فصل ۴

حرکت در یک و در دو بعد

۴-۱ حل چند معادله ی دیفرانسیل

در این فصل وضعیت هایی را بررسی می‌کنیم که نیرو به صورت تابعی از زمان ، مکان ویا سرعت داده می‌شود و کار ما حل معادله‌ی دیفرانسیل $F=ma\equiv m\ddot{x}$ و یافتن مکان $x(t)$ است. برای این کار نخست برخی شیوه‌های حل معادله‌های ساده‌ی دیفرانسیل را خواهیم پروراند. اگر یاد بگیریم که چگونه از این شیوه‌ها استفاده کنیم، فهمیدن وضعیت‌های فیزیکی سامانه‌ها بسیاری آسان می‌شود .

نیرو می‌تواند افزون بر x، t و $v\equiv\dot{x}$ به توان‌های بالاتر x هم بستگی داشته باشد. این وضعیت‌ها خیلی نیستند و بنابراین به آنها نخواهیم پرداخت. پس، معادله‌ی دیفرانسیلی را که می‌خواهیم حل کنیم همانا $F=ma$ است (در این جا خود را به یک بعد محدود می‌کنم .) بگذارید آن را به صورت زیر بنویسیم

$$m\ddot{x}=F(t,x,v) \tag{٤-١}$$

در حالت عمومی نمی‌توان این معادله را دقیق حل کرد و $x(t)$ را یافت. اما در بسیاری از مسئله‌ها که با آنها سروکار خواهیم داشت می‌توان آن را حل کرد. مسئله‌هایی که ما با آنها برخورد خواهیم کرد در یکی از سه گروه خاص قرار می‌گیرند: F فقط تابعی از t ، یا x و یا v باشد. در هر یک از این سه حالت خاص باید از شرایط اولیه‌ی داده شده، $x_\circ=x(t_\circ)$ و $v_\circ=v(t_\circ)$ ، استفاده کرد تا بتوان پاسخ نهایی را به دست آورد. این شرطهای اولیه در حد انتگرال‌هایی نمایان می‌شوند که در زیر به آنها می‌پردازیم. (نیاز به دو شرط اولیه تصادفی نیست. هر معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دو، دو ثابت انتگرال‌گیری دارد).

نکته: اگر بخواهید، می‌توانید از چند صفحه‌ای که در پی می‌آید بگذرید و بعدا به آن برگردید. آنها را برای کامل شدن متن در این جا می‌گنجانم. تلاش نکنید که شکل‌های متفاوت پاسخ معادله را به یاد بسپارید. همه‌ی قصه را می‌توان در یک جمله کوتاه کرد: می‌خواهیم $\ddot{x}$ رابه صورت dv/dt و یا به صورت $v\,dv/dx$ بنویسیم و سپس متغیرها را از هم جدا کنیم تا بتوانیم انتگرال بگیریم (رابطه ٥-٤ را ببینید) همین! نخست این حالت‌های خاص را توضیح می‌دهم و سپس به چند مثال می‌پردازم.

- F فقط تابعی از t است: $F=F(t)$

چون $a=d^2x/dt^2$ است ، کافی است دو بار از $F=ma$ انتگرال بگیریم تا $x(t)$ را به دست بیاوریم. بگذارید این کار را گام به گام انجام دهیم تا روش عمومی را بیاموزیم. نخست $F=ma$ را به صورت زیر بنویسید

$$m\frac{dv}{dt}=F(t) \tag{٤-٢}$$

و متغیرها را از هم جدا کنید (دو طرف را در dt ضرب کنید) و سپس از دو طرف انتگرال بگیرید.

$$m\int_{v_\circ}^{v(t)}dv'=\int_{t_\circ}^{t}F(t')dt' \tag{٤-٣}$$

ما علامت متغیر انتگرال‌گیری را با پرایم نشان دادیم تا با حدهای انتگرال‌گیری اشتباه نشود. در عمل این ریزه کاری به‌جا معمولا فراموش می‌شود. از رابطه‌ی (٤-٣) v برحسب زمان، $v(t)$ ، به دست می‌آید. پس از یافتن $v(t)$ می‌توان آن را به صورت $dx/dt\equiv v(t)$ نوشت و باز هم متغیرها را از هم جدا کرد و دوباره انتگرال گرفت تا $x(t)$ را به دست بیاید:

$$\int_{x_\circ}^{x(t)}dx'=\int_{t_\circ}^{t}v(x')dt' \tag{٤-٤}$$

این فرایندِ دو بار انتگرال‌گیری شاید پیچیده به نظر آید. این چنین هم است، اما سودمندی آن در وضعیت زیر روشن می‌شود.

- F فقط تابعی از x است: $F=F(x)$

در این حالت از

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx}=v\frac{dv}{dx} \tag{٤-٥}$$

استفاده کنید تا $F=ma$ را به صورت زیر بنویسید

$$mv\frac{dv}{dx}=F(x) \tag{٤-٦}$$

اینک متغیرها از هم جدا می‌شوند. از دو طرف انتگرال بگیرید. به دست می‌آید

$$m\int_{v_\circ}^{v(t)}v'dv'=\int_{x_\circ}^{x}F(x')dx' \tag{٤-٧}$$

در سمت چپ رابطه‌ی بالا $v^2(x)$ ظاهر می‌شود. اگر از آن جذر بگیریم سرعت $v(x)$ برحسب x به دست می‌آید . پس از یافتن $v(x)$، با استفاده از $v(x)\equiv dx/dt$ جداسازی متغیرها ممکن می‌شود و خواهیم داشت

$$\int_{x_\circ}^{x(t)}\frac{dx'}{v(x')}=\int_{t_\circ}^{t}dt' \tag{٤-٨}$$

از این رابطه t برحسب x به دست می‌آید. می‌توان (در بنیاد) آن را وارون کرد و x را برحسب t به دست آورد. ناخوشایندی در این است که شاید نتوان همیشه از سمت چپ رابطه‌ی (٤-٨) انتگرال گرفت و حتی اگر توانستیم از عهده‌ی این کار برآییم ، شاید نتوانیم $t(x)$ را وارون کنیم و $x(t)$ را به دست آوریم.

- F فقط تابعی از v است: $F=F(v)$

$F=ma$ را به صورت زیر بنویسید

$$m\frac{dv}{dt}=F(v) \tag{٤-٩}$$

متغیرها را جدا کنید و از دو طرف انتگرال بگیرید تا به دست آورید

$$m\int_{v_0}^{v(t)}\frac{dv'}{F(v')}=\int_{t_0}^{t}dt' \tag{٤-١٠}$$

این رابطه، t را برحسب تابعی از v به دست می‌دهد و (در بنیاد) می‌توان آن را وارون و $v(t)$ را برحسب t به دست آورد. با انتگرال گرفتن از $dx/dt=v(t)$ آنگاه $x(t)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\int_{x_0}^{x(t)}dx'=\int_{t_0}^{t}v(t')dt' \tag{٤-١١}$$

توجه: در حالت $F=F(v)$ اگر بخواهید v را برحسب تابعی از x حساب کنید، باید a را به صورت (dv/dx) بنویسید و از

$$m\int_{v_\circ}^{v(x)}\frac{v'dv'}{F(v')}=\int_{x_\circ}^{x}dx' \tag{٤-١٢}$$

انتگرال بگیرید. سپس، اگر خواستید، با استفاده از رابطه‌ی (٤-٨) می‌توانید $x(t)$ را حساب کنید.

ما شرط‌های اولیه را در حدهای انتگرال‌گیری اعمال کردیم. می‌توانستیم انتگرال‌ها را بدون حد حساب کنیم و ثابت‌های انتگرال‌گیری را با شرایط اولیه به دست آوریم.

همان‌گونه که در بالا گفتم، نیازی نیست که سه فرایند بالا را به یاد بسپارید؛ چون این ها تغییر می‌کنند؛ بستگی به این دارد که چه چیزی داده شده‌است و چه چیزی را باید حساب کرد. آنچه را که باید به یاد داشت این است که $\ddot{x}$ را می‌توان به صورت dv/dt و یا $v\,dv/dx$ نوشت. یکی از این دو کارگر خواهد بود (آن یکی که به ظاهر شدن دو متغیر از سه متغیر t ، x و v در معادله‌ی دیفرانسیل می‌انجامد). از این جا به بعد کافی است متغیرها را از هم جدا کنید و هر چند بار که خواستید انتگرال بگیرید.

مثال ۴-۱ (نیروی گرانش): ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر نیروی ثابت $F=-mg$ است. ذره در ارتفاع h از حالت سکون رها می‌شود. در این مثال، نیرو ثابت است و در هر سه گروه بالا می‌گنجد. پس باید بتوان $y(t)$ را به دو روش زیر حساب کرد

(الف): $y(t)$ را با نوشتن a به صورت dv/dt بیابید.

(ب) : $y(t)$ را با نوشتن a به صورت $v\,dv/dx$ بیابید.

حل: **(الف)** از $F=ma$ داریم $dv/dt=-g$. اگر دو طرف را در dt ضرب وسپس انتگرال بگیریم خواهیم داشت $v=-gt+A$. در این جا A ثابت انتگرال‌گیری است (این مثال را با افزودن ثابت انتگرال گیری و سپس محاسبه‌ی آن از شرایط اولیه انجام می‌دهیم. در مثال بعدی ، شرایط اولیه را در حدهای انتگرال‌گیری خواهیم گنجاند). از شرط اولیه‌ی $v(\circ)=\circ$ مقدار $A=\circ$ به دست می‌آید. بنابراین، داریم $dy/dt=-g\,t$. دو طرف این رابطه را در dt ضرب کنید و انتگرال بگیرید. خواهیم داشت $y=B-g\,t^{۲}/۲$. از شرط اولیه $y(\circ)=h$ مقدار $B=h$ به دست می‌آید. پس

$$y=h-\frac{۱}{۲}gt^{۲} \tag{٤-١٣}$$

(ب): این بار از $F=ma$ داریم $v\,dv/dy=-g$. جداسازی متغیر ها و انتگرال‌گیری به $v^{۲}/۲=-gy+C$ می‌انجامد. از شرط اولیه‌ی $v(h)=\circ$ داریم $v^{۲}/۲=-gy+gh$. پس $v\equiv dy/dt=-\sqrt{۲g(h-y)}$. ریشه منفی پذیرفتنی است زیرا ذره سقوط می‌کند. با جداسازی متغیرها به دست می‌آید:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{h-y}}=-\sqrt{۲g}\int dt \tag{٤-١٤}$$

که با استفاده از شرط اولیه‌ی $y(\circ)=h$ خواهیم داشت $۲\sqrt{h-y}=\sqrt{۲g}t$ بنابراین، y عبارت است از $y=h-gt^{۲}/۲$ که همان پاسخ بخش (الف) است.

مثال ۴-۲ (فروافتادن توپ): توپی از ارتفاع h و از حالت سکون رها می‌شود. اگر نیروی پسار هوا (یعنی نیروی مقاومت هوا که نیروی بازدارنده است و در خلاف جهت حرکت توپ به آن وارد می‌شود) به صورت $F_d=-m\alpha v$ باشد، سرعت و ارتفاع توپ را به صورت تابعی از زمان بیابید.

حل: جهت مثبت y را رو به بالا فرض کنید. نیروی وارد به توپ عبارت است از

$$F=-mg-m\alpha v \tag{٤-١٥}$$

توجه کنید که چون توپ فرو می‌افتد در اینجا v منفی است. بنابراین، نیروی پسار رو به بالاست. اگر نیرو را به صورت $F=m\,dv/dt$ بنویسیم و متغیرها را جدا کنیم خواهیم داشت

$$\int_{\circ}^{v(t)}\frac{dv'}{g+\alpha v'}=-\int_{\circ}^{t}dt' \tag{٤-١٦}$$

نتیجه‌ی انتگرال‌گیری عبارت است از $\ell n(1+\alpha v/g)=-\alpha t$. آن را به شکل نمایی بنویسید، داریم

$$v(t) = -\frac{g}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}) \qquad (٤-١٧)$$

با توجه به این که $dy/dt \equiv v(t)$ است، دوباره متغیرها را می‌توان جدا کرد و انتگرال گرفت. خواهیم داشت

$$\int_h^{y(t)} dy' = -\frac{g}{\alpha}\int_\circ^t (1-e^{-\alpha t'})dt' \qquad (٤-١٨)$$

پس از انتگرال‌گیری به دست می‌آید:

$$y(t) = h - \frac{g}{\alpha}(t - \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})) \qquad (٤-١٩)$$

دو نکته:

۱. بگذارید برخی حالت‌های حدی را بررسی کنیم. اگر t خیلی کوچک باشد (دقیق‌تر: اگر $\alpha t \ll ۱$ باشد) می‌توان از بسط $e^{-x} \approx ۱ - x + x^۲/۲ ....$ استفاده و سرعت و مسافت را با تقریب حساب کرد.

در تقریب مرتبه‌ی اول، می‌توان از رابطه‌ی (٤-١٧) نشان داد که $v(t) \approx -gt$. این نتیجه پذیرفتنی است، چون نیروی پسار در آغاز حرکت ناچیز و قابل چشم‌پوشی است و بنابراین، توپ اساسا سقوط آزاد می‌کند. از رابطه‌ی (٤-١٩) هم خواهیم داشت $y(t) \approx h - gt^۲/۲$ و این مقداری است که انتظارش را داریم. هم‌چنین می‌توان حد t های بزرگ را بررسی کرد. در این حد $e^{-\alpha t}$ به صفر می‌گراید و از رابطه‌ی (٤-١٧) خواهیم داشت $v(t) \approx -g/\alpha$ (این "سرعت حد" است و اندازه‌ی آن قابل پذیرش است؛ چون سرعتی است که به ازای آن ، نیروی کل، $-mg - m\alpha v$، صفرمی‌شود.) از رابطه‌ی (٤-١٩) داریم $y(t) \approx h - (g/\alpha)t + g/\alpha^۲$. به نکته‌ی جالبی توجه کنید: برای t بزرگ، $g/\alpha^۲$ مسافتی است که توپ در مقایسه با توپ دیگری که حرکتش را با سرعت حد آغاز می‌کند، عقب می‌ماند.

۲. شاید گمان کنید که سرعت توپ در رابطه‌ی (٤-١٧) به جرم m وابسته نیست ، چون m در آن نمایان نمی‌شود. با وجود این، m در α نهفته است. در واقع، α افزون بر m به سطح مقطع توپ، A، هم بستگی دارد. این بستگی به صورت $\alpha \propto A/m$ است. سطح مقطع، A، دو توپ هم‌اندازه که یکی فلزی و دیگری پلاستیکی است یکی است، اما جرم‌شان و در نتیجه α آنها متفاوت است و آهنگ افتادنشان هم فرق دارد.

در محیط‌های رقیق، مانند هوا، α، برای اجسام سنگین کوچک است و بنابراین اثرهای پسار در زمان های کوتاه محسوس نیست (اگر جمله‌ی بعدی بسط v را در نظر بگیریم خواهیم داشت $v(t) \approx -gt + (۱/۲)\alpha gt^۲$) اجسام سنگین به تقریب با آهنگ یکسان فرو می‌افتند. اما، اگر هوا خیلی غلیظ باشد، اجسام سنگین مختلف با آهنگ‌های متفاوت سقوط می‌کنند. شاید به خاطر این رفتارها بود که گالیله اندکی دیرتر به نتیجه‌ی خود دست یافت.

۴-۲ حرکت پرتابی

در بسیاری از کتاب‌های فیزیک پایه بخشی به حرکت پرتابی اختصاص داده می‌شود. در این کتاب‌ها همواره از اثر مقاومت هوا (پس کشی هوا یا پسار) چشم‌پوشی می‌شود. در بسیاری از مسئله‌ها این رویکردی به جاست. در مسئله‌های دیگر، پسار هوا اهمیت می‌یابد و باید بدانیم که چگونه آن را به حساب آوریم. به طور کلی و جدا از این که نیروی پسار تا چه اندازه در مسئله اهمیت دارد، باید روشی را بیابیم تا بتوانیم درجه‌ی اهمیت آن را تخمین بزنیم. اثر نیروی پسار جنبه‌های متفاوت دارد: در بسیاری از حالت‌ها، یک نیروی بازدارنده است که با سرعت یا توان‌هایی از سرعت جسم متناسب است. این را هر کسی که دوچرخه سوار شده باشد تجربه کرده‌است. وضعیت هایی وجود دارد که این چنین نیست: نیروی پسار هوا روی بال هواپیما

مولفه‌ی بزرگی دارد که جهتش غیر از جهت حرکت هواپیما ست و به برخاستن و به پرواز درآمدن آن می‌انجامد. بیشتر پرتابه‌ها در هوا و در شاره‌ها حرکت می‌کنند و بنابراین، هنگامی که از نیروی پسار سخن می‌گوییم خود را فقط به هوا مقید نخواهیم کرد.

پیش از آنکه به ویژگی‌های نیروی پسار بپردازم و اثر آن را بر روی پرتابه‌ها بررسی کنم به حرکت پرتابی در خلاء می‌پردازیم که ساده‌ترین حرکت در دو بعد است.

توپی را تصور کنید که به هوا پرتاب می‌شود (و نه لزوما عمودی). فرض کنید x و y به ترتیب مختصات افقی و عمودی مکان توپ‌اند. در راستای محور x ها نیرو صفر است، $F_x = ۰$ و در راستای محور y به پرتابه نیروی گرانش $F_y = -mg$ وارد می‌شود. اگر عمومی‌تر بگوییم ، معادله‌ی حرکت توپ، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ، عبارت است از

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} \tag{۴-۲۰}$$

که در آن $\mathbf{g}$ شتابی است که گرانش زمین به جسم تحمیل می‌کند. $\mathbf{g}$ برداری است با اندازه ثابت $g = ۹{,}۸۱\,\mathrm{m/s^۲}$. جهت $\mathbf{g}$ قائم و رو به پایین است (در اینجا ما از اثر کوچکی که چرخش زمین بر روی $\mathbf{g}$ دارد، چشم پوشیدیم ؛ در جای دیگری به آن خواهیم پرداخت. از تغییرات $\mathbf{g}$ نسبت به ارتفاع چشم‌پوشی کردیم). اگر محور y ها را محور عمودی و رو به بالا انتخاب کنیم آنگاه $\mathbf{g} = -g\,\hat{\mathbf{j}}$ و رابطه‌ی (۲۰-۴) به صورت زیر درمی‌آید.

$$\ddot{x} = ۰ \quad , \quad \ddot{y} = -g \quad , \quad \ddot{z} = ۰ \tag{۴-۲۱}$$

اگر محورهای x و y را چنان انتخاب بکنیم که پرتابه حرکت خود را در صفحه‌ی $x-y$ آغاز کند، همواره و برای همیشه حرکت در صفحه‌ی $x-y$ باقی می‌ماند. پس، حرکت دوبعدی است و در رابطه‌ی (۲۱-۴) نیازی به معادله‌ی $\ddot{z} = ۰$ نداریم. $\ddot{x} = ۰$ و $\ddot{y} = -g$ برای توصیف حرکت پرتابه بسنده اند.

