (۴۶-۵) صدق می‌کند. پس پاسخ عمومی ترکیب خطی از این دو است، آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x = \frac{1}{2}A\,e^{pt} + \frac{1}{2}B\,e^{-pt} \qquad (۵-۴۹)$$

ضرایب $A/۲$ و $B/۲$ همان $a_۱,a_۲$ رابطه‌ی (۵-۴۴) اند. در اینجا ضریب ۱/۲ را برای مناسبت‌های آینده وارد کردیم (این در واقع کاملاً دلخواه و قراردادی است که ثابت‌های دلخواه را A و B یا $A/۲$ و $B/۲$ بنامیم.) روشن است که جابه‌جایی اندک، در حالت عمومی، به افزایش نمایی x با زمان خواهد انجامید و این افزایش تا هنگامی ادامه خواهد یافت که دیگر تقریب موجود در رابطه‌ی (۵-۲۲) درست نباشد. بنابراین، ترازمندی ناپایدار است، چیزی که باید انتظار آن را می‌داشتیم، چون نقطه‌ی ترازمندی جایی است که V بیشینه است.

اینک به حالت $k>۰$ توجه کنید: $V(x)$ در $x=۰$ دارای کمینه است. تابع انرژی پتانسیل، رابطه‌ی (۵-۲۲) از نوع نوسانگر هماهنگ ساده است. معادله‌ی حرکت (۵-۳۱) را به صورت زیر بنویسید:

$$\ddot{x}+\omega^۲x=۰ \quad , \quad \omega=\sqrt{k/m} \qquad (۵-۵۰)$$

به آسانی می‌توان دید که توابع $x=\cos\omega t$ و $x=\sin\omega t$ پاسخ‌های معادله‌ی (۵-۵۰) اند. (این را در حل انتگرال (۵-۳۳) نیز دیدیم. آنجا که نوشتیم $x=D\sin\omega t+F\cos\omega t$). پس پاسخ عمومی معادله‌ی (۵-۵۰) عبارت است از:

$$x=c\cos\omega t+d\sin\omega t \qquad (۵-۵۱)$$

ثابت‌های c و d (همانند D و F) را باید با استفاده از دانسته‌های اولیه به دست آورد. اگر در زمان $t=۰$ ذره با سرعت $v_۰$ در $x_۰$ باشد آنگاه به سادگی در می‌یابیم که:

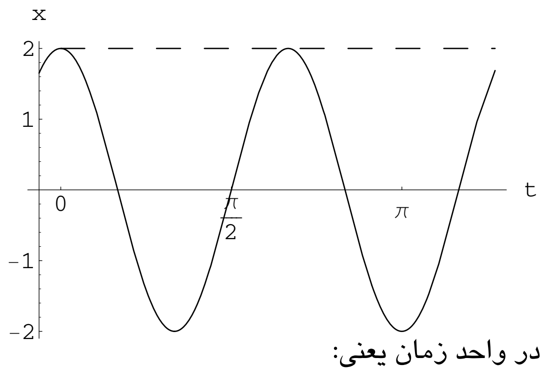
$$x(t=۰)\equiv x_۰=c\cos(۰)+d\sin(۰)=۰ \;\Rightarrow\; c=x_۰$$
$$\dot{x}(t=۰)\equiv v_۰=-c\omega\sin(۰)+d\omega\sin(۰) \;\Rightarrow\; d=\frac{v_۰}{\omega} \qquad (۵-۵۲)$$

همان‌گونه که دیدید رابطه‌ی (۵-۵۱) را می‌توان به گونه‌ی دیگری هم نوشت:

$$x=a\cos(\omega t-\theta) \qquad (۵-۵۳)$$

که در آن ثابت‌های a و θ با رابطه‌های $d=a\sin\theta$ و $c=a\cos\theta$ به c و d مربوطند. ثابت a **دامنه** نام دارد و همانی است که در رابطه‌ی (۵-۲۹) آمده است و حدهائی را تعریف می‌کند که ذره در فاصله‌ی بین آنها ، $x=\pm a$، نوسان می‌کند. حرکت نوسانی دوره‌ای است و دوره‌ی آن τ است که با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود. در شکل (۵-۸) مکان ذره نسبت به زمان رسم شده است و رفتار نوسانی آن را نشان می‌دهد.

$$\tau=۲\pi/\omega \qquad (۵-۵۴)$$



شکل ۵-۸

بسامد f عبارت است از تعداد نوسان‌ها در واحد زمان یعنی:

$$f=\frac{۱}{\tau}=\frac{\omega}{۲\pi} \qquad (۵-۵۵)$$

توجه کنید که این بررسی برای حرکت ذره در همسایگی نقطه‌ی ترازمندی آن و برای هرگونه تابع انرژی پتانسیل است. برای نمونه، این بحث را با همان دقت برای ذره‌ای به جرم m که به انتهای یک فنر (بدون جرم) بسته شده است هم می‌توان بکار برد. نیروی فنر $F_S = -kx$ و پتانسیل آن $kx^2/2$ است. k ثابت نیرو یا ثابت فنر است. برای جابه‌جائی‌های به اندازه‌ی بسنده کوچک، هر سامانه‌ای از این دست همانند نوسانگر هماهنگ ساده رفتار می‌کند؛ به ویژه، دوره یا بسامد نوسان‌های کوچک را می‌توان از مشتق دوم تابع انرژی پتانسیل در نقطه‌ی ترازمندی بدست آورد.

مثال۵-۵ (ذره‌ی باردار در میان دو ذره‌ی باردار): دو بار مساوی q در نقطه‌های $x = \pm a$ قرار دارند. ذره‌ی باردار دیگری با بار q بین این دو بار حرکت راست‌خط دارد. دوره‌ی نوسان‌های کوچک بار q کدام است؟

حل: در اینجا نیرو در فاصله‌ی میان $x = -a$ و $x = +a$ (بازه ی $|x| < a$) عبارت است از:

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (a+x)^2} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (a-x)^2} \qquad (۵-۵۶)$$

تابع انرژی پتانسیل عبارت است از

$$V = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2a}{a^2 - x^2}\right) \qquad (۵-۵۷)$$

به روشنی دیده می‌شود که مکان ترازمندی در جایی است که $V' = 0$ باشد. یعنی در $x = 0$. آنگاه به سادگی می‌بینیم که

$$k = V''(0) = \frac{q^2 a}{\pi\varepsilon_0} \left.\frac{a^2+3x^2}{(a^2-x^2)^3}\right|_{x=0} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a^3} \qquad (۵-۵۷)$$

پس:

$$\tau = \frac{2\pi}{q}\sqrt{\pi\varepsilon_0 a^3 m} \qquad \text{و} \qquad \omega^2 = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a^3 m} \qquad (۵-۵۸)$$

فیزیک محاسباتی[1]:

از نرم افزار *Mathematica* استفاده کنید و مسئله‌ی نوسانگر هماهنگ را که معادله‌ی آن به صورت $\ddot{x}[t] + \omega_0^2 x[t] = 0$ است ، حل کنید.

(الف) : اگر شرایط اولیه را چنان انتخاب کنیم که $x[0] = x_0$, $\dot{x}[0] = v_0$ باشند، نشان دهید که پاسخ $x[t] = x_0 \cos[\omega_0 t] + \frac{v_0 \sin[\omega_0 t]}{\omega_0}$ است. $x[t]$ را برحسب زمان رسم کنید.

(ب): نشان دهید که می‌توان پاسخ را به صورت $A\cos[\omega_0 t + \delta]$ نوشت که در آن $x[0] = A\cos[\delta]$ و $\dot{x}[0] = -A\omega_0 \sin[\delta]$ اند. A دامنه و δ فاز است.

(پ): با استفاده از دستور LaplaceTransform معادله را حل کنید.

(ت): برای رسم پاسخ در قسمت (الف) پیکان روی محورهای افقی و عمودی را تعریف کنید و پیکانی هم روی خم بگذارید.

فیزیک محاسباتی ۲ (پاسخ با بسط سری)

بسیاری مواقع معادله‌های دیفرانسیل را می‌توان با بسط سری زمانی حل کرد.

(الف): در محیط *Mathematica* تابع کاربر زیر را تعریف کنید و آنرا با دستور Protect[diffSeriOne] نگهداری کنید.

```
Clear["Global` *"]
diffSeriOne[eq_,z_,t_,initialx_,initialv,Order_]:=
 Modul[{tempser,tempeq,tempvar,tempsol,tempinit},tempest=z→Series[z,{t,0,order}];
  tempeq=((eq[[1]]-eq[[2]])//.tempser)==0;
  tempvar=(Table[D[z,{t,j}],{j,2,order+2}]/.t→0)//Flatten;
  tempsol=Solve[tempeq,tempvar]//Flatten;
  tempinit={Head[z][0]→initialx,Head[z]'->initialv};
  z/.tempser/.tempsol/.tempinit]
```

در اینجا eq ورودی یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم است. z تابع و t متغیر مستقل است.initialx و initialv شرایط اولیه‌اند. Order، مرتبه‌ی پاسخ سری است. این فرایند فرض می‌کند که پاسخ را می‌توان به صورت سری توانی نوشت.

(ب): با آزمودن گامهای میانی پاسخ معادله‌ی $Y''[t]+\gamma Y'[t]+\omega^2 Y[t]=+aY'[t]^2 Y[t]$ توضیح دهید که چگونه دستور diffSerieOne کار می‌کند.

(پ): معادله‌ی حرکت نوسانگر خطی را در نظر بگیرید: $x''[t]+\omega_0^2 x[t]=0$ بسط سری زمانی آن را بیابید. با استفاده از دستور Sum جمع بینهایت را حساب کنید و جواب دقیق را به دست آورید.

فیزیک محاسباتی۳ (پتانسیل و نمودار فضای فاز نوسانگر خطی)

نوسانگر خطی را که با رابطه‌ی $mx''[t]+kx[t]=0$ توصیف می‌شود، در نظر بگیرید.

(الف): با کاستن این معادله‌ی مرتبه‌ی دو به معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول، انرژی پایسته را بیابید. از انرژی پایسته، جمله‌های مربوط به انرژی جنبشی و پتانسیل را مشخص کنید.

(ب): تابع انرژی پتانسیل را رسم کنید و رفتار سامانه را توصیف کنید.

(پ): با استفاده از دستورهای **ContourPlot** و **ShadowPlot3D** نمودار فاز را (یعنی تابع سرعت نسبت به مکان) رسم کنید.

۵-۳ پایستگی انرژی در سه بعد

۵-۳-۱ قانون پایستگی انرژی در یک بعد: چند مثال

در بخش۵-۱-۱ قانون پایستگی انرژی را از قانون‌های نیوتون برای حالتی به دست آوردیم که نیرو تنها تابعی از x بود. با این حال، این قانون پایستگی کاربردهای فراوانی دارد و با شناختن گونه‌های مختلف انرژی (انرژی گرمایی، شیمیایی، الکترومغناطیسی و غیره) به گستره‌های فراتر از مکانیک راه یافت تا جائی که اینک به عنوان یکی از بنیادی‌ترین قانون‌های فیزیک شناخته می‌شود. وجود چنین قانونی و نیز قانون‌های پایستگی تکانه و تکانه‌ی زاویه‌ای، در واقع با اصل نسبیت ارتباط

نزدیک دارند. قانون‌های پایستگی تکانه‌ی خطی و انرژی از همگنی فضا و زمان نتیجه می‌شوند. قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای به همسانگردی فضا مربوط است.

بسیاری از نیروهای ناپایستار (*یا اتلافی*) را می‌توان اثرهای بزرگ مقیاس (ماکروسکوپیک) نیروهایی دانست که در مقیاس‌های کوچک به واقع پایستارند. برای نمونه، نفوذ ذره‌ای در یک محیط بازدارنده، مانند اتمسفر، را در نظر بگیرید: ذره نیرویی را تجربه می‌کند که به سرعتش بستگی دارد و بنابراین، ناپایستار است. با این حال، اگر به وضعیت در ابعاد خردمقیاس (میکروسکوپیک) بنگریم، درمی‌یابیم که آنچه روی می‌دهد این است که ذره تعدادی برخورد با مولکول‌های محیط انجام می‌دهد. در هر برخورد، انرژی پایسته است و بخشی از انرژی جنبشی ذره‌ی فرودی به مولکول‌های محیط که با ذره برخورد می‌کنند منتقل می‌شود (این برخوردها را در فصل ۸ بررسی خواهیم کرد.) با افزایش برخوردها، انرژی ذره‌ی برخورد کننده رفته‌رفته میان مولکول‌های اطراف ذره توزیع می‌شود. به این صورت، انرژی میانگین مولکول‌های محیط افزایش و از حرکت ذره کاسته می‌شود. این انرژی افزوده شده به محیط در مقیاس کلان نگرانه به صورت گرما نمود می‌یابد و به افزایش دمای محیط می‌انجامد. برای هر نیروی *دلخواه* F آهنگ تغییر انرژی جنبشی T با رابطه‌ی (۹-۵) داده می شود

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{dT}{dt}=m\dot{x}\ddot{x}=F\dot{x}=F\frac{dx}{dt} \tag{۵-۹}$$

در نتیجه تغییر انرژی جنبشی، dT، در بازه‌ی زمانی dt برابر است با

$$dT=Fdx\equiv dW \tag{۵-۵۹}$$

dW کاری است که نیروی F در جابه‌جایی جزیی dx انجام می‌دهد (بنابراین، برای نیروی پایستار، انرژی پتانسیل $V(x)$ برابر است با منهای کار انجام شده توسط نیرو در جابه‌جایی سامانه از نقطه‌ی ثابت x_0 به نقطه‌ی x). پس، کار سنجه‌ای (معیاری) برای تبدیل انرژی از گونه‌های دیگر به انرژی جنبشی است. آهنگ انجام کار (**توان**) با Fv تعریف می‌شود. در سامانه‌های مکانیکی واقعی (غیرآرمانی) معمولاً بخشی از انرژی مکانیکی (جنبشی یا پتانسیل) به صورت گرما یا به شکل‌های دیگر از دست می‌رود. در چنین سامانه‌هایی گوییم به سامانه نیروهای اتلافی اثر می‌کنند.

اینک بیان کمی پایستگی انرژی مکانیکی: به رابطه‌ی (۹-۵) برگردید ودو طرف آن را در dt ضرب کنید و سپس از زمان t_0 تا t_1 از آن انتگرال بگیرید

$$\int\frac{dT}{dt}dt=\int_{t_0}^{t_1}Fv\,dt \Rightarrow T_1-T_0=\int F\frac{dx}{dt}dt=\int_{x_0}^{x_1}Fdx \tag{۵-۶۰}$$

همان‌گونه که می‌دانیم انتگرال سمت راست کاری است که نیروی F در زمان t_1-t_0 انجام می‌دهد و با تغییر انرژی جنبشی سامانه برابر است:

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_{x_0}^{x_1}F(x)dx \tag{۵-۶۱}$$

تابع انرژی پتانسیل $V(x)$را پیشتر با رابطه‌ی (۵-۵) به صورت $V(x)=-\int_0^x F(x)dx$ تعریف کردیم که در آن حد پایین 0 مبداء پتانسیل است. پس، $(1/2)mv_1^2-(1/2)mv_0^2$ در سمت چپ رابطه‌ی (۶۱-۵) را می‌توان بر حسب تابع انرژی پتانسیل و به صورت زیر نوشت:

$$\int_{x_\circ}^{x_۱} F(x)dx = -V(x_۱) + V(x_\circ) \qquad (۵-۶۲)$$

و بنابراین داریم

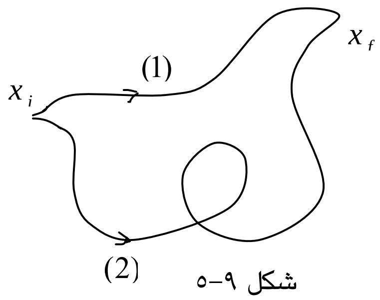
$$\frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{۱}{۲}mv_\circ^۲ = -V(x) + V(x_\circ) \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{۲}mv^۲ + V(x) = \frac{۱}{۲}mv_\circ^۲ + V(x_\circ) \qquad (۵-۶۳)$$

سمت راست کمیتی است که فقط به شرایط اولیه بستگی دارد و از این رو در طول حرکت ثابت باقی می‌ماند. این مقدار ثابت همان انرژی کل E است و در طول حرکت مقدار آن تغییر نمی‌کند. یعنی انرژی مکانیکی (جمع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل) ثابت است. این همه را پیشتر در رابطه‌ی (۶-۵) دیدیم: ثابت = T+V=E

اکنون که کار نیرو را می‌شناسیم؛ اندکی به عقب برمی‌گردیم. در بخش ۱-۵ نیروهای پایستار را تعریف کردیم و گفتیم نیرویی پایستار است که تنها به مکان، x، وابسته باشد، و نیز دریافتیم که برای این‌گونه نیروها، پایستگی انرژی برقرار است. همچنین آموختیم که اگر نیرو پایستار باشد آنگاه کار این نیرو برای جابه‌جایی جسمی از نقطه‌ی اولیه‌ی x_i به نقطه پایانی x_f با اختلاف انرژی پتانسیل در این دو نقطه برابر است. یعنی

$$V(x_f) - V(x_i) = \Delta V = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \qquad (۵-۶۴)$$

سمت چپ این رابطه یک عدد است یا بهتر است بگوئیم تفاضل دو عددی است که به نقاط x_f و x_i نسبت داده شده‌اند. سمت راست رابطه‌ی بالا کاری است که نیروی $F(x)$ انجام می‌دهد. این رابطه توضیح نمی‌دهد که ذره‌ی برای رفتن از x_i به x_f چه مسیری را پیموده است. در شکل (۹-۵) اگر نیروی $F(x)$ ذره را بر روی مسیر (۱) از x_i به x_f ببرد همان مقدار کار انجام می‌دهد که از مسیر (۲) ذره را بین این دو نقطه‌ی ثابت x_i و x_f جابه‌جا کند. زیرا نقطه‌های x_i و x_f ثابت اند و در آن نقاط پتانسیل مقادیر معینی دارد. با این توضیح



شکل ۹-۵

می‌توان تعریف دیگری برای نیروهای پایستار (نیروهایی که به سرعت بستگی ندارد) بیان کرد: نیروی پایستار نیرویی است که اگر به جسمی اثر کند و جسم را بین دو نقطه جابه‌جا کند، کارش مستقل از مسیری است که ذره بین دو نقطه می‌پیماید. از این تعریف روشن است که کار نیروی پایستار بر روی **مسیر بسته** همواره صفر است. اگر به شکل (۹-۵) توجه کنید می‌بینید که می‌توان مسیر بسته را چنین تصور کرد: در مسیر(۱)، از نقطه‌ی x_i به نقطه‌ی x_f برویم و بر روی مسیر (۲) از x_f به x_i برگردیم. کار نیرو بر روی مسیر (۱)برابر است با $W_۱ = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = V(x_i) - V(x_f)$ و کار نیرو بر روی مسیر (۲) کار برابر است با $W_۲ = \int_{x_f}^{x_i} F(x)dx = V(x_f) - V(x_i)$. پس، کار کل روی مسیر بسته عبارت است از

$$W_۱ + W_۲ = [V(x_i) - V(x_f)] + [V(x_f) - V(x_i)] = \circ \qquad (۵-۶۵)$$

یعنی اگر نیرو پایستار باشد، کارش در یک مسیر بسته صفر است. در رابطه‌ی (۱۹-۵) دیدیم که برای هر نیروی دلخواه (پایستار یا ناپایستار) کار نیرو برابراست با تغییر انرژی جنبشی

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx = \frac{۱}{۲}mV_f^۲ - \frac{۱}{۲}mV_i^۲ = \Delta T \qquad (۵-۶۶)$$

اما **فقط** برای نیروهای پایستار کار با تغییر انرژی پتانسیل برابر است. پس هنگامی که *تنها* با نیروهای پایستار سروکار داشته باشیم، داریم

$$\int_{x_i}^{x_f} F\,dx = T_f - T_i = -V(x_f) + V(x_i) \qquad (۵-۶۷)$$

که چیزی نیست جز بیان پایستگی انرژی مکانیکی

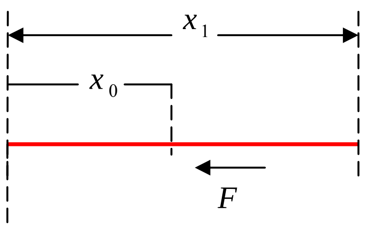
$$T_f + V(x_f) = T_i + V(x_i) \qquad (۵-۶۸)$$

نیروی گرانشی نیروی پایستار است. زیرا همان‌گونه که دیدیم عبارت است از

$$\mathbf{F}_{ij} = f\,(r_{ij})\hat{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2}\;\hat{\mathbf{r}} \qquad (۵-۶۹)$$

اگر m_j جرم زمین و r_{ij} شعاع آن باشد، نیروی گرانشی وارد به جسمی به جرم m_i در سطح زمین عبارت است از $F_i = m_i g$ که در آن $g = -Gm_j/r_{ij}^{۲} = ۹{,}۸۱\mathrm{m/s^{۲}}$ را شتاب گرانش می‌نامیم. بنابراین، برای بالابردن جسمی از سطح زمین تا ارتفاع h ، چه از ریسمان برای بالا کشیدن بار استفاده کنیم، چه از پله‌ها بار را به پشت‌بام برسانیم و یا از نردبان استفاده کنیم، کار لازم همواره یکسان و تنها به ارتفاع h بستگی خواهد داشت