توجه کنید که این دو معادله مستقل از یکدیگرند؛ یعنی در معادله‌ی مربوط به $\ddot{x}$ از y خبری نیست و در معادله‌ی مربوط به $\ddot{y}$ هم x وجود ندارد. بنابراین ، حرکت در راستاهای x و y کاملا از یکدیگر مستقل‌اند. آزمایش کلاسیک زیر این استقلال را نشان می‌دهد: گلوله‌ای را افقی شلیک کنید (یا تصور کنید که افقی شلیک شده است). هم‌زمان، گلوله‌ی دیگری را از همان ارتفاع تفنگ رها کنید. کدام گلوله زودتر با زمین برخورد می‌کند؟ (از پسار هوا و خمیدگی زمین چشم‌پوشی کنید.) پاسخ این است که هر دو گلوله هم‌زمان به زمین می‌رسند، زیرا اثر گرانش در راستای حرکت y برای هر دو گلوله یکسان و مستقل از این است که در امتداد محور x چه روی می‌دهد.

اگر مکان و سرعت اولیه (X, Y) و (V_x, V_y) باشند، به آسانی می‌توانیم از معادله‌های حرکت، رابطه‌های (۲۱-۴)، انتگرال بگیریم. خواهیم داشت

$$\dot{x}(t) = V_x \quad , \quad \dot{y}(t) = V_y - gt \tag{۴-۲۲}$$

اگر یک بار دیگر از رابطه های (۲۲-۴) انتگرال بگیریم ، خواهیم داشت

$$x(t) = X + V_x t \quad , \quad y(t) = Y + V_y t - \frac{۱}{۲} g t^۲ \tag{۴-۲۳}$$

معادله‌ی (۲۲-۴) برای سرعت‌ها و معادله‌ی (۲۳-۴) برای مکان‌ها همه‌ی آن چیزی است که برای حل مسئله‌های پرتابی نیاز داریم.

به مسئله با جزئیات بیشتری بنگریم: فرض کنید ذره‌ای به جرم m از مبدأ مختصات با سرعت اولیه‌ی $v_\circ$ در جهتی که با افق زاویه‌ی α می‌سازد پرتاب شده است. چون تنها شتاب موجود در مسئله در راستای محور y و برابر با $a_y=-g$ است، بنابراین در راستای محور x ها ذره شتاب ندارد: $a_x=\circ$. پس، معادله‌ی حرکت در راستای محور y ها عبارت است از $m\ddot{y}=-mg$ و در راستای محور x ها داریم $m\ddot{x}=\circ$. درواقع، مسئله را می‌توان دو حرکت یک‌بعدی همزمان پنداشت: یک حرکت شتاب‌دار در راستای محور y ها و دیگری، حرکت در راستای محور x ها که بدون شتاب انجام می‌گیرد و در نتیجه، حرکتی یکنواخت است. مؤلفه‌های بردار سرعت اولیه‌ی $\mathbf{v}_\circ$ در راستای این دو محور عبارت‌اند از

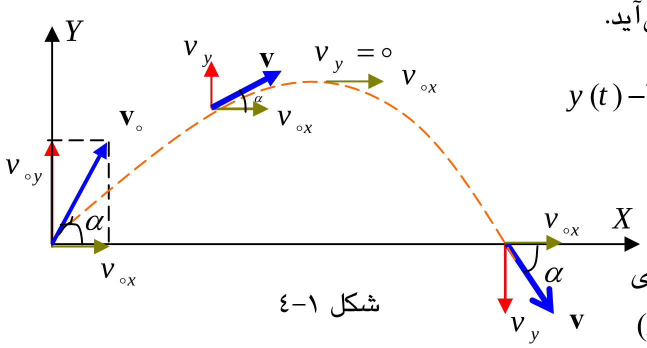
$$V_y\equiv v_{\circ y}=v_\circ\sin\alpha \qquad , \qquad V_x\equiv v_{\circ x}=v_\circ\cos\alpha=\text{ثابت} \qquad (۲۴-٤)$$

که با جاگذاری در رابطه‌های (۲۲-٤) و (۲۳-٤) خواهیم داشت

$$v_y(t)=\dot{y}=-gt+v_\circ\sin\alpha \qquad , \qquad v_x(t)=\dot{x}=v_\circ\cos\alpha=\text{ثابت} \qquad (۲۵-٤)$$

$$y(t)=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+v_\circ t\sin\alpha+Y \qquad , \qquad x(t)=v_\circ t\cos\alpha+X \qquad (۲٦-٤)$$

معادله‌های (۲۵-٤) و (۲٦-٤) با رابطه‌های (۲۲-٤) و (۲۳-٤) هم‌ارزند. از رابطه‌های (۲۵-٤) می‌بینیم که v_x با زمان تغییر نمی‌کند و همواره با مؤلفه‌ی x سرعت اولیه برابر است؛ چون در راستای محور x ها، شتاب مؤلفه ندارد. اگر زمان t را بین دو رابطه‌ی (٥-۲٦) حذف کنیم، معادله‌ی مسیر حرکت بدست می‌آید.



شکل ۱-٤

$$y(t)-Y=-\left(\frac{g}{۲v_\circ^{۲}\cos^{۲}\alpha}\right)[x(t)-X]^{۲}+\tan\alpha[x(t)-X] \qquad (۲۷-٤)$$

که برای زاویه‌ی $۰<\alpha<\pi/۲$ درست است. رابطه‌ی (۲۷-٤) معادله‌ی یک سهمی است (شکل عمومی معادله‌ی سهمی به صورت $y=ax-bx^{۲}$ است.) که از نقطه‌ی (X,Y) می‌گذرد و نشان می‌دهد که مسیر هر پرتابه‌ای یک سهمی است. در شکل (۱-٤) این مسیر برای گزینه‌ی $(X,Y)=(۰,۰)$ نشان داده شده است. مسیر پرتابه با دانستن زاویه‌ی پرتاب α و سرعت اولیه‌ی پرتاب، $\mathbf{v}_\circ$، **کاملاً** شناخته شده است. از رابطه‌ی (۲۵-٤) اندازه‌ی سرعت در هر زمان بدست می‌آید: $v=\sqrt{v_x^{۲}+v_y^{۲}}$ و در هر نقطه‌ی روی مسیر جهت بردار سرعت عبارت است از $\tan\beta=v_y/v_x$. اگر مکان اولیه‌ی پرتابه را در $(X,Y)=(\circ,\circ)$ فرض کنیم آنگاه در پایان پرواز، پرتابه دوباره به $y=\circ$ می‌رسد و با قرار دادن $y=\circ$ در رابطه‌ی (۲٦-٤) زمان پرواز، $t_۱$، را می‌توان حساب کرد. خواهیم داشت

$$y=\circ=-\frac{۱}{۲}gt_۱^{۲}+v_\circ t_۱\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad t_۱=\frac{۲v_\circ}{g}\sin\alpha \qquad (۲۸-٤)$$

نقطه‌ی اوج، یا بیشینه ارتفاع پرتابه ، h، را باتوجه به اینکه در نقطه‌ی اوج، سرعت عمودی صفر است می‌توان حساب کرد. از رابطه‌ی (٤٥-۲٥) داریم: $v_y=\dot{y}=\circ=-gt_\circ+v_\circ\sin\alpha$ که در آن $t_\circ$ زمان لازم برای رسیدن پرتابه به نقطه‌ی اوج است:

$$t_\circ=v_\circ\sin\alpha/g \qquad (۲۹-٤)$$

اگر این زمان را در معادله‌ی ارتفاع، y ، رابطه‌ی (۲٦-٤)، قرار دهیم خواهیم داشت:

$$y\left(t_0\right) \equiv \left(v_0 \sin\alpha\right)\frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \qquad (٤-٣٠)$$

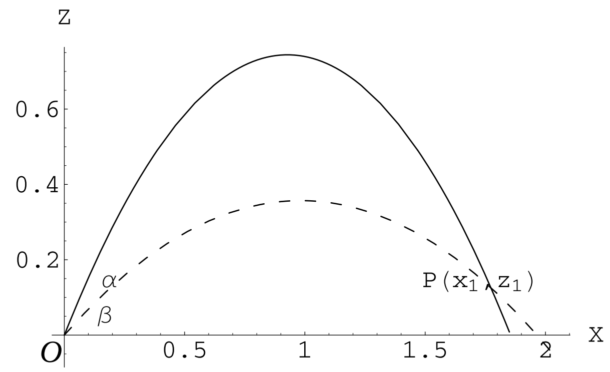
بُرد افقی پرتابه را نیز می‌توان از رابطه‌ی $x = v_0 t \cos\alpha$ حساب کرد. زمان پرواز (یعنی زمان لازم برای بازگشت پرتابه به ارتفاعی که از آن ارتفاع پرتاب شده است (در این جا $y = 0$) عبارت است از t_1. اگر t_1 را در $x = v_0 t \cos\alpha$ قرار دهیم، مسافت افقی پیموده شده (برد R) را به دست می‌آوریم:

$$x = v_0 t \cos\alpha = x\left(t_1\right) \equiv R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \qquad (٤-٣١)$$

بیشینه‌ی R به ازای $\sin 2\alpha = 1$ یا $\alpha = \pi/4$ به دست می‌آید و برابر است با $R_{\max} = v^2/g$.

توجه کنید که واژه‌های برد و اوج فقط برای مسیر سهمی متقارن تعریف شده است. در مثال ۳-٤ این نکته روشن شده است.

مثال۳- ۴: از تفنگی دو گلوله شکلیک می‌شود. سرعت اولیه‌ی هر دو گلوله v_0 است. گلوله‌ی نخست با زاویه‌ی α و گلوله‌ی دوم با زاویه‌ی کوچک‌تر β شلیک می‌شوند. فاصله‌ی زمانی بین دو شلیک چقدر باید باشد تا این‌که دو گلوله در هوا باهم برخورد کنند؟



(شکل۲-٤)

حل: نقطه‌ی برخورد را P بنامید و فرض کنید مختصات آن (x_1, z_1)است. از رابطه $x = v_0 t \cos\alpha$ می‌توان زمان پرواز هریک از گلوله‌ها از نقطه‌ی O تا P را حساب کرد. داریم:

$$t_\alpha = \frac{x_1}{v_0 \cos\alpha} \quad , \quad t_\beta = \frac{x_1}{v_0 \cos\beta} \qquad (٤-٣٢)$$

بازه‌ی زمانی Δt بین دو شلیک عبارت است از:

$$\Delta t = t_\alpha - t_\beta = \frac{x_1}{v_0}\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\cos\alpha\,\cos\beta} \qquad (٤-٣٣)$$

برای حذف x_1 باید از معادله‌ی مسیر، رابطه‌ی(۲۷-٤)، استفاده کنیم. چون y_1 هر دو گلوله یکی است ، پس داریم

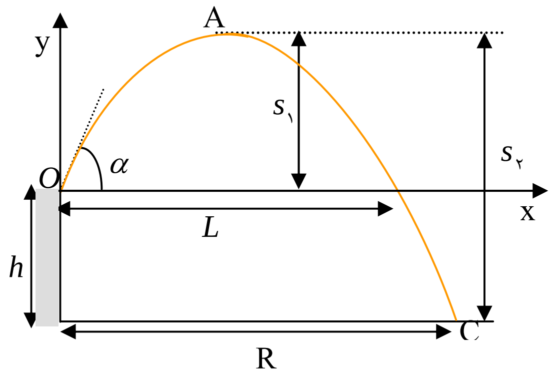
$$x_1 \tan\alpha - \frac{g\,x_1^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = x_1 \tan\beta - \frac{g\,x_1^2}{2v_0^2\cos^2\beta} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2v_0^2}{g}\frac{(\cos^2\alpha\cos^2\beta)(\tan\alpha - \tan\beta)}{\cos^2\beta - \cos^2\alpha} \qquad (٤-٣٤)$$

که اگر در رابطه‌ی (۳۲-٤) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g}\frac{(\cos\alpha\cos\beta)(\tan\alpha - \tan\beta)}{\cos\beta + \cos\alpha} = \frac{2v_0}{g}\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta - \cos\alpha} \qquad (٤-٣٥)$$

مثال ۴-۴ گلوله‌ای از بالای صخره‌ای به ارتفاع h شلیک می‌شود. سرعت اولیه‌ی گلوله v_0 و زاویه‌ی پرتاب آن α است (شکل ۳-٤) . گلوله در چه فاصله‌ای از پای صخره با زمین برخورد می‌کند؟

حل: مبداء مختصات را نقطه‌ی شلیک گلوله انتخاب کنید. اگر t_0 زمان پرواز کل گلوله باشد، می‌دانیم که فاصله‌ی R برابر است



شکل ۳-٤

با $R=v_\circ t_\circ \cos\alpha$. اما داریم $t_\circ = t_1 + t_2$ که در آن t_1 زمان لازم برای رسیدن گلوله از نقطه‌ی O به نقطه‌ی A و t_2 زمانی است که گلوله از نقطه‌ی A به نقطه‌ی C می رسد. ارتفاع نقطه‌ی اوج، A، از سطح زمین را s_2 بنامید. می توانیم بنویسیم

$$s_2 = \frac{1}{2} g\, t_2^2 = s_1 + h = \frac{1}{2}\frac{v_\circ^2 \sin^2\alpha}{g} + h \qquad (٤-٣٦)$$

و از اینجا داریم:

$$t_2 = \frac{1}{g}\sqrt{v_\circ^2 \sin^2\alpha + 2gh} \qquad (٤-٣٧)$$

پس، باتوجه به این که $t_1 = v_\circ \sin\alpha / g$ ، خواهیم داشت:

$$R = \frac{v_\circ \cos\alpha}{g}\left[v_\circ \sin\alpha + \left(v_\circ^2 \sin^2\alpha + 2gh\right)^{1/2}\right] \qquad (٤-٣٨)$$

مثال ۵-۴ (الف): توپی با سرعت اولیه‌ی V از سطح زمین پرتاب می‌شود. زاویه‌ی پرتاب چقدر باید باشد تا در هنگام برخورد با زمین، توپ بیشترین فاصله‌ی افقی را پیموده باشد؟ زمین را تخت فرض کنید.

(ب): اگر شیب زمین رو به بالا و برابر زاویه‌ی β (یا شیب رو به پایین، اگر β منفی باشد) باشد، زاویه‌ی پرتاب بهینه چیست؟

حل: **(الف)** زاویه‌ی پرتاب را θ بنامید. سرعت افقی پرتابه همواره $V_x = V\cos\theta$ است. سرعت اولیه‌ی عمودی برابر است با $V_y = V\sin\theta$. اولین چیزی را که باید بیابیم زمانی است که پرتابه در هوا سپری می‌کند. آن را t بنامید. می‌دانیم که سرعت عمودی در زمان $t/2$ به صفر می‌رسد (یعنی $\dot{y}(t/2)=0$) چون می‌کند؛ چون در نقطه‌ی اوج، حرکت پرتابه افقی است. بنابراین، از رابطه‌ی (٤-٢٢) داریم $V_y = g(t/2)$ و در نتیجه $t = 2V_y/g$. (**توجه** : می‌توانستیم زمان پرواز را از رابطه‌ی (٤-٢٣) هم به دست آوریم که می‌گوید وقتی توپ به زمین می‌رسد، $V_y t = gt^2/2$ است. در بخش (ب) ناگزیریم از این روش استفاده کنیم؛ چون مسیر توپ متقارن نیست) . مسافت افقی پیموده شده را رابطه‌ی (٤-٢٢) به ما می‌دهد و داریم $d = V_x t$. اگر به جای t مقدارش، $t = 2V_y/g$ ، را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$d = \frac{2V_x V_y}{g} = \frac{V^2(2\sin\theta\cos\theta)}{g} = \frac{V^2 \sin 2\theta}{g} \qquad (٤-٣٩)$$

بیشینه‌ی $\sin 2\theta$ در $\theta = \pi/4$ است. بنابراین، بیشینه مسافت $d_{\max} = V^2/g$ است.

نکته: می‌توان نشان داد که بیشینه ارتفاع به ازای $\theta = \pi/4$ برابر $V^2/4g$ است. این مقدار نصف ارتفاع بیشینه حالتی است که توپ عمودی به هوا پرتاب شود. توجه کنید که هر مسافت ممکنی را که بخواهید در این مسئله حساب کنید، بنا به تحلیل ابعادی، باید با V^2/g متناسب باشد و تنها باید ضریب عددی را بیابید.

(ب) : در اینجا هم مانند بخش (الف) نخست باید زمان t را که توپ در هوا سپری می‌کند، بیابیم. اگر شیب زمین β باشد، آنگاه معادله‌ی خط زمین (شیب) $y = (\tan\beta)x$ است. مسیر توپ برحسب t با رابطه‌های زیر داده می‌شود

$$x=(V\cos\theta)t \qquad , \qquad y=(V\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^{2} \tag{۴۰-۴}$$

که در آن θ زاویه‌ی پرتاب است و نسبت به افق (و نه نسبت به زمین) اندازه گیری می‌شود. ما به دنبال یافتن زمانی هستیم که به ازای آن $y=(\tan\beta)x$ باشد، چون در این زمان مسیر توپ و خط زمین با هم تلاقی می‌کنند. با استفاده از رابطه‌ی (۴۰-۴) دیده می‌شود که

$$(\tan\beta)x=(V\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^{2} \quad , \quad (\tan\beta)(Vt\cos\theta)=(V\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^{2} \tag{۴۱-۴}$$

از این رابطه‌ها می‌توان t را به دست آورد.

$$t=\frac{2V}{g}(\sin\theta-\tan\beta\cos\theta) \tag{۴۲-۴}$$

(البته $t=0$ هم پاسخ است). با جاگذاری این مقدار t در معادله‌ی مربوط به x، رابطه‌ی (۴۰-۴)، فاصله‌ی افقی به دست می‌آید

$$x=\frac{2V^{2}}{g}(\sin\theta\cos\theta-\tan\beta\cos^{2}\theta) \tag{۴۳-۴}$$

حالا باید این رابطه را برای x بیشینه کنیم تا بیشینه مسافت در روی خط زمین (زمین شیب‌دار) به دست بیاید. برای این کار از رابطه‌ی (۴۳-۴) نسبت به θ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم. با استفاده از اتحادهای مثلثاتی $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ و $\cos 2\theta=\cos^{2}\theta-\sin^{2}\theta$ خواهیم داشت $\tan\beta=-\cot 2\theta$ که اگر آن را به صورت $\tan\beta=-\tan(\pi/2-2\theta)$ بازنویسی کنیم، به دست می‌آید: $\beta=-(\pi/2-2\theta)$ ودر نتیجه

$$\theta=\frac{1}{2}(\beta+\frac{\pi}{2}) \tag{۴۴-۴}$$

چند نکته:

۱. به ازای $\beta\approx\pi/2$ داریم $\theta\approx\pi/2$. برای $\beta=0$، داریم $\theta=\pi/4$. به ازای $\beta=-\pi/2$ داریم $\theta\approx 0$ که همگی پذیرفتنی‌اند.

۲. واقعیت جالب در باره‌ی حرکت پرتابی برای مسافت بیشینه این است که سرعت‌های اولیه و نهایی برهم عمود اند. نمایش این را به مسئله‌ها واگذارمی‌کنیم.