پیشتر درباره‌ی قانون هوک هم سخن گفتیم. آن را برای تغییر طول ریسمان کشسان بیان کردیم. همان قانون برای هر جسم کشسان با برخی شرایط خاص هم به کار می‌رود. یک نمونه فنر است. در اینجا می‌خواهیم کار لازم برای کشیدن شدن یک ریسمان یا کش و یا فنر را با استفاده از قانون هوک حساب کنیم. اگر ریسمان، کش و یا فنر کاملاً کشسان باشد، پس از آنکه نیروی کشنده قطع شود به طول اولیه‌ی خود برمی‌گردد. بنابراین، نیرویی که ریسمان، کش و یا فنر را به حالت اولیه‌ی خود برمی‌گرداند (ودر ریسمان، کش و یا فنر وجود دارد) می‌تواند همانند نیروی پایستار پنداشته شود. باتوجه به این، می‌خواهیم انرژی پتانسیلی جسمی به جرم m را حساب کنیم که به ریسمان متصل است و در اثر کشیده شدن ریسمان انرژی به دست می‌آورد. فرض کنید جسمی به جرم m به انتهای ریسمان کشسانی با طول طبیعی $x_{\circ}$ وصل است. ریسمان را می‌کشیم تا طولش $x_{۱}$ بشود (شکل ۱۰-۵). همچنین فرض کنید که ثابت نیروی فنر، k است و ریسمان فراتر از **حد کشسانی** کشیده نشده است. به جاست که در اینجا یک فرض دیگری را هم یادآوری کنیم: ریسمان به آهستگی کشیده می‌شود، پس، با این فرض انرژی جنبشی چشمگیری به سامانه انتقال نمی‌یابد و انرژی جنبشی آن را می‌توان ثابت فرض کرد. اگر طول کشیده شده یا افزایش طول ریسمان، $x_{۱} - x_{\circ}$ باشد، نیروی بازگرداننده‌ی F در ریسمان در جهتی خواهد بود که ریسمان را به طول طبیعی آن برگرداند، یعنی F در جهت $-x$ خواهد بود. پس می توان



شکل ۱۰-۵

نوشت: $F = -k\,(x_{۱} - x_{\circ})$. اگر $x = x_{\circ}$ را جایی بگیریم که در آن نقطه انرژی پتانسیل صفر است، آنگاه داریم

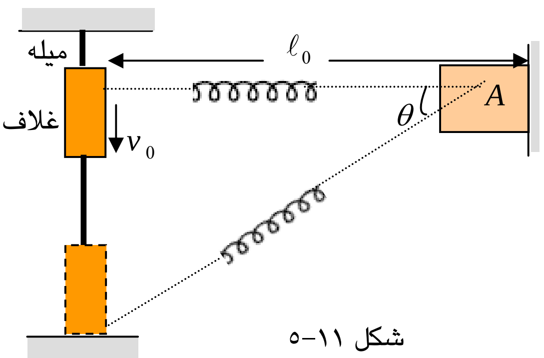
$$V = -\int_{x_{\circ}}^{x_{۱}} F dx = +k \int_{x_{\circ}}^{x_{۱}} (x - x_{\circ})dx = \frac{k}{۲}(x_{۱} - x_{\circ})^{۲} \qquad (۵-۷۰)$$

این انرژی پتانسیل در ریسمان کشسان کشیده شده انبار می‌شود و یک کمیت جمع‌پذیر است. مقدار کاری است که باید برای چیره شدن به نیروی بازدارنده انجام داد تا ریسمان، کش یا فنر را کشید و به طول $x_{۱}$ رساند، مشروط بر این‌که در این فرآیند

هیچ انرژی جنبشی به سامانه انتقال نیابد.

مثال ۶-۵ : برابر شکل (۱۱-۵)، غلافی به جرم m می‌تواند روی میله عمودی بلغزد. غلاف با فنری که ثابت نیروی آن k و طول حالت آزادش $\ell_\circ$ است به نقطه A بسته شده است. در حالت افقی فنر طول طبیعی خود را دارد. غلاف از این حالت با سرعت $v_\circ$ شروع به حرکت می کند. سرعت غلاف را به صورت تابعی از زاویه‌ی θ به دست آورید. از اصطکاک بین غلاف و میله چشم پوشی کنید.

حل: هنگامی که $\theta=\circ$ است طول آزاد یا طبیعی فنر $\ell_\circ$ است. طول فنر را در موقعیت θ با ℓ نشان دهید. ازشکل (۱۲-۵) داریم: $\Delta\ell=\ell-\ell_\circ=\dfrac{\ell_\circ}{\cos\theta}-\ell_\circ=\ell_\circ\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)$. جابه‌جایی غلاف را y بنامید: $y=\ell_\circ\tan\theta$.



شکل ۱۱-۵

قضیه‌ی کار انرژی می‌آموزد.

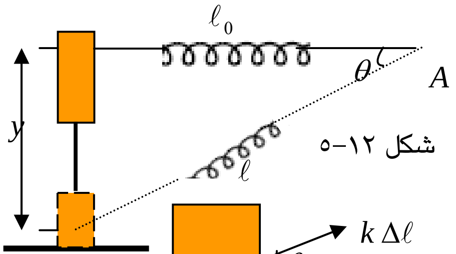
$$\Delta T=W \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_\circ^2 = mgy-\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 \qquad (۷۱-۵)$$

mgy کار نیروی گرانش و $k(\Delta\ell)^2/2$ کار نیروی فنر است. از اینجا v را می‌توان حساب کرد.

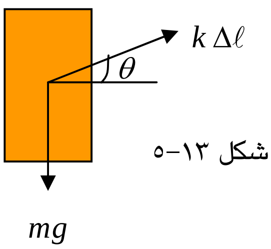
$$v^2=v_\circ^2+2g\ell_\circ\tan\theta-\frac{k}{m}\ell_\circ^2\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2 \qquad (۷۱-۵)$$

در اینجا مسئله را با استفاده از قضیه‌ی کار-انرژی حل کردیم. قضیه‌ی کار- انرژی از قانون‌های نیوتون به دست آمده است. می‌توان آن را با استفاده‌ی مستقیم از قانون دوم نیوتون نیز حل کرد.

مثال ۷-۵: مسئله‌ی بالا را دوباره و با استفاده از قانون نیوتون حل کنید.



شکل ۱۲-۵



شکل ۱۳-۵

حل: نمودار آزاد نیروها درشکل (۱۳-۵) نشان داده شده است. به غلاف دو نیرو وارد می‌شود: نیروی وزن mg و نیروی کشش فنر $k\Delta l$. داریم

$$F_y=mg-k\Delta\ell\sin\theta=ma=mv\frac{dv}{dy}$$

$$y=\ell_\circ\tan\theta,\quad dy=\ell_\circ(1+\tan^2\theta)d\theta=\frac{\ell_\circ d\theta}{\cos^2\theta} \qquad (۷۲-۵)$$

کار کل این نیروها عبارت است از $W=\int F\cdot dy$ که اگر از رابطه‌ی (۷۲-۵) به جای dy و F قرار دهیم خواهیم داشت:

$$W = \int_0^{\ell_0 \tan\theta} mg\,dy - k\,\ell_0^2 \int_0^{\theta} \left(\frac{1-\cos\theta'}{\cos\theta'}\right) \sin\theta'(1+\tan^2\theta')d\theta' = \int_{v_0}^{v} mv'dv'$$

$$\Rightarrow mg\,\ell_0 \tan\theta - k\,\ell_0^2 \left[\int_0^{\theta} \tan\theta'(1+\tan^2\theta')d\theta' + \int_0^{\theta} \frac{-\sin\theta'}{\cos^2\theta'}d\theta'\right] = \frac{1}{2}m\,(v^2 - v_0^2) \qquad (۵-۷۳)$$

$$\Rightarrow mg\,\ell_0 \tan\theta - \frac{1}{2}k\,\ell_0^2 \left[\tan^2\theta' - \frac{2}{\cos\theta'}\right]_0^{\theta} = \frac{1}{2}m\,(v^2 - v_0^2)$$

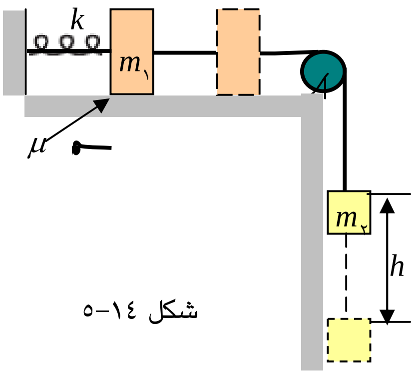
$$\Rightarrow 2g\,\ell_0 \tan\theta - \frac{k}{m}\ell_0^2(\tan^2\theta - \frac{2}{\cos\theta} + 2) + v_0^2 = v^2$$

$$\Rightarrow 2g\,\ell_0 \tan\theta - \frac{k}{m}\ell_0^2\left(\frac{\sin^2\theta + 2\cos^2\theta - 2\cos\theta}{\cos^2\theta}\right) + v_0^2 = v^2$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2g\,\ell_0 \tan\theta - \frac{k}{m}\ell_0^2\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2 \qquad (۵-۷٤)$$

که همان پاسخ پیشین است اما به دست آوردنش اندکی طولانی‌تر بود.

مثال ۸-۵: دو جسم با ریسمان بدون جرم به هم پیوسته‌اند. ریسمان از روی قرقره بدون اصطکاک، برابر شکل (۱٤-۵) می‌گذرد. جسمی که جرمش m_1 است روی سطح افقی ناهموار قرار دارد و به فنری با ثابت k وصل است. وقتی که فنر طول طبیعی خود را دارد این سامانه را از حالت سکون رها می‌کنیم. اگر جرم m_2 درست پیش از آنکه بایستد، به اندازه‌ی h سقوط کرده باشد؛ ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم m_1 و سطح را حساب کنید.



شکل ۱٤-۵

حل: در اینجا دو نوع انرژی پتانسیل وجود دارد: انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی پتانسیل کشسانی که در فنر انباشته است. افزون بر این، درمسئله نیروی ناپایستار اصطکاک هم وجود دارد. می‌دانیم که کار هر نیرو ـ پایستار یا ناپایستارـ با تغییر انرژی جنبشی برابر است. اگر W_c کارمجموعه‌ی نیروهای پایستار و W_{nc} کار نیروهای ناپایستارباشند؛ می‌توان نوشت:

$$W_{nc} + W_c = \Delta T \qquad (۵-۷۵)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که کار نیروهای پایستار برابراست با $W_c = -\Delta V$ که اگر در رابطه‌ی (۷۵-۵) جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$W_{nc} = \Delta T + \Delta V = (T_f - T_i) + (V_f - V_i)$$

$$\Rightarrow \quad W_{nc} = (T_f + V_f) - (T_i + V_i) = E_f - E_i \qquad (۵-۷٦)$$

از این رابطه حالا در مسئله استفاده کنید.

$$W_{nc} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_s \quad \Rightarrow \quad W_{nc} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_s \qquad (۵-۷۷)$$

که در آن ΔV_g تغییر انرژی پتانسیل در اثر گرانش و ΔV_s انرژی پتانسیل مربوط به فنر است. در این مسئله، سامانه از حالت سکون حرکت خود را آغاز می‌کند و بنابراین $T_i = 0$ است و چون سرانجام به حالت سکون می‌رسد، پس، $T_f = 0$ است.

بنابراین، $\Delta T = ۰$ است. همچنین کار نیروی ناپایستار، یعنی نیروی اصطکاک برابر است با:

$$W_{nc} = -fh = -\mu m_۱ gh \qquad (۵-۷۸)$$

و تغییر در پتانسیل گرانشی عبارت است از

$$\Delta V_g = V_f - V_i = -m_۲ gh \qquad (۵-۷۹)$$

که در آن مختصات عمودی از پائین‌ترین مکان $m_۲$ اندازه گیری شده است. تغییر در انرژی پتانسیل کشسانی که در فنر انباشته شده است، برابر است با

$$\Delta V_s = V_f - V_i = \frac{۱}{۲} kh^۲ \qquad (۵-۸۰)$$

که اگر از رابطه‌های (۵-۷۸) ، (۵-۷۹) و (۵-۸۰) در رابطه‌ی (۵-۷۷) جاگذاری کنیم ، خواهیم داشت

$$-\mu m_۱ gh = -m_۲ gh + \frac{۱}{۲} kh^۲ \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{m_۲ g - kh/۲}{m_۱ g} \qquad (۵-۸۱)$$

۵-۳-۲ پایستگی انرژی در سه بعد

در اینجا هم از قانون نیوتون آغاز می‌کنیم: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ وبا نیروهایی سر و کار داریم که تنها تابعی از مکان اند: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$. بر حسب مؤلفه‌ها داریم

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = m(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) \qquad (۵-۸۲)$$

حال اگر از این رابطه بین $(x_۰, y_۰, z_۰)$ تا (x, y, z) انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$E + \int_{x_۰}^{x} F_x dx' + \int_{y_۰}^{y} F_y dy' + \int_{z_۰}^{z} F_z dz' = \frac{۱}{۲} m(v_x^۲ + v_y^۲ + v_z^۲) = \frac{۱}{۲} mv^۲ \qquad (۵-۸۳)$$

که E ثابت انتگرال‌گیری است. انتگرال‌گیری سمت چپ تساوی در فضای سه بعدی است و به مسیری بستگی دارد که ذره برای رفتن از $(x_۰, y_۰, z_۰)$ به (x, y, z) برمی‌گزیند. توجه کنید که در یک بعد این اختیار برای ذره وجود نداشت. در یک بعد، ذره برای رفتن از $x_۰$ به x ناگزیر از باقی ماندن در روی محور x بود. با $d\mathbf{r} \equiv (dx, dy, dz)$ ، سمت چپ رابطه‌ی (۵-۸۳) همان $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ است. بنابراین، رابطه‌ی (۵-۸۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{۱}{۲} mv^۲ - \int_{\mathbf{r}_۰}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = E \qquad (۵-۸۴)$$

پس، اگر انرژی پتانسیل، $V(\mathbf{r})$ ، را به صورت زیر تعریف کنیم

$$V(\mathbf{r}) \equiv -\int_{\mathbf{r}_۰}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \qquad (۵-۸۵)$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۲} mv^۲ + V(\mathbf{r}) = E \qquad (۵-۸۶)$$

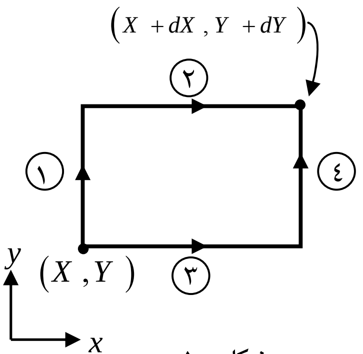
که همان پایستگی انرژی است.

نکته: در پایان این فصل در پیوست ۱ توصیف دیگری از پایستگی انرژی در سه بعد داده شده است که شاید زبانی ساده‌تر

دارد. پیوست را حتما بخوانید.

۵-۳-۳ نیروهای پایستار در سه بعد

در مقایسه با حالت یک بعدی، در سه بعد برای نیروهایی که تنها به مکان بستگی دارند؛ یک پیچیدگی اضافی وجود دارد. در یک بعد فقط یک مسیر برای رفتن از $x_{\circ}$ به x وجود دارد. حرکت ممکن است در طول مسیر تند شود، کند شود یا جهتش عوض شود، اما همواره یک مسیر راست‌خط وجود دارد که $x_{\circ}$ را به x وصل می‌کند. اما در سه بعد برای رفتن از $\mathbf{r}_{\circ}$ به $\mathbf{r}$ بینهایت مسیر وجود دارد. برای این که پتانسیل $V(\mathbf{r})$ معنی پیدا کند و سودمند باشد، باید **خوش تعریف باشد**، **یعنی باید مستقل از مسیر باشد**. هر نیروی مربوط به یک چنین پتانسیلی یک نیروی پایستار است. حال ببینیم در سه بعد چه نیروهای پایستارند.



شکل ۵-۱۵

قضیه ۲-۵: *شرط لازم و کافی برای اینکه پتانسیل*

$$V(\mathbf{r}) \equiv -\int_{\mathbf{r}_{\circ}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}' \qquad (۵-۸۷)$$

مربوط به نیروی $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *، خوش تعریف باشد (مستقل از مسیر باشد) اینست که کرل نیروی* $\mathbf{F}$ *صفر باشد. یعنی* $\nabla\times\mathbf{F}=\circ$.

اثبات: نخست نشان می‌دهیم که $\nabla\times\mathbf{F}=\circ$ شرط لازم برای مستقل از مسیر بودن پتانسیل است. یعنی « اگر $V(\mathbf{r})$ مستقل از مسیر باشد، آنگاه $\nabla\times\mathbf{F}=\circ$ است». در شکل (۵-۱۵) مستطیل کوچکی را در صفحه‌ی $x-y$ در نظر بگیرید. بنابراین از مؤلفه‌ی z همه‌ی مختصات چشم‌پوشی می‌کنیم تا کارمان ساده‌تر باشد. اگر پتانسیل مستقل از مسیر باشد آنگاه کار انجام شده در رفتن از (X,Y) به $(X+dX, Y+dY)$ که برابر $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ است باید مستقل از مسیر باشد. به ویژه، انتگرال در مسیرهای (۱) و (۲) باید با انتگرال در مسیرهای (۳) و (٤) برابر باشد یعنی: $\int_{۱} F_y dy + \int_{۲} F_x dx = \int_{۳} F_x dx + \int_{۲} F_y dy$ ، پس شرط لازم برای مستقل از مسیر بودن عبارتست از

$$\int_{۲} F_x dx - \int_{۳} F_x dx = \int_{٤} F_y dy - \int_{۱} F_y dy$$

$$\Rightarrow \int_X^{X+dX} \left(F_x(x, Y+dY) - F_x(x,Y)\right)dx = \int_Y^{Y+dY} \left(F_y(X+dX, y) - F_y(X,y)\right)dy \qquad (۵-۸۸)$$

و بنابراین،

$$F_x(x, Y+dY) - F_x(x,Y) \approx dY \left.\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\right|_{(x,Y)} \approx dY \left.\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\right|_{(X,Y)} \qquad (۵-۸۹)$$

تقریب نخست بنابه تعریف مشتق پاره‌ای پذیرفتنی است. تقریب دوم هم درست است چون مستطیل ما به اندازه‌ای کوچک است که x در اساس با X برابر است. هر خطای پدید آمده با این تقریب از مرتبه‌ی دوم خواهد بود؛ چون در رابطه‌ی بالا ضریب dY را هم داریم. همین کار را با جمله‌ی F_y انجام دهد. رابطه‌ی (۵-۸۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_X^{X+dX} dY \left.\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\right|_{(X,Y)} dx = \int_Y^{Y+dY} dX \left.\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}\right|_{(X,Y)} dy \qquad (۵-۹۰)$$

این انتگرال‌ها ثابت اند و انتگرال‌گیری از آنها آسان است. خواهیم داشت

$$dX\ dY\ \left(\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}\right)\Bigg|_{(X,Y)}=0 \qquad (۵-۹۱)$$

و با حذف $dX\ dY$ و با توجه به این‌که (X, Y) نقطه‌ی دلخواهی است، می‌بینیم که اگر پتانسیل بخواهد مستقل از مسیر باشد باید برای هر نقطه‌ی (x, y) داشته باشیم:

$$\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}=0. \qquad (۵-۹۲)$$

مستطیل کوچک را در صفحه‌ی $x-y$ گرفتیم. همین روند را برای مستطیل‌های کوچک در صفحه‌ی $x-z$ و در صفحه‌ی $y-z$ نیز می‌توان انجام داد و دو شرط دیگر را هم به دست آورد. هر سه شرط را می‌توان به طور جمع و جور به صورت زیر نوشت

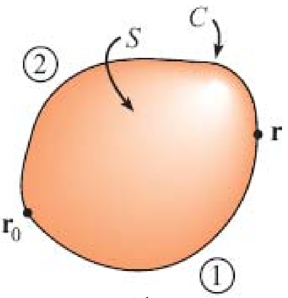
$$\nabla\times\mathbf{F}\equiv\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z},\ \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x},\ \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)=0 \qquad (۵-۹۳)$$

پس نشان دادیم که $\nabla\times\mathbf{F}=0$ شرط لازم برای مستقل از مسیر بودن پتانسیل است. حال نشان می‌دهیم که $\nabla\times\mathbf{F}=0$ شرط کافی هم است. به بیان دیگر: « اگر $\nabla\times\mathbf{F}=0$ باشد آنگاه $V(\mathbf{r})$ مستقل از مسیر است».

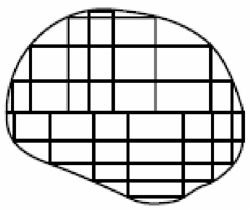
اثبات: کافی بودن از قضیه‌ی استوکس نتیجه می‌شود. قضیه‌ی استوکس به صورت زیر است

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A} \qquad (۵-۹۴)$$

در اینجا C هر خم بسته‌ای است که از $\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{r}$ می‌گذرد. یک نمونه در شکل (۵-۱۶) نشان داده شده است. S سطح دلخواهی است که C مرزهای آن است. رابطه‌ی بالا می‌گوید اگر $\nabla\times\mathbf{F}$ همه جا صفر باشد ،آنگاه برای هر خم بسته‌ای داریم $\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=0$. اما شکل (۵-۱۶) نشان می‌دهد که پیمایش خم C نیازمند این است که مسیر (۱) در یک جهت و مسیر (۲) در جهت عکس پیموده شوند. چون حد هر دو انتگرال از $\mathbf{r}_0$ به $\mathbf{r}$ است. پس $\int_1 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}-\int_2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$. ■



شکل ۵-۱۶



شکل ۵-۱۷

نکته (۱): اگر قضیه‌ی استوکس را نمی‌دانید، یا از نامش هراس دارید، می‌توانید همه چیز را از پایه آغاز و قضیه را از اول ثابت کنید. در این جا کوتاه شده‌ای از آن را برایتان می‌آورم و تشویق می‌کنم جزییات آن را برای خودتان انجام بدهید. برای سادگی، مسیرهایی را برگزینید که در صفحه‌ی $x-y$ باشند (اثبات حالت عمومی هم به همین شکل است). در انتگرال‌های dx و dy هر مسیری را می‌توان با تعدادی خطهای موازی محورهای مختصات، همانند شکل (۵-۱۷)، تقریب زد. حالا تصور کنید که روی هر یک از مستطیل‌های کوچک شکل (۵-۱۷) پادساعتگرد حرکت می‌کنید و از $\int \mathbf{F}.\,d\mathbf{r}$ انتگرال می‌گیرید. به دو صورت می‌توان به نتیجه اندیشید: (۱) با توجه به بحثی که در بالا به رابطه‌ی (۵-۹۱) انجامید، می‌بینیم که هر انتگرالی برابر است با حاصل ضرب مساحت مستطیل ($dx\ dy$) و کرل نیرو. اگر همه‌ی آنها را باهم جمع کنیم، خواهیم داشت $\int_s(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{A}$. (۲) هر خط درونی (ضلع‌های افقی و عمودی مستطیل های کوچک) دو بار به حساب می‌آیند (اما در خلاف جهت) و بنابراین در کل انتگرال حذف می‌شوند. پس، فقط

قسمت‌های مرزی باقی می‌ماند و خواهیم داشت $\oint_c \mathbf{F}(\mathbf{r}).\, d\mathbf{r}$. از برابری این دو نگاه به نتیجه‌ی انتگرال، قضیه‌ی استوکس نتیجه می شود.

نکته (۲): یک جور دیگر هم می‌توان نشان داد که $\nabla\times\mathbf{F}=0$ شرط لازم برای مستقل از مسیر بودن (یعنی:" اگر $V(\mathbf{r})$ مستقل از مسیر باشد، آنگاه $\nabla\times\mathbf{F}=0$ ") پتانسیل است. این گونه: اگر $V(\mathbf{r})$ مستقل از مسیر (و بنابراین خوش تعریف) باشد، می‌توان شکل دیفرانسیلی رابطه‌ی (۸۳-۵) را به صورت زیر نوشت

$$dV(\mathbf{r})=-\mathbf{F}(\mathbf{r}).\, d\mathbf{r}\equiv-(F_x dx+F_y dy+F_z dz) \qquad (۵-۹۰)$$

از سوی دیگر داریم

$$dV(\mathbf{r})=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz \qquad (۵-۹۶)$$

برای مقدارهای دلخواه dx, dy, dz رابطه‌های (۹۵-۵) و (۹۶-۵) باید با هم برابر باشند. پس داریم

$$(F_x,F_y,F_z)=-(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{F}(\mathbf{r})=-\nabla V(\mathbf{r}) \qquad (۵-۹۷)$$

به بیان دیگر، نیرو گرادیان پتانسیل است.

$$\nabla\times\mathbf{F}=-\nabla\times\nabla V(\mathbf{r})=0 \qquad (۵-۹۸)$$

زیرا ، کرل گرادیان همواره صفر است.

مثال ۹-۵ (نیروی مرکزی): نیروی مرکزی نیرویی است که در جهت شعاع است و اندازه‌ی آن فقط به فاصله r بستگی دارد. یعنی $\mathbf{F}(\mathbf{r})=F(r)\hat{\mathbf{r}}$. با محاسبه‌ی $\nabla\times\mathbf{F}=0$ نشان دهید که هر نیروی مرکزی یک نیروی پایستار است.

حل: $\mathbf{F}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{F}(x,y,z)=F(r)\hat{\mathbf{r}}=F(r)\left(\frac{x\,\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}}{r}\right)=F(r)\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right) \qquad (۵-۹۹)$$

می‌توان دید که

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}=\frac{x}{r} \qquad (۵-۱۰۰)$$

همچنین برای y و z. پس مؤلفه‌ی z کرل، $(\nabla\times\mathbf{F})_z$، عبارت است از

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial(yF/r)}{\partial x}-\frac{\partial(xF/r)}{\partial y} \qquad (۵-۱۰۱)$$

(در اینجا F را به جای $F(r)$ و F' را برای $dF(r)/dr$ بکار می‌بریم). پس

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial(yF/r)}{\partial x}-\frac{\partial(xF/r)}{\partial y}$$

$$=\left(\frac{y}{r}F'\frac{\partial r}{\partial x}-yF\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\right)-\left(\frac{x}{r}F'\frac{\partial r}{\partial y}-xF\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}\right)=\left(\frac{yxF'}{r^2}-\frac{yxF}{r^3}\right)-\left(\frac{xyF'}{r^2}-\frac{xyF}{r^3}\right)=0 \qquad (۵-۱۰۲)$$

همین محاسبه را برای مؤلفه‌های x و y تکرار می‌کنیم.

۵-۴ تکانه

۵-۴-۱ پایستگی تکانه

در فصل۳ نشان دادیم که قانون سوم نیوتون بیان پایستگی تکانه است. قانون سوم می‌گوید نیروها جفت‌اند. یعنی برای هر نیرویی، نیروی دیگری وجود دارد که با آن برابر و در خلاف جهت آن است. دقیق‌تر بگوییم: اگر $\mathbf{F}_{ab}$ نیرویی باشد که از سوی ذره‌ی b به ذره‌ی a وارد می‌شود و $\mathbf{F}_{ba}$ نیرویی باشد که ذره‌ی a به ذره‌ی b وارد می‌کند، آنگاه برای همه‌ی زمان‌ها $\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$ است. این بیان قانون سوم نیوتون است و پی‌آمدهای مهمی برای تکانه به همراه دارد. دو ذره‌ی منزوی را در نظر بگیرید که برای مدتی با هم برهم کنش می‌کنند. بنا به قانون دوم نیوتون داریم

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (۵-۱۰۳)$$

پس، می‌بینیم که تغییر کل در تکانه‌ی یک ذره با انتگرال زمانی نیرویی که به آن ذره وارد می‌شود برابر است. یعنی

$$\mathbf{p}(t_۲) - \mathbf{p}(t_۱) = \int_{t_۱}^{t_۲} \mathbf{F}\, dt \qquad (۵-۱۰٤)$$

انتگرال بالا، انتگرال **ضربه** است. حال اگر قانون سوم نیوتون، $\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$ ، را به کار ببریم، خواهیم داشت

$$\mathbf{p}_a(t_۲) - \mathbf{p}_a(t_۱) = \int_{t_۱}^{t_۲} \mathbf{F}_{ab}\, dt = -\int_{t_۱}^{t_۲} \mathbf{F}_{ba}\, dt = -(\mathbf{p}_b(t_۲) - \mathbf{p}_b(t_۱)) \qquad (۵-۱۰۵)$$

و بنابراین

$$\mathbf{p}_a(t_۲) + \mathbf{p}_b(t_۲) = \mathbf{p}_a(t_۱) + \mathbf{p}_b(t_۱) \qquad (۵-۱۰٦)$$

یعنی تکانه‌ی کل سامانه‌ی منزوی پایسته است (به زمان بستگی ندارد و با زمان تغییر نمی‌کند). رابطه‌ی (۱۰٦-۵) یک رابطه‌ی برداری است و بنابراین در واقع سه معادله برای سه مولفه‌ی p_x, p_y, p_z است.

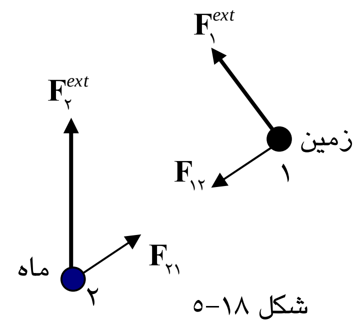
قانون سوم نیوتون گزاره‌ای در باره‌ی نیروهاست. چون نیرو با $F = dp/dt$ تعریف شده است ، پس قانون سوم در اساس *اصل موضوع* پایستگی تکانه است (اثبات بالا را، رابطه‌ی (۱۰٦-۵) ، که یک انتگرال‌گیری ساده بود، به سختی می‌توان به عنوان " اثبات" پذیرفت. بنابراین، این پرسش وجود دارد که آیا پایستگی تکانه را باید "اثبات" کرد یا آن را فرض کرد؟ در بالا ما دومی را پذیرفتیم.)

تفاوت میان اصل موضوع و قضیه دو پهلوست. اصل موضوع یک نفر شاید برای شخص دیگری قضیه باشد و برعکس. در فرض‌های خود باید از جایی آغاز کنیم. ما از قانون سوم آغاز کردیم. در فرمولبندی لاگرانژی مکانیک کلاسیک، نقطه‌ی آغاز چیز دیگری است و پایستگی تکانه پی‌آمدی است که از ناوردایی انتقال در فضا به دست می‌آید. در این فرمولبندی پایستگی تکانه بیشتر به قضیه شبیه است.

یک چیز روشن است: پایستگی تکانه‌ی دو ذره را برای هر نیروی دلخواه نمی‌توان ثابت کرد. زیرا پایستگی لزوما برقرار نیست. برای مثال، اگر دو ذره‌ی باردار با میدان‌های مغناطیسی که ایجاد می‌کنند، برهم‌کنش بکنند، آنگاه تکانه‌ی کل دو ذره پایسته **نیست**. پس در این حالت، تکانه‌ی گم شده به کجا رفته است؟ میدان الکترومغناطیسی آن را حمل می‌کند. در حقیقت، تکانه‌ی کل

سامانه پایسته است؛ اما اینک، سامانه عبارت است از دو ذره بعلاوه‌ی میدان الکترومغناطیسی. به بیان دیگر، هر یک از ذره‌ها با میدان الکترومغناطیسی برهم‌کنش می‌کند و نه با ذره‌ی دیگر. قانون سوم نیوتون در باره‌ی ذره هایی که تحت چنین نیروهایی باشند برقرار نیست.

در بحث بالا ما از سامانه‌های منزوی سخن گفتیم و پایستگی تکانه را در باره‌ی این گونه سامانه‌ها بیان کردیم. سامانه‌ی منزوی سامانه‌ای است که با محیط پیرامون خود بیگانه است و با آن برهم‌کنش نمی‌کند. یعنی نیرویی از خارج سامانه به آن وارد نمی‌شود. این گزاره را می‌توان به طور کمی بیان کرد. سامانه‌ی ماه و زمین را در شکل (۱۸-۵) در نظر بگیرید. خورشید به هر دوی آنها نیروی وارد می‌کند و برای این سامانه، نیروی خورشید نیروی خارجی است. نیرویی را که خورشید به زمین و ماه وارد می‌کند به ترتیب $\mathbf{F}_1^{ext}$ و $\mathbf{F}_2^{ext}$ بنامید. نیروی کل که به جسم ۱ (زمین) وارد می‌شود عبارت است از (نیروی کل وارد به جسم ۱) $\equiv \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1^{ext}$ و برای جسم ۲ (ماه) داریم (نیروی کل وارد به جسم ۲) $\equiv \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_2^{ext}$. با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توان آهنگ تغییر تکانه‌ی ذره ها را حساب کرد



شکل ۱۸-۵

$$\dot{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1^{ext} \qquad \text{و} \qquad \dot{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_2^{ext} \tag{۵-۱۰۷}$$

حالا اگر تکانه‌ی کل دو جسم را به صورت $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ تعریف کنیم، آنگاه آهنگ تغییر تکانه‌ی کل $\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2$ خواهد شد. برای محاسبه‌ی آن کافی است دو معادله در رابطه‌ی (۱۰۷-۵) را با هم جمع کنیم. با این کار نیروهای $\mathbf{F}_{21}$ و $\mathbf{F}_{12}$ بنابه قانون سوم نیوتون یکدیگر را حذف می‌کنند و به دست می‌آید

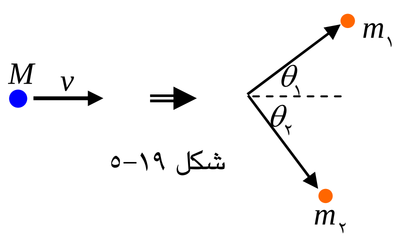
$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_1^{ext} + \mathbf{F}_2^{ext} \equiv \mathbf{F}^{ext} \tag{۵-۱۰۸}$$

که در آن $\mathbf{F}^{ext}$ نیروی خارجی کل وارد به سامانه‌ی دو جسمی است. این نتیجه یکی از نتایجی است که ما را به پروراندن نظریه‌ی سامانه‌های بس ذره‌ای از قانون های بنیادی تک ذره، رهنمون شد. این رابطه می‌گوید تا جایی که به تکانه‌ی کل سامانه مربوط می‌شود، نیروهای داخلی تاثیری بر آن ندارند. حالت خاصی از این نتیجه هنگامی است که هیچ نیروی خارجی به سامانه وارد نشود ($\mathbf{F}^{ext} = 0$). در این صورت $\dot{\mathbf{P}} = 0$ و باز به نتیجه‌ی مهم پایستگی تکانه می‌رسیم

$$\text{اگر } \mathbf{F}^{ext} = 0 \qquad \text{آنگاه} \qquad \mathbf{P} = \text{ثابت} \tag{۵-۱۰۹}$$

در نبود نیروی خارجی تکانه‌ی کل سامانه‌ی دو جسمی ثابت است. این پایستگی تکانه است.

مثال ۱۰-۵ (شکافت به دو بخش): جسمی به جرم M با سرعت V در راستای محور x حرکت می‌کند. جسم ناگهان به دو نیم شکافته می‌شود. یک بخش آن برابر شکل (۱۹-۵) با زاویه‌ی θ_1 وبخش دیگرش با زاویه‌ی θ_2 از مسیر اولیه منحرف می‌شوند. اندازه‌ی تکانه‌های دو بخش را بیابید.



شکل ۱۹-۵

حل: تکانه‌ی اولیه‌ی جسم یک پارچه $P = MV$ است. تکانه‌های پایانی دو بخش را

p_1 و p_2 بنامید. پایستگی تکانه در راستای محورهای x و y می‌گوید

$$p_1\cos\theta_1 + p_2\cos\theta_2 = P \quad , \quad p_1\sin\theta_1 - p_2\sin\theta_2 = 0 \qquad (۵-۱۱۰)$$

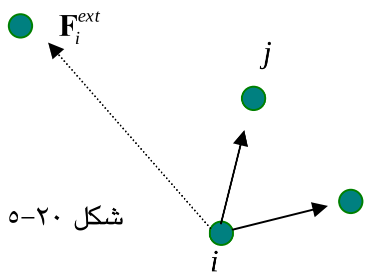
از حل این دو معادله، دو مجهول p_1 و p_2 به صورت زیر به دست می‌آیند

$$p_1 = \frac{P\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \quad , \quad p_2 = \frac{P\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \qquad (۵-۱۱۱)$$

چند حالت حدی: اگر $\theta_1 = \theta_2$ باشد، آنگاه داریم $p_1 = p_2$. اگر هر دوی θ_1 و θ_2 کوچک باشند آنگاه $p_1 = p_2 \approx P/2$.
اگر $\theta_1 = \theta_2 \approx 90^\circ$ باشد، آنگاه p_1 و p_2 هردو بزرگ اند. فرایند شکافت (مانند انفجار) در این صورت باید انرژی بزرگی تولید کرده باشد.

توجه کنید که با داده‌های موجود مسئله نمی‌توان جرم هر بخش را حساب کرد. برای این کار به آگاهی‌های بیشتری نیاز داریم، مثلا، بدانیم انفجار چه مقدار انرژی به سامانه می‌دهد یا این که جرم و سرعت یکی از بخش‌ها چقدر است. در این صورت تعداد معادله‌هایمان با تعداد مجهول ها برابر می‌شود.

۲-۴-۵ پایستگی تکانه در سامانه های بس ذره ای



شکل ۲۰-۵

سامانه‌ای با N ذره را در نظر بگیرید. جرم هر ذره را m_i و تکانه‌ی آن را p_i بنامید. نیروی وارد به ذره‌ی $i-$ام پیچیده است. هر یک از $(N-1)$ ذره به آن نیرو وارد می‌کند. اگر نیروی وارد از سوی ذره‌ی $j-$ام را $\mathbf{F}_{ij}$ بنامیم آنگاه $\mathbf{F}_{ji}$ نیرویی است که ذره‌ی $i-$ام به ذره‌ی $j-$ام اعمال می‌کند و بنابه قانون سوم نیوتون برای همه‌ی زمان‌ها داریم $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. اگر سامانه منزوی باشد آنگاه کل تغییر تکانه‌ی ذره‌ی $i-$ام در بازه‌ی زمانی بین t_1 و t_2 عبارت است از

$$\Delta\mathbf{p}_i = \int(\sum_j \mathbf{F}_{ij})dt \qquad (۵-۱۱۲)$$

پس ، تغییر در تکانه‌ی کل **همه‌ی** ذره‌های سامانه عبارت است از

$$\Delta\mathbf{P} = \int\left(\sum_i\sum_j \mathbf{F}_{ij}\right)dt \qquad (۵-۱۱۳)$$

اما برای همه‌ی زمان‌ها $\sum_i\sum_j \mathbf{F}_{ij} = 0$ است؛ چون در جمع دوگانه برای هر $\mathbf{F}_{ij}$ یک $\mathbf{F}_{ji}$ وجود دارد و $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0$ (همچنین $\mathbf{F}_{ii} = 0$ ؛ چون یک ذره به خودش نیرو وارد نمی‌کند). پس تکانه‌ی کل سامانه‌ی بس‌ذره‌ای منزوی پایسته است.
اگر سامانه منزوی نباشد و به آن نیروی خارجی وارد شود، مانند شکل (۲۰-۵) ، آنگاه برآیند نیروهای وارد به ذره‌ی $i-$ام عبارت است از

$$\mathbf{F}_i = \sum_{i\neq j}\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{ext} \qquad (۵-۱۱٤)$$

در این جا $\mathbf{F}_i^{ext}$ نیروی خارجی وارد به ذره‌ی $i-$ام است. بنابه قانون دوم نیوتون داریم

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{ext} \tag{۵-۱۱۵}$$

این نتیجه برای همه‌ی N ذره برقرار است ($i = ۱,۲,\cdots N$). پس، تکانه‌ی کل N ذره عبارت است از:

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i \tag{۵-۱۱۶}$$

اگر از این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیریم، خواهیم داشت $\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i$ و با جاگذاری برای $\dot{\mathbf{p}}_i$ از رابطه‌ی (۵-۱۱۵) به دست می‌آید

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} \tag{۵-۱۱۷}$$

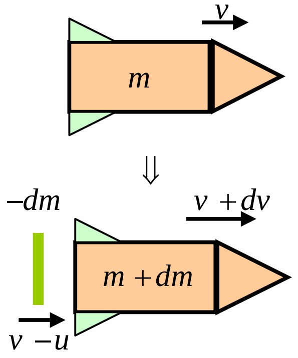
دوباره ، مثل بالا، جمع دوگانه بنابه قانون سوم نیوتون صفر است. آنچه باقی می‌ماند عبارت است از

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} \equiv \mathbf{F}^{ext} \tag{۵-۱۱۸}$$

این نتیجه درست همانند حالت سامانه‌ی دو ذره‌ای در رابطه‌ی (۵-۱۰۸) است و می‌گوید نیروهای درونی اثری بر تغییر تکانه‌ی کل سامانه، $\mathbf{P}$، ندارند. آهنگ تغییر تکانه را نیروی خارجی تعیین می‌کند. اگر نیروی خارجی صفر باشد تکانه پایسته می‌ماند.

۵-۴-۳ حرکت موشک

کاربردهای پایستگی تکانه هنگامی گیراتر می‌شوند که جرم m سامانه تغییر کند. حرکت موشک یک نمونه است. ظرف آبی که سوراخ است و آب از آن نشت می‌کند نمونه‌ی دیگری است. بخش بزرگ جرم موشک را سوخت آن تشکیل می‌دهد. این بخش از جرم می‌سوزد و به صورت گاز از موشک خارج می‌شود و بنابراین جرم موشک پیوسته تغییر می‌کند. فرض کنید گازهای سوخته با سرعت u **نسبت** به موشک و با آهنگ dm/dt از آن خارج می‌شود. (تاکید می‌کنم که u سرعت گازهای خروجی نسبت به موشک است- گفتن "نسبت به زمین" بی معنی است ؛ چون موتور موشک گازها را نسبت به خودش به بیرون می‌فرستد و موتور هیچ راهی ندارد که بداند موشک با چه سرعتی نسبت به زمین حرکت می‌کند.) در این جا کمیت dm را منفی تعریف می‌کنیم. بنابراین، در زمان dt به اندازه‌ی dm به جرم موشک *افزوده* می‌شود. (اگر بخواهید می‌توانید dm را مثبت تعریف کنید و سپس از جرم موشک این مقدار را *بکاهید*. هر دو درست است. در مثال ۵-۱۱ این کار را هم می‌کنیم تا نکته‌ای را هم روشن کرده باشیم). همچنین، u را مثبت تعریف می‌کنیم. بنابراین، از سرعت ذره‌های خروجی موشک به اندازه‌ی u *کاسته* می‌شود. شاید عجیب به نظر بیاید، اما دشوارترین بخش حل مسئله‌های موشک تعیین علامت همین کمیت‌ها و پایبند ماندن به آنهاست. این نکته‌ای است که در بالا به آن اشاره کردم و در مثال زیر روشن‌تر خواهد شد.