۳. با جاگذاری مقدار θ از رابطه‌ی (۴۴-۴) در رابطه‌ی (۴۳-۴) و با اندکی محاسبه می‌توان نشان داد که مسافت بیشینه‌ی پیموده شده در امتداد (شیب)، زمین شیب‌دار عبارت است از

$$d=\frac{x}{\cos\beta}=\frac{V^{2}/g}{1+\sin\beta} \tag{۴۵-۴}$$

یا $V^{2}=g(d+d\sin\beta)$. تفسیر این نتیجه از این قرار است: برای این که پرتابه بتواند از دیواری به بلندی h در فاصله‌ی L از نقطه‌ی پرتاب بگذرد باید کمینه سرعت آن $V^{2}=g(\sqrt{L^{2}+h^{2}}+h)$ باشد که با حدهای $h\to 0$ و $L\to 0$ همخوانی دارد.

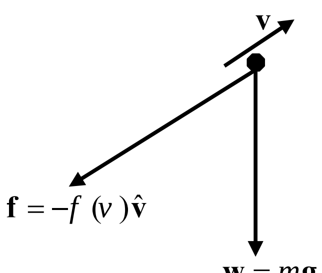
۳-۴ حرکت در حضور نیروی پسار

در آغاز بخش۲-۴ گفتم که بیشتر وقت‌ها جهت نیروی پسار در خلاف جهت سرعت جسمی است که حرکت می‌کند و از این رو،

حرکت جسم را دشوار می‌کند. حالت‌هایی هم وجود دارد که نیروی پسار مولفه‌ی بزرگی در راستایی غیر از راستای سرعت دارد؛ مانند نیروی پسار وارد به بال هواپیما. در این بخش می‌خواهیم حرکت جسم را (پرتابه را) در حضور نیروی پسار بررسی کنیم. اما فقط حالتی را در نظر خواهیم گرفت که این نیرو در راستای سرعت و در خلاف جهت آن است. یعنی فرض می‌کنیم که در جهت‌های دیگرمولفه‌ای ندارد. این وضعیت در شکل (٤-٤) نشان و با رابطه‌ی (٤-٤٦) بیان شده است.

$$\mathbf{f} = -f\,(v)\,\hat{\mathbf{v}} \qquad (٤-٤٦)$$

در این رابطه، $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ بردار یکه در راستای $\mathbf{v}$ است و $f\,(v)$ اندازه‌ی نیروی $\mathbf{f}$ است. تغییرات تابع $f\,(v)$ با سرعت می‌تواند پیچیده باشد. این پیچیدگی به ویژه هنگامی است که سرعت پرتابه به سرعت صوت نزدیک می‌شود. با وجود این، برای سرعت‌های کم با تقریب خوبی می‌توانیم بنویسیم



شکل ٤-٤

$$f\,(v) = bv + cv^{٢} = f_{\text{lin}} + f_{\text{quad}} \qquad (٤-٤٧)$$

که در آن f_{lin} و f_{quad} به ترتیب جمله‌های متناسب با مرتبه‌ی اول و دوم سرعت‌اند. از نظر ریاضی رابطه‌ی (٤-٤٧) بدیهی است. هر تابع خوش رفتار f را می‌توان بسط تیلور داد: $f = a + bv + cv^{٢} + \cdots$. اگر v به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، سه جمله‌ی نخست باید تقریب خوبی از تابع $f\,(v)$ به دست بدهد. چون به ازای $v = ٠$ داریم $f = ٠$، پس جمله‌ی ثابت a باید صفر باشد. منشاء فیزیکی f_{lin} و f_{quad} متفاوت‌اند. جمله‌ی خطی f_{lin} نتیجه‌ی گران‌روی محیط است و عموما با گران‌روی و بزرگی جسم متناسب است. جمله‌ی مرتبه‌ی دوم ، f_{quad} ، از اینجا ناشی می‌شود که پرتابه به طور پیوسته با ذرات محیط برخورد می‌کند و به آنها شتاب می‌دهد. برای پرتابه‌ای کروی (مانند توپ یا قطره‌ی باران) ضرایب b و c در رابطه‌ی (٤-٤٧) به صورت زیرند

$$b = \beta D \qquad , \qquad c = \gamma D^{٢} \qquad (٤-٤٨)$$

D قطر کره است و ضریب‌های β و γ به سرشت محیط بستگی دارند. برای پرتابه‌ی کروی در هوا و در شرایط متعارف به تقریب داریم

$$\gamma = ٠{,}٢٥\,\mathrm{N\cdot s^{٢}/m^{٤}} \quad \text{و} \qquad \beta = ١{,}٦ \times ١٠^{-٤}\,\mathrm{N\cdot s/m^{٢}} \qquad (٤-٤٩)$$

شیوه‌ی محاسبه‌ی این ثابت‌ها به مسئله‌ها واگذار شده است. به یاد داشته باشید که این مقدارها تنها برای جسم کروی که در شرایط متعارف در هوا حرکت می‌کنند درست‌اند. با وجود این، آنها تصویری تقریبی از اهمیت نیروی پسار، حتی برای اجسام غیرکروی، ارایه می‌دهند که در شاره‌های (مایع‌ها یا گازها) مختلف با دما وفشار معمولی حرکت می‌کنند.

بیشتر وقت ها یکی از این دو جمله‌ی رابطه‌ی (٤-٤٧) را در مقایسه با جمله‌ی دیگر نادیده می‌گیریم. این کار حل معادله‌ی قانون دوم نیوتون را ساده می‌کند. اما باید تصمیم بگیریم که کدام جمله نسبت به دیگری پراهمت است و از کدام یک می‌توان چشم پوشید. برای این کار باید این دو جمله را با هم مقایسه بکنیم: اگر مقدارهای داده شده در رابطه‌ی (٤-٤٩) را برای کره‌ای در هوا به کار ببریم کافی است تنها به جای D و v در رابطه‌ی زیر مقدار بگذاریم تا بدانیم از کدام جمله در برابر جمله‌ی دیگر می‌توان چشم‌پوشی کرد.

$$\frac{f_{quad}}{f_{lin}}=\frac{cv^{۲}}{bv}=\frac{\gamma D}{\beta}v=(۱{,}٦\times ۱۰^{۳}\ \mathrm{s/m^{۲}})\,Dv \qquad (٤-٥٠)$$

مثال زیر این را نشان می‌دهد.

مثال ۶-۴ (توپ و قطره مایع): اهمیت نسبی جمله‌های خطی و مرتبه دو نیروی پسار را برای توپی به قطر $D=۷\,\mathrm{cm}$ که با سرعت کم $v=۵\,\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند، ارزیابی کنید. همین کار را برای قطره‌ی باران ($D=۱\,\mathrm{mm}$ و $v=۰{,}٦\,\mathrm{m/s}$) و نیز برای قطره‌ی ریز روغن که در آزمایش میلیکان استفاده می‌شود ($D=۱{,}۵\,\mu\mathrm{m}$ و $v=۵\times۱۰^{-۵}\ \mathrm{m/s}$) انجام دهید.

حل: اگر مقدارهای داده شده در رابطه‌ی (٤-٤٩) را در (٤-٥٠) جاگذاری کنیم (یادمان باشد که قطر را به متر تبدیل کنیم) برای توپ خواهیم داشت $f_{\mathrm{quad}}/f_{\mathrm{lin}}\approx ٦۰۰$. پس، روشن است که برای توپ می‌توان از جمله‌ی مرتبه‌ی اول چشم‌پوشی کرد و کافی است فقط جمله‌ی مرتبه‌ی دو نیروی پسار را در نظر گرفت. اگر سرعت توپ زیاد می‌بود، نسبت $f_{\mathrm{quad}}/f_{\mathrm{lin}}$ حتی بزرگتر هم می‌شد. در سرعت‌های کم این نسبت خیلی بزرگ نیست، اگرچه، حتی برای $v=۱\,\mathrm{m/s}$ اندازه‌ی آن ۱۰۰ است. در حقیقت، اگر v به اندازه‌ی کافی کو.چک باشد جمله‌ی خطی با جمله‌ی مرتبه‌ی دو قابل مقایسه می‌شود و هر دو جمله بسیار کوچک و قابل چشم‌پوشی می‌شوند. بنابراین، برای توپ و هر جسم همانند، همیشه به تقریب می‌توان از f_{lin} چشم پوشید و نیروی پسار را به صورت زیر پنداشت

$$\mathbf{f}=-cv^{۲}\,\hat{\mathbf{v}} \qquad (٤-٥١)$$

برای قطره‌ی باران داریم $f_{\mathrm{quad}}/f_{\mathrm{lin}}\approx ۱$. پس، برای قطره‌ی باران دو جمله از یک مرتبه‌ی بزرگی‌اند و از هیچ کدام نمی‌توان چشم پوشی کرد و از این رو حل معادله‌ی حرکت هم دشوارتر است. اگر قطره خیلی بزرگ‌تر می‌بود و یا بسیار تندتر حرکت می‌کرد، جمله‌ی خطی قابل چشم پوشی می‌شد. اگر قطره خیلی کوچک‌تر می‌بود و یا بسیار آهسته‌تر حرکت می‌کرد، آنگاه از جمله‌ی مرتبه دو می‌توانستیم چشم بپوشیم . اما در حالت کلی برای قطره باران و اجسام همانند باید هر دو جمله‌ی f_{lin} و f_{quad} را در نظر گرفت. در مورد قطره روغن آزمایش میلیکان داریم $f_{\mathrm{quad}}/f_{\mathrm{lin}}\approx ۱۰^{-۷}$. در این حالت به کلی می‌توان از جمله‌ی مرتبه دو چشم پوشید و نیروی پسار را به صورت $\mathbf{f}=-bv\,\hat{\mathbf{v}}=-b\,\mathbf{v}$ در نظر گرفت.

پیام این مثال روشن است: نخست، برای برخی اجسام نیروی پسار خطی برجسته است و می‌توان از جمله‌ی مرتبه دو چشم پوشی کرد، به ویژه برای قطره مایع در هوا. اما برای اجسام اندکی درشت هم که در مایع با گران‌روی زیاد حرکت می‌کنند، مانند حرکت بلبرینگی در شیره ، می‌توان از نیروی پسار مرتبه‌ی دو چشم پوشید. از سوی دیگر برای بیشتر اجسام، مانند توپ تنیس، گلوله‌ی توپ و حتی برای انسانی که سقوط آزاد می‌کند، نیروی پسار چیره‌ی جمله‌ی مرتبه‌ی دو آن است. در این وضعیت‌ها می‌توان نیروی پسار خطی را نادیده گرفت. این وضعیت اندکی ناخوشایند است ؛ چون حل معادله‌ی حرکت نیوتون برای نیروی پسار خطی آسان‌تر از حل آن برای نیروی پسار مرتبه دو است.

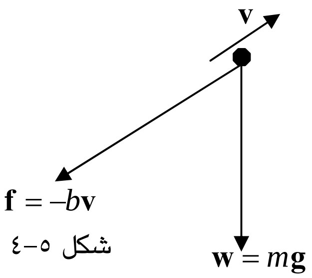
در پایان این بخش پیش‌گفتارمانند، به جاست که از *عدد راینولد* نام ببرم؛ پارامتر مهمی که در بحث‌های پیشرفته‌تر حرکت در شاره‌ها نمود پیدا می‌کند. همان طور که گفتیم، نیروی پسار خطی را می‌توان به گران‌روی محیطی که پرتابه در آن حرکت

می‌کند مربوط کرد . نیروی پسار مرتبه دو به لختی و در نتیجه به چگالی شاره مربوط است. بنابراین، می توان نسبت $f_{\rm quad}/f_{\rm lin}$ را به پارامترهای بنیادی η (گران‌روی) و چگالی شاره، ρ، مربوط کرد. به تقریب، مرتبه‌ی بزرگی نسبت f_{quad}/f_{lin} با عدد بدون بُعد $R \equiv Dv\,\rho/\eta$ قابل مقایسه است که عدد راینولد نام دارد. پس هر گاه عدد راینولد بزرگ باشد نیروی پسار مرتبه دو $f_{\rm quad}$ چیره است و اگر R کو‌چک باشد نیروی خطی $f_{\rm lin}$ برجسته است.

۴-۴ نیروی پسار خطی

وضعیتی را در نظر بگیرید که نیروی مقاومت هوا با مرتبه‌ی اول سرعت متناسب است: $\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$. برای این نیرو حل معادله‌ی حرکت ساده است و حل عمومی آن در بخش ٤-١ توصیف شد. به پرتابه دو نیرو وارد می‌شود که در شکل (٥-٤) نشان داده شده‌اند. برای این پرتابه، قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، به صورت زیر درمی‌آید

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v} \qquad (٤-٥٢)$$



شکل ٤-٥

جنبه‌ی گیرای این رابطه از این قرار است: هیچ یک از جمله‌های سمت راست آن به $\mathbf{r}$ بستگی ندارد. پس، در معادله‌ی حرکت $\mathbf{r}$ وجود ندارد (تنها مشتق مرتبه اول و دوم $\mathbf{r}$ وجود دارند.) در نتیجه، می‌توانیم $\ddot{\mathbf{r}}$ را به صورت $\dot{\mathbf{v}}$ بنویسیم. رابطه‌ی (٤-٥٢) به صورت زیر درمی‌آید

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v} \qquad (٤-٥٣)$$

که نسبت به $\mathbf{v}$ معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول است. ساده شدن معادله‌ی حرکت به این خاطر است که نیروها تنها به $\mathbf{v}$ وابسته‌اند و نه به $\mathbf{r}$. این یعنی باید معادله‌ی دیفرانسیل خطی را حل کنیم و سپس از آن انتگرال بگیریم و $\mathbf{r}$ را بیابیم. شاید مهم‌ترین جنبه‌ی ساده شدن معادله‌ی حرکت برای نیروی پسار خطی این است که معادله‌ی حرکت به آسانی به مولفه‌هایش تجزیه می‌شود. برای نمونه ، اگر جهت مثبت x را به سوی راست و جهت مثبت y را رو به پایین برگزینیم، رابطه‌ی (٤-٥٣) به دو معادله‌ی زیر تجزیه می‌شود.

$$m\dot{v}_y = mg - bv_y \qquad , \qquad m\dot{v}_x = -bv_x \qquad (٤-٥٤)$$

یعنی دو معادله‌ی جدا از هم به دست می‌آید، یکی برای v_x و دیگری برای v_y . در معادله‌ی v_x، دیگر v_y وجود ندارد و در معادله‌ی v_y هم v_x نیست. توجه به این نکته مهم است که بدانیم چنین وضعیتی به خاطر این است که نیروی پسار نسبت به $\mathbf{v}$ خطی است. برای مثال، اگر نیروی پسار از مرتبه‌ی دو می بود

$$\mathbf{f} = -cv^{2}\hat{\mathbf{v}} = -cv\mathbf{v} = -c\sqrt{v_x^{2} + v_y^{2}}\,\mathbf{v} \qquad (٤-٥٥)$$

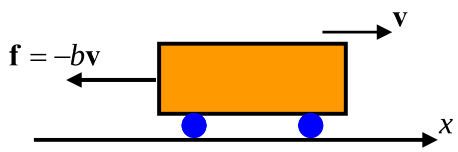
می‌بایست در رابطه‌ی (٤-٥٣) ، $-b\mathbf{v}$ را با رابطه‌ی (٤-٥١) جایگزین می‌کردیم. به جای دو معادله‌ی (٤-٥٤) آنگاه دو رابطه‌ی زیر به دست می‌آمدند.

$$m\dot{v}_x = -c\sqrt{v_x^{2} + v_y^{2}}\,v_x \qquad , \qquad m\dot{v}_y = mg - c\sqrt{v_x^{2} + v_y^{2}}\,v_y \qquad (٤-٥٦)$$

در هر یک از این معادله‌ها، هم v_x و هم v_y وجود دارد. اینها معادله‌های دیفرانسیل جفت شده‌اند و حل‌شان دشوارتر است.

چون رابطه‌های (٤-٥٤) جدا از همانند، می‌توان آنها را جدا از هم حل کرد و سپس پاسخ ها را برهم افزود. افزون براین، هر یک از این معادله‌ها مسئله‌ای را تعریف می‌کند که به نوبه‌ی خود جالب است. معادله‌ی مربوی به مولفه‌ی x در رابطه‌ی (٤-٥٣) معادله‌ی حرکت جسمی است (مانند ارابه‌ای که چرخهایش اصطکاک ندارد) که در راستای افقی در محیطی با نیروی پسار خطی حرکت می‌کند. معادله‌ی دیگر در رابطه‌ی (٤-٥٤) معادله‌ی حرکت جسمی (مانند قطره روغن) است که در حضور نیروی پسار (مقاومت هوا) سقوط می‌کند. اینک این دو مسئله را حل می‌کنیم.

۱-۴-۴ حرکت افقی با نیروی پسار خطی



شکل ٦-٤

جسمی مانند ارابه‌ی شکل (٦-٤) را در نظر بگیرید که در محیطی با پسار خطی حرکت می‌کند. فرض کنید در زمان $t=0$ ارابه در $x=0$ و سرعتش $v_x=v_{x\circ}$ است. تنها نیروی وارد به ارابه، نیروی پسار $\mathbf{f}=-b\mathbf{v}$ است و در نتیجه، حرکت ارابه ناگزیر از آهسته شدن است. آهنگ آهسته شدن را رابطه‌ی (٤-٥٤) تعیین می‌کند که شکل عمومی آن به صورت زیر است

$$\dot{v}_x=-kv_x \qquad (٤-٥٧)$$

و در آن $k=b/m$ است. این معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول است و پاسخ آن می‌تواند تنها یک ثابت دلخواه داشته باشد. اگر $\dot{v}_x\equiv dv_x/dt$ قرار دهیم رابطه‌ی بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{dv_x}{dt}=-kv_x \qquad (٤-٥٨)$$

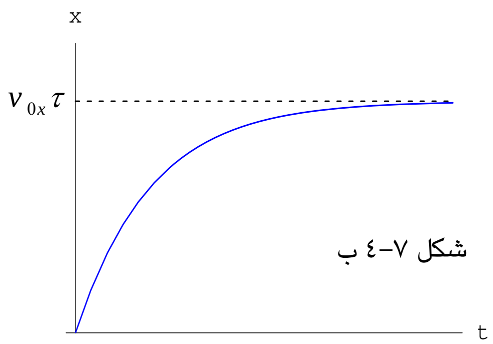
یا

$$\frac{dv_x}{v_x}=-kdt \qquad (٤-٥٩)$$

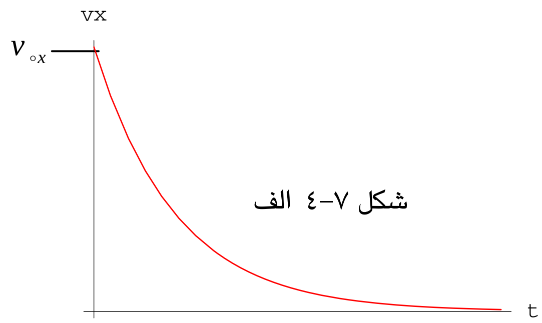
در رابطه ی (٤-٥٩) متغیرها از هم جدا هستند و می‌توان از دو طرف انتگرال گرفت. خواهیم داشت

$$\int_{v_{\circ x}}^{v_x(t)}\frac{dv'_x}{v'_x}=-k\int_{\circ}^{t}dt'\Rightarrow \ln v_x(t)-\ln v_{\circ x}=-kt \quad\Rightarrow\quad v_x(t)=v_{\circ x}e^{-kt}=v_{\circ x}e^{-t/\tau} \qquad (٤-٦٠)$$

پارامتر $\tau\equiv 1/k=m/b$ را برای نیروی پسار خطی معرفی کردم. می‌بینیم که حرکت ارابه به طور نمایی کُند می‌شود. این رفتار در شکل (٧-٤ الف) نشان داده شده است. بعد پارامتر τ زمان است و می‌بینیم که برای $t=\tau$ سرعت به $1/e$ مقدار اولیه‌ی کاهش می‌یابد و به ازای $t\to\infty$ سرعت صفر می‌شود



شکل ٧-٤ ب



شکل ٧-٤ الف

برای یافتن مکان پرتابه برحسب تابعی از زمان، باید از رابطه‌ی (٦٠-٤) یک بار نسبت به زمان انتگرال گرفت. کافی است در رابطه‌ی (٦٠-٤) قرار دهیم $v_x(t)=dx/dt$ و دو طرف را در dx ضرب کنیم. متغیرها از هم جدا می‌شوند و می‌توان انتگرال گرفت:

$$\frac{dx}{dt}=v_{0x}e^{-t/\tau}\Rightarrow dx=v_{0x}e^{-t/\tau}dt \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad \int_0^{x(t)}dx=\int_0^t v_{0x}e^{-t'/\tau}dt'$$

$$\Rightarrow x(t)=\left[-v_{0x}\,\tau e^{-t'/\tau}\right]_0^t=v_{0x}\,\tau(1-e^{-t/\tau}) \qquad (٤-٦١)$$

پس، دیده می‌شود که با آهسته شدن ارابه، مکان آن به مقدار $v_{\circ x}\tau$ میل می‌کند. این رفتار در شکل (٧-٤ ب) دیده می‌شود.