شکل ۵-۲۱

لحظه‌ای را تجسم کنید که جرم موشک m و سرعتش v است. در بازه‌ی زمانی dt بعدی جرم موشک $m + dm$ و سرعتش $v + dv$ می‌شود (یادتان باشد که dm منفی است). جرم گازهای بیرون رانده شده ($-dm$) و سرعت آنها $v - u$ است (که می‌تواند مثبت یا منفی باشد و به اندازه‌های نسبی u و v بستگی دارد). شکل(۵-۲۱) را ببینید. در این مسئله نیروی خارجی وجود ندارد- گرانش را نادیده گرفته‌ایم و در مثال ۵-۸ به آن خواهیم

پرداخت- بنابراین، تکانه‌ی کل در هر یک از این زمان‌ها باید با هم برابر باشد. پس داریم

$$mv=(m+dm)(v+dv)+(-dm)(v-u) \qquad (۵-۱۱۹)$$

اگر از جمله‌ی کوچک مرتبه دو ($dm\,dv$) چشم‌پوشی کنیم از این رابطه خواهیم داشت $m\,dv=-u\,dm$. اگر آن رابه m تقسیم کنیم و از $t_۱$ تا $t_۲$ انتگرال بگیریم به دست می‌آید

$$\int_{v_۱}^{v_۲} dv=-\int_{m_۱}^{m_۲} u\frac{dm}{m} \quad\Rightarrow\quad v_۲-v_۱=u\,\ell n\frac{m_۱}{m_۲} \qquad (۵-۱۲۰)$$

برای حالتی که جرم اولیه‌ی موشک M و سرعت اولیه‌ی آن صفر است، داریم $v=u\,\ell\text{n}(M/m)$. اگر dm/dt مقدار ثابتی باشد (آن را $-\eta$ بنامید، $\eta>۰$) آنگاه $v(t)=u\,\ell n[M/(M-\eta t)]$. وجود لگاریتم در نتیجه‌ی (۵-۱۲۰) چندان خوشایند نیست. اگر جرم بدنه‌ی موشک m و.جرم سوخت آن $۹m$ باشند سرعت نهایی موشک $u\,\ell n۱۰\approx(۲,۳)u$ می‌شود. حال اگر جرم سوخت را ۱۱ برابر کنیم و به $۹۹m$ برسانیم (شاید از نظر مهندسی این کار نشدنی باشد، چون برای جاسازی این مقدار سوخت، بدنه‌ی فلزی باید بسیار بزرگ باشد) می‌بینیم که سرعت نهایی فقط دوبرابر می‌شود و به $u\,\ell n۱۰۰=۲(u\,\ell n۱۰)\approx(٤,٦)u$ می رسد. بنابراین ، چگونه می‌توان موشکی با سرعت چشمگیر ساخت؟

مثال ۱۱-۵ (موشک- قرارداد دیگر)

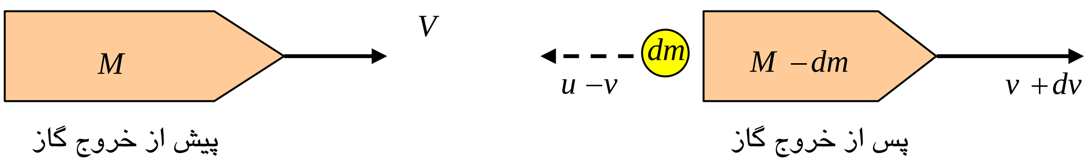
(در این مثال می‌خواهیم dm را مثبت تعریف کنیم و ببینیم که باز هم همان نتیجه‌ی بالا به دست می‌آید.)

موشکی که در آغاز بی‌حرکت است، سوخت خود را با سرعت ثابت u نسبت به موشک، رها می‌کند (لزوماً این رها شدن با آهنگ یکنواخت انجام نمی‌گیرد). از گرانش چشم‌پوشی کنید. اگر جرم کل اولیه‌ی موشک $M_\circ$ باشد سرعت موشک، v، را هنگامی که جرم آن به M کاهش یافته است، به دست آورید.

حل: جرم اندک dm از موشک خارج می‌شود. و جرم موشک به اندازه‌ی dm کاهش می‌یابد (شکل ۲۲-۵):

$$dM=-dm \qquad (۵-۱۲۱)$$

و سرعت آن از v به $v+dv$ افزایش می‌یابد (شکل ۲۲-۵ را ببینید). با استفاده از معادله‌های پایستگی تکانه می‌توان این سرعت را حساب کرد: $(M-dm)(v+dv)+dm\,(v-u)=Mv$ اگر از جمله‌های مرتبه دوم، مانند $dmdv$ ، چشم‌پوشی کنیم، خواهیم داشت: $M\,dv=u\,dm$. با استفاده از رابطه‌ی (۵-۱۲۱) می‌توان آن را به صورت $dv/u=-dM/M$ نوشت . اگر از دو طرف این رابطه انتگرال بگیریم و از شرط اولیه‌ی $M=M_\circ$ و $v=۰$ استفاده کنیم خواهیم داشت:



شکل ۲۲-۵

$$\frac{v}{u}=-\ell n\frac{M}{M_\circ} \qquad (۵-۱۲۲)$$

که همان رابطه‌ی (۱۲۰-۵) است. چنانچه آن را برحسب M حل کنیم ، به دست می‌آید:

$$M = M_{\circ} e^{-v/u} \qquad (۵-۱۲۳)$$

رابطه‌ی (۱۲۳-۵) نشان می‌دهد که برای اینکه موشک به سرعتی برابر با سرعت خروج گاز، u ، برسد باید به اندازه‌ی $1/e$ جرم اولیه‌اش سوخت از آن خارج شود. توجه کنید که سرعت موشک تنها به سرعت خروج گاز و کسر جرم اولیه‌ای که از آن خارج شده است بستگی دارد و به آهنگ خروج گاز بستگی ندارد.

نکته: می‌توان مسئله‌ی موشک را به جای استفاده از پایستگی تکانه ، با استفاده از نیرو حل کرد. اگر جرم dm از موشک خارج شود، تکانه‌ی آن به اندازه‌ی $u\,dm$ تغییر می‌کند. نیرو با آهنگ تغییر تکانه برابر است. نیروی وارد به dm عبارت است از $u\,dm/dt$ و این نیرو به بقیه‌ی موشک شتاب می‌دهد. پس، $F = ma$ می‌گوید $-u\,dm/dt = m\,dv/dt$ که با $m\,dv = -u\,dm$ هم‌ارز است.

می‌بینیم که مسئله‌ی موشک را می‌توان با استفاده از نیرو و یا پایستگی تکانه حل کرد. در نهایت این دو رویکرد هم‌ارزند، چون دومی را از اولی و به وسیله‌ی $F = dp/dt$ به دست آورده ایم. اما فلسفه‌ی این دو رویکرد اندکی با هم فرق دارند. گزینش هر کدام از این دو رویکرد یک انتخاب شخصی است. برای سامانه‌ی منزوی مانند موشک معمولا رویکرد پایستگی تکانه ساده‌تر است. در مسئله‌هایی که نیروی خارجی وجود دارد $F = dp/dt$ رهیافتی به جاست. در پایان فصل تمرین‌های زیادی با $F = dp/dt$ خواهید داشت.

توجه کنید که ما در حل مسئله‌ها با رویکرد نیرو، از هردوی $F = ma$ و $F = dp/dt$ استفاده کردیم. اگر جرم ذره تغییر کند این دو هم‌ارز نیستند. به بحثی که در این باره در فصل ۳ کردیم مراجع کنید. ♣

مثال ۱۲-۵ (ماسه و جعبه). مثال ۱۱-۵ بگونه‌ای حالت خاصی از مسئله‌ی عمومی است؛ چون از اثر گرانش و یا از اثر هر نیروی خارجی دیگر چشم‌پوشی کردیم. جا دارد که معادله‌های حرکت درست را هنگامی که جرم تغییر می‌کند اندکی با ژرفای بیشتری بررسی کنیم. برای این کار به قانون دوم نیوتون برمی‌گردیم. این قانون می‌گوید: آهنگ تغییر تکانه‌ی mv یک سامانه با نیرویی که به آن سامانه وارد می‌شود، برابر است: $d(mv)/dt = F$. این رابطه را برای یک بعد نوشته‌ایم. تعمیم آن به سه بعد دشوار نیست. هنگامی که جرم تغییر می‌کند، در به کاربردن این رابطه باید دقت کرد. مثال خوبی که این دوراندیشی را نمایان می‌کند جعبه‌ی پُر از ماسه است که روی سطح شیب‌دار هموار می‌لغزد و ماسه با آهنگ ثابتی از جعبه به بیرون ریزش می‌کند. اگر شیب سطح α باشد آنگاه معادله‌ی حرکت "جعبه بعلاوه‌ی ماسه" بدون توجه به اینکه ریزش می‌کند یا نه عبارت است از

$$m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = mg\sin\alpha \qquad (۵-۱۲٤)$$

جهت مثبت را رو به پائین سطح شیب‌دار فرض کردیم. در اینجا جرم m تغییر نمی‌کند، زیرا سامانه را" جعبه بعلاوه‌ی همه‌ی ماسه" در نظر گرفتیم و رابطه‌ی (۱۲٤-۵) به **حرکت مرکز جرم** مربوط است. آن بخش از ماسه که به بیرون ریزش کرده است با همان سرعت لحظه‌ای و شتاب جعبه در روی سطح شیب‌دار خواهد لغزید. به این وضعیت گونه‌ی دیگری هم می‌توان اندیشید:

حرکت جعبه با ریزش ماسه تغییر نکرده است زیرا ماسه در هنگام بیرون ریختن از جعبه (مثلاً از شکافی که در دیواره‌ی جعبه وجود دارد) هیچ تکانه‌ای را به جعبه منتقل نمی‌کند. جزئیات این مسئله را می‌توان به شیوه‌ی زیر بررسی کرد:

فرض کنید در هر لحظه، جرم جعبه بعلاوه‌ی ماسه‌ی باقیمانده در درون آن m باشد. در زمان t تکانه‌ی جعبه و اندرونه‌ی آن mv است. در بازه‌ی زمانی بعدی dt جرم تغییر می‌کند و از m به $m-dm$ می‌رسد و سرعت از v به $v+dv$ افزایش می‌یابد. در پایان بازه‌ی زمانی dt تکانه‌ی جعبه بعلاوه‌ی اندرونه‌ی آن $(m-dm)(v+dv)$ و تکانه‌ی جرم dm که از جعبه به بیرون ریخته شده است vdm است. تغییر کل در تکانه سامانه در بازه‌ی زمانی dt با نیروی ضربه‌ای Fdt برابر است و چون $\mathrm{F}=mg\sin\alpha$، پس داریم:

$$vdm+(m-dm)(v+dv)-mv=mg\sin\alpha\, dt \qquad (۵-۱۲۵)$$

$$\Rightarrow \cancel{vdm}+\cancel{mv}-\cancel{vdm}+mdv-dm\,dv-\cancel{mv}=mg\sin\alpha\, dt$$

اگر از جمله‌ی بسیار کوچک $dm\ dv$ چشم‌پوشی کنیم، پس از حذف جمله‌های همانند، خواهیم داشت

$$m\frac{dv}{dt}=mg\sin\alpha \qquad (۵-۱۲۶)$$

این معادله‌ی حرکت جعبه و اندرونه‌ی آن است که در رابطه‌ی (۱۲۴-۵) به آن رسیدیم.

اگر فرض کنیم با سازوکاری، ماسه‌ی بیرون ریخته‌شده به حالت سکون در می‌آید، نتیجه‌ی متفاوتی به دست خواهد آمد. برای این کار فرض کنید به ماسه‌های بیرون ریخته‌شده سرعت $-v$ بدهیم؛ یعنی سرعتی در جهت عکس سرعت جعبه و به اندازه‌ی آن. در این حالت تکانه‌ی جزء جرم dm در پایان بازه‌ی زمانی dt صفر خواهد شد. در نتیجه، از اصل پایستگی تکانه خواهیم داشت:

$$(m-dm)(v+dv)-mv=mg\sin\alpha\ dt \qquad (۵-۱۲۷)$$

و از اینجا به دست می‌آید

$$m\frac{dv}{dt}-v\frac{dm}{dt}=mg\sin\alpha \qquad (۵-۱۲۸)$$

و برای اینکه بتوانیم توصیفی از این رابطه داشته باشیم، آن را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$m\frac{dv}{dt}=v\frac{dm}{dt}+mg\sin\alpha \qquad (۵-۱۲۹)$$

جمله‌ی سمت راست را می‌توان آهنگی پنداشت که ماسه‌های بیرون ریخته‌شده با آن آهنگ به جعبه تکانه وارد می‌کنند. در رابطه‌های (۱۲۷-۵) تا (۱۲۹-۵)، dm و dv/dt کمیت‌های مثبت فرض شده‌اند وکاهش یافتن m با علامت منها در $m-dm$ به حساب آورده شده است.

مثال ۱۳-۵ (بازهم ماسه وجعبه): جرم جعبه و اندرونه‌ی آن را در هر لحظه m بنامید و مقدار اولیه‌ی جرم را $m_\circ$ فرض کنید. ماسه با آهنگ ثابت b از جعبه ریزش می‌کند و جعبه حرکتش را از حالت سکون شروع می‌کند. از رابطه‌ی (۱۲۹-۵) استفاده و سرعت جعبه را برحسب زمان حساب کنید.

حل: جرم جعبه و ماسه‌ی درون آن را می‌توان به صورت تابعی از زمان نوشت:

$$m=(m_\circ-bt) \qquad (۵-۱۳۰)$$

اگر در رابطه‌ی (۱۲۸-۵) قرار دهیم (چون علامت منها در رابطه (۱۲۸-۵) منظور شده است، پس $dm/dt = +b$) خواهیم داشت

$$(m_\circ - bt)\frac{dv}{dt} - bv = (m_\circ - bt)g\sin\alpha \qquad (۵\text{–}۱۳۱)$$

که معادله‌ی خطی از مرتبه‌ی اول است. می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt}\left[(m_\circ - bt)v\right] = (m_\circ - bt)g\sin\alpha \qquad (۵\text{–}۱۳۲)$$

حال اگر از آن انتگرال بگیریم و شرط مرزی $v=\circ$ به ازای $t=\circ$ را اعمال کنیم به دست می‌آید

$$v = \frac{(m_\circ - bt/۲)t\, g\sin\alpha}{m_\circ - bt} \qquad (۵\text{–}۱۳۳)$$

به عنوان مثال آخر اینک مسئله‌ی موشک را در حضور نیروی خارجی بررسی می‌کنیم. این همان مثال موشک ۱۱-۵ است که اینک به آن نیروهای خارجی هم وارد می‌شود. ،مسئله را می‌توان به صورت زیر بررسی کرد:

فرض کنید در زمانی مانند t جرم موشک و اندرونه‌ی آن M است. در بازه‌ی زمانی بعدی dt ، مقدار dm از جرم موشک به صورت گاز و با سرعت u نسبت به موشک از آن خارج می‌شود. در پایان بازه‌ی dt تکانه‌ی موشک و اندرونه‌ی آن $(M-dm)(v+dv)$ و تکانه‌ی جرم dm برابر $(v-u)dm$ خواهد شد. در آغاز سفرموشک (یعنی در زمان t) تکانه‌ی آن Mv است. چون تغییر تکانه با ضربه‌ی نیروهای دیگر باید برابر باشد، پس می‌توان نوشت

$$(v-u)dm + (M-dm)(v+dv) - Mv = Fdt \qquad (۵\text{–}۱۳٤)$$

F شامل همه‌ی نیروهایی است که به موشک وارد می‌شوند، مانند نیروی گرانش mg ، نیروهای آیرودینامیکی و کمیت $(P-P_\circ)A$ که P فشار گاز خروجی بر روی سطح افشانه‌ی خروجی گاز است. $P_\circ$ فشار آتمسفر و A سطح افشانه خروجی است. رابطه‌ی (۱۳٤-۵) را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$M\frac{dv}{dt} - u\frac{dm}{dt} = F \qquad (۵\text{–}۱۳۵)$$

رابطه‌ی (۱۳۵-۵) معادله‌ی حرکت موشک است. آگاهی‌های مربوط به **F** در کتاب‌های مرجع موشک‌ها یافت می‌شوند که شامل کمیت‌هایی مانند mg موشک، نیروهای آیرودینامیکی و کمیت $(P-P_\circ)A$ است. کمیت $(P-P_\circ)A$ و $u\,dm/dt$ در رابطه‌ی (۱۳٦-۵) را می‌توان با اندازه‌گیری ایستایی **پیش‌رانه‌ای** موشک به دست آورد؛ پیش‌رانه عبارت است از

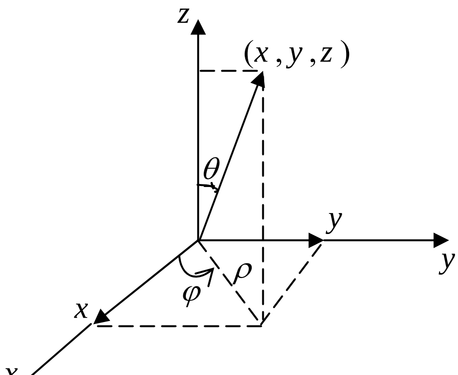
$$u\frac{dm}{dt} + (P+P_0)A \qquad (۵\text{–}۱۳٦)$$

پیوست ۱- پایستگی انرژی و نیروهای پایستار در سه بعد- بیانی دیگر

در این پیوست پایستگی انرژی وشرط پایستار بودن نیرو در سه بعد را با زبانی اندک متفاوت بیان می‌کنم. شاید برای برخی دانشجویانی که حسابان را نیاموخته‌اند سودمند باشد.

۱- پایستگی انرژی و قضیه‌ی کار- انرژی در سه بعد

مکان ذره را در فضا می‌توان با بردار مکان $\mathbf{r}$ نشان داد. در مختصات کارتزی بردار $\mathbf{r}$ سه مولفه در راستای محورهای x ، y و z دارد. تصویر بردار $\mathbf{r}$ بر روی این محورها مولفه‌های آن را مشخص می‌کند و در شکل(۲۳-۵) نشان داده شده اند. اگر بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathbf{i}}$، $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ متناظر با محورهای x, y و z باشند. آنگاه بردار $\mathbf{r}$ را می‌توان برحسب مولفه‌هایش نوشت: $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ اندازه‌ی بردار $\mathbf{r}$ برابر است با جذر ضرب داخلی $\mathbf{r}$ در خودش



شکل ۲۳-۵

$$|\mathbf{r}|^{۲} \equiv r^{۲} = \mathbf{r}.\mathbf{r} = (x\;\hat{\mathbf{i}} + y\;\hat{\mathbf{j}} + z\;\hat{\mathbf{k}})\cdot(x\;\hat{\mathbf{i}} + y\;\hat{\mathbf{j}} + z\;\hat{\mathbf{k}}) = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}$$

چون $\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1$ و $\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$. هم‌چنین توجه کنید که اندازه‌ی مولفه‌ها عبارتند از

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \;\;,\;\; y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم m که در سه بعد حرکت می‌کند $T = m\,\dot{\mathbf{r}}^{۲}/۲$ است که در آن $\dot{\mathbf{r}}$ بردار سرعت است و با مشتق گرفتن ازبردار مکان $\mathbf{r}$ به زمان به دست می‌آید.