۲-۴-۴ حرکت قائم با نیروی پسار خطی

پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که از ارتفاعی رها شده‌است و به آن نیروی پسار خطی هوا هم وارد می شود. پس، به جسم دو نیرو اثر می‌کند: گرانش و پسار هوا و هر دو در راستای قائم‌اند. اگر جهت مثبت y رو به پایین باشد از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ داریم

$$m\dot{v}_y=mg-bv_y \qquad (٤-٦٢)$$

چون در این جا جهت سرعت رو به پایین است ($v_y>\circ$) بنابراین، نیروی بازدارنده پسار رو به بالا و نیروی گرانش رو به پایین است. اگر v_y کوچک باشد، نیروی گرانش پراهمیت‌تر از نیروی پسار می‌شود و جسم افتان، رو به پایین شتابیده می‌شود. این رفتار ادامه می‌یابد تا این که با افزایش سرعت نیروی پسار بزرگ و بزرگ‌تر و با نیروی گرانش ترازمند شود. سرعتی که این ترازمندی به ازای آن برقرار می‌شود به سادگی از رابطه‌ی (٦٢-٤) به دست می‌آید. کافی است سمت راست معادله را برابر صفر قرار دهیم (یعنی برآیند دو نیرو صفر باشد). خواهیم داشت $mg-bv_y=\circ \Rightarrow v_y=mg/b$. سرعت

$$v_{term}\equiv v_y=mg/b \qquad (٤-٦٣)$$

سرعت حد، v_{ter} ، نام دارد. پس از آن که سرعت جسم به این مقدار حدی رسید با همین سرعت به فروافتادن خود ادامه می‌دهد. چون سرعت حد به b و m بستگی دارد ، اندازه‌ی آن برای اجسام مختلف متفاوت است. برای مثال، اگر شکل و ابعاد دو جسم یکسان باشد (b برای هر دو یکسان) سرعت حد جسم پرجرم بیشتر می‌شود، و این چیزی است که انتظار داریم.

مثال ۷-۴ (سرعت حد قطره مایع کوچک): سرعت حد قطره روغن کوچک آزمایش میلیکان (به قطر $D=١{,}٥\mu\text{m}$، چگالی $\rho=٨٤٠\ \text{kg/m}^٣$) را بیابید. این کار را برای قطره شبنمی به قطر $D=٠{,}٢\text{mm}$ هم انجام دهید.

حل: از مثال ٤-٤ می‌دانیم که نیروی پسار خطی در مورد این اجسام برجسته اند. بنابراین ، سرعت حد با رابطه‌ی (٦٣-٤) داده می‌شود. بنا به رابطه‌ی (٤٨-٤)، $b=\beta D$ است. در یکاهای SI $\beta=١{,}٦\times١٠^{-٤}$ است. جرم قطره $m=\rho D^٣/٦$ است. پس ، برای نیروی پسار از رابطه‌ی (٦٣-٤) به دست می‌آید

$$v_{ter}=\frac{\rho\pi D^٢ g}{٦\beta} \qquad (٤-٦٤)$$

این نتیجه‌ی جالبی است و نشان می‌دهد که برای چگالی معینی، سرعت حد با $D^٢$ متناسب است. یعنی وقتی سرعت افزایش یافت و نیروی پسار مهم شد، کره‌ی بزرگتر تندتر از یک کره‌ی کو.چک، اما با همان چگالی، فرو می‌افتد. به زبان اعداد، برای قطره روغن داریم

$$v_{\text{term}}=\frac{(840)\times\pi\times(1.5\times10^{-6})^{2}\times(9.8)}{6\times(1.6\times10^{-4})}=6.1\times10^{-5}\ \text{m/s} \qquad (٤-٦٥)$$

در آزمایش میلیکان قطره روغن به طور فزاینده کندتر فرو می‌افتد و می‌توان با استفاده از میکروسکپ سرعت آن اندازه گرفت. برای قطره‌ی شبنم خواهیم داشت $v_{\text{term}}=1.3\ \text{m/s}$ و این سرعت قطره‌های ریز باران است. برای قطره‌های درشت باران سرعت حد به طور چشم‌گیری بیشتر است؛ برای قطره‌ی درشت (و تند) ناگزیریم که جمله‌ی مرتبه دو را هم در معادله‌ی حرکت در نظر بگیریم تا بتوانیم سرعت حد قابل اعتمادی به دست آوریم.

تا کنون در باره‌ی سرعت حد پرتابه‌ای که قائم حرکت می‌کند سخن گفتیم. اما به جاست که بگوییم چگونه پرتابه به این سرعت می‌رسد. این با معادله‌ی حرکت، رابطه‌ی (٦٢-٤)، تعیین می‌شود و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت (به یاد بیاورید که $v_{\text{term}}=mg/b$).

$$m\dot{v}_y=-b\,(v_y-v_{ter}) \qquad (٤-٦٦)$$

این معادله‌ی دیفرانسیل را می‌توان به روش‌های گوناگون حل کرد. آسان‌ترین روش این است که به شباهت آن با معادله‌ی (٥٣-٤) توجه کنیم که در سمت راست به جای v_x حالا (v_y-v_{term}) نشسته است. پاسخ معادله‌ی (٥٤-٤) یک تابع نمایی بود. شگرد حل معادله‌ی کنونی این است که متغیر جدید $u\equiv(v_y-v_{\text{ter}})$ را تعریف کنیم. این متغیر در معادله‌ی $m\dot{u}=-bu$ صدق می‌کند (چون v_{term} مقدار ثابتی است). پس ، پاسخ معادله ی (٦٦-٤) عبارت است از

$$v_y-v_{\text{term}}=Ae^{-t/\tau} \qquad (٤-٦٧)$$

اگر در زمان $t=0$ داشته باشیم $v_y=v_{0y}$ ؛ آنگاه $A=v_{0y}-v_{\text{term}}$ می‌شود و پاسخ نهایی v_y برحسب زمان عبارت است از

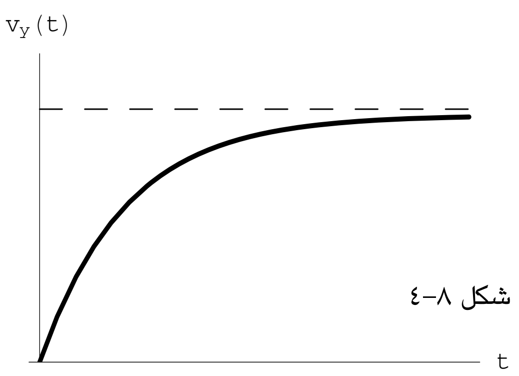
$$v_y(t)=v_{\text{term}}+(v_{0y}-v_{\text{term}})e^{-t/\tau} \qquad (٤-٦٨)$$

$$=v_{0y}e^{-t/\tau}+v_{\text{term}}(1-e^{-t/\tau}) \qquad (٤-٦٩)$$

رابطه‌ی (٦٩-٤) سرعت $v_y(t)$ را به صورت جمع دو جمله به دست می‌دهد: برای $t=0$ جمله‌ی اول برابر است با v_{0y} ، اما با افزایش t به صفر می‌گراید. جمله‌ی دوم هنگامی صفر می‌شود که $t=0$ باشد، اما برای $t\to\infty$ به v_{term} میل می‌کند . به ویژه ، برای $t\to\infty$ داریم $v_y(t)\to v_{\text{term}}$.

بگذارید نتیجه‌ی (٦٩-٤) را برای حالتی که $v_{0y}=0$ است (یعنی پرتابه از حالت سکون رها شود) اندکی بیشتر بررسی کنیم. برای این حالت رابطه‌ی (٦٩-٤) به شکل زیر درمی‌آید

$$v_y(t)=v_{\text{term}}(1-e^{-t/\tau}) \qquad (٤-٧٠)$$



شکل ٨-٤

در شکل (٨-٤) این رابطه رسم داده شده است. می‌بینیم که v_y در زمان $t=0$ از صفرآغاز می‌شود و به طور مجانبی با $t\to\infty$ به سرعت حد $v_y\to v_{\text{term}}$ میل می‌کند. اهمیت τ را برای جسم افتان به آسانی می‌توان از رابطه‌ی (٧٠-٤) دید. هنگامی که $t=\tau$ است، می بینیم که $v_y=v_{\text{term}}(1-e^{-1})=0.63v_{\text{term}}$ است. این یعنی در زمان τ سرعت

جسم به٦٣٪ سرعت حد رسیده است. محاسبه‌های همانندی را می‌توان برای زمان‌های $t=\circ$ ، $t=\text{٢}\tau$ و غیره انجام داد. در زمان $t=\text{٣}\tau$ سرعت جسم به ٩٥٪ سرعت حد می رسد. البته سرعت جسم هرگز به سرعت حد نمی‌رسد مگر در $t=\infty$. با وجوداین ، زمان مشخصه‌ی τ سنجه‌ی خوبی است برای این که بدانیم سرعت جسم با چه آهنگی به v_{term} می‌گراید.

مثال ٨-۴ (زمان مشخصه برای دو قطره مایع): زمان مشخصه، τ، را برای قطره روغن وقطره شبنم مثال (٤-٥) حساب کنید.

حل: زمان مشخصه، τ، با $\tau\equiv \text{١}/k=m/b$ تعریف شد و v_{ter} با رابطه‌ی (٤-٦٣) به صورت $v_{ter}=mg/b$ داده شده است. پس، می‌توان رابطه‌ی سودمند زیر را نوشت

$$v_{\text{term}}=g\tau \qquad (\text{٤-٧١})$$

توجه کنید که این رابطه اجازه می‌دهد تا به v_{term} به صورت سرعتی بنگریم که *اگر جسم افتان شتاب ثابتی برابر g می‌داشت* در زمان τ به دست می‌آورد. همچنین توجه کنید که زمان τ سنجه‌ی وارونی است که اهمیت نیروی پسار را نشان می‌دهد: هنگامی که ضریب b مقاومت هوا کوچک است هردو v_{term} و τ بزرگ‌اند و هنگامی که ضریب b بزرگ است، هردوی v_{term} و τ کوچک‌اند.

برای هدف کنونی ما اهمیت رابطه‌ی (٤-٧١) این است: چون سرعت‌های حد هر دو قطره را حساب کرده‌ایم، می‌توان از آن استفاده کرد و τ را به دست آورد. برای قطره روغن در آزمایش میلیکان داریم $v_{\text{term}}=\text{٦,١}\times\text{١٠}^{-\text{٥}}\,\text{m/s}$ و برای قطره شبنم $v_{\text{term}}=\text{١,٣}\,\text{m/s}$ است. پس برای قطره روغن داریم

$$\tau=\frac{v_{\text{term}}}{g}=\frac{\text{٦,١}\times\text{١٠}^{-\text{٥}}}{\text{٩,٨}}=\text{٦,٢}\times\text{١٠}^{-\text{٦}}\text{s} \qquad (\text{٣-٧٢})$$

و برای شبنم $\tau=v_{\text{term}}/g=\text{٠,١٣}\,\text{s}$.

مهم نیست که حرکت جسم افتان از حالت سکون آغاز شود یا نه؛ همیشه می‌توان مکان y آن را به صورت تابعی از زمان یافت. کافی است از رابطه‌ی (٤-٦٩) انتگرال گرفت.

$$v_y(t)=v_{\text{term}}+(v_{\circ y}-v_{\text{term}})e^{-t/\tau} \qquad (\text{٤-٦٩})$$

با فرض این که جایگاه اولیه‌ی پرتابه $y=\text{٠}$ است ، خواهیم داشت

$$y(t)=\int_\circ^t v_y(t')dt'=v_{\text{term}}t+(v_{\circ y}-v_{\text{term}})\tau(\text{١}-e^{-t/\tau}) \qquad (\text{٤-٧٣})$$

اینک می‌توان این معادله را با معادله‌ی (٤-٦١) برای $x(t)$ ترکیب کرد و در محیط با پسارخطی، مدار هر پرتابه‌ای را که هم حرکت افقی و هم عمودی دارد، حساب کرد. این کار را در بخش ٤-٥ انجام می‌دهیم.

۴-۵ مسیر و بُرد در محیط پسار خطی

در آغاز بخش ٤-٤ حرکت پرتابه‌ای که در جهت دلخواهی حرکت می‌کرد، بررسی شد. دیدیم که می‌توان معادله‌های حرکت را

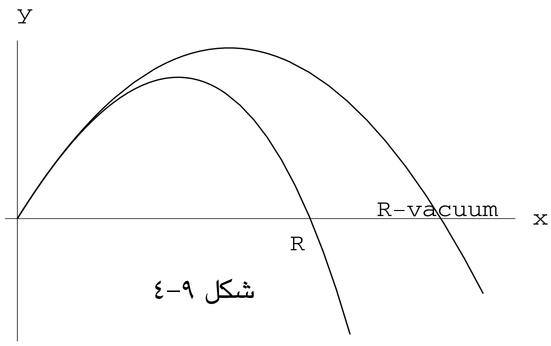
به دو راستای حرکت جدا از هم تجزیه کرد : یکی برای حرکت افقی و دیگری برای حرکت عمودی پرتابه. معادله‌های حرکت با رابطه‌های (٥٤-٤) داده شد. این دو معادله را حل کردیم و پاسخ‌شان را با رابطه‌های (٦١-٤) و (٧٣-٤) بیان کردیم. حالا می‌خواهیم این پاسخ ها را با هم ترکیب کنیم و مسیر هر پرتابه‌ی دلخواهی را که در راستایی دلخواه در محیطی با پسار خطی حرکت می‌کند به دست آوریم. در بحث حاضر اندکی به صرفه است که جهت مثبت y را *رو به بالا* انتخاب کنیم. در این صورت باید علامت v_{term} را عوض کنیم (یقین پیدا کنید که این نکته را می‌فهمید). دو معادله‌ی مسیر حالا به صورت زیر درمی‌آیند

$$x(t) = v_{\circ x}\,\tau(1-e^{-t/\tau})$$
$$y(t) = (v_{\circ y}+v_{\text{term}})\,\tau(1-e^{-t/\tau}) - v_{\text{term}}t \qquad (٤-٧٤)$$

اگر از معادله‌ی اول t را به دست آوریم و در دومی قرار دهیم، t بین این دو معادله حذف می‌شود و معادله‌ی مسیر یا مدار پرتابه به دست می‌آید. خواهیم داشت

$$y = \frac{v_{\circ y}+v_{\text{term}}}{v_{\circ x}}x + v_{\text{term}}\tau\,\ell n\left(1-\frac{x}{v_{\circ x}\tau}\right) \qquad (٤-٧٥)$$

این رابطه پیچیده‌تر از آن به نظر می‌رسد که روشنگر باشد. من آن را به همراه حالتی که مقاومت هوا وجود ندارد در شکل (٩-٤) رسم کرده‌ام. به یاری این شکل می‌توان برخی جنبه‌های رابطه‌ی (٧٥-٤) را دید. برای مثال، اگر به جمله‌ی دوم سمت راست نگاه کنید، می‌بینید که با $x \to v_{\circ x}\tau$ شناسه‌ی تابع لگاریتمی به صفر میل می کند و در نتیجه جمله‌ی لگاریتمی و y هردو به ∞ می‌گرایند. یعنی مسیر در $x = v_{\circ x}\tau$ یک مجانب عمودی دارد (که در شکل نشان داده نشده است). به عنوان تمرین ببینید که اگر نیروی پسار را کم کنید وسرانجام به صفر برسانید؛ مسیر پرتابه به مسیر بدون نیروی پسار میل می کند.



شکل ٩-٤

- **برد افقی**

همان‌گونه که در آغاز حرکت پرتابی دیدید، در نبود نیروی پسار (یعنی در خلاء) برد پرتابه به صورت

$$R_{vac} = \frac{2v_{\circ x}v_{\circ y}}{g} \qquad \text{(خلاء)} \qquad (٤-٧٦)$$

است. می‌خواهیم ببینیم این رابطه در حضور نیروی پسار چگونه تغییر می‌کند. برد R مقدار x به ازای $y=\circ$ ، در رابطه‌ی (٧٥-٤) ، است. پس R پاسخ معادله‌ی زیر است:

$$\frac{v_{\circ y}+v_{\text{term}}}{v_{\circ x}}R + v_{\text{term}}\tau\,\ell n\left(1-\frac{R}{v_{\circ x}\tau}\right) = \cdot \qquad (٤-٧٧)$$

این معادله را نمی‌توان به طور تحلیلی با توابع ساده حل کرد. حل عددی آن شدنی است و در مسئله‌های محاسباتی آن را خواهید دید. حل عددی اما چندان احساسی از وابستگی پاسخ به پارامترهای مسئله به دست نمی‌دهد. رویکرد خوب دیگر یافتن حل تحلیلی *تقریبی* است. بسیاری وقت‌ها اثر نیروی پسار کوچک است. یعنی هر دوی v_{term} و τ بزرگ‌اند و جمله‌ی دوم در شناسه‌ی تابع لگاریتمی کوچک است. (چون τ در مخرج است). بنابراین، می‌توان تابع لگاریتمی را بسط تیلور داد (فصل ٢ را

ببینید). داریم

$$\ell n(1-\varepsilon)=-(\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{3}\varepsilon^3+\cdots) \qquad (٤-٧٨)$$

می‌توان از این بسط بهره برد و برای τ بزرگ از جمله‌های فراتر از ε^3 چشم‌پوشید. رابطه‌ی (٤-٧٤) به صورت زیر درمی‌آید

$$\left[\frac{v_{0y}+v_{\text{term}}}{v_{0x}}\right]R-v_{\text{term}}\tau\left[\frac{R}{v_{0x}\tau}+\frac{1}{2}(\frac{R}{v_{0x}\tau})^2+\frac{1}{3}(\frac{R}{v_{0x}\tau})^3\right]=0 \qquad (٤-٧٩)$$

این رابطه را به آسانی می توان ساده کرد. جمله‌ی دوم در کروشه‌ی اول با جمله‌ی اول در کروشه‌ی دوم حذف می‌شود. درهر جمله یک R وجود دارد پس یک پاسخ آن $R=0$ است. اما ما به دنبال این پاسخ نیستیم. v_{term}/τ را با g جایگزین کنید. معادله‌ی بالا به صورت زیر ساده می‌شود

$$R=\frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}-\frac{2}{3v_{0x}\tau}R^2 \qquad (٤-٨٠)$$

شاید برای شما عجیب باشد که معادله‌ی درجه دو را این گونه می‌نویسیم ، ولی ما را زودتر به پاسخ تقریبی که به دنبالش هستیم رهنمون می‌شود. نکته این است که جمله‌ی دوم سمت راست خیلی کوچک است. (در صورت کسر R به یقین کمتر از R_{vac} است و ما فرض می‌کنیم که در مخرج کسر τ خیلی بزرگ است.) بنابراین، در تقریب نخست داریم

$$R\approx\frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}=R_{\text{vac}} \qquad (٤-٨١)$$

این نتیجه‌ای است که انتظار داریم. یعنی اگر نیروی پسار کوچک باشد برد پرتابه به برد آن در نبود نیروی پسار نزدیک می‌شود. به یاری رابطه‌ی (٤-٨٠) می‌توان تقریب بهتری هم به دست آورد. جمله‌ی آخر در رابطه‌ی (٤-٨٠) تصحیحی است که به خاطر نیروی پسار باید به R_{vac} اعمال کرد. چون این جمله در مقایسه با R_{vac} کوچک است، به جای R در این جمله R_{vac} قرار دهید. با این کار در تقریب مرتبه دو خواهیم داشت

$$R\approx R_{R_{\text{vac}}}-\frac{2}{3v_{0x}\tau}(R_{R_{\text{vac}}})^2=R_{R_{\text{vac}}}\left(1-\frac{4}{3}\frac{v_{0y}}{v_{\text{term}}}\right) \qquad (٤-٨٢)$$

برای به دست آوردن تساوی دوم ، R_{vac} جمله‌ی دوم را با $2v_{0x}v_{0y}/g$ جایگزین کردم توجه کنید که با تصحیح پسار، همیشه R کوچکتر از R_{vac} می‌شود و این تصحیح تنها به نسبت v_{0y}/v_{term} بستگی دارد. اگر بخواهیم عمومی‌تر سخن بگوییم، درجه‌ی اهمیت پسار هوا را نسبت v/v_{term} ، سرعت پرتابه نشان می‌دهد. اگر در طول پرواز پرتابه، $v/v_{\text{term}}<<1$ آنگاه اثر پسار هوا بسیار کو.چک می‌شود. اگر v/v_{term} حدود ١ یا بزرگ‌تر باشد آنگاه به یقین اثر پسار مهم است (و تقریب ما هم خوب نیست.).

۴-۶ نیروی پسار از مرتبه دوم سرعت

گاهی اهمیت f_{quad} برجسته‌تر می‌شود و می‌توان گفت که به پرتابه نیروی پسار از نوع $\mathbf{f}=-cv^2\hat{\mathbf{v}}$ وارد می‌شود. هنوز هم باید معادله‌ی حرکت، $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ را برای این نیرو حل کرد. به بیان دیگر داریم

$$m\ddot{\mathbf{x}}=m\dot{\mathbf{v}}=m\mathbf{g}+\mathbf{f} \qquad (٤-٨٣)$$

تفاوت این معادله با معادله‌ی حرکت با نیروی پسار خطی در این است که با $\mathbf{f}=-cv^{۲}\hat{\mathbf{v}}$ دیگر معادله‌ی حرکت، رابطه‌ی (۸۳-٤) ، یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی نیست. با وجود این، هنوز هم این ادعا درست است که هر حرکت پرتابی ترکیبی از دو حرکت افقی و عمودی است. بنابراین، در اینجا نیز از رویکرد بخش ٤-٤ و ٤-٥ پیروی و حرکت در راستای افقی و عمودی را جدا از هم بررسی خواهیم کرد و در آخر آنها را در هم ادغام خواهیم کرد.

۴-۶-۱ حرکت افقی با پسار از مرتبه دوم سرعت

جسمی را در نظر بگیرید که تحت اثر نیروی پسار متناسب با مربع سرعت در جهت مثبت محور افقی x حرکت می‌کند؛ مثل یک ارابه. در این جا از اثر اصطکاک معمولی چشم‌پوشی می‌کنیم. می‌توان آن را در نیروی پسار ادغام کرد. مولفه‌ی x معادله‌ی حرکت (۸۳-٤) عبارت است از

$$m\frac{dv_x}{dt}=-cv_x^{۲} \tag{٤-٨٤}$$

اگر دو طرف این معادله‌ی را به $v_x^{۲}$ تقسیم و در dt ضرب کنیم متغیرها در دو طرف آن از هم جدا می‌شوند. خواهیم داشت

$$m\frac{dv_x}{v_x^{۲}}=-c\,dt \tag{٤-٨٥}$$

حال به سادگی می‌توان از دو طرف رابطه‌ی (۸۵-٤) انتگرال گرفت:

$$m\int_{v_{\circ x}}^{v}\frac{dv'_x}{v'^2_x}=-c\int_{\circ}^{t}dt' \tag{٤-٨٦}$$

که در آن $v_{\circ x}$ سرعت اولیه در راستای x در زمان $t=\circ$ است. پس از انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$m\left(\frac{۱}{v_{\circ x}}-\frac{۱}{v_x}\right)=-ct \tag{٤-٨٧}$$

و از اینجا سرعت برحسب زمان به دست می‌آید

$$v_x(t)=\frac{v_{\circ x}}{۱+cv_{\circ x}t/m}=\frac{v_{\circ x}}{۱+t/\tau} \tag{٤-٨٨}$$

در این جا $\tau\equiv m/cv_{\circ x}$ است و با τ بخش پیشین فرق دارد. می‌توان دید که τ بُعد زمان دارد و به‌ازای $t=\tau$ داریم $v_x=v_{\circ x}/۲$. برای این که مکان افقی ارابه را بیابیم کافی است توجه کنیم که $v_x=dx/dt$ است و از رابطه‌ی (۸۸-٤) انتگرال بگیریم.

$$x(t)=x_{\circ}+t\int_{\circ}^{t}v_x(t')dt'=v_{\circ x}\tau\,\ell n(۱+t/\tau) \tag{٤-٨٩}$$

در تساوی دوم، مکان اولیه، $x_{\circ}$ ، را صفر پنداشتم. اگر این نتیجه را با حالت نیروی پسار خطی مقایسه کنیم (رابطه‌های (۶۰-٤) و (۶۱-٤)) می‌بینیم که در هر دو حالت سرعت‌ها با $t\to\infty$ به صفر می‌گرایند. اما در حالت با نیروی پسار خطی، سرعت به طور *نمایی* به صفر میل می‌کند؛ حال آنکه با نیروی پسار مرتبه دو، سرعت بسیار آهسته‌تر و به صورت $۱/t$ به صفر می‌گراید. این تفاوت در رفتار سرعت، به رفتار کاملا متفاوت x برای نیروی پسار مرتبه دو می‌انجامد. در حالت با نیروی پسار خطی دیدیم که در حد $t\to\infty$ مسافت x به مقدار معین $mv_{\circ x}/b$ میل می‌کرد. اما از رابطه‌ی (۸۹-٤) روشن است که با نیروی

پسار مرتبه دو، وقتی $t\to\infty$ میل می‌کند، x بدون حد افزایش می‌یابد.

این تفاوت شگفت‌آور در رفتار x برای f_{lin} و f_{quad} را می‌توان به طور کیفی فهمید. برای f_{quad} نیروی پسار با $v^{۲}$ متناسب است . بنابراین، با کم شدن v نیروی پسار سریع تر کوچک می‌شود و نمی‌تواند ارابه را در مسافت محدودی از حرکت باز بدارد. به این خاطر است که فرض نیروی پسار مرتبه دو برای *همه‌ی سرعت‌ها* واقعی نیست. البته در اثر نیروی اصطکاک ارابه از حرکت باز می‌ماند، اما این قصه‌ی دیگری است.

۴-۶-۲ حرکت قائم در حضور نیروی پسار مرتبه دو سرعت

فرض کنید توپی را از بالای یک برج رها کردیم. جهت مثبت y را رو به پایین فرض کنید. معادله‌ی حرکت توپ عبارت است از

$$m\ddot{y}=m\dot{v}_y=mg-cv_y^{۲} \qquad (٤-٩٠)$$

پیش از آنکه این معادله را حل کنیم سرعت حد آن را بررسی می‌کنیم. سرعتی که دیگر تغییر نمی‌کند و دو جمله‌ی سمت راست یکدیگر را حذف می‌کنند. برای سرعت حد باید داشته باشیم $mg-cv_y^{۲}=۰$ و بنابراین

$$v_{\text{term}}=\sqrt{\frac{mg}{c}} \qquad (٤-٩١)$$

برای هر جسم معین (یعنی m، g و c معین) سرعت حد را می‌توان از این رابطه حساب کرد. برای توپی به جرم $m=۰{,}۱۵\text{kg}$ و قطر $D=۷\text{cm}$ سرعت حد $v_{\text{term}}\approx ۳۵\,\text{m/s}$ یا حدود ۱۲۰ km/h است. می‌توان معادله‌ی (٤-٩٠) را اندکی بهتر نوشت. از رابطه‌ی (٤-٩١) به جای c مقدار $mg/v_{\text{term}}^{۲}$ را قرار دهید و m ها را حذف کنید. خواهیم داشت

$$\dot{v}_y=g\left(۱-\frac{v_y^{۲}}{v_{\text{term}}^{۲}}\right) \qquad (٤-٩٢)$$

این معادله با جداسازی متغیر ها حل پذیر است و داریم

$$\frac{dv_y}{۱-v_y^{۲}/v_{\text{term}}^{۲}}=g\,dt \qquad (٤-٩٣)$$

حالا می‌توانیم از دو طرف انتگرال بگیریم. با فرض این که توپ از حالت سکون رها شده است، حدود انتگرال سمت چپ ۰ و v_y و حدود انتگرال سمت راست ۰ و t است. پس از انتگرال‌گیری به دست می‌آید

$$\frac{v_{\text{term}}}{g}\arctan\left(\frac{v_y}{v_{\text{term}}}\right)=t \qquad (٤-٩٤)$$

و از این جا v_y به دست می‌آید:

$$v_y=v_{\text{term}}\tanh\left(gt/v_{\text{term}}\right) \qquad (٤-٩٥)$$

برای یافتن مکان عمودی کافی است از (٤-٩٢) انتگرال بگیریم. خواهیم داشت

$$y(t)=\frac{(v_{\text{term}})^{۲}}{g}\ell n\left[\cosh\left(gt/v_{\text{term}}\right)\right] \qquad (٤-٩٦)$$

۴-۶-۳ حرکت افقی و عمودی با نیروی پسار مرتبه دو سرعت

این بخش را با بررسی حرکت عمومی پرتابه تحت اثر نیروی پسار مرتبه دو به پایان می‌بریم. معادله‌ی حرکت پرتابه، $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ ، به صورت زیر است

$$m\ddot{\mathbf{r}}=m\mathbf{g}-cv^{۲}\hat{\mathbf{v}}=m\mathbf{g}-cv\mathbf{v} \qquad (۴-۹۷)$$

اگر آن را به مولفه‌های افقی و عمودی تجزیه کنیم (جهت مثبت y رو به پایین است) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= -c\sqrt{v_x^{۲}+v_y^{۲}}\,v_x \\ m\dot{v}_y &= -mg-c\sqrt{v_x^{۲}+v_y^{۲}}\,v_y \end{aligned} \qquad (۴-۹۸)$$

که دو معادله‌ی دیفرانسیل برای دو تابع $v_x(t)$ و $v_y(t)$ اند. اما هریک شامل هر دوی v_x و v_y اند. به ویژه ، هیچ کدام به معادله‌ی حرکت جسمی که فقط در راستای x یا فقط در راستای y حرکت کند شباهت ندارد. یعنی نمی‌توان با ترکیب دو پاسخ، فقط حرکت افقی و فقط حرکت عمودی ، پاسخی برای این حرکت به دست آورد. بدتر از آن، معادله‌های (۹۸-۴) را اصلا نمی‌توان به طور تحلیلی حل کرد. تنها روشی که بتوان آنها را حل کرد، روش عددی است و این نیز باید با شرایط اولیه انجام گیرد. یعنی نمی‌توان پاسخ عمومی را یافت؛ تنها پلسخ‌های خاص را می‌توان با حل عددی به دست آورد. در زیر چند مسئله‌ی محاسباتی آورده شده است تا خواننده خود را با حل عددی معادله‌های دیفرانسیل آشنا کند.

فیزیک محاسباتی ۱ ـ حرکت پرتابی در میدان گرانش یکنواخت

ذره‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که در میدان گرانشی یکنواخت حرکت می‌کند. فرض کنید حرکت در صفحه‌ی XZ است. معادله‌های حرکت عبارتند از: $\ddot{X}[t]=۰\,,\ \ddot{Z}[t]=-g$ که در آن Z ارتفاع پرتابه و X فاصله‌ی افقی آن است.

(الف): برای مسیرهائی که نقطه‌های آغاز و پایانی یکسان دارند اما زمان پروازشان متفاوت است، معادله‌های حرکت را حل کنید و برای چندین زمان متفاوت مسیرها را رسم کنید.

(ب): به ازای سرعت اولیه و زاویه‌ی پرتاب خاصی، معادله‌های حرکت را حل کنید. مکان نقطه‌ی اوج را پیدا کنید. برای زاویه‌های پرتاب متفاوت، مسیرها را رسم کنید و زاویه‌ای را که به بیشینه ارتفاع می‌انجامد بیابید.

فیزیک محاسباتی ۲ ـ مسیرهای بازتابی

بچه‌ای در فاصله‌ی $x_{۰}$ از دیوار عمودی قرار دارد و توپی را به سوی دیوار پرتاب می‌کند. توپ از ارتفاع $y_{۰}$ نسبت به زمین دست بچه را به طور افقی و با سرعت اولیه‌ی $v_{۰x}$ ترک می‌کند (یعنی $v_{۰y}=۰$). هنگامی که توپ با دیوار برخورد می‌کند جهت مولفه‌ی افقی سرعت عوض می‌شود و مولفه‌ی عمودی سرعت تغییر نمی‌کند. حرکت را بیابید و برای چند سرعت اولیه‌ی متفاوت مسیر را رسم کنید.

فیزیک محاسباتی ۳ـ سقوط جسم با پس‌کشی هوا

به ذره‌ای به جرم m نیروی ربایش گرانشی (با شتاب g) و نیروی مقاومت هوا وارد می‌شود. ذره را از نقطه‌ی $(۰,z_{۰})$ رها می‌کنیم. سرعت اولیه صفر است. فرض کنید نیروی مقاومت هوا به طور خطی با سرعت متناسب است. حرکت ذره با معادله‌های زیر داده می‌شود.

$$m\ddot{Z}[t]=-mg-b\dot{Z}[t]$$

فرض کنید $b\geq ۰$ است.

(الف): برای شرایط اولیه‌ی $Z[۰]=Z_۰$, $\dot{Z}[۰]=۰$ معادله‌های حرکت را حل کنید و سرعت حدی را به دست آورید. حد پاسخ معادله‌های حرکت را برای $b\to ۰$ (در نبود مقاومت هوا) حساب کنید و پاسخ سقوط آزاد را به دست آورید.

(ب): به ازای $b=\left\{۰,\frac{۱}{۲},۱\right\}$ مکان ذره را به صورت تابعی از زمان t رسم کنید.

(پ): به ازای $b=\left\{۰,\frac{۱}{۲},۱\right\}$ سرعت ذره را به صورت تابعی از t بکشید.

(ت): جدول دلخواهی برای نقاط $\{t,Z[t]\}$ بسازید که Z[t] دارای خطای آزمایش ۱۰٪ داشته باشد. در نرم‌افزار *Mathematica* از بسته‌ی **\`Statistics\`NonlinearFit** و دستور **NonlinearFit** استفاده کنید و از روی این نقاط ضریب پسار b را بیابید. شکل برازش غیرخطی را به صورت $a_۱+a_۲t+a_۳\,Exp[-a_۴t]$ فرض کنید.

فیزیک محاسباتی ۴

ذره‌ای به جرم m را به هوا پرتاب می‌کنیم. ذره در راستای عمودی حرکت می‌کند. به ذره نیروی گرانش و نیروی پسار هوا وارد می‌شود. نیروی پسار هوا با مربع سرعت جسم متناسب است. معادله‌ی حرکت جسم برای حرکت رو به بالا $\ddot{Z}[t]=-g-\frac{b}{m}\dot{Z}[t]^۲$ و برای حرکت رو به پایین $\ddot{Z}[t]=-g+\frac{b}{m}\dot{Z}[t]^۲$ است. فرض کنید b مثبت است.

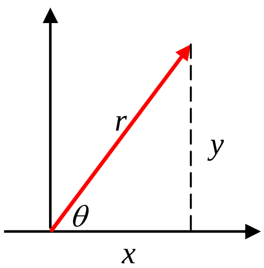
(الف): معادله‌ی حرکت رو به بالا را برای مکان و سرعت حل کنید.

(ب): زمان لازم برای رسیدن جسم به بالاترین نقطه‌ی مسیر را بیابید و سپس معادله‌ی حرکت رو به پایین را برای مکان و سرعت حل کنید.

(پ): مسیر حرکت ذره را رسم کنید و با حالتی که مقاومت هوا وجود ندارد مقایسه کنید.

۷-۴ حرکت در صفحه: مختصات قطبی، نگاهی دو باره

در فصل ۲ مختصات قطبی را شناساندیم و برخی حرکت‌ها را در این چارچوب مختصات بررسی کردیم. در این جا برای یادآوری و کاربردهای آن در فصل‌های آینده نکته‌های مهم آن را دوباره بازگو می‌کنیم. در مسئله‌هایی که حرکت در صفحه انجام می‌گیرد، بیشتر وقت‌ها کار کردن با مختصات قطبی r ، θ می‌تواند مناسب‌تر از مختصات کارتزی x و y باشد. این که کدام چارچوب در مسئله‌ای مناسب‌تر است به ساختار و شکل مسئله بستگی دارد. برای نمونه، اگر می‌خواهیم حرکت دایره‌ای را بررسی کنیم، مختصات قطبی گزینه‌ی برتر است. برای این که بتوانیم از مختصات قطبی استفاده کنیم باید شکل قانون دوم نیوتن را در این چارچوب بدانیم. پس، نخستین کار ما این است که بدانیم $\mathbf{F}=m\mathbf{a}=m\ddot{\mathbf{r}}$ در مختصات قطبی به چه صورت در می آید. پیش از هر چیز به یاد



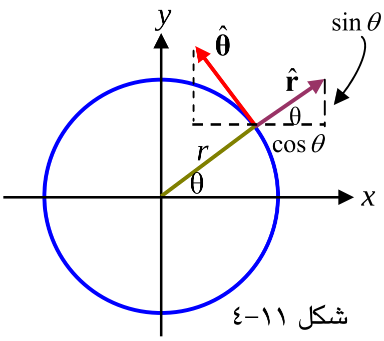
شکل ۱۰-٤

بیاورید که r ، θ با رابطه‌های زیر به x و y مربوط اند. شکل (٤-١٠) را ببینید.