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}) = \frac{d}{dt}\left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\right) = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} \qquad \text{(پ: ۱-۵)}$$

هم‌چنین مشتق دوم نسبت به زمان بردار $\mathbf{r}$ شتاب ذره را به دست می‌دهد و برابر است با

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\,\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}\right) = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}} \qquad \text{(پ: ۲-۵)}$$

همان‌گونه که $\dot{x}$ و $\dot{y}$ و $\dot{z}$ مولفه‌های بردار سرعت $\dot{\mathbf{r}}$ روی محورهای x و y و z اند، $\ddot{x}$ و $\ddot{y}$ و $\ddot{z}$ هم مولفه‌های بردار شتاب ذره روی این محورهاست. با این یادآوری اینک انرژی جنبشی ذره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T = \frac{۱}{۲}m\,\dot{\mathbf{r}}^{۲} = \frac{۱}{۲}m\left(\dot{x}^{۲} + \dot{y}^{۲} + \dot{z}^{۲}\right) \qquad \text{(پ: ۳-۵)}$$

آهنگ تغییر انرژی جنبشی عبارت است از:

$$\dot{T} = m\left(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}\right) = m\,\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{F} \qquad \text{(پ: ٤-۵)}$$

اما داریم:

$$\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = \left(\dot{x}\;\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\;\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\;\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(\ddot{x}\;\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\;\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\;\hat{\mathbf{k}}\right) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} \qquad \text{(پ: ۵-۵)}$$

چون معادله‌ی حرکت ذره به صورت زیر است

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{a} = \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} \qquad \text{(پ: ٦-۵)}$$

بنابراین، اگر ذره در بازه‌ی زمانی dt فاصله‌ی (برداری) $d\mathbf{r}$ را بپیماید و نیروی $\mathbf{F}$ به زمان وابسته نباشد آنگاه تغییر انرژی جنبشی ذره در این بازه‌ی زمانی برابر است با

$$d\,T = d\,W \qquad \text{(پ: ۷-۵)}$$

به دست‌آوردن این رابطه ساده است. از رابطه (پ: ٤–٥) داریم

$$\frac{dT}{dt}=\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{F}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}.\mathbf{F}) \quad\Rightarrow\quad dT=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\equiv dW \qquad (پ–۸)$$

پس:

$$dW=\mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{r}=\left(F_x\,\hat{\mathbf{i}}+F_y\,\hat{\mathbf{j}}+F_z\,\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(dx\;\hat{\mathbf{i}}+dy\;\hat{\mathbf{j}}+dz\;\hat{\mathbf{k}}\right)=F_x dx+F_y dy+F_z dz \qquad (پ: ۹–٥)$$

که بیان سه‌بعدی کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F}$ در جابجایی $d\mathbf{r}$ است. توجه کنید که کار dW برابر است با مسافت طی شده‌ی، $|d\mathbf{r}|$، ضرب‌در مولفه‌های نیروی $\mathbf{F}$ در راستای جابه‌جایی. توجه کنید که در نگاه نخست به نظر می‌رسد که در سه بعد باید نیروی پایستار به صورت نیروی $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ تعریف شود که فقط تابعی از مکان $\mathbf{r}$ ذره است. اما این به تنهایی وجود قانون پایستگی انرژی را تضمین نمی‌کند. پایستگی انرژی ویژگی اختصاصی نیروهای پایستار است. بنابراین، برای این‌که قانون پایستگی انرژی: ثابت $= T+V=E$ برقرار باشد، شرط می‌کنیم که تابع انرژی پتانسیل، $V(\mathbf{r})$، تابع مکان ذره باشد. حال اگر آهنگ تغییر انرژی پتانسیل را بررسی کنیم، داریم

$$\dot{V}(\mathbf{r})=\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial V}{\partial z}\dot{z} \qquad (پ: ۱۰–٥)$$

که همانند حاصل ضرب داخلی دو بردار است: یکی بردار سرعت $\dot{\mathbf{r}}=\left(\dot{x}\hat{\mathbf{i}}+\dot{y}\hat{\mathbf{j}}+\dot{z}\hat{\mathbf{k}}\right)$ و دیگری برداری به صورت $\left(\partial V/\partial z\right)\hat{\mathbf{k}}+\left(\partial V/\partial y\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(\partial V/\partial x\right)\hat{\mathbf{i}}\equiv \nabla V$ که تعریف گرادیان $V\,(r)$ است. پس، آهنگ تغییر تابع پتانسیل را می‌توان برحسب گرادیان V به صورت زیر نیز نوشت

$$\dot{V}=\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla V \qquad (پ: ۱۱–٥)$$

حال اگر از ثابت $= T+V=E$ نسبت به زمان مشتق بگیریم و به جای $\dot{T}$ و $\dot{V}$ هم‌ارزهایشان را از رابطه‌های (پ: ٥–٥) و (پ: ۱۱–٥) جایگزین کنیم، خواهیم داشت.

$$\dot{T}+\dot{V}=\circ \quad\Rightarrow\quad \dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{F}}+\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla V=\dot{\mathbf{r}}\cdot(\mathbf{F}+\nabla V)=\circ \qquad (پ: ۱۲–٥)$$

چون این رابطه باید برای هر سرعت، $\dot{\mathbf{r}}$، ذره درست باشد، پس برای برقراری تساوی باید عبارت درون پرانتز همواره صفر باشد؛ یا

$$\mathbf{F}+\nabla V=\cdot \quad\Rightarrow\quad \mathbf{F}=-\nabla V\,(\mathbf{r}) \qquad (پ: ۱۳–٥)$$

این رابطه را می‌توان برحسب مولفه‌هایش نوشت

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x} \quad,\quad F_y=-\frac{\partial V}{\partial y} \quad,\quad F_z=-\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (پ: ١٤–٥)$$

برای مثال، فرض کنید تابع انرژی پتانسیل به صورت $V=\left(۱/۲\right)k\,\mathbf{r}^{۲}=\left(۱/۲\right)k\left(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\right)$ است. این پتانسیل، نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی را توصیف می‌کند. در این صورت

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-kx\,,\quad F_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=-ky\,,\quad F_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=-kz \qquad (پ: ۱٥–٥)$$

و یا

$$\mathbf{F}=\left(-k\,x\,\hat{\mathbf{i}}-k\,y\,\hat{\mathbf{j}}-k\,z\,\hat{\mathbf{k}}\right)=-k\left(x\,\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}\right)=-k\,\mathbf{r}$$ (پ: ۱۶-۵)

کدام شرط لازم و کافی باید برای نیروی $\mathbf{F(r)}$ برقرار باشد تا تابع انرژی پتانسیل $V(\mathbf{r})$ وجود داشته باشد و در رابطه‌ی (پ: ۱۳-۵) صدق کند؟ یافتن پاسخ این پرسش دشوار نیست. هر تابع برداری از نوع (پ: ۱۳-۵) از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند.

$$\nabla\times\mathbf{F}=0$$ (پ: ۱۷-۵)

یعنی **تاو** (یا کرل) آن صفر است. تاو یا کرل یک بردار به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)-\hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)+\hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$ (پ: ۱۸-۵)

اگر تاو صفر باشد آنگاه هریک از مؤلفه‌ها نیز باید به تنهایی صفر شود. برای نمونه، اگر مؤلفه‌ی z صفر باشد، آنگاه داریم

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}=0$$ (پ: ۱۹-۵)

به همین ترتیب مولفه‌های دیگر تاو صفر است. پس رابطه‌ی (پ: ۱۷-۵) شرط لازم برای پایستاربودن $\mathbf{F(r)}$ است. می‌توان نشان داد که این شرط هم‌چنین شرط کافی است. به طور مشخص، هرگاه $\mathbf{F(r)}$ در شرط (پ: ۱۷-۵) صدق کند؛ نیرو پایستار است و کار این نیرو در جابه‌جایی ذره از $\mathbf{r}_0$ به $\mathbf{r}$ مستقل از مسیر حرکت بین این دو نقطه است. بنابراین، می‌توان انرژی پتانسیل را با رابطه‌ی زیر برحسب نیرو تعریف کرد.

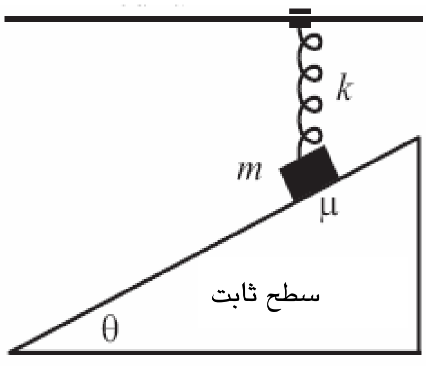
$$V(\mathbf{r})=-\int_{\mathbf{r}_0}^{r}F(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}'$$ (پ: ۲۰-۵)

توجه کنید که هر بردار نیرو پایستار نیست. برای پایستاربودن، تاو نیرو باید صفر باشد. می‌توانیم به گونه دیگری نیز به مسئله بنگریم: نیرو یک کمیت برداری است و برای توصیف آن به سه رابطه نیاز است، هر کدام برای توصیف یکی از مولفه های نیرو. حال آنکه تابع انرژی پتانسیل یک تابع اسکالر است یعنی کمیتی است که با یک رابطه توصیف می‌شود و همه‌ی اطلاعات لازم درباره‌ی نیرو را داراست. کافیست از آن نسبت به مکان مشتق گرفت و در یک علامت منها ضرب کرد، آنگاه نیرو به دست می‌آید. پرسش اینست که چگونه اطلاعاتی را که در سه رابطه نهفته است می‌توان از یک رابطه به دست آورد؟ پاسخ البته ساده است: مشتق مولفه‌های نیروی پایستار مستقل از یکدیگر نیستند و با سه رابطه‌ی

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial y},\qquad \frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z},\qquad \frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial z}$$ (پ: ۲۱-۵)

به هم‌دیگر وابسته‌اند. این رابطه‌های قیدی چیزی جز بیان صفربودن تاو نیروی پایستار نیست.

مثال‌های تکمیلی



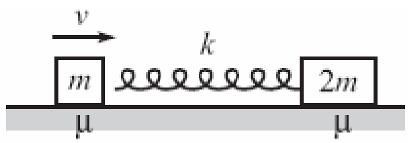
شکل ۲۳-۵

ت-۱ قطعه‌ای به جرم m در آغاز بر روی سطح شیب‌داری به شیب θ در حال سکون نگه داشته شده است. ضریب اصطکاک (هم جنبشی و هم ایستایی) بین قطعه و سطح μ است. یک انتهای فنری به قطعه وصل است و انتهای دیگرش با حلقه‌ای از میله‌ی افقی در بالای سطح آویزان است. شکل (۲۲-۵ را ببینید) ثابت فنر k است و در آغاز طول طبیعی دارد (کشیده یا فشرده نیست) و به حالت قائم است. قطعه را رها می‌کنیم تا در روی سطح به پایین بلغزد. (فرض کنید $\tan\theta > \mu$ و بنابراین قطعه روی سطح به واقع می‌لغزد) .فرض کنید انتهای فنر که به میله وصل است، روی میله به سوی چپ حرکت می‌کند و همواره به حال قائم قرار دارد (در واقع، چون میله اصطکاک ندارد، فنر عمودی قرار می‌گیرد.)

(الف): نمودار آزاد نیروهای وارد به قطعه را در زمان $t > ۰$ رسم کنید.

(ب): اگر z مسافتی باشد که قطعه در امتداد سطح به پایین می‌لغزد، به ازای چه مقدار z قطعه از سطح جدا می‌شود؟

(پ): سرعت قطعه در لحظه‌ی جدا شدن از سطح چیست؟

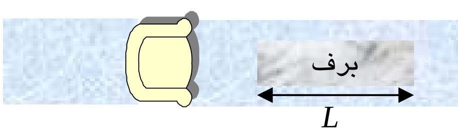


شکل ۲٤-۵

ت-۲ فنری با ثابت k برابر شکل (۲٤-۵) به قطعه‌ای به جرم $۲m$ وصل است و در روی سطح افقی قرار دارد. جرم m به سمت راست حرکت می‌کند و به انتهای چپ فنر گیر می‌کند و در نتیجه، فنر فشرده می‌شود. ضریب اصطکاک بین جرم‌ها و سطح μ است. اگر سرعت جرم درست پیش از برخورد با فنر v باشد

(الف): برای این که قطعه با جرم $۲m$ حرکت نکند، بیشینه مقدار v چقدر می‌تواند باشد (فرض کنید فنر به اندازه‌ی کافی دراز است و جرم m با قطعه برخورد نمی‌کند).

(ب): اگر اندازه‌ی v این مقدار بیشینه باشد، فنر نخست فشرده می‌شود و سپس به حالت ترازمندی اولیه‌اش برمی‌گردد و جرم m را به سوی چپ می‌راند. در لحظه‌ای که فنر طول اولیه‌اش را باز می‌یابد، سرعت جرم m چقدر است؟



شکل ۲۵-۵

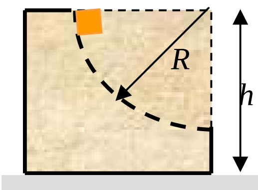
ت-۳ سورتمه‌ای با جرم اولیه $M_۰$ روی سطح یخی بدون اصطکاک با سرعت $v_۰$ حرکت می‌کند. قسمتی از مسیر به طول L به طور یکنواخت با برف پوشیده شده است. جرم در واحد طول برف λ است. سورتمه برف را می‌روبد و به جرمش افزوده می‌شود (شکل ۲۵-۵).

(الف): در حالیکه سورتمه برف را جمع می‌کند، معادله‌ی حرکتش، dv/dt ، را بیابید. آن را حل کنید و سرعت نهایی سورتمه را به دست آورید.

(ب): جرم نهایی سورتمه را حساب کنید.

(پ): تغییر در تکانه‌ی کل سامانه‌ی "سورتمه + برف" را حساب کنید.

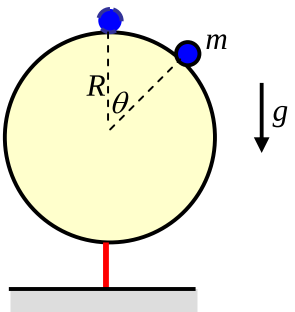
(ت): انرژی جنبشی اولیه و نهایی سورتمه را باهم مقایسه کنید. چه کسری از انرژی جنبشی اولیه‌ی، $(T_f - T_i)/T_i$ سورتمه در اثر روبیدن برف از دست رفته است؟



شکل ۵-۲۶

ت-۴ از گوشه‌ی مکعبی به جرم M و به ضلع h ربع دایره‌ای به شعاع R برابر شکل (۵-۲۶) بریده شده است. قطعه‌ای به جرم m از بالای بریدگی روی مسیر دایره می‌لغزد. مکعب روی میز هموار قرار دارد و هر دوی قطعه و مکعب بدون اصطکاک حرکت می‌کنند. مکعب در آغاز بی حرکت است و قطعه از حالت سکون شروع به لغزیدن می‌کند. وقتی قطعه از مکعب جدا می‌شود، سرعتش را حساب کنید.

ت-۵ ذره‌ای به جرم m در بالای کره‌ای به شعاع R در حال سکون است. به ذره تلنگر کوچکی وارد می‌شود و در روی کره به سمت راست می‌لغزد (و زاویه‌ی θ افزایش می‌یابد). نیروی ناپایستاری به صورت $F_\circ \sin\theta$ با حرکت ذره در روی کره مخالفت می‌کند (مادام که ذره با کره در تماس است). گرانش به سوی پایین است.



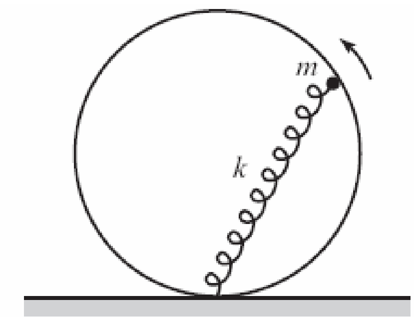
شکل ۵-۲۷

(الف): کاری را که بر روی جرم در طول سقوط آن از بالای کره به زاویه‌ی θ انجام گرفته است حساب کنید.

(ب) : انرژی مکانیکی کل E را به صورت تابعی از زاویه‌ی θ (تا وقتی که جرم در روی کره است) به دست آورید. انرژی پتانسیل U را در بالاترین نقطه‌ی کره صفر فرض کنید. پاسخ نباید به طور روشن به سرعت بستگی داشته باشد.

(پ): انرژی جنبشی ذره را در روی کره به صورت تابعی از زاویه‌ی θ به دست آورید.

(ت): در چه زاویه‌ای جرم سطح کره را ترک می‌کند؟



شکل ۵-۲۸

ت-۶ حلقه‌ای فلزی به شعاع R به طور قائم قرار دارد. یک انتهای فنر بدون جرم با ثابت k به پایین‌ترین نقطه‌ی سطح درونی حلقه وصل است. جرم m به انتهای دیگر فنر وصل است. فنر قشرده می‌شود تا طولش صفر شود و جرم m در پایین ترین نقطه‌ی حلقه با سطح درونی آن تماس پیدا کند. سپس از این وضعیت، فنر رها و در سطح درونی حلقه به بالا رانده می‌شود. سطح درونی حلقه اصطکاک ندارد. در شکل (۵-۲۸) وضعیت در یک زمان دلخواهی پس از رها شدن فنر نشان داده شده است. اگر ℓ طول حالت ترازمندی فنر باشد، کمینه مقدار آن (برحسب m ،R ،g و k) چقدر باید باشد تا این که جرم m همواره با سطح درونی حلقه در تماس باقی نماند؟

ت-۷ نشان دهید که نیروهای زیر پایستارند و تابع انرژی پتانسیل $U(\mathbf{r})$ هر یک را به دست آورید:

(الف): $$F_x = ayz + bx + c\ ,\ F_y = axz + bz\ ,\ F_z = axy + by$$

(ب): $$F_x = -ze^{-x}\ ,\ F_y = \ell n\, z\ ,\ F_z = e^{-x} + y/z$$

ت-۸ ریسمانی با چگالی جرمی $\sigma\,\mathrm{kg/m}$ روی زمین چنبره زده است. با دست یک انتهای آن را می‌گیریم و با سرعت ثابت v و به طور قائم به بالا می‌کشیم. نیرویی را که دست به ریسمان وارد می‌کند، برحسب تابعی از آن قسمت از ریسمان که در هوا است حساب کنید. اگر طول ریسمان L باشد، دست شما برای کندن تمامی ریسمان از زمین چه مقدار کار انجام می‌دهد؟ توان انتقالی به ریسمان را با آهنگ تغییر انرژی مکانیکی ریسمان مقایسه کنید.

مسئله ها

۵-۱ تابع انرژی پتانسیل مربوط به نیروی $-G\,Mm/x^{2}$ که ذره‌ای به جرم m در فاصله‌ی x از سیاره‌ای به جرم M $(M \gg m)$ احساس می‌کند، چیست؟ ذره در فاصله‌ی a از مرکز سیاره، از حالت سکون رها شده است و تحت گرانش سقوط می‌کند. سرعت ذره در هنگامی که با سطح سیاره برخورد می‌کند چقدر است؟ شعاع سیاره R است. برای ذره‌ای که از فاصله‌ی $a=2R$ به زمین سقوط می‌کند، این سرعت را بیابید. $(GM/R^{2}=g=10\,ms^{-2}\quad,\quad R=6400\,km)$.

۵-۲ ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروی $F=-cx^{2}$ حرکت می‌کند. c مقدار ثابت مثبتی است. تابع انرژی پتانسیل را بیابید. اگر ذره از نقطه $x=-a$ و از حالت سکون آغاز به حرکت کند، سرعت آن را وقتی به $x=0$ می‌رسد بیابید. در این حرکت، کجا ذره به طور لحظه‌ای از حرکت باز می‌ایستد؟

۵-۳ ذره‌ای به جرم m در ناحیه‌ی $x>0$ تحت تأثیر نیروی $F=-kx+c/x$ حرکت می‌کند ($k>0$ و $c>0$) انرژی پتانسیل را بیابید. مکان ترازمندی را بیابید و بسامد نوسان‌های کوچک حول نقطه‌ی ترازمندی را حساب کنید.

۵-۴ تابع انرژی پتانسی ذره‌ای به جرم m عبارت است از $v(x)=mk\,|x|$ که در آن k ثابت مثبتی است. نیرو برای $x>0$ و $x<0$ کدامند؟ تابع $V(x)$ را رسم کنید و حرکت را توصیف کنید. اگر ذره از نقطه‌ی $x=-a$ و از حالت سکون آغاز به حرکت کند، زمان لازم برای رسیدن ذره به $x=a$ چقدر است؟

۵-۵ ذره‌ای به جرم m تحت اثر نیروی پایستاری که تابع انرژی پتانسیل آن به صورت زیر است، حرکت می‌کند
$V(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}k\,(a^2-x^2) & ; \ |x|<a\\ 0 & ; \ |x|\ge a\end{cases}$. هر دو مقدارهای a و k ثابت و مثبت اند. نیروی وارد به ذره کدام است؟
تابع $V(x)$ را رسم کنید (برای $k>0$, $k<0$) و گونه‌های ممکن حرکت را توصیف کنید.

۵-۶ تابع انرژی پتانسیل ذره‌ای به جرم m عبارت است از $V=c\left(x^{2}-a^{2}\right)^{2}/2$، که در آن c و a ثابت‌های مثبت‌اند. تابع V را رسم کنید و حرکت‌های شدنی را در سه ناحیه‌ی **(الف)** $E>0$، **(ب)** $E<-ca^{2}/2$ و **(پ)** $-ca^{4}/2<E<0$ توصیف کنید.

۵-۷ تابع انرژی پتانسیل ذره‌ای به جرم m عبارت است از $V=cx/\left(x^{2}+a^{2}\right)$، که در آن c و a ثابت های مثبت اند. تابع V را رسم کنید. مکان ترازمندی پایدار را بیابید و دوره‌ی نوسان‌های کوچک حول نقطه‌ی ترازمندی را حساب کنید. با فرض این که ذره با سرعت v از این نقطه شروع به حرکت می‌کند، بازه‌ی مقادیر v را برای این که ذره **(الف)** حرکت نوسانی داشته

باشد، (ب) ذره به $-\infty$ بگریزد و (پ) ذره به $+\infty$ بگریزد، پیدا کنید.

۸-۵ بیشینه‌ی جابه‌جایی جرمی که حول نقطه‌ی ترازمندی نوسان می‌کند $0.2\,\mathrm{m}$ است و بیشینه سرعت آن $1.2\,\mathrm{m/s}$ است. دوره‌ی نوسان چقدر است.

۹-۵ جرمی به یک انتهای فنر وصل است و می‌تواند با بسامد زاویه‌ای ω نوسان کند. در زمان $t=0$ مکان این جرم $x_0>0$ است. جرم و فنر را به سوی مبداء مختصات می فشاریم و سپس رها می‌کنیم تا حرکت نوسانی ساده با دامنه‌ی $2x_0$ انجام دهد. مکان جرم را به صورت تابعی از زمان و به صورت $x=A\cos(\omega t+\theta)$ به دست آورید.

۱۰-۵ نشان دهید که اگر نیروی کل وارد به جسمی که در یک بعد (مثلاً در راستای x) حرکت می‌کند فقط به مکان جسم بستگی داشته باشد، $F=F(x)$ آنگاه قانون دوم نیوتون را می‌توان حل کرد و سرعت جسم را به صورت تابعی از مکان و به صورت $v^2=v_0^2+\frac{2}{m}\int F(x')\,dx'$ به دست آورد. از این نتیجه استفاده کنید و قانون دوم نیوتون را به صورت $md(v^2)=2F(x)dx$ بنویسید و از x تا x_0 از آن انتگرال بگیرید. (برای $F(x)=F_0$ شما به بیان قضیه‌ی کار- انرژی می‌رسید).

۱۱-۵ انرژی پتانسیل جسمی به جرم m در فاصله‌ی r از مبداء مختصات به صورت زیر است $U(r)=U_0(r/R+\lambda^2 r/r)$ که در آن $0<r<\infty$ و $\lambda,\ R,\ U_0$ ثابت‌های مثبت اند.

(الف): مکان ترازمندی را بیابید.

(ب): اگر x فاصله از نقطه‌ی ترازمندی باشد نشان دهید که برای x های کوچک، انرژی پتانسیل به صورت مقدار $V=kx^2/2+C$ در می‌آید که در آن C مقدار ثابتی است.

(پ): بسامد زاویه‌ای نوسان های کوچک را به دست آورید.

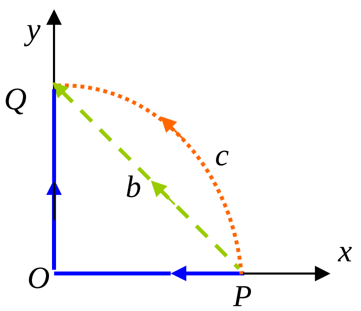
۱۲-۵ کار نیروی گرانش را در جابه‌جایی ذره‌ای به جرم m از مکان $\mathbf{r}_a$ به $\mathbf{r}_b$ به دست آورید. فرض کنید حرکت در صفحه انجام می‌گیرد.

۱۳-۵ نیروی دو بعدی $\mathbf{F}=-y\hat{\mathbf{i}}+x\hat{j}$ داده شده است. کار این نیرو را بر روی مسیرهای a, b, c از نقطه‌ی $P=(1,0)$ تا نقطه‌ی $Q=(0,1)$ حساب کنید. مسیرها به صورت زیر تعریف شده‌اند.

(الف) : مسیری که از $P=(1,0)$ به مبداء می‌رود وسپس از مبداء مختصات در راستای محور y ها به نقطه‌ی $Q=(0,1)$ می رسد. (شکل۲۹-۵)

(ب): خط راستی از نقطه‌ی P به نقطه‌ی Q (مسیر b)

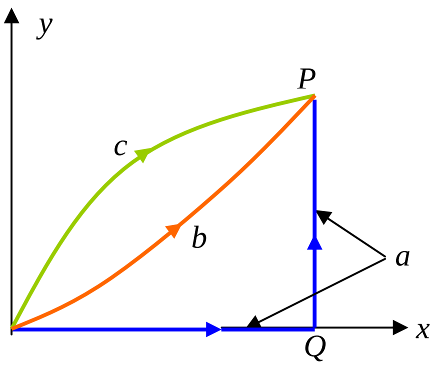
(پ): یک چهارم خم دایره‌ای به مرکز مبداء مختصات (مسیر c).



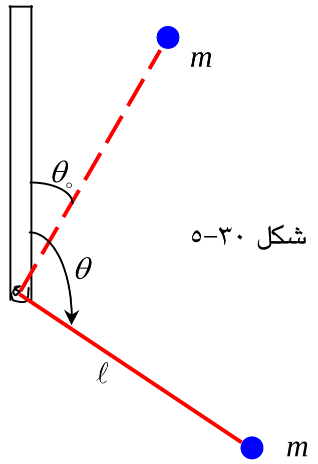
شکل ۲۹-۵

۱۴-۵ برابر شکل (۳۰-۵) میله‌ی عمودی به طول ℓ را در نظر بگیرید. این میله می‌تواند حول انتهای پائینی خود نوسان کند. به انتهای بالای میله وزنه‌ای به جرم m وصل شده است. هنگامی که میله با خط عمود زاویه‌ی θ_0 می‌سازد آن را از حالت سکون رها می‌کنیم . وقتی میله با خط عمود زاویه θ می‌سازد، سرعت جرم m را به دست آورید.از جرم میله چشم پوشی کنید.

۱۵-۵ ذره‌ی کوچک بدون اصطکاکی روی قطب شمال کره‌ی ثابتی به شعاع R قرار دارد. به ذره تلنگر کوچکی می‌زنیم و ذره بر روی کره سُر می‌خورد. در چه ارتفاعی این ذره از سطح کره جدا خواهد شد؟



شکل ۵-۳۱



شکل ۵-۳۰

۵-۱۶ نیروی دو بعدی $\mathbf{F} = x^{۲}\,\hat{\mathbf{i}} + ۲xy\,\hat{\mathbf{j}}$ داده شده است. کار این نیرو را بر روی سه مسیری که مبداء مختصات را به نقطه $P = (۱,۱)$ وصل می‌کنند و در شکل (۳۱-۵) نشان داده شده‌اند، حساب کنید. مسیرها به صورت زیر تعریف شده‌اند

(الف): خط راستی از مرکز تا نقطه‌ی $Q = (۱,۰)$ و سپس مستقیم از این نقطه به نقطه‌ی P.

(ب): مسیری که معادله‌ی آن $y = x^{۲}$ است.

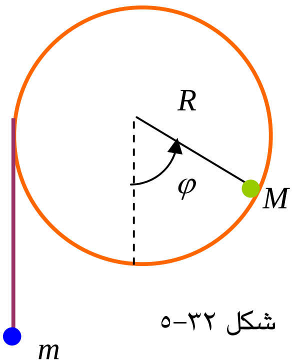
(پ): مسیری که معادله‌ی پارامتری آن بصورت $x = t^{۳}$ و $y = t^{۲}$ است.

۵-۱۷ انرژی پتانسیل آونگ ساده‌ای به جرم m و طول ℓ را برحسب زاویه‌ی ϕ، زاویه‌ی بین آونگ و خط عمود، بنویسید (نقطه‌ی صفر پتانسیل را در پائین‌ترین مکان گلوله‌ی آونگ در نظر بگیرید.) برای زاویه‌های کوچک ϕ نشان دهید که تابع پتانسیل از قانون هوک $V(\phi) = k\phi^{۲}/۲$ پیروی می‌کند. k چیست؟

۵-۱۸ برابر شکل (۳۲-۵) چرخ بدون جرمی به شعاع R را در نظر بگیرید که بر روی محور افقی بدون اصطکاک سوار است. جرم نقطه‌ای M بر لبه‌ی چرخ محکم شده است و جرم m از ریسمانی که دور چرخ پیچیده است آویزان است

(الف): تابع انرژی پتانسیل کل دو جسم را بر حسب زاویه‌ی ϕ بنویسید.

(ب): با استفاده از این پتانسیل، مکان‌هایی را که ممکن است سامانه دارای ترازمندی باشد بیابید و پایداری آنها را بررسی کنید.



شکل ۵-۳۲

(پ): به ازای $m = ۰{,}۷M$ ، $m = ۰{,}۸M$ تابع پتانسیل $V(\phi)$ را جداگانه رسم کنید.

(ت): اگر سامانه از حالت $\phi = ۰$ رها شده باشد، از شکل $V(\phi)$ استفاده کنید و رفتار سامانه را توضیح دهید. ($\sin(۰{,}۸) = ۰{,}۷۱۷$ و $\sin(۰{,}۷) = ۰{,}٦٤٤$)

۵-۱۹ توپ پلاستیکی به جرم $۰{,}۲kg$ به سوی زمین فرو می‌افتد. سرعت توپ هنگام برخورد با زمین $۸m/s$ است و به تقریب با همان سرعت به بالا او می‌جهد. اگر زمان تماس توپ با زمین $۱۰^{-۳}s$ باشد نیروی میانگینی (میانگین زمانی) از سوی زمین به توپ وارد می‌شود؟

۵-۲۰ مردی به جرم M از ارتفاع h به پائین می پرد. هنگام برخورد با زمین، مرد مرکزجرم خود را به اندازه‌ی S پائین می‌آورد (مرد زانوهای خود را خم می‌کند)

(الف): چه نیروی میانگینی از طرف زمین به مرد وارد می‌شود؟

(ب): فرض کنید مرکزجرم مرد یک سانتیمتر جابه‌جا می‌شود (به تقریب ارتفاع مرد در لحظه‌ی فرود حدود ۲ سانتیمتر کاهش

می‌یابد) اگر مرد از ارتفاع ۲ m بپرد وجرمش ۹۰ kg باشد، در کجای بدن او احتمال شکستگی استخوان وجود دارد؟ فرض کنید سطح مقطع استخوان حدود ۵ cm^2 است.

۵–۲۱ ارابه‌ای که بار ماسه دارد از حالت سکون حرکت می‌کند و از شیب دره‌ای به پایین و سپس از سربالایی روبروی دره بالا می‌رود. در این حرکت ارابه در برابر اصطکاک انرژی از دست نمی دهد. فرض کنید ارتفاع اولیه‌ی ارابه از ته دره h_1 و ارتفاع نهایی آن h_2 باشند. اگر در طول مسیر از ارابه ماسه به بیرون نشت کند، چه رابطه‌ای میان h_2 و h_1 وجود دارد؟

۵–۲۲ یک پله برقی با سرعت ثابت به پایین می‌رود. شخصی با همان سرعت از پله بالا می‌رود. بنابراین، شخص نسبت به زمین ساکن است. آیا این شخص کار انجام می دهد؟

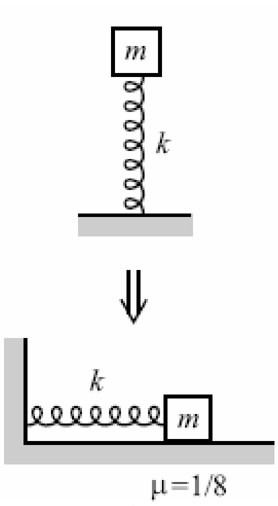
۵–۲۳ ذره‌ای که تحت پتانسیل $V(x) = -A\,|x|^n$ است از مبداء مختصات دور می‌شود. به ازای چه مقدارهای n این ذره در زمان محدود به بینهایت می‌رسد؟

۵–۲۴ فنر بدون جرمی با ثابت فنر k از سقف آویزان است و طول طبیعی خود را دارد. جرم m را به انتهای فنر می‌بندیم و آن را رها می‌کنیم.

(الف): انرژی پتانسیل کل سامانه را برحسب y (که منفی است) نسبت به مکان اولیه حساب کنید و شکل تقریبی $V(y)$ را بکشید. y نسبت به نقطه‌ای اندازه‌گیری می‌شود که فنر طول طبیعی خود را دارد.

(ب): ارتفاع y_0 که در آن انرژی پتانسیل کمینه می‌شود کدام است؟

(پ): انرژی پتانسیل را به صورت تابعی از $z \equiv y - y_0$ بازنویسی کنید و توضیح دهید که چرا اگر نقطه‌ی ترازمندی جدید؛ y_0 ، را طول "طبیعی" فنر فرض کنیم، آنگاه می توانیم نتیجه را همانند فنر آویزان در دنیایی در نظر گرفت که در آن دنیا گرانش وجود ندارد.

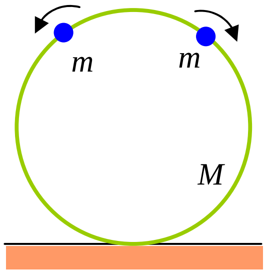


شکل ۳۳–۵

۵–۲۵ فنری با ثابت فنر k از یک انتها به طور عمودی ایستاده است. جرم m را بر بالای فنر قرار می‌دهیم و به آرامی آن را پایین می‌آوریم تا به نقطه‌ی ترازمندیش برسد و فنر فشرده شود. در حالی که فنر فشرده است سامانه را می‌چرخانیم تا به حالت افقی در بیاید. انتهای سمت چپ فنر را به دیواری وصل می‌کنیم . جرم m همانند شکل (۳۳–۵) روی میز افقی با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu = 1/8$ قرار می‌گیرد فنر را از این حالت رها می‌کنیم. **(الف)**: فشردگی اولیه‌ی فنر را بیابید. **(ب)**: پس از نیم نوسان، بیشینه کشیدگی (یا فشردگی) فنر چقدر کاهش می‌یابد؟ (*راهنمایی:* این قسمت مسئله را با استفاده از $F = ma$ حل نکنید.) **(پ)**: جرم m پیش از آنکه به حالت سکون در بیاید، چند بار به پس و پیش نوسان می‌کند؟

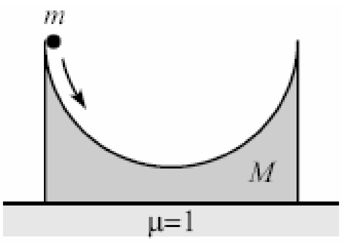
۵–۲۶ **(دانه ی تسبیح روی حلقه)**: دانه‌ی تسبیحی در بالاترین نقطه‌ی حلقه‌ای بدون اصطکاک به شعاع R ساکن ایستاده است. حلقه در صفحه‌ی عمودی است. به دانه‌ی تسبیح تلنگر کوچکی می‌زنیم و دانه تسبیخ روی حلقه می‌لغزد. در چه نقاطی دانه‌ی تسبیح کمترین نیروی افقی را به حلقه وارد می کند.

۵–۲۷ **(دو دانه تسبیح روی حلقه)**: برابر شکل(۳٤–۵) دو دانه تسبیح هر یک به جرم $\boldsymbol{m}$ در بالای حلقه‌ی بدون اصطکاک با جرم M و شعاع R ساکنند. حلقه به طور عمودی روی زمین ایستاده است. به دانه‌های تسبیح تلنگر کوچکی می‌زنیم، یکی از دانه‌ها به راست و دیگری به سوی چپ می‌لغزد. کمینه مقدار m/M چقدر باشد تا در یک لحظه حلقه از زمین بلند شود.



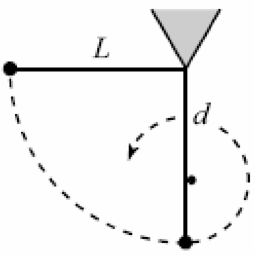
شکل ۵-۳۴

۵-۲۸ (کاسه ی بی حرکت): کاسه‌ای به شکل نیم‌کره و به جرم M روی میزی قرار دارد. سطح درون کاسه اصطکاک ندارد اما بین کاسه و سطح میز، ضریب اصطکاک $\mu = 1$ است. برابر شکل (۵-۳۵) ذره‌ای به جرم m از لبه‌ی کاسه از حالت سکون رها می‌شود و بر روی سطح درونی کاسه می‌سُرد. بیشینه مقدار m/M چقدر باید باشد تا کاسه هرگز بر روی میز نلغزد؟



شکل ۵-۳۵

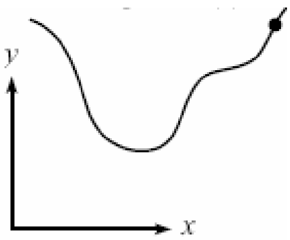
۵-۲۹ (آونگ و میخ): آونگی به طول L را افقی نگه می‌داریم و سپس آن را رها می‌کنیم. ریسمان آونگ در فاصله‌ی d از زیر آویزگاه به میخی گیر می‌کند (شکل ۵-۳۶). کم‌ترین مقداری که d می‌تواند داشته باشد که به‌ازای آن ریسمان همیشه به حالت کشیده باقی بماند ، چقدر است؟



شکل ۵-۳۶

۵-۳۰ جرمی تحت تاثیر گرانش برروی سیم بدون اصطکاکی می‌لغزد. ارتفاع سیم با تابع $V(x)$، برابر شکل (۵-۳۷) داده شده است. رابطه‌ای برای شتاب افقی $\ddot{x}$ جرم بیابید. توجه کنید که نتیجه‌ی شما باید نشان دهد که این همانند $\ddot{x}$ ذره‌ای در یک بعد نیست که تحت پتانسیل $mgV(x)$ حرکت می‌کند. در حالت حرکت یک بعدی ، داریم $\ddot{x} = -gV'(x)$. اگر سیم را با دست بگیریم، آیا راهی وجود دارد که سیم را چنان به حرکت در آوریم که این $\ddot{x}$ جرم ، با شتاب افقی حرکتی در یک بعد با پتانسیل $mgV(x)$ برابر باشد؟

۵-۳۱ دانه‌ی تسبیحی تحت اثر گرانش بر روی سیمی بدون اصطکاک می‌لغزد. ارتفاع سیم با تابع $y(x)$ داده شده است. فرض کنید در نقطه‌ی $(x,y) = (0,0)$ سیم عمودی است و دانه‌ی تسبیح با سرعت v_0 از این نقطه می‌گذرد و به پایین می‌رود. شکل سیم چگونه باید باشد (یعنی y چه تابعی از x باشد) تا سرعت عمودی دانه‌ی تسبیح برای همیشه v_0 باقی بماند؟



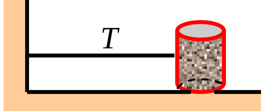
شکل ۵-۳۷

۵-۳۲ جرمی تحت تاثیر پتانسیل $V(x) = -Cx^n e^{-ax}$ حرکت می‌کند. بسامد نوسان‌های کوچک را حول نقطه‌ی ترازمندی بیابید.

۵-۳۳ پتانسیل جرمی که از یک فنر آویزان است عبارت است از $V(y) = ky^2/2 + mgy$. اگر چیزی از فنر آویزان نباشد $y = 0$ است. بسامد نوسان های کوچک حول نقطه‌ی ترازمندی را بیابید.

۵-۳۴ گلوله‌ی برفی را به سوی دیوار پرتاب می کنیم. تکانه و انرژی گلوله به کجا می روند؟

۵-۳۵ (سطل سوراخ): سطل بدون جرمی را در نظر بگیرید که در زمان $t = 0$ جرم ماسه ی درون آن M است. سطل را با فنری بدون جرم که کشش آن ثابت و برابر T است (یعنی کشش فنر مستقل از طول آن است) به دیواری بسته‌ایم. شکل (۵-۳۸) را ببینید. زمین اصطکاک ندارد و فاصله‌ی اولیه‌ی سطل تا دیوار L است. فرض کنید در زمان $t \neq 0$ فاصله‌ی سطل تا دیوار x و



شکل ۵-۳۸

جرم درون سطل m باشند. سطل را رها می‌کنیم تا به سوی دیوار حرکت کند. در سر راهش ماسه با آهنگ ثابت dm/dx از سطل نشت می کند (توجه کنید که آهنگ نشت نسبت به فاصله از دیوار ثابت است و نه نسبت به زمان). باز هم توجه کنید که چون dx منفی است dm هم منفی است.

(الف): انرژی جنبشی ماسه‌ی درون سطل را به صورت تابعی از فاصله تا دیوار به دست آورید. بیشینه مقدار آن چقدر است؟

(ب): اندازه‌ی تکانه‌ی سطل را به صورت تابعی از فاصله تا دیوار حساب کنید و بگویید بیشینه مقدارش چقدر است.

۵-۳۶ (بازهم سطل سوراخ): مسئله‌ی ۳۵-۵ را دو باره در نظر بگیرید. این بار فرض کنید آهنگ نشت ماسه از آن با شتاب سطل متناسب باشد. یعنی $dm/dt = b\ddot{x}$. توجه کنید که چون $\ddot{x}$ منفی است، dm نیز منفی است.

(الف) : جرم درون سطل، $m(t)$، را برحسب تابعی از زمان به دست آورید

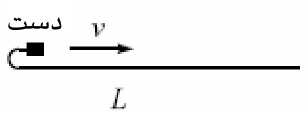
(ب): $x(t)$ و $v(t)$ سطل را برای زمان‌هایی که ماسه‌ی درون سطل غیر صفر است حساب کنید و همچنین $v(m)$ و $x(m)$ را بیابید. سرعت سطل را درست پیش از لحظه‌ای که همه‌ی ماسه خالی شود به دست آورید (فرض کنید در این لحظه هنوز سطل با دیوار برخورد نکرده است).

(پ): بیشینه مقدار انرژی جنبشی سطل چیست؟ (فرض کنید سطل پیش از برخورد با دیوار به این انرژی جنبشی بیشینه دست می یابد).

(ت): اندازه‌ی تکانه‌ی بیشینه سطل چیست؟ (فرض کنید سطل پیش از برخورد با دیوار به این تکانه‌ی بیشینه دست می یابد).