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta \tag{٤-٩٩}$$

در مختصات قطبی بردار $\mathbf{r}$ به صورت زیر نوشته می‌شود (فصل ۲ را ببینید.)

$$\mathbf{r} - r\,\hat{\mathbf{r}} \tag{٤-١٠٠}$$



شکل ١١-٤

هدف این بخش یافتن $\ddot{\mathbf{r}}$ است. پس، باید مشتق $\hat{\mathbf{r}}$ را حساب کنیم. سرانجام به مشتق $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ نیز نیاز خواهیم داشت. $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بردارهای یکه در مختصات قطبی‌اند. نکته‌ی مهم این است که در مختصات قطبی بردارهای یکه ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$ و $\hat{\mathbf{r}}$) با جابه‌جایی نقطه در روی صفحه تغییر می‌کنند؛ در حالیکه بردارهای یکه در مختصات کارتزی ($\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}}$) بدون تغییر باقی می‌مانند. می‌توانیم $\dot{\hat{\mathbf{r}}}$ و $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ را به صورت زیر حساب کنیم: با توجه به شکل (١١-٤)، $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ برحسب مختصات کارتزی به صورت زیر اند.

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\ \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\ \hat{\mathbf{y}} \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\ \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\ \hat{\mathbf{y}} \tag{٤-١٠١}$$

مشتق نسبت به زمان این معادله‌ها عبارت اند از

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = -\dot\theta\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \dot\theta\cos\theta\hat{\mathbf{y}} \qquad , \qquad \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot\theta\cos\theta\hat{\mathbf{x}} - \dot\theta\sin\theta\hat{\mathbf{y}} \tag{٤-١٠٢}$$

و با توجه به رابطه‌ی (٤-١٠١) به دو رابطه‌ی زیبا و تمیز زیر می‌رسیم

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad , \quad \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot\theta\hat{\mathbf{r}} \tag{٤-١٠٣}$$

اگر به جابه‌جایی کوچک $\mathbf{r}$ در راستای مماسی نگاه کنیم ، آنگاه این رابطه‌ها که رفتار بردارهای یکه‌اند، بدیهی خواهند بود. توجه کنید که بردارهای یکه با جابه‌جایی $\mathbf{r}$ در راستای شعاعی تغییر نمی‌کنند. حالا می‌توان از رابطه‌ی (٤-١٠٠) مشتق گرفت. داریم

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot r\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot r\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{٤-١٠٤}$$

این رابطه پذیرفتنی است، چون $\dot r$ سرعت در راستای شعاع است. $r\dot\theta$ سرعت در راستای مماسی است که بیشتر وقت ها به صورت $r\omega$ ($\omega \equiv \dot\theta$ سرعت زاویه‌ای یا بسامد زاویه‌ای است) نوشته می‌شود. اگر از رابطه‌ی (٤-١٠٤) نسبت به زمان مشتق بگیریم $\ddot{\mathbf{r}}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \ddot r\,\hat{\mathbf{r}} + \dot r\,\dot{\hat{\mathbf{r}}} + \dot r\,\dot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\dot\theta\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\ &= \ddot r\,\hat{\mathbf{r}} + \dot r(\dot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \dot r\dot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot\theta(-\dot\theta\hat{\mathbf{r}}) \\ &= (\ddot r - r\,\dot\theta^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned} \tag{٤-١٠٥}$$

و سرانجام، از برابری $m\ddot{\mathbf{r}}$ و $\mathbf{F} = F_r\hat{\mathbf{r}} + F_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ نیروهای شعاعی و مماسی به دست می‌آیند:

$$F_r = m(\ddot r - r\dot\theta^2) \qquad , \qquad F_\theta = m(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta) \tag{٤-١٠٦}$$

بگذارید ببینیم هر یک از چهار جمله در رابطه‌ی (٤-١٠٦) چه تفسیری دارد.

- جمله‌ی $m\ddot r$ روشن است: در حرکت دایره‌ای این جمله یعنی $F = ma$ در راستای شعاع.
- جمله‌ی $mr\ddot\theta$ نیز روشن است: برای حرکت دایره‌ای ، این جمله همان $F = ma$ در راستای مماسی است؛ چون $r\ddot\theta$

مشتق دوم فاصله‌ی $r\theta$ در امتداد پیرامون دایره است.

- جمله‌ی $-mr\dot{\theta}^2$: در حرکت دایره‌ای این جمله می‌گوید که نیروی شعاعی عبارت است از $-m(r\dot{\theta})^2/r=-mv^2/r$ که نیرویی آشنا است و شتاب مرکزگرای v^2/r را به وجود می‌آورد.
- جمله‌ی $2m\dot{r}\dot{\theta}$ اما چندان بدیهی نیست. این نیرو به نیروی *کوریولیس* مربوط است. از چند جانب به این جمله می‌توان اندیشید. یکی این که وجود آن برای پایسته ماندن تکانه‌ی زاویه‌ای لازم است. در فصل۱۲ در باره‌ی نیروی کوریولیس گفتنی زیادی خواهیم داشت.

مثال ۹-۴ (آونگ دایره ای): جرم m از ریسمان بدون جرم به طول ℓ آویزان است. شرایط چنان فراهم شده است که همانند شکل (۱۲-٤) جرم m روی دایره‌ای افقی حرکت کند و ریسمان با خط قائم زاویه‌ی ثابت β بسازد. بسامد زاویه‌ای ، ω، این حرکت را بیابید.

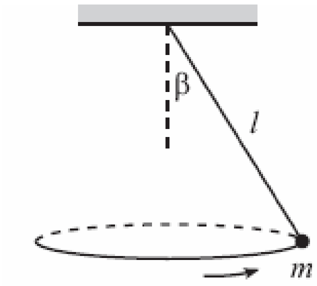
حل: جرم روی دایره حرکت می‌کند. پس نیروی شعاعی افقی باید $F_r=mr\dot{\theta}^2\equiv mr\omega^2$ (با $r=\ell\sin\beta$) و به سوی مرکز دایره باشد. نیروهای وارد به جرم عبارت‌اند از نیروی کشش ریسمان ، T ، و نیروی گرانش mg . این نیروها در شکل (۱۳-٤) نشان داده شده اند. در راستای قائم شتاب وجود ندارد. بنابراین، از $F=ma$ در راستای قائم و شعاعی به ترتیب خواهیم داشت:

$$T\cos\beta-mg=0 \qquad (٤-١٠٧)$$
$$T\sin\beta=m(\ell\sin\beta)\omega^2$$

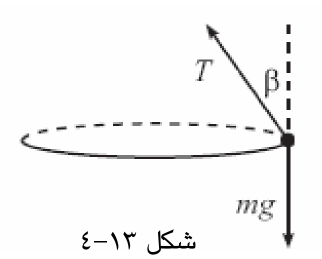
از حل این معادله‌ها ω به دست می‌آید:

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell\cos\beta}} \qquad (٤-١٠٨)$$

اگر $\beta\approx 90^\circ$ باشد، آنگاه $\omega\to\infty$ و این پذیرفتنی است. برای $\beta\approx 0^\circ$ داریم $\omega\approx\sqrt{g/\ell}$ که بسامد آونگ ساده با طول ℓ است.



شکل ۱۲-٤

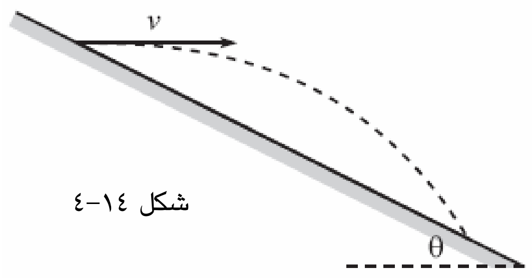


شکل ۱۳-٤

مثال‌های تکمیلی

ت-۱ به جسمی به جرم m نیروی $F(t)=F_\circ \cos\omega t$ وارد می‌شود. اگرمکان و سرعت اولیه‌ی جسم به ترتیب $x_\circ$ و $v_\circ$ باشند، $x(t)$ و $v(t)$ را بیابید.

ت-۲ به ذره‌ای به جرم m نیروی $F=-m\alpha v^{۲}$ وارد می‌شود. مکان اولیه‌ی ذره مبداء مختصات است و سرعت اولیه‌ی آن $v_\circ$ است. $x(t)$ و $v(t)$ را بیابید. همچنین، رابطه‌ای تقریبی برای $x(t)$ به دست آورید و توضیح دهید که چرا این پاسخ پذیرفتنی است.



شکل ٤-١٤

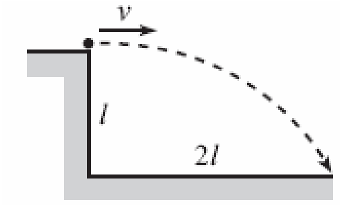
ت-۳ شیب سرپایینی سطحی با افق θ است (شکل ٤-١٤). از روی این سطح پرتابه‌ای با سرعت v به طور افقی پرتاب می‌شود. پس از چه مدت، پرتابه در روی سطح شیب‌دار فرود می‌آید؟

ت-۴ توپی با سرعت v به سوی دیواری به بلندی h و در فاصله‌ی d پرتاب می‌شود.

(الف): توپ با چه زاویه (یا زاویه‌های) θ باید پرتاب شود که بتواند درست از فراز دیوار بگذرد.

(ب): بیشینه مقدار d (برحسب v، h و g) که به ازای آن یک چنین زاویه‌ای وجود دارد، چیست؟

(پ): در حد $v\to\infty$ مقدار (تقریبی) دو پاسخ شما برای θ کدامند؟ چرا این پاسخ‌ها پذیرفتنی اند؟



شکل ٤-١٥

ت-۵ از بالای صخره‌ای به ارتفاع ℓ توپی با سرعت v افقی پرتاب می‌شود (شکل ٤-١٥). برای این که توپ در فاصله‌ی ۲ℓ از پای صخره فرود بیاید، v چقدر باید باشد؟

ت-۶ توپی با سرعت v_0 به سوی دیواری در فاصله‌ی ℓ پرتاب می‌شود. برای این که توپ در بیشینه ارتفاع ممکن با دیوار برخورد کند، $v_\circ$ چقدر باید باشد. فرض کنید $\ell<v_\circ^{۲}/g$ است (چرا؟)

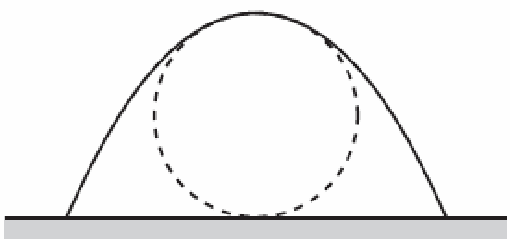
ت-۷ پرتابه‌ای با سرعت v و با زاویه‌ی θ پرتاب می‌شود. شعاع خم مسیر سهمی را در دو حالت زیر به دست آورید. (شعاع مسیر، شعاع دایره‌ای است که در نقطه‌ی مورد نظر بر مسیر مماس است).

راهنمایی: برای این دو قسمت توجه کنید که سرعت و شتاب نسبی را در آغاز مسیر و در بالاترین نقطه می‌شناسید.

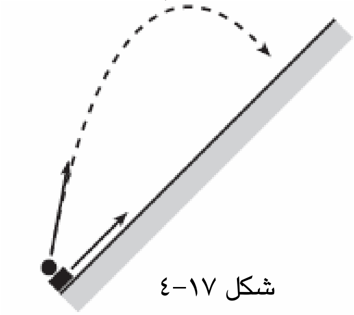
(الف) در بالاترین نقطه‌ی مسیر

(ب) در آغاز مسیر. (شعاع خم

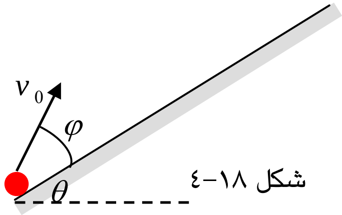
(پ): برای این که شعاع مسیر در بالاترین نقطه نصف بیشینه ارتفاع پرتابه باشد (شکل ٤-١٦) زاویه‌ی پرتاب چقدر باید باشد؟


شکل ٤-١٦

ت-۸ در یک لحظه، ارابه‌ای از سطح شیب‌داری با شیب β (نسبت به افق) بالا می‌رود و گلوله‌ای از درون آن با زاویه‌ی θ نسبت به افق شلیک می‌شود. برابر شکل (٤-١٧) ارابه و گلوله، هر دو از یک نقطه حرکت‌شان را آغاز می‌کنند. اگر بخواهیم در لحظه‌ای که ارابه به بیشینه ارتفاع مسیرش در روی سطح شیب‌دار می‌رسد، گلوله به درون ارابه فرو افتد، مقدار θ(برحسب β) چقدر باید باشد؟ اگر $\beta=٤٥^\circ$ باشد، θ را حساب کنید (شاید فکر کردید که فراموش کردم سرعت‌های اولیه‌ی ارابه و گلوله را



شکل ۴-۱۷



شکل ۴-۱۸

بدهم. برای حل مسئله واقعا به آنها نیازی نیست).

ت-۹ پرتابه‌ای از نقطه‌ی P پرتاب می‌شود. حرکت پرتابه به گونه‌ای است که فاصله‌اش همواره از نقطه‌ی P در حال افزایش است. بیشینه زاویه‌ای که پرتابه ممکن است نسبت به افق پرتاب شده باشد، کدام است؟

ت-۱۰ بر روی سطح شیب‌داری که با افق زاویه‌ی θ دارد، برابر شکل (۱۸-۴) توپی با سرعت اولیه‌ی $v_\circ$ و با زاویه‌ی φ نسبت به سطح شیب‌دار پرتاب می‌شود.

(الف): مسافتی را که توپ بر روی سطح شیب‌دار می‌پیماید حساب کنید (پاسخ برحسب $v_\circ$، g، θ و φ خواهد بود)

(ب): به ازای چه مقدار φ، برد (مسافت در امتداد سطح شیب‌دار) بیشینه می‌شود؟

ت-۱۱ ذره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta} = \omega$ حرکت می‌کند. معادله‌ی مسیرآن $r = r_\circ e^{\beta t}$ است. $r_\circ$ و β مقدارهای ثابت اند. به ازای چه مقدارهای β شتاب شعاعی، a_r ، ذره صفر است؟

مسئله‌ها

- **حل معادله‌ی دیفرانسیل**

۴-۱ (**نیروی نمایی**): به ذره‌ای با جرم m نیروی $F = ma_\circ e^{-bt}$ وارد می‌شود. مکان و سرعت اولیه صفرند. $x(t)$ را بیابید.

۴-۲ (**نیروی** $-kx$): ذره‌ای با جرم m تحت تاثیر نیروی $F(x) = -kx$ است $(k > \circ)$. مکان اولیه‌ی ذره $x_\circ$ و سرعت اولیه‌ی آن صفر است. $x(t)$ را بیابید.

۴-۳ (**نیروی** kx): ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر نیروی $F(x) = kx$ است $(k > \cdot)$. مکان اولیه‌ی ذره $x_\circ$ و سرعت اولیه‌ی آن صفر است. $x(t)$ را بیابید.

۴-۴ (**نیروی** $-bv^2$): به ذره‌ای با جرم m نیروی $F(v) = -bv^۲$ وارد می‌شود. مکان اولیه‌ی ذره صفر و سرعت اولیه‌ی آن $v_\circ$ است. $x(t)$ را بیابید.

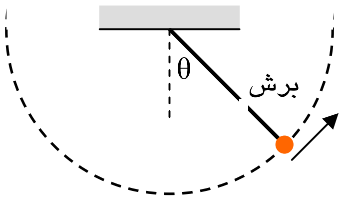
۴-۵ (**زنجیر افتان**) : زنجیری به طول ℓ را به طور کشیده در روی میز افقی بدون اصطکاک نگه داشته‌ایم. طول $y_\circ$ زنجیر از سوراخی در روی میز آویزان است. زنجیر را رها می‌کنیم. زنجیر از سوراخ سُر می‌خورد. طول بخش آویزان زنجیر از سوراخ را برحسب تابعی از زمان پیدا کنید. سرعت زنجیری درست هنگامی که از سطح میز جدا می‌شود چقدر است؟

۴-۶ (**پرتاب توپ**): توپی را با سرعت اولیه‌ی $v_\circ$ به طور قائم به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر نیروی پسار هوا به صورت $F_d = -m\alpha v$ داده شده باشد، سرعت توپ، v_f ، را درست پیش از برخورد با زمین پیدا کنید. در مقایسه با توپی که در خلاء پرتاب می‌شود، توپ ما زمان بیشتر یا کمتری را در هوا سپری می‌کند؟

۴-۷ (**نیروی** $-cv^{۳/۲}$) : در زمان $t = \cdot$ سرعت جرم m برابر با $v_\circ$ است. این ذره روی محور x ها حرکت می‌کند و به آن نیروی $F(v) = -cv^{۳/۲}$ وارد می‌شود. از رابطه‌ی (۱۰-۴) استفاده کنید و سرعت v را برحسب زمان t و دیگر پارامترهای مسئله بیابید.

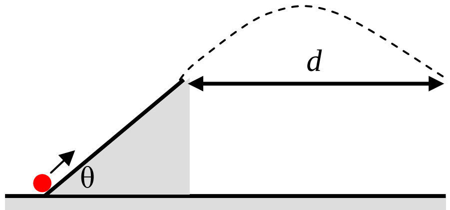
- **حرکت پرتابی**

۴-۸ (**بریدن ریسمان آونگ**): آونگی برابر شکل (۱۹-٤) از ریسمان بدون جرم و وزنه‌ای به جرم m در انتهای آن تشکیل شده است. وزنه و جرم را از حالت افقی رها می‌کنیم. وزنه رو به پایین تاب می‌خورد و سپس حرکت خود را رو به بالا پی می‌گیرد. هنگامی که ریسمان با خط عمود زاویه‌ی θ می سازد آن را می‌بریم. θ چقدر باید باشد تا جرم بیشترین مسافت افقی را در زمانی به پیماید که دوباره به ارتفاع بریده شدن ریسمان برمی‌گردد ؟ (سرعت جرم وقتی به اندازه‌ی h سقوط کند با $v=\sqrt{۲gh}$ داده می‌شود.)