(ج) : به ازای چه مقدار b در لحظه‌ای که سطل با دیوار برخورد می‌کند از ماسه خالی می‌شود؟

۵-۳۷ (کشیدن زنجیر): زنجیری به طول L و چگالی جرمی $\sigma\, kg/m$ روی سطح افقی بدون اصطکاک دراز کشیده است. یک انتهای آن را با دست می‌گیریم و بر روی خودش و موازی با آن برابر شکل (۳۹-۵) به عقب می‌کشیم. اگر سرعت دست ثابت و برابر v باشد، دست چه نیرویی را به زنجیر وارد می‌کند. در هنگامی که دوباره زنجیر به حالت کشیده دربیاید، کار کلی را که دست انجام داده است چقدر است. آیا در این فرایند انرژی به صورت گرما تلف شده است؟ چقدر؟



شکل ۳۹-۵

۵-۳۸ (کلاف ریسمان): ریسمانی با چگالی جرمی $\sigma\, kg/m$ روی زمین به صورت کلاف در آمده است. یک انتهای آن را با دست می‌گیریم و با نیروی ثابت F در راستای افقی می‌کشیم. کلاف باز می‌شود. در حالی که کلاف گشوده می‌شود، مکان انتهای آن را به صورت تابعی از زمان به دست آورید. فرض کنید ریسمان روغن کاری شده است و هنگام گشوده شدن کلاف با خودش اصطکاک ندارد.

۵-۳۹ (خاک‌انداز): روی سطح شیب داری به شیب θ خاک‌اندازی به پایین می‌لغزد. خاک در خاک‌انداز به طور یکنواخت توزیع شده است و خاک‌انداز در سر راهش خاک جمع می‌کند. پس از زمان درازی، شتاب خاک‌انداز را حساب کنید. فرض کنید بین سطح و خاک‌انداز اصطکاک وجود ندارد.

۵-۴۰ (موشک) : گازهای سوخته از موشکی با جرم اولیه‌ی M با سرعت u خارج می شود. هنگامی که اندازه‌ی تکانه‌ی موشک بیشینه می شود، جرم موشک (بعلاوه‌ی بقیه‌ی سوخت مصرف نشده) چقدر است؟ وقتی انرژی موشک به بیشینه مقدارش می‌رسد، جرم موشک چقدر است؟

۵-۴۱ **(موشک ۲)**: موشکی را در نظر بگیرید که حرکت راست خط دارد و به آن نیروی خارجی F^{ext} در راستای حرکت وارد می‌شود. **(الف)**: نشان دهید که معادله‌ی حرکت موشک $m\dot{v} = -\dot{m}u + F^{ext}$ است. u سرعت خروج گاز از موشک است. **(ب)**: اگر موشک در میدان گرانش حرکت عمودی داشته باشد، معادله‌ی حرکت بالا به صورت $m\dot{v} = -\dot{m}u - mg$ درمی‌آید. فرض کنید، گازها با آهنگ ثابت $\dot{m} = -k$ از موشک خارج می‌شود (k مقداری ثابت و مثبت است). بنابراین جرم موشک در هر زمان برابر است با $m = M - kt$ (M جرم اولیه‌ی موشک است). معادله‌ی حرکت بالا را حل کنید و v را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

۵-۴۲ **(موشک چند مرحله ای)**: برای این که کارکرد موشک‌های چند مرحله‌ای را نشان دهیم وضعیت زیر را در نظر بگیرید:
(الف): سوخت اولیه‌ی موشکی ۶۰٪ جرم آن است (یعنی جرم سوخت برابر است با $۰,۶M$). اگر این موشک در فضای تهی (یعنی در نبود گرانش) از حالت سکون شتابیده شود و سوخت خود را در یک مرحله بسوزاند، سرعت نهایی آن چقدر است؟ پاسخ خود را به صورت ضریبی از u بیان کنید.
(ب) : حالا فرض کنید این موشک سوخت خود را در دو مرحله به صورت زیر می‌سوزاند: در مرحله‌ی نخست به اندازه‌ی $۰,۳M$ از سوخت خود را می‌سوزاند و انباره‌ی سوخت مرحله‌ی نخست از موشک جدا می‌شود. جرم این انباره $۰,۱M$ است و سپس بقیه‌ی سوخت خود را ($۰,۳M$ باقی مانده را) می‌سوزاند. سرعت نهایی را در این حالت بیابید. برای همه‌ی مراحل u را یکسان فرض کنید.

۵-۴۳ **(پرش به هوا)**: شخصی به جرم ۵۰kg به طور عمودی به هوا می‌پرد و به اندازه‌ی ۰,۸m از زمین فاصله می‌گیرد. برای رسیدن به این ارتفاع چه ضربه‌ای را زمین به این شخص منتقل می‌کند؟

۵-۴۴ **(پرش از قطار)**: N نفر هر کدام به جرم m در واگن روبازی به جرم M ایستاده‌اند. آنان از یک انتهای واگن با سرعت u نسبت به واگن به بیرون می‌پرند و واگن در جهت مخالف شروع به حرکت می‌کند. اصطکاک وجود ندارد.
(الف): اگر همه‌ی افراد باهم از واگن بپرند، سرعت نهایی واگن را پیدا کنید.
(ب) : اگر این افراد یکی پس از دیگری از واگن به بیرون بپرند سرعت نهایی واگن چقدر خواهد شد؟ (پاسخ را می‌توانید به صورت جمع چندین جمله بنویسید).
(پ): در کدام حالت **(الف)** یا **(ب)** سرعت نهایی واگن بیشترین است؟ آیا می‌توانید توجیح فیزیکی ساده‌ای به پاسختان بدهید.

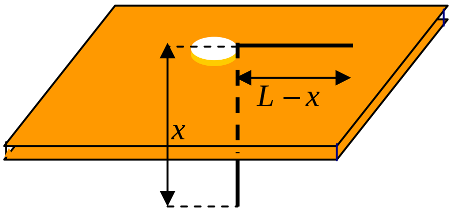
۵-۴۵ **(قطره باران)**: یک قطره‌ی باران با جرم اولیه‌ی $M_\circ$ تحت نیروی گرانش از حالت سکون فرو می افتد. در طول مسیرش از درون ابر می‌گذرد و با آهنگی متناسب با جرم لحظه‌ای ضربدر سرعت لحظه‌ای اش بر جرم قطره افزوده می‌شود: $dM/dt = kMv$ که در آن k مقدار ثابتی است. نشان دهید که سرعت قطره سرانجام به مقدار ثابتی می‌رسد. از پسار هوا چشم پوشی کنید و رابطه‌ای برای سرعت حد بنویسید.

۵-۴۶ **(موشک با نیروی پسار)**: مو.شکی در میدان گرانش یکنواخت از حالت سکون با خارج کردن گازهای سوخته با سرعت ثابت u از زمین دور می‌شود. فرض کنید آهنگ خروج جرم از موشک با $dm/dt = \gamma m$ داده شده باشد که در آن m جرم لحظه‌ای موشک است و γ مقدار ثابتی است. به موشک نیروی پسار هوا هم وارد می‌شود که برابر با mbv (b مقدار ثابتی است) است . سرعت موشک را به صورت تابعی از زمان بیابید.

۵-۴۷ (شیر آب اتش نشانی): آب با سرعت $v_۰$ به طور افقی از شیر آب آتش نشانی به بیرون می‌جهد. قطر افشانه‌ی شیر آب D است. نیروی واکنش بر روی شیر آب چقدر است؟

۵-۴۸ (سطلی بر روی فواره): سطلی به وزن W را وارونه بر روی فواره‌ای برگردانده‌ایم. سطل به وسیله آب فواره در هوا غوطه‌ور است. آب فواره با آهنگ ثابت dm/dt با سرعت $v_۰$ از زمین به هوا می‌جهد. بیشینه ارتفاعی که سطل می‌تواند در هوا باشد چیست. چه شرطهایی باید برقرار باشد تا بیشینه ارتفاع به دست آید.

۵-۴۹ (ریسمان آویخته از سوراخ): ریسمانی به طول ℓ و جرم M روی میز افقی بدون اصطکاک قرار دارد و طول کوتاه $\ell_۰$ از سوراخی در روی میز آویزان است. ریسمان در آغاز در حال سکون است (شکل ٥-٤٠ را ببینید)



شکل ٥-٤٠

(الف): معادله‌ی عمومی برای $x(t)$ ، طول ریسمان که از سوراخ آویزان است، بیابید.

(ب): در پاسخ عمومی ثابت‌هایی وجود دارند که با شرایط اولیه تعیین می‌شوند. این ثابت‌ها را حساب کنید.

۵-۵۰ (نیروی پایستار؟) : کدام یک از نیروهای زیر پایستار است.

(الف): $\mathbf{F}=-Ar^۲\hat{\mathbf{r}}$ **(ب)**: $\mathbf{F}=B(y^۲\hat{\mathbf{i}}-x^۲\hat{\mathbf{j}})$ (A و B مقدارهای ثابت اند.) **(پ)**: $\mathbf{F}=\mathbf{F}_۰\sin at$ ($\mathbf{F}_۰$ بردار ثابتی است.)

(ت): $\mathbf{F}=A\theta\hat{\mathbf{r}}$ (A مقدار ثابت و $۰\le\theta<۲\pi$ و $\mathbf{F}$ محدود به صفحه‌ی xy است.) **(ج)**: نیرویی که به سرعت ذره بستگی دارد ، اما همواره بر سرعت عمود است.

۵-۵۱ (نیروی پایستار و پتانسیل): کدام یک از نیروهای زیر پایستار است. تابع انرژی پتانسیل را اگر وجود دارد بیابید

(الف): $\mathbf{F}=A(۲\hat{\mathbf{i}}+z\,\hat{\mathbf{j}}+y\,\hat{\mathbf{k}})$ **(ب)** : $\mathbf{F}=Axyz\,(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})$

(پ): $F_x=۳Ax^۲y^۵e^{\alpha z},\quad F_y=۵Ax^۲y^۴e^{\alpha z},\quad F_z=\alpha Ax^۳y^۵e^{\alpha z}$

(ت): $F_x=A\sin(\alpha y)\cos(\beta z),\quad F_y=-Ax\,\alpha\cos(\alpha y)\cos(\beta z)\ ,\quad F_z=Ax\sin(\alpha y)\sin(\beta z)$

۵-۵۲ (نیروی پایستار- تابع پتانسیل): کدام یک از نیروهای زیر پایستارند؟ تابع انرژی پتانسیل را برای نیروهای پایستار به دست آورید. a و b مقدارهای ثابت اند و $\mathbf{a}$ بردار ثابتی است.

(الف): $F_x=ax+by^۲,\quad F_y=az+۲bxy\,,\quad F_z=ay+bz^۲$

(ب) : $F_x=ay\,,\quad F_y=az\,,\quad F_z=ax$

(پ): $F_x=۲ar\sin\theta\sin\phi,\quad F_\theta=ar\cos\theta\sin\phi,\quad F_\phi=ar\cos\phi$

(ت): $\mathbf{F}=\mathbf{a}\times\mathbf{r}$ **(ج)**: $\mathbf{F}=r\mathbf{a}$ **(چ)**: $\mathbf{F}=\mathbf{a}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})$

۵-۵۳ (کار نیرو): کار نیروی‌های (۱) $F_x=ax+by^۲,\ F_y=az+۲bxy\,,\ F_z=ay+bz^۲$ و (۲) $F_x=ay\,,\ F_y=az\,,\ F_z=ax$ مسئله‌ی ٥-٥٢ را در جابه‌جایی ذره‌ای از مبداء مختصات به نقطه‌ی $(x,y,z)=(۱,۱,۰)$ در دو مسیر زیر به دست آورید و در هر دو حالت نشان دهید که نتیجه با منهای تغییر در تابع انرژی پتانسیل برابر است:

مسیر ۱: حرکت در راستای محور x و سپس موازی با محور y **مسیر ۲:** حرکت در راستای خط راست.

۵-۵۴ (کار و نیرو): کار نیروهای **(الف)**: $\mathbf{F} = y\hat{\mathbf{i}}$ و **(ب)**: $\mathbf{F} = x\hat{\mathbf{i}}$ را روی ذره‌ای که بر روی دایره‌ی $x^2 + y^2 = a^2$، $z = 0$ جابه‌جا می‌شود، حساب کنید. در باره‌ی این نیروها چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ (*راهنمایی:* مسیر را با $x = a\cos\theta$ ، $y = a\sin\theta$ و $z = 0$ به صورت پارامتری بنویسید.)

۵-۵۵ (کرل نیرو): نیروی متناظر با تابع انرژی پتانسیل $V(r) = cz/r^3$ را بیابید. c مقدار ثابتی است. پاسخ خود را به صورت بردار بنویسید. در مختصات کروی مولفه‌های نیرو کدامند؟ نشان دهید $\nabla\times\mathbf{F} = 0$

۵-۵۶ (میدان نیرو) : میدان نیروی $\mathbf{F} = (x + 2y + az)\hat{\mathbf{i}} + (bx - 3y - z)\hat{\mathbf{j}} + (4x + cy + 2z)\hat{\mathbf{k}}$ داده شده است.

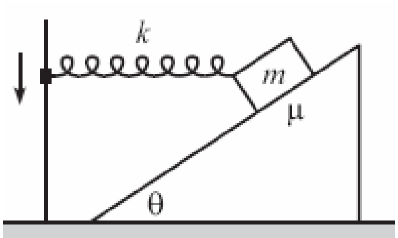
(الف): مقدارهای a ، b و c را چنان بیابید که نیروی $\mathbf{F}$ پایستار باشد.

(ب): اگر $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$ باشند، تابع پتانسیل نیروی بالا را به دست آورید.

(پ): در جابه جایی ذره ای از نقطه‌ی $A\ (2,-1,2)$ به نقطه‌ی $B\ (-1,-3,-2)$ کار این نیرو را بیابید.

۵-۵۷ (ذره در دام پتانسیل): ذره ای در پتانسیل $V(x) = A/x + Bx$ به دام افتاده است. A و B مقدارهای ثابت و مثبت اند. مکان ترازمندی ذره را بیابید و بسامد نوسان‌های کوچک آن را حول نقطه ی ترازمندی حساب کنید.

۵-۵۸ جرم m برابر شکل (۴۱-۵) روی سطح شیب‌دار ثابتی با شیب θ قرار دارد. ضریب اصطکاک (ایستایی و جنبشی، هر دو) بین سطح شیب‌دار و جرم $\mu = 1$ است. انتهای سمت راست فنری با ثابت k به جرم m وصل است و انتهای سمت چپ آن به وسیله‌ی حلقه‌ای از میله‌ای عمودی گذشته و می‌تواند در امتداد آن بلغزد. در آغاز، فنر طول طبیعی خودش را دارد و از این حالت سامانه را رها می‌کنیم تا جرم m روی سطح شیب‌دار به پایین بلغزد. انتهای چپ فنر هم به همراه آن در روی میله چنان سقوط می‌کند که همواره افقی باقی بماند. جرم m پس از پیمودن چه مسافتی در روی سطح شیب‌دار برای نخستین بار به حال سکون در می‌آید؟ (برای این که از لغزیدن جرم روی سطح اطمینان پیدا کنید، می‌توانید فرض کنید که $\theta > 45^\circ$ است).

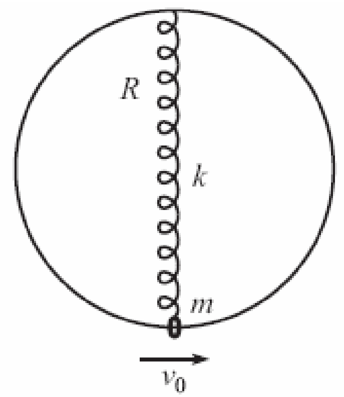


شکل ۴۱-۵

۵۹- ۵ حلقه‌ای به شعاع R به طور قائم قرار دارد و در جای خود ثابت است. فنری با ثابت k و طول طبیعی (طول آزاد) صفر از بالاترین نقطه‌ی حلقه آویزان است.

(الف): گلوله‌ای به جرم m به فنر می‌بندیم و از بالاترین نقطه‌ی حلقه رها می‌کنیم. گلوله بین بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌ی حلقه نوسان می‌کند. ثابت k را حساب کنید.

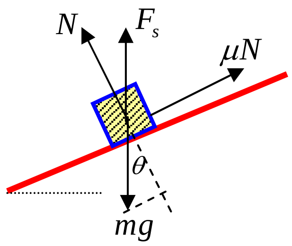
(ب): گلوله را از حلقه جدا می‌کنیم. فنر را می‌کشیم و همانند شکل (۴۲-۵) به دانه‌ی تسبیحی که در پایین‌ترین نقطه‌ی حلقه قرار دارد وصل می‌کنیم. جرم دانه تسبیح m است. به دانه‌ی تسبیح سرعت اولیه‌ی v_0 به سوی راست می‌دهیم. وابستگی سرعت دانه‌ی تسبیح به مکانش در روی حلقه چگونه است؟ فرض کنید، بین حلقه و دانه‌ی تسبیح اصطکاک وجود ندارد. مسئله را برحسب زاویه‌ی θ از پایین‌ترین نقطه‌ی حلقه حل کنید. شاید رابطه‌های دو برابر زاویه: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ و $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ سودمند باشند.



شکل ۴۲-۵

حل مثال‌های تکمیلی

ت-۱



شکل ۴۳-۵

حل: **(الف)** نمودار آزاد نیروها در شکل (۴۳-۵) دیده می‌شود. F_s نیروی فنر است.

(ب): از $F = ma$ در راستای عمود بر سطح داریم (در حالتی که هنوز قطعه از سطح جدا نشده است):

$$N + F_s \cos\theta - mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta - (kz\sin\theta)\cos\theta \qquad (۵-۱۳۷)$$

قطعه وقتی از سطح جدا می‌شود که $N = 0$ شود. این وضعیت هنگامی پیش می‌آید که $z = mg/(k\sin\theta)$ باشد. (این حرف تا هنگامی درست است که $\tan\theta > \mu$ باشد. در غیر این صورت اضطکاک بسیار بزرگ می‌شود و قطعه اصلا حرکت نمی‌کند).

(پ): **حل ۱ (استفاده از کار)**: کار نیروهای وارد به قطعه عبارت‌اند از کار گرانش (این کار مثبت است)، کار اصطکاک (این کار منفی است؛ چون نیرو و جابه‌جایی در خلاف جهت هم‌اند.) و کار منفی نیروی فنر است. مولفه‌ی نیروی گرانش در امتداد سطح $(mg\sin\theta)$ و جهت آن رو به پایین سطح است. مولفه‌ی نیروی فنر در راستای سطح $(kz\sin\theta)\sin\theta$ و به سوی بالا است. جهت نیروی اصطکاک هم رو به بالای سطح و برابر $\mu N = \mu(mg\cos\theta - kz\sin\theta\cos\theta)$ است. داریم

$$W = \Delta k \quad \Rightarrow \quad k_f - k_i = W_s + W_g + W_f$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 - 0 = (mg\sin\theta)z + \int_0^z (-kz'\sin^2\theta)dz' + \int_0^z \left(-\mu(mg\cos\theta - kz'\sin\theta\cos\theta)\right)dz'$$

$$= mgz\sin\theta - \frac{1}{2}kz^2\sin^2\theta - \mu\left(mgz\cos\theta - (1/2)kz^2\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$= z(\sin\theta - \mu\cos\theta)(mg - (1/2)kz\sin\theta) \qquad (۵-۱۳۸)$$

توجه کنید که اگر $\tan\theta$ اندکی از μ بزرگ‌تر باشد، $(\sin\theta - \mu\cos\theta)$ اساسا صفر و $v \approx 0$ می‌شود. قطعه وقتی از سطح جدا می‌شود که $z = mg/(k\sin\theta)$ باشد. سرعت در این نقطه عبارت است از

$$\frac{1}{2}mv^2 = \left(\frac{mg}{k\sin\theta}\right)(\sin\theta - \mu\cos\theta)(mg - (1/2)mg)$$

$$= \frac{m^2g^2}{2k\sin\theta}(\sin\theta - \mu\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{mg^2}{k}(1 - \mu/\tan\theta)} \qquad (۵-۱۳۹)$$

حل۲ (با استفاده از انرژی): کار نیروی اصطکاک به صورت گرما تلف می‌شود. پس مقدار گرما برابر

$$|W_f| = \int_0^z (\mu N)dz = \int_0^z \mu(mg\cos\theta - kz'\sin\theta\cos\theta)dz' = \mu\left(mgz\cos\theta - (1/2)kz^2\sin\theta\cos\theta\right) \qquad (۵-۱۴۰)$$

با پایین لغزیدن قطعه در روی سطح شیب‌دار انرژی پتانسیل آن کاهش پیدا می‌کند. این کاهش انرژی پتانسیل به سه چیز تبدیل می‌شود: انرژی جنبشی قطعه، انرژی پتانسیل فنر و گرما . چون $z\sin\theta$ مسافت قائمی است که قطعه فرو می‌افتد و نیز مقداری است که فنر کشیده می‌شود، می‌توان نوشت:

$$mg\,(z\,\sin\theta)=\frac{۱}{۲}mv^{۲}+\frac{۱}{۲}k\,(z\,\sin\theta)^{۲}+\mu\big(mgz\,\cos\theta-(۱/۲)kz^{۲}\sin\theta\cos\theta\big)$$

$$\Rightarrow\ \frac{۱}{۲}mv^{۲}=mgz\,\sin\theta-\frac{۱}{۲}kz^{۲}\sin^{۲}\theta-\mu\big(mgz\,\cos\theta-(۱/۲)kz^{۲}\sin\theta\cos\theta\big) \qquad (۵-۱۴۱)$$

$$=z\,(\sin\theta-\mu\cos\theta)\big(mg-(۱/۲)kz\,\sin\theta\big)$$

که با پاسخ حل ۱ سازگار است.