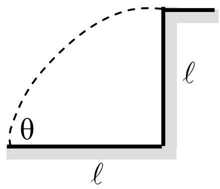
شکل ۱۹-٤

۴-۹ (**شلیک توپ**) **:** اگر توپی را قایم شلیک بکنیم بیشینه ارتفاع گلوله‌ی آن L می شود. گلوله‌ی دیگری را با همان سرعت در راستای سطح شیب داری به طول L و شیب θ شلیک می کنیم، شکل (۲۰- ٤) را ببینید. برای اینکه گلوله در زمان بازگشت به ارتفاع بالای سطح شیب‌دار مسافت افقی d را به پیماید، زاویه ی شیب θ چقدر باید باشد؟



شکل ۲۰-٤

۴-۱۰ (**پرتاب توپ**): توپی با سرعت v و با زاویه‌ی θ نسبت به افق از نقطه‌ای به فاصله‌ی ℓ از پای صخره‌ای به بلندی ℓ پرتاب می‌شود (شکل ۲۱-٤). برای این که توپ در لحظه‌ی برخورد با لبه‌ی صخره کسیرش افقی باشد، مقدارهای v و θ چقدر باید باشند ؟



شکل ۲۱-٤

۴-۱۱ (**بیشینه سطح زیر خم مسیر**): توپی با سرعت v از سطح زمین پرتاب می‌شود. برای اینکه سطح زیر خم مسیر بیشینه باشد، زاویه‌ی پرتاب چقدر باید باشد؟

۴-۱۲ (**توپ جهنده**): توپی به بالا پرتاب می‌شود و به ارتفاع h می‌رسد. سپس فرو می‌افتد واز سطح زمین وامی‌جهد. پس از هر واجهش ارتفاع توپ کسر f از ارتفاع قبلی می‌شود. درست پیش از ایستادن کامل، توپ چه مسافت کلی را پیموده است؟ زمان کل این مسافت را حساب کنید. سرعت میانگین توپ را به دست آورید.

۴-۱۳ (**پرتاب توپ از بالای صخره**): توپی با سرعت v از لبه‌ی صخره‌ای به ارتفاع h پرتاب می‌شود. توپ با چه زاویه‌ای نسبت به افق باید پرتاب شود تا بیشترین مسافت افقی را بپیماید؟ این مسافت بیشینه چقدر است؟ فرض کنید در پایین صخره ، زمین افقی است.

۴-۱۴ (**تغییر جهت حرکت**): توپی را از ارتفاع h بالای زمین رها می‌کنیم. توپ در ارتفاع y از زمین از روی سطحی وامی‌جهد (بدون اینکه سرعتش کم شود). این سطح شیب‌دار است و در نتیجه توپ نسبت به افق با زاویه‌ی θ از روی آن وامی‌جهد. برای اینکه توپ در زمان برخورد با زمین بیشترین مسافت افقی را بپیماید، y و θ چقدر باید باشند؟

۴-۱۵ (**طول بیشینه‌ی مسیر**): توپی باسرعت v از سطح زمین پرتاب می‌شود. اگر $\theta_{\circ}$ زاویه‌ی پرتابی باشد که به ازای آن طول مسیر پرتابه بیشینه می‌شود، نشان دهید که $\theta_{\circ}$ در رابطه‌ی زیر صدق می کند

$$\sin\theta_{\circ}\,\ell n\left(\frac{۱+\sin\theta_{\circ}}{\cos\theta_{\circ}}\right)=۱ \qquad (٤\text{-}۱۰۹)$$

با حل عددی می‌توانید نشان دهید که $\theta_{\circ}\approx ٥٦{,}٥^{\circ}$ است.

۴-۱۶ (باز هم تغییر جهت حرکت): توپی از ارتفاع h بالای زمین رها می‌شود. توپ در ارتفاع y ، بدون کاسته شدن از سرعتش، از سطحی وامی‌جهد. شیب سطح $^{\circ}$۴۵ است و در نتیجه ، توپ افقی وامی جهد. y چقدر باید باشد تا اینکه توپ بیشترین مسافت افقی را بپیماید. این مسافت بیشینه را حساب کنید.

۴-۱۷ (فاصله‌های برابر): برای این که بیشینه ارتفاع پرتابه‌ای با فاصله‌ی افقی آن برابر باشد، زاویه‌ی پرتاب چقدر باید باشد؟

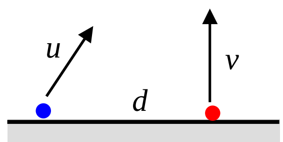
۴-۱۸ (پرتاب در باد): از بالای صخره‌ی عمودی به ارتفاع h توپی را افقی به سمت راست پرتاب می کنیم. باد افقی می‌وزد. اگر اثر باد روی توپ را هم‌ارز با نیروی ثابتی به سمت چپ در نظر بگیریم (ساده انگاری) سرعت توپ چقدر باید باشد تا توپ در پای صخره بر زمین فرود آید ؟

۴-۱۹ (بازهم پرتاب در باد): توپی را به سوی خاور پرتاب می‌کنیم. باد افقی و به سوی خاور می‌وزد. فرض کنید اثر باد روی توپ با نیروی ثابتی برابر با وزن توپ هم‌ارز است. توپ باید با چه زاویه‌ای پرتاب شود تا بیشینه مسافت افقی را بپیماید؟

۴-۲۰ (گرانش فزاینده): در سیاره‌ی فرضی گراویتوس، پرتابه‌ای با سرعت $v_{\circ}$ و با زاویه‌ی θ بالای افق شلیک می‌شود. گراویتوس ستاره‌ی عجیبی است و شتاب گرانش آن با زمان افزایش پیدا می‌کند. در این سیاره شتاب گرانش در لحظه‌ی شلیک صفر است. به بیان دیگر، $g(t)=\beta t$ و β ثابت داده شده است. پرتابه چه مسافت افقی را می‌پیماید؟ برای بیشینه شدن این مسافت، θ چقدر باید باشد؟

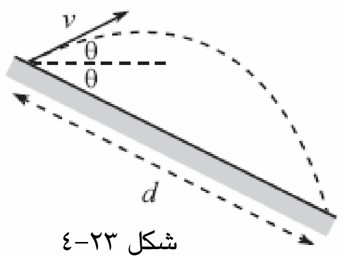
۴-۲۱ (برخورد پرتابه‌ها): دو گلوله در فاصله‌ی d از هم به طور همزمان شلیک می‌شوند. گلوله‌ی سمت راست با سرعت v و عمودی شلیک می‌شود. شکل (۲۲-٤). می‌خواهیم گلوله سمت چپ را همزمان و با سرعت مناسب $\mathbf{u}$ چنان شلیک کنیم تا وقتی هر دو گلوله به بیشینه ارتفاع خود رسیدند، با هم برخورد کنند. $\mathbf{u}$ چگونه باید باشد (مولفه‌های افقی و عمودی آن را مشخص کنید) ؟

برای فاصله‌ی معین d باید v چقدر باشد تا u کمینه شود؟



شکل ۲۲-٤

۴-۲۲ (زاویه های برابر): شیب یک سطح سرازیری θ است. پرتابه‌ای از روی این سطح با سرعت v و با زاویه‌ی θ به بالای افق شلیک می‌شود (شکل ۲۳-٤ را ببینید.) مسافت d که پرتابه در امتداد سطح می‌پیماید چقدر است؟ در حالت حدی $\theta \to 90^{\circ}$ مقدار d چقدر می‌شود؟ به ازای چه مقدار θ ، *مسافت افقی* بیشینه می شود؟



شکل ۲۳-٤

۴-۲۳ (ارابه، گلوله و سطح شیب‌دار): ارابه‌ای روی سطحی شیب‌دار نگه داشته شده است و در آن لوله‌ای چنان جاسازی شده است که محور لوله به سطح شیب‌دار عمود است. ارابه را رها می‌کنیم تا روی سطح حرکت کند. در زمانی دیرتر گلوله‌ای از درون لوله شلیک می‌شود. آیا گلوله سرانجام به درون لوله فرومی‌افتد؟ (*راهنمایی:* مختصات را هوشیارانه برگزینید.)

- **حرکت در محیط با نیروی پسار**

۴-۲۴ (کدام مهم است): رابطه‌ی (٤٦-٤) نسبت $f_{\text{quad}}/f_{\text{lin}}$ را به دست می‌دهد. برای توپ تنیس به قطر ۷cm در چه سرعتی این دو نیروی پسار از اهمیت یکسان برخوردارند؟ برای چه بازه‌ی تقریبی سرعت‌ها می‌توان نیروی پسار را فقط از مرتبه‌ی دو به حساب آورد؟ در شرایط متعارف آیا چشم‌پوشی از نیروی پسار خطی تقریب خوبی است؟ این پرسش‌ها را برای یک توپ بسکتبال با قطر ۷۰ cm نیز پاسخ دهید.

۴-۲۵ (افتادن توپ در محیط با نیروی پسار): پرتابه‌ای با سرعت اولیه‌ی $v_{\circ y}$ رو به پائین پرتاب شده است. نیروی پسار هوا

با سرعت متناسب است. اگر $v_{\circ y}$ از سرعت حد v_{term} بیشتر باشد، تغییرات سرعت با زمان چگونه است؟ برای حالتی که $v_{\circ y}=2v_{\text{term}}$ است، تابع $v_y(t)$ را برحسب زمان رسم کنید.

۴-۲۶ (**حرکت افقی اتومبیل**): اتومبیلی با سرعت $v_\circ$ در راستای محور x ها حرکت می‌کند. نیروی پسار هوا با توان اول سرعت متناسب است و اتومبیل در زمان $t=0$ در مکان $x=0$ است. معادله‌ی حرکت اتومبیل را بنویسید. سرعت و مکان اتومبیل را به صورت تابعی از زمان به دست آورید و آنها را رسم کنید.

۴-۲۷ (**نیروی پسار مرتبه دو**): جسمی در راستای محور x ها حرکت می‌کند. نیروی پسار هوا با توان دوم سرعت متناسب است و نیروی دیگری به جسم وارد نمی‌شود (از اصطکاک چشم‌پوشی شده است.) معادله‌ی حرکت را بنویسید. سرعت و مکان جسم را به صورت تابعی از زمان بیابید و آنها را رسم کنید.

۴-۲۸ (**یک مقایسه**): در بخش ۲-٤-٤ دیدیم که سرعت ذره‌ای که از حالت سکون رو به پائین رها می‌شود به صورت $\dot{y}=\frac{g}{k}(1-e^{-kt})$ است. در آغاز حرکت که سرعت در راستای y ، اندک است نیروی پسار هوا باید بی‌اهمیت باشد و رابطه‌ی بالا باید با سرعت سقوط آزاد در خلاء، $v_y=gt$ ، سازگار باشد. (**الف**) این گزاره را ثابت کنید. (**ب**) نشان دهید که مکان جسم رها شده نیز برای زمان‌های کوتاه t به صورت $y=1/2\,gt^2$ در می‌آید.

۴-۲۹ (**پسار با** $-cv^{3/2}$): جرم m در زمان $t=0$ دارای سرعت $v_\circ$ است و در راستای محور x در محیطی حرکت می‌کند که نیروی پسار آن به صورت $F(v)=-cv^{3/2}$ است. سرعت جسم را برحسب زمان بیابید. در چه هنگامی این جسم به حالت سکون می‌رسد (اگر برسد)؟

۴-۳۰ (**نیروی نمایی**): جرم m مقید به حرکت در راستای محور x است و به آن نیروی $F(v)=-F_\circ e^{v/c}$ وارد می شود. $F_\circ$ و c مقدارهای ثابت اند. اگر سرعت اولیه در زمان $t=0$ مثبت باشد ($v_\circ>0$) آنگاه $v(t)$ را بیابید. در چه هنگامی این جرم به ایست لحظه‌ای می‌رسد؟ از $v(t)$ انتگرال بگیرید و $x(t)$ را به دست آورید. جرم در هنگامی که به ایست لحظه‌ای می‌رسد چه مسافتی را پیموده است؟

۴-۳۱ (**باز هم پسار** $-cv^{3/2}$): سرعت ذره‌ای به جرم m در مبداء مختصات برابر $v_\circ$ است. جسم در راستای محور x حرکت می‌کند و نیروی پسار $F(v)=-cv^{3/2}$ به آن وارد می‌شود. معادله‌ی حرکت جسم را بنویسید. از $a=v\,dv/dx$ استفاده کنید و x را برحسب تابعی از v به دست آورید. نشان دهید که ذره سرانجام مسافت $2m\sqrt{v_\circ}/c$ را خواهد پیمود.

۴-۳۲ (**نیروی پسار با دو جمله**): جسمی را در نظر بگیرید که در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. نیروی پسار وارد به آن به صورت $f=-bv-cv^2$ است. قانون دوم نیوتن را برای این نیرو بنویسید و با جداسازی متغیرها v را به دست آورید. رفتار v را برحسب زمان رسم کنید. وابستگی زمانی آن را برای t های بزرگ توضیح دهید و بگویید کدام جمله در قانون نیرو برای t بزرگ برجسته می‌شود.

۴-۳۳ (**نیروی** cv^2 **و حرکت بالا رونده**): توپ تنیس با سرعت $v_\circ$ به طور عمودی به بالا پرتاب می‌شود. اندازه‌ی نیروی پسار هوا به صورت $f=cv^2$ است. معادله‌ی حرکت را برای مسیر رو به بالای توپ (جهت مثبت y رو به بالا) بنویسید و نشان دهید که می‌توان آن را به شکل $\dot{v}=-g[1+(v/v_{\text{term}})^2]$ نوشت. با استفاده از $a=\dot{v}=v\,dv/dy$ متغیرهای معادله حرکت را جداسازی کنید (یعنی همه‌ی جمله‌های دارای v را در یک طرف و جمله‌هایی که در آن ها y وجود دارد در طرف دیگر تساوی جمع آوری بکنید) و آن را حل کنید- ازدو طرف انتگرال بگیرید و y را برحسب v به دست آورید. نشان دهید که بیشینه ارتفاع توپ تنیس $y_{\max}=\left(v_{\text{term}}^2/2g\right)\ell n\left(v_{\text{term}}^2+v_\circ^2\right)/v_{\text{term}}^2$ است.

۴-۳۴ (**نیروی** cv^{2} **و حرکت پایین رونده**): دوباره توپ تنیس مسئله‌ی ۳۳-٤ را در نظر بگیرید و معادله‌ی حرکت آن را برای مسیر رو به پایین بنویسید. (توجه کنید که با نیروی پسار مرتبه دو سرعت، معادله‌ی حرکت رو به پایین و رو به بالا تفاوت دارند و باید جداگانه بررسی شوند.) v را برحسب y به دست آورید. حرکت رو به پایین توپ از $y_{\max}$ بالا (مسئله ۳۲-٤) آغاز می‌شود. نشان دهید که در هنگام بازگشت توپ به زمین سرعت آن $v_{\text{term}}v_{0}\Big/\sqrt{v_{\text{term}}^{2}+v_{0}^{2}}$ است.

- **حرکت در صفحه- مختصات قطبی**

۴-۳۵ (**شتاب قائم**): حلقه‌ای به شعاع R در صفحه‌ی قائم قرار دارد. در بالاترین نقطه‌ی آن دانه‌ی تسبیحی قرار دارد. به دانه‌ی تسبیح تلنگر کوچکی وارد می‌کنیم و دانه‌ی تسبیح روی حلقه سُر می‌خورد. در کدام نقاط روی حلقه شتاب دانه تسبیح در راستای قائم است؟ (روشن است که دو تا از این نقطه ها بالاترین و پایین ترین نقطه‌های حلقه‌اند که در آنجا $a \approx 0$ است. دو نقطه‌ی دیگر در دو سوی حلقه وجود دارند. آنها را بیابید) این شتاب قائم چقدر است؟ **توجه**: ما هنوز پایستگی انرژی را بررسی نکرده‌ایم، با وجود این، شما از این واقعیت استفاده کنید که سرعت دانه‌ی تسبیح وقتی به اندازه‌ی h سقوط می‌کند برابر است با $v=\sqrt{2gh}$.

۴-۳۶ (**شتاب افقی**): حلقه‌ای به شعاع R در صفحه‌ی قائم قرار دارد. در بالاترین نقطه آن دانه‌ی تسبیحی قرار دارد. به دانه‌ی تسبیح تلنگر کوچکی وارد می‌کنیم و دانه‌ی تسبیح روی حلقه سُر می‌خورد. در کدام نقاط روی حلقه شتاب دانه تسبیح در راستای افقی است؟ **توجه**: ما هنوز پایستگی انرژی را بررسی نکرده‌ایم ، با این وجود، شما از این واقعیت استفاده کنید که سرعت دانه‌ی تسبیح وقتی به اندازه‌ی h سقوط می‌کند برابر است با $v=\sqrt{2gh}$.

۴-۳۷ (**بیشینه نیروی افقی**): حلقه‌ای به شعاع R در صفحه‌ی قائم قرار دارد. در بالاترین نقطه‌ی آن دانه‌ی تسبیحی قرار دارد. به دانه‌ی تسبیح تلنگر کوچکی وارد می‌کنیم و دانه‌ی تسبیح روی حلقه سُر می‌خورد. مولفه‌ی افقی نیرو را که حلقه به دانه‌ی تسبیح وارد می‌کند در نظر بگیرید. در کدام نقاط روی حلقه این نیرو به بیشینه یا کمینه‌ی موضعی خود می‌رسد؟ مانند مسئله‌ی بالا از $v=\sqrt{2gh}$ استفاده کنید.

۴-۳۸ (**یافتن** F_r **و** F_θ): در مختصات کارتزی یک بردار عمومی به صورت زیر داده می‌شود

$$\mathbf{r}=x\,\hat{\mathbf{x}}+y\,\hat{\mathbf{y}}=r\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}}+r\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} \qquad (٤-١١٠)$$

دو بار ازاین رابطه مشتق بگیرید و رابطه‌ی (۱۰۳-٤) را به دست آورید. با استفاده از (۹۸-٤) نشان دهید که نتیجه را می‌توان به صورت رابطه‌ی (۱۰۲-٤) درآورد. توجه کنید که برعکس $\hat{\mathbf{r}},\hat{\boldsymbol{\theta}}$ در این جا $\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}}$ با زمان تغییر نمی‌کنند.

۴-۳۹ (**نیروی** $F_\theta=3m\dot{r}\dot{\theta}$): نیروی وارد به ذره‌ای فقط مولفه‌ی زاویه‌ای دارد: $F_\theta=3m\dot{r}\dot{\theta}$. نشان دهید که $\dot{r}=\pm\sqrt{Ar^{4}+B}$ است . A و B ثابت‌های انتگرال گیری‌اند و با شرایط اولیه تعیین می‌شوند. اگر ذره از مکانی با $r\neq 0$ شروع به حرکت بکند، نشان دهید که در زمان محدودی به $r=\infty$ می‌رسد. (این نیرو هیچ فیزیک خاصی دربر ندارد. تنها حل $F=ma$ را شدنی می‌کند.)

۴-۴۰ (**نیروی** $F_\theta=2m\dot{r}\dot{\theta}$): به ذره‌ای نیروی $F_\theta=2m\dot{r}\dot{\theta}$ وارد می‌شود . نشان دهید $r=Ae^{\theta}+Be^{-\theta}$ است. A و B ثابت‌های انتگرال گیری‌اند و با شرایط اولیه تعیین می‌شوند.(این یک نیروی فیزیکی است. اگر ذره‌ای روی یک میله‌ی راست افقی باشد و میله را حول یک انتهایش با سرعت ثابتی بچرخانیم، آنگاه نیروی عمودی وارد به ذره از سوی میله برابراست با $2m\dot{r}\dot{\theta}$.)