ت-۲ فرض کنید وقتی که جرم m به حال سکون در می‌آید، فنر به اندازه‌ی x فشرده شده است. این بیشینه فشردگی فنر است و بنابراین، در این هنگام، فنر بیشینه نیرو را به قطعه‌ی $۲m$ وارد می‌کند. پس، برای این که قطعه حرکت نکند، باید نیروی اصطکاک بیشینه در شرط زیر صدق کند.

$$kx\le F_s^{\max}\ \Rightarrow\ kx\le\mu(۲mg)\ \Rightarrow x\le(۲\mu mg/k) \qquad (۵-۱۴۲)$$

انرژی جنبشی اولیه‌ی جرم m به انرژی پتانسیل فنر و گرمای تلف شده در اثر اصطکاک تبدیل شده است. پس داریم

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲}=\frac{۱}{۲}kx^{۲}+(\mu mg)x \qquad (۵-۱۴۳)$$

یا به بیان هم‌ارز، می توتنیم بگوییم که کار فنر بعلاوه‌ی کار نیروی اصطکاک برابر است با تغییر انرژی جنبشی: $\Delta k=\Delta W$

$$-\frac{۱}{۲}kx^{۲}-(\mu mg)x=-\frac{۱}{۲}mv^{۲} \qquad (۵-۱۴۴)$$

مقدار x از رابطه‌ی (۱۴۳-۵) یا (۱۴۴-۵) به دست می‌آید. اگر از رابطه‌ی (۱۴۲-۵) $x\le(۲\mu mg/k)$ را در رابطه‌ی (۱۴۳-۵) یا (۱۴۴-۵) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲}\le\frac{۱}{۲}k\left(\frac{۲\mu mg}{k}\right)^{۲}+(\mu mg)\left(\frac{۲\mu mg}{k}\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{۱}{۲}mv^{۲}\le\frac{۴\mu^{۲}m^{۲}g^{۲}}{k}\ \Rightarrow\ v\le\sqrt{۸\mu^{۲}mg^{۲}/k} \qquad (۵-۱۴۵)$$

(ب): انرژی پتانسیل فنر در بیشینه فشردگی آن به انرژی جنبشی جرم m و انرژی گرمایی در اثر اصطکاک تبدیل می‌شود. سرعت نهایی جرم m را وقتی که فنر به حالت ترازمندیش می‌رسد، v_f بنامید. داریم

$$\frac{۱}{۲}kx_{\max}^{۲}=\frac{۱}{۲}mv_f^{۲}+F_f x \qquad (۵-۱۴۶)$$

$$\Rightarrow\ \frac{۱}{۲}k\left(\frac{۲\mu mg}{k}\right)^{۲}=\frac{۱}{۲}mv_f^{۲}+(\mu mg)\left(\frac{۲\mu mg}{k}\right)\ \Rightarrow v_f=۰$$

ت-۳ (الف): به سورتمه نیروی خارجی وارد نمی‌شود. بنابراین داریم

$$\frac{dp}{dt}=\frac{d}{dt}(mv)=۰\ \Rightarrow\ \frac{dm}{dt}v+m\frac{dv}{dt}=۰\ \Rightarrow\ \frac{dv}{dt}=-\frac{dm}{dt}\frac{v(t)}{m}\ \Rightarrow\ \frac{dv}{v}=-\frac{dm}{m} \qquad (۵-۱۴۷)$$

اگر از دو طرف انتگرال بگیریم، به دست می‌آید

$$\int_{v_\circ}^{v}\frac{dv}{v}=-\int_{M_\circ}^{M_\circ+\lambda L}\frac{dm}{m} \quad\Rightarrow\quad \ell n\left(v/v_\circ\right)=-\ell n\left((M_\circ+\lambda L)/M_\circ\right)$$

$$\Rightarrow \ell n\left(v/v_\circ\right)=\ell n\left(M_\circ/(M_\circ+\lambda L)\right) \quad\Rightarrow\quad v(t)=v_\circ\frac{M_\circ}{M_\circ+\lambda L} \qquad (۵-۱۴۸)$$

(ب): جرم نهایی سورتمه برابر است با $M_f=M_\circ+\lambda L$

(پ): تکا نه‌ی کل سامانه تغییر نکرده است. صفر

(ت): انرژی جنبشی اولیه‌س سورتمه $T_i=(۱/۲)M_\circ v_\circ^۲$ است و انرژی جنبشی نهایی آن عبارت است از

$$T_f=\frac{۱}{۲}\left(M_\circ+\lambda L\right)\left(\frac{M_\circ v_\circ}{M_\circ+\lambda L}\right)^۲=M_\circ\frac{v_\circ^۲}{۲}\frac{M_\circ}{M_\circ+\lambda L}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{T_f-T_i}{T_i}=-\left(۱-\frac{M_\circ}{M_\circ+\lambda L}\right)=-\frac{\lambda L}{M_\circ+\lambda L} \qquad (۵-۱۴۹)$$

ت-۴ پیش از آنکه قطعه شروع به لغزیدن کند، انرژی پتانسیل آن $U_c=mgh$ است. در این موقع انرژی پتانسیل مکعب U_B و انرژی جنبشی آن صفر است. پس، انرژی کل، پیش از آغاز حرکت عبارت است از

$$E_i=U_c+U_B=mgh+U_B \quad,\quad T_c=T_B=\circ \qquad (۵-۱۵۰)$$

در لحظه‌ای که قطعه مکعب را ترک می‌کند انرژی پتانسیل و جنبشی آن عبارتند از

$$U_c'=mg\left(h-R\right),\quad T'=\frac{۱}{۲}mv^۲ \qquad (۵-۱۵۱)$$

انرژی پتانسیل مکعب تغییر نمی‌کند اما انرژی جنبشی آن عبارت است از

$$U_B'=U_B \quad,\quad T_B'=\frac{۱}{۲}MV^۲ \qquad (۵-۱۵۲)$$

و انرژی نهایی کل سامانه برابر است با

$$E_f=U'+T'=U_B+mg\left(h-R\right)+\frac{۱}{۲}mv^۲+\frac{۱}{۲}MV^۲ \qquad (۵-۱۵۳)$$

از پایستگی انرژی داریم

$$E_i=E_f \quad\Rightarrow\quad mgh+U_B=U_B+mg\left(h-R\right)+\frac{۱}{۲}mv^۲+\frac{۱}{۲}MV^۲$$

$$\Rightarrow\quad mgR=\frac{۱}{۲}mv^۲+\frac{۱}{۲}MV^۲ \qquad (۵-۱۵۴)$$

پیش از آنکه قطعه بلغزد، تکانه‌ی کل سامانه صفر است. به سامانه نیروی خارجی وارد نمی‌شود. بنابراین، تکانه پایسته است. تکانه در هنگام جدا شدن قطعه از مکعب هم باید صفر باشد

$$mv+MV=\circ \quad\Rightarrow\quad V=-\frac{mv}{M} \qquad (۵-۱۵۵)$$

که با جاگذاری در رابطه‌ی (۵-۱۵۴) سرعت‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند

$$v=\sqrt{\frac{M}{M+m}٢gR}\quad,\qquad V=-\sqrt{\frac{m^{٢}}{M\left(M+m\right)}٢gR}\qquad (٥-١٥٦)$$

ت-٥ (الف): کار نیروهای پایستار را W_c و کار نیروهای ناپایستار را W_{nc} بنامید. نیروی پایستار نیروی گرانش $\mathbf{F}_c=-mg\,\hat{\mathbf{j}}$ است و نیروی ناپایستار $\mathbf{F}_{nc}=-F_0\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ است. کار کل برابر است با

$$W=W_c+W_{nc}\qquad (٥-١٥٧)$$

$$W_c=\int\mathbf{F}_c\cdot d\mathbf{r}=-\left[U\left(\theta\right)-U\left(\circ\right)\right]=mgR\left(1-\cos\theta\right)$$ (این کار مستقل از مسیر است)

$$W_{nc}=\int\mathbf{F}_{nc}\cdot d\mathbf{r}\qquad ;\left(d\mathbf{r}=Rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

$$=-\int_0^{\theta}F_{\circ}R\sin\theta' d\theta'=F_0R\cos\Big|_{\circ}^{\theta}=F_{\circ}R\left(1-\cos\theta\right)\qquad (٥-١٥٨)$$

$$\Rightarrow\ W=W_c+W_{nc}=R\left(mg-F_0\right)\left(1-\cos\theta\right)\qquad (٥-١٥٩)$$

(ب): توجه کنید که $E\left(\theta=\cdot\right)=\cdot$ است چون $U\left(\theta=\circ\right)=\circ$ و جسم در این وضعیت در حال سکون است. تغییر در انرژی به خاطر کار نیروی ناپایستار است:

$$E\left(\theta\right)-E\left(\cdot\right)=W_{nc}=F_{\circ}R\left(\cos\theta-١\right)\qquad (٥-١٦٠)$$

پس، انرژی مکانیکی کل $E\left(\theta\right)=F_{\circ}R\left(\cos\theta-١\right)$ است.

(پ): تغییر در انرژی جنبشی با کار کل برابر است:

$$\frac{١}{٢}mv^{٢}-\underbrace{\frac{١}{٢}mv^{٢}(\theta=\circ)}_{=\circ}=W=R\left(mg-F_{\circ}\right)\left(١-\cos\theta\right)\qquad (٥-١٦١)$$

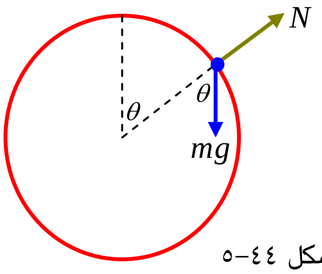
یا به طور هم‌ارز داریم: $E\left(\theta\right)=U\left(\theta\right)+\left(١/٢\right)mv^{٢}\left(\theta\right)$ چون $U\left(\theta=\circ\right)=\circ$ است، پس

$$U\left(\theta\right)=mgR\left(\cos\theta-١\right)\qquad (٥-١٦٢)$$

و در نتیجه

$$\frac{١}{٢}mv^{٢}=R\left(mg-F_{\circ}\right)\left(١-\cos\theta\right)\qquad (٥-١٦٣)$$

(ت): با استفاده از $F=ma$ در راستای شعاع کره (شکل ٤٤-٥ را ببینید) داریم



شکل ٤٤-٥

$$N-mg\cos\theta=-mv^{٢}/R\qquad (٣-١٦٤)$$

جرم وقتی سطح کره را ترک می‌کند که $N=\circ$ شود

$$\Rightarrow mg\cos\theta=mv^{٢}/R=٢\left(mg-F_{\circ}\right)\left(١-\cos\theta\right)$$

$$=٢mg-٢mg\cos\theta-٢F_{\circ}+٢F_{\circ}\cos\theta$$

$$\Rightarrow\left(٣mg-٢F_{\circ}\right)\cos\theta=٢\left(mg-F_{\circ}\right)\ \Rightarrow\ \cos\theta=\frac{٢\left(mg-F_{\circ}\right)}{٣mg-٢F_{\circ}}\qquad (٥-١٦٤)$$

ت-٦ سرعت جرم در بالاترین نقطه‌ی حلقه از پایستگی انرژی به دست می‌آید. انرژی کل در پایین‌ترین نقطه، E_b با انرژی کل

در بالاترین نقطه‌ی حلقه E_t برابر است. پس:

$$E_t = E_b \;\Rightarrow\; \frac{۱}{۲}mv^۲ + mg\,(۲R) + \frac{۱}{۲}k\,(۲R-\ell)^۲ = \frac{۱}{۲}k\,\ell^۲ \qquad (۵-۱۶۵)$$
$$\Rightarrow\; mv^۲ = ۴kR\ell - ۴kR^۲ - ۴mgR$$

حالت حدی در بالاترین نقطه‌ی حلقه هنگامی پدید می‌آید که نیروی عمودی سطح صفر شود. بنابراین، در این وضعیت شتاب مرکزگرای mv^2/R را گرانش و نیروی فنر فراهم می‌کنند. با انتخاب جهت مثبت به سوی پایین خواهیم داشت

$$\frac{mv^۲}{R} = mg + k\,(۲R-\ell) \qquad (۵-۱۶۶)$$

توجه کنید که اگر ℓ کمتر (یا بیشتر) از $۲R$ باشد، جرم m به وسیله‌ی فنر به سوی پایین کشیده می‌شود (یا به سوی بالا رانده می‌شود) و بنابراین علامت عبارت $(۲R-\ell)$ درست است. حال اگر مقدار $mv^۲$ را از رابطه‌ی (۱۶۵-۵) در رابطه‌ی (۱۶۶-۵) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{۴kR\ell - ۴kR^۲ - ۴mgR}{R} = mg + k\,(۲R-\ell)$$
$$\Rightarrow\; ۴k\ell - ۴kR - ۴mg = mg + k\,(۲R-\ell)$$
$$\Rightarrow\; ۵k\ell = ۵mg + ۶kR \quad\Rightarrow\quad \ell = \frac{mg}{k} + \frac{۶}{۵}R \qquad (۵-۱۶۷)$$

نکته: اگر دقیق باشیم باید بگوییم معادله‌ی شعاعی $F = ma$ به صورت

$$\frac{mv^۲}{R} = mg + k\,(۲R-\ell) + N \qquad (۵-۱۶۸)$$

است. پس، شرط $N \geq ۰$ با $mv^۲/R \geq mg + k\,(۲R-\ell)$ هم‌ارز می‌شود. علامت نامساوی ما را به نتیجه‌ی $\ell \geq (mg/k) + (۶R/۵)$ می‌رساند.

ت-۷ (الف): ساده‌ترین راه این است که شرط $\nabla\times\mathbf{F} = ۰$ را بیازماییم

$$\nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۵-۱۶۹)$$
$$= (ax + b - ax - b)\,\hat{\mathbf{i}} - (ay - ay)\,\hat{\mathbf{j}} + (az - az)\,\hat{\mathbf{k}} = ۰$$

پس، این نیرو پایستار است. تابع انرژی پتانسیل را می توان به دو صورت حساب کرد:

روش ۱- چون نیرو پایستار است می‌توان مسیر دلخواهی را برای به دست آوردن پتانسیل برگزید. ما مسیر $(۰,۰,۰)\to(x,۰,۰)\to(x,y,۰)\to(x,y,z)$ را انتخاب می‌کنیم. داریم

$$V\,(x,y,z) = -\int_۰^x F_x\big|_{y=۰,z=۰}\,dx - \int_۰^y F_y\big|_{x=x,z=۰}\,dy - \int_۰^z F_z\big|_{x=x,y=y}\,dz + C = -b\,\frac{x^۲}{۲} - cx - axyz - byz + C \qquad (۵-۱۷۰)$$

که در آن C مقدار ثابتی است. این روشی سریع و مسیری کوتاه برای یافتن تابع انرژی پتانسیل است.

روش ۲- داریم

$$F_x=-\partial V/\partial x \;\Rightarrow\; V=-\int F_x dx=-\int\left(ayz+bx+c\right)dx$$
$$\Rightarrow\; V(x,y,z)=-axyz-\frac{b}{۲}x^{۲}-cx+D\left(y,z\right) \qquad (۵-۱۷۱)$$

توجه کنید که $D\left(y,z\right)$ ثابت انتگرال گیری نسبت به x ، اما تابعی از y و z است. حالا از $V(x,y,z)$ نسبت به y مشتق بگیرید و آن را برابر $-F_y$ داده شده قرار دهید:

$$F_y=-\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}\Rightarrow\; axz+bz=-\left(-axz+\partial D\left(y,z\right)/\partial y\right)$$
$$\Rightarrow\; \frac{\partial D\left(y,z\right)}{\partial y}=-bz \;\Rightarrow\; D\left(y,z\right)=-bzy+E\left(z\right) \qquad (۵-۱۷۲)$$

$E\left(z\right)$ ثابت انتگرال‌گیری نسبت به y ، اما تابعی از z است. بنابراین، پتانسیل در رابطه‌ی (۱۷۱-۵) به صورت زیر در می‌آید

$$V(x,y,z)=-axyz-\frac{b}{۲}x^{۲}-cx+D\left(y,z\right)$$
$$\to\; V(x,y,z)=-axyz-\frac{b}{۲}x^{۲}-cx-bzy+E\left(z\right) \qquad (۵-۱۷۳)$$

اینگ یک بار دیگر گام بالا را تکرار می‌کنیم. یعنی از تابع پتانسیل رابطه‌ی (۱۷۳-۵) نسبت به z مستق می‌گیریم و آن را برابر $-F_z$ داده شده قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial V\left(x,y,z\right)}{\partial z}=-F_z \;\Rightarrow\; -axy-by+\frac{\partial E\left(z\right)}{\partial z}=-\left(axy+by\right)$$
$$\Rightarrow\; \frac{\partial E\left(z\right)}{\partial z}=۰ \;\Rightarrow\; E\left(z\right)=C$$
$$\Rightarrow\Rightarrow\; V\left(x,y,z\right)=-axyz-\frac{b}{۲}x^{۲}-cx-bzy+C \qquad (۵-۱۷۴)$$

که همان رابطه‌ی (۱۷۰-۵) است.

(ب):

$$\nabla\times\mathbf{F}=\left(\frac{۱}{z}-\frac{۱}{z}\right)\hat{\mathbf{i}}-\left(e^{-x}-e^{-x}\right)\hat{\mathbf{j}}+۰\hat{\mathbf{k}}=۰ \qquad (۵-۱۷۵)$$

پس این نیرو پایستار است. چون پتانسیل مستقل از مسیر است، برای یافتن پتانسیل، مانند حالت (الف) مسیر $\left(۰,۰,۱\right)\to\left(x,۰,۱\right)\to\left(x,y,۱\right)\to\left(x,y,z\right)$ را برای انتگرال‌گیری برمی‌گزینیم. خواهیم داشت

$$V\left(x,y,z\right)=-\int_۰^x F_x\Big|_{y=۰,z=۱}dx'-\int_۰^y F_y\Big|_{x=x,z=۱}dy'-\int_۱^z F_z\Big|_{x=x,y=y}dz'$$
$$=\left(۱-e^{-x}\right)-y\,\ell n\left(۱\right)-\left(z-۱\right)e^{-x}-y\,\ell n\left(z\right)+C$$
$$=-ze^{-x}-y\,\ell n(z)+C \qquad (۵-۱۷۶)$$

که در آن C مقدار ثابت است. این مثال را هم می‌توان همانند حالت (الف) با روش ۲ حل کرد که روش کلی‌تری است.

ت-۸ ارتفاع دست از سطح زمین را y بنامید (یعنی طول آن بخش از ریسمان که در هواست). $F(y)$ نیروی مورد نظر است که دست به ریسمان وارد می‌کند. به قسمت در حال حرکت ریسمان توجه کنید. نیروی برآیند وار به این بخش ریسمان عبارت

است از $F-(\sigma y)g$ (جهت مثبت را رو به بالا فرض کردیم). تکانه‌ی این بخش ریسمان $(\sigma y)\dot{y}$ است. از برابری نیروی برآیند وارد به بخش در حال حرکت ریسمان و آهنگ تغییر تکانه‌ی ریسمان به دست می‌آید

$$F-\sigma yg=\frac{d(\sigma y\dot{y})}{dt}=\sigma y\ddot{y}+\sigma\dot{y}^{۲} \qquad (۵-۱۷۷)$$

(**توجه**: اگر بخواهید کل ریسمان را به عنوان سامانه در نظر بگیرید، هنوز هم رابطه‌ی بالا برقرار خواهد بود؛ چون نیروی برآیند تغییر نمی‌کند، وزن اضافی ریسمان که در روی زمین قرار دارد با نیروی عمودی سطح خنثی می‌شود. تکانه هم تغییر نمی‌کند چون فقط تکانه‌ی قسمت متحرک ریسمان غیر صفر است.)اما $\ddot{y}=۰$ و $\dot{y}=v$ اند. بنابراین،

$$F=\sigma yg+\sigma v^{۲} \qquad (۵-۱۷۸)$$

کار دست برابر است با انتگرال این نیرو از $\ddot{y}=۰$ تا $y=L$ ، چون v ثابت است. پس،

$$W=\int_{۰}^{L}\left(\sigma yg+\sigma v^{۲}\right)dy=\frac{\sigma L^{۲}g}{۲}+\sigma Lv^{۲} \qquad (۵-۱۷۹)$$

نکته: انرژی پتانسیل نهایی ریسمان $(\sigma L)g(L/۲)$ است؛ چون مرکزجرم به اندازه‌ی $L/۲$ از سطح زمین بلند شده است. این مقدار با جمله‌ی اول رابطی (۱۷۹-۵) برابر است. انرژی جنبشی ریسمان $(\sigma Lv^{۲}/۲)$ است که نصف جمله‌ی دوم در سمت راست رابطه‌ی (۱۷۹-۵) است. انرژی گم شده $(\sigma Lv^{۲}/۲)$ به گرما تبدیل شده است. توان انتقالی به ریسمان از سوی دست عبارت است از

$$P=F\cdot v=\left(\sigma yg+\sigma v^{2}\right)v=\sigma ygv+\sigma v^{3} \qquad (۵-۱۸۰)$$

انرژی مکانیکی سامانه مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی است:

$$E=U+T=(\sigma y)gy+\frac{۱}{۲}(\sigma y)v^{۲} \qquad (۵-۱۸۱)$$

و آهنگ تغییر آن برابر است با

$$\frac{dE}{dt}=۲\sigma gy\dot{y}+\left(\frac{\sigma v^{۲}}{۲}\right)\dot{y}=۲\sigma gyv+\frac{۱}{۲}\sigma v^{۳} \qquad (۵-۱۸۱)$$