۴-۴۱ (**نیروی** $F_\theta=m\dot{r}\dot{\theta}$): به ذره‌ای نیروی $F_\theta=m\dot{r}\dot{\theta}$ وارد می‌شود. نشان دهید $\dot{r}=\sqrt{A\ln r+B}$ است. A و B ثابت

های انتگرال‌گیری‌اند و با شرایط اولیه تعیین می‌شوند. (این نیرو هیچ فیزیک خاصی دربر ندارد. تنها حل $F = ma$ را شدنی می‌کند.)

۴-۴۲ (**بیش از یک زاویه‌ی پرتاب**): پرتابه‌ای با سرعت $۱۰۰\ \mathrm{m/s}$ با زاویه‌ی ۶۰° نسبت به افق پرتاب شده است. از نیروی پسار هوا چشم‌پوشی کنید. بیشینه ارتفاع پرتابه و برد آن را حساب کنید. چه زاویه‌ی پرتاب دیگری می‌تواند همان برد را به وجود آورد؟ زمان پرواز پرتابه را برای هر دو حالت حساب کنید.

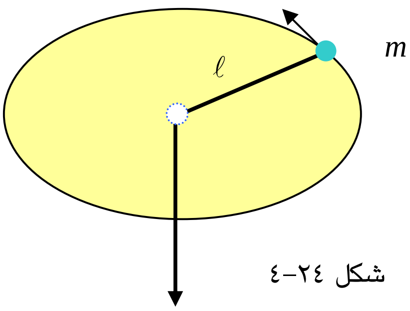
۴-۴۳ (**پرتاب از زمین شیب‌دار**): پرتابه‌ای با سرعت v و زاویه‌ی α نسبت به افق پرتاب می‌شود. از نیروی پسار هوا چشم پوشی کنید و (**الف**): معادله‌ی مسیر پرتابه را به دست آورید. (**ب**): اگر شیب زمین β درجه باشد، نشان دهید که برد پرتابه (اندازه گیری افقی) برابر است با

$$R = \frac{۲v^۲}{y}\frac{\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad (۴-۱۱۱)$$

(**پ**): برای این که پرتابه بیشینه برد را داشته باشد، زاویه‌ی پرتاب چقدر باید باشد؟

۴-۴۴ (**زاویه‌ی پرتاب**): سرعت پرتابه‌ای در نقطه‌ی اوجش $\sqrt{۶/۷}$ سرعت کل پرتابه در نیم راه اوج آن است (یعنی هنگامی که ارتفاعش نصف ارتفاع اوج است). زاویه‌ی پرتاب را حساب کنید.

۴-۴۵ (**جرمی روی میز**): ذره‌ای به جرم m به انتهای ریسمانی به طول ℓ بسته شده است. ذره در روی میز افقی بدون اصطکاک با سرعت زاویه‌ای ω بر روی یک مسیر دایره‌ای می‌چرخد. انتهای دیگر ریسمان از سوراخ ریزی در روی میز می‌گذرد. این انتهای آزاد ریسمان را از زیر میز به آرامی می‌کشیم (به طوری که کشش ریسمان ثابت بماند) و شعاع مسیر دایره‌ای ذره کاهش پیدا می‌کند شکل (۴-۲۴) . هنگامی که طول آن بخش از ریسمان که در روی میز است به $\ell/2$ می‌رسد، سرعت زاویه‌ای ذره چقدر است؟ نشان دهید که افزایش انرژی جنبشی ذره با کار نیرویی که ریسمان را می کشد، برابر است.



شکل ۴-۲۴

پاسخ مثال‌های تکمیلی

ت-۱ شتاب a در رابطه‌ی $F=ma$ به صورت dv/dt بنویسید. داریم

$$F_\circ \cos\omega t = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_\circ^t \frac{F_\circ}{m}\cos\omega t' dt' = \int_{v_\circ}^{v} dv'$$

$$\Rightarrow \frac{F_\circ}{m\omega}\sin\omega t'\Big|_0^t = v - v_\circ \Rightarrow \frac{F_\circ}{m\omega}\sin\omega t = v - v_\circ$$

$$\Rightarrow v(t) = v_\circ + \frac{F_\circ}{m\omega}\sin\omega t \qquad (\text{٤-١١٢})$$

برای یافتن مکان $x(t)$ اینک v را به صورت dx/dt بنویسید. داریم

$$\frac{dx}{dt} = v_\circ + \frac{F_\circ}{m\omega}\sin\omega t \Rightarrow \int_{x_\circ}^{x} dx' = \int_{v_\circ}^{v}\left(v_\circ + \frac{F_\circ}{m\omega}\sin\omega t'\right)dt'$$

$$\Rightarrow x - x_\circ = \left(v_\circ t' - \frac{F_\circ}{m\omega^۲}\cos\omega t'\right)\Bigg|_\circ^t \Rightarrow x - x_\circ = v_\circ t - \frac{F_\circ}{m\omega^۲}\cos\omega t + \frac{F_\circ}{m\omega^۲}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_\circ + v_\circ t - \frac{F_\circ}{m\omega^۲}\cos\omega t + \frac{F_\circ}{m\omega^۲} \qquad (\text{٤-١١٣})$$

توجه کنید که به ازای $t=\circ$ به دست می‌آید: $v(t=\circ)=v_\circ$ و $x(t=\circ)=x_\circ$ که درست‌اند.

ت-۲ شتاب a به صورت dv/dt بنویسید. داریم

$$-m\alpha v^۲ = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow -\int_\circ^t \alpha\, dt' = \int_{v_\circ}^{v}\frac{dv'}{v'^۲} \Rightarrow -\alpha t = -\frac{۱}{۳v'^۲}\Bigg|_{v_\circ}^{v}$$

$$\Rightarrow -۲\alpha t = \frac{۱}{v_\circ^۲} - \frac{۱}{v^۲} \Rightarrow v(t) = \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{v_\circ^۲}+۲\alpha t}} \qquad (\text{٤-١١٤})$$

برای یافتن $x(t)$ حالا v را به صورت dx/dt بنویسید.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{v_\circ^۲}+۲\alpha t}} \Rightarrow \int_\circ^x dx' = \int_\circ^t \frac{dt'}{\sqrt{\frac{۱}{v_\circ^۲}+۲\alpha t'}}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{۱}{\alpha}\sqrt{\frac{۱}{v_\circ^۲}+۲\alpha t'}\,\Bigg|_\circ^t = \frac{۱}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{۱}{v_\circ^۲}+۲\alpha t} - \frac{۱}{v_\circ}\right) = \frac{۱}{\alpha v_\circ}\left(\sqrt{۱+۲\alpha v_\circ^۲ t} - ۱\right) \qquad (\text{٤-١١٥})$$

ت-۳ حل ۱ محورهای دستگاه مختصات را افقی و قائم در نظر بگیرید. موقعیت x پرتابه در این چارچوب $x=vt$ و موقعیت قائم آن $y=-gt^2/2$ است. وقتی پرتابه در روی سطح شیب‌دار فرود می‌آید که

$$\frac{y}{x} = -\tan\theta \Rightarrow \frac{-gt^۲/۲}{vt} = -\tan\theta \Rightarrow t = \frac{۲v\tan\theta}{g} \qquad (\text{٤-١١٦})$$

حل ۲ این بار محورهای مختصات را در امتداد سطح شیب‌دار و عمود بر آن در نظر بگیرید. سرعت اولیه در راستای محور عمود بر سطح شیب‌دار $v\sin\theta$ و در امتداد سطح $v\cos\theta$ است. شتاب گرانش در راستای محور قائم $g\cos\theta$ است. در این مختصات داریم

$$x = vt\cos\theta \quad , \quad y = vt\sin\theta - \frac{۱}{۲}gt^{۲}\cos\theta \qquad (۴-۱۱۷)$$

$$\dot{x} = v\cos\theta \quad , \quad \dot{y} = v\sin\theta - gt\cos\theta \qquad (۴-۱۱۸)$$

زمان رسیدن به نقطه‌ی اوج ($\dot{y} = ۰$) دو برابر زمانی است که جسم در هوا پرواز می‌کند. بنابراین،

$$t = ۲\frac{v\sin\theta}{g\cos\theta} = \frac{۲v}{g}\tan\theta \qquad (۴-۱۱۹)$$

ت-۴ زمان لازم برای رسیدن پرتابه به دیوار عبارت است از $(v\cos\theta)t = d \;\Rightarrow\; t = d/v\cos\theta$. در این زمان ارتفاع پرتابه برابر است با $y = (v\sin\theta)t - gt^{۲}/۲$. می‌خواهیم این ارتفاع برابر h باشد. پس:

$$h = (v\sin\theta)\left(\frac{d}{v\cos\theta}\right) - \frac{۱}{۲}g\left(\frac{d}{v\cos\theta}\right)^{۲} \;\Rightarrow\; h = d\tan\theta - \frac{gt^{۲}}{۲v^{۲}}\frac{۱}{\cos^{۲}\theta} \qquad (۴-۱۲۰)$$

برای به دست آوردن θ از رابطه‌ی زیر استفاده کنید"

$$\frac{۱}{\cos^{۲}\theta} = \frac{\sin^{۲}\theta + \cos^{۲}\theta}{\cos^{۲}\theta} = \tan^{۲}\theta + ۱ \qquad (۴-۱۲۱)$$

بنابراین، می‌توان نوشت

$$h = d\tan\theta - \frac{gd^{۲}}{۲v^{۲}}\left(\tan^{۲}\theta + ۱\right) \;\Rightarrow\; \tan^{۲}\theta - \frac{۲v^{۲}}{gd}\tan\theta + \left(۱ + \frac{۲v^{۲}h}{gd^{۲}}\right) = ۰ \qquad (۴-۱۲۲)$$

$$\Rightarrow\; \tan\theta = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲v^{۲}}{gd} \pm \sqrt{\frac{۴v^{۴}}{g^{۲}d^{۲}} - ۴\left(۱ + \frac{۲v^{۲}h}{gd^{۲}}\right)}\right) = \frac{v^{۲}}{gd} \pm \frac{v^{۲}}{gd}\sqrt{۱ - \frac{g^{۲}d^{۲}}{v^{۴}} - \frac{۲gh}{v^{۲}}} \qquad (۴-۱۲۳)$$

(ب): فقط هنگامی برای θ پاسخی وجود دارد که عبارت زیر علامت رادیکال مثبت باشد. پس

$$۱ - \frac{g^{۲}d^{۲}}{v^{۴}} - \frac{۲gh}{v^{۲}} > ۰ \;\Rightarrow\; ۱ - \frac{۲gh}{v^{۲}} > \frac{g^{۲}d^{۲}}{v^{۴}} \;\Rightarrow\; \frac{v^{۴}}{g^{۲}}\left(۱ - \frac{۲gh}{v^{۲}}\right) > d^{۲}$$

$$\Rightarrow\; \frac{v^{۲}}{g}\sqrt{۱ - \frac{۲gh}{v^{۲}}} > d \qquad (۴-۱۲۴)$$

(پ): وقتی $v \to \infty$ میل کند، جمله‌ی $g^{۲}d^{۲}/v^{۴}$ در رابطه‌ی (۱۲۳-۴) قابل چشم‌پوشی است و بنابراین

$$\tan\theta \approx \frac{v^{۲}}{gd} \pm \frac{v^{۲}}{gd}\sqrt{۱ - ۲gh/v^{۲}} \approx \frac{v^{۲}}{gd} \pm \frac{v^{۲}}{gd}\left(۱ - gh/v^{۲}\right)$$

$$\Rightarrow\; \tan\theta = \frac{v^{۲}}{gd} \pm \left(\frac{v^{۲}}{gd} - \frac{h}{d}\right) \qquad (۴-۱۲۵)$$

برای علامت "+" داریم

$$\tan\theta \approx \frac{۲v^{۲}}{gd} - \frac{h}{d} \qquad (۴-۱۲۶)$$

این پاسخ به ازای $v \to \infty$ به بینهایت میل می‌کند و خواهیم داشت $\tan\theta = \infty \;\Rightarrow\; \theta = ۹۰^\circ$. این پاسخ پذیرفتنی است، چون پرتابه تقریبا عمودی پرتاب می‌شود و زمان طولانی پرواز در فضا ضرب‌درمقدار اندک v_x اندازه‌ی "میانگین" d را به دست می‌دهد. برای علامت" – "خواهیم داشت $\tan\theta \approx h/d$. این پاسخ هم پذیرفتنی است؛ چون در این حالت پرتابه اساسا در ارتفاع دیوار مستقیم به سوی دیوار پرتاب می‌شود. وچنان سریع به این نقطه می‌رسد که زمانی برای اثر کردن نیروی گرانش بای نمی گذارد.

ت–۵ از مولفه‌ی x حرکت داریم $x = ۲\ell = vt \;\Rightarrow\; t = ۲\ell/v$ و از مولفه‌ی y حرکت: $y = \ell = gt^۲/۲$

$$\Rightarrow\; \frac{۱}{۲} g\left(\frac{۲\ell}{v}\right)^۲ = \ell \;\Rightarrow\; \frac{۲g\ell^۲}{v^۲} = \ell \;\Rightarrow\; v = \sqrt{۲g\ell} \qquad (٤–۱۲۷)$$

ت–۶ نخست ببینیم چرا باید $\ell < v^۲/g$ باشد. مسافت افقی که توپ می‌پیماید $\sin ۲\theta \left(v^۲/g\right)$ است (نگاه کنید به رابطه‌ی (۳۹–٤) در مثال ٥–٤). بیشینه مقدار آن $v^۲/g$ است. پس ، اگر $\ell > v^۲/g$ باشد، توپ به دیوار نخواهد رسید. زمان لازم برای این که توپ به دیوار برسد $\left(\ell/v_x\right) = \left(\ell/v\cos\theta\right)$ است. ارتفاع توپ در این زمان برابر است با

$$y = (v\sin\theta)t - \frac{۱}{۲}gt^۲$$

$$= (v\sin\theta)\left(\frac{\ell}{v\cos\theta}\right) - \frac{۱}{۲}g\left(\frac{\ell}{v\cos\theta}\right)^۲ = \ell\tan\theta - \frac{g\ell^۲}{۲v^۲}\frac{۱}{\cos^۲\theta} \equiv H(\theta) \qquad (٤–۱۲۸)$$

می‌خواهیم تابع $H(\theta)$ بیشینه باشد. از آن نسبت به θ مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$۰ = \frac{dH}{d\theta} = \frac{\ell}{\cos^۲\theta} - \frac{g\ell^۲}{۲v^۲}\left(\frac{-۲}{\cos^۳\theta}\right)(-\sin\theta) \;\Rightarrow\; \ell = \frac{g\ell^۲}{v^۲}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \;\Rightarrow\; \tan\theta = \frac{v^۲}{g\ell} \qquad (٤–۱۲۹)$$

توجه کنید که چون ما احتیاج داریم $\ell < v^۲/g$ باشد، باید داشته باشیم $\tan\theta > 1 \Rightarrow \theta > ٤٥^\circ$ باید باشد. همچنین توجه کنید که وقتی توپ با دیوار برخورد می‌کند در بالاترین ارتفاع مسیرش **نیست**. (اگر ℓ فقط اندکی کم‌تر از $v^۲/g$ بود، حتما به دیوار هم نمی‌رسید).

ت–۷ **(الف)**: در بالاترین نقطه‌ی مسیر، $v_y = 0$ و سرعت کل برابر $v_x = v\cos\theta$ است. در این نقطه شتاب بر مسیر عمود و برابر g است. بنابراین:

$$a = \frac{v^۲}{r} = \frac{(v\cos\theta)^۲}{r} \;\Rightarrow\; r = \frac{(v\cos\theta)^۲}{g} \qquad (٤–۱۳۰)$$

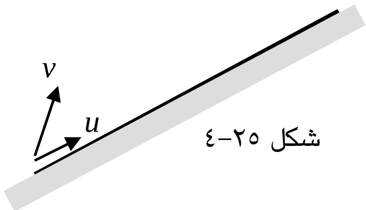
(ب): سرعت در آغاز حرکت v و مولفه‌ی شتاب که بر مسیر عمود باشد برابر $g\cos\theta$ است (مولفه‌ی شتاب در امتداد مسیر در یافتن شعاع مسیر نقشی ندارد. وقتی دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر خم مسیر مماس باشد، شعاع آن بر مسیر عمود است.)

$$\Rightarrow\; r = \frac{v^۲}{a} = \frac{v^۲}{g\cos\theta} \qquad (٤–۱۳۱)$$

(پ): بیشینه ارتفاع عبارت است از $\left(v_y^۲/۲g\right) = (v\sin\theta)^۲/۲g$ و ما می‌خواهیم

$$r=\frac{1}{2}h_{\max}\ \Rightarrow\ \frac{(v\cos\theta)^2}{g}=\frac{1}{2}\frac{(v\sin\theta)^2}{2g}\ \Rightarrow\ 4\cos^2\theta=\sin^2\theta\ \Rightarrow\ \tan\theta=2\ \Rightarrow\ \theta=63.4^\circ \qquad (٤-١٣٢)$$

ت-۸ حل ۱ سرعت‌های اولیه‌ی ارابه را u و گلوله را v بنامید (شکل ۲۵-۴) .


شکل ۲۵-۴

رویکرد ما برای حل این مسئله از این قرار است که (۱) زمان فرود آمدن گلوله روی سطح شیب‌دار را مساوی زمان رسیدن ارابه به بیشینه ارتفاع آن قرار خواهیم داد. (۲) برای این زمان مسافت‌ها را در امتداد سطح مساوی هم قرار خواهیم داد. گلوله وقتی در روی سطح شیب‌دار فرود می‌آید که $y/x=\tan\beta$ است.

$$\frac{y}{x}=\frac{(v\sin\theta)t-(1/2)gt^2}{(v\cos\theta)t}=\tan\beta$$

$$\Rightarrow\quad t=\frac{2v\cos\theta}{g}(\tan\theta-\tan\beta) \qquad (٤-١٣٣)$$

ارابه وقتی به بیشینه ارتفاع خود می‌رسد که $t=u/g\sin\beta$ باشد؛ چون شتاب در امتداد سطح شیب‌دار $g\sin\beta$ است. مسافتی که ارابه در روی سطح می‌پیماید $x=-(1/2)(g\sin\beta)t^2+ut$ است وارابه وقتی به بیشینه ارتفاع خود می‌رسد که سرعتش در امتداد سطح شیب‌دار صفر شود $\dot{x}=-gt\sin\beta+u=0$ و از اینجا زمان $t=u/g\sin\beta$ به دست می‌آید. از برابری این دو زمان داریم

$$\frac{u}{g\sin\theta}=\frac{2v\cos\theta}{g}(\tan\theta-\tan\beta)\ \Rightarrow\ u=2v\sin\theta\cos\theta(\tan\theta-\tan\beta) \qquad (٤-١٣٤)$$

حالا از این که مسافت‌های ارابه و گلوله در امتداد سطح شیب‌دار باید مساوی باشد استفاده می‌کنیم. مسافتی را که گلوله در راستای افقی می‌پیماید $(v\cos\theta)t$ است. اگر آن را بر $\cos\beta$ تقسیم کنیم، مسافت گلوله در امتداد سطح به دست می‌آید. پس،

$$\frac{(v\cos\theta)t}{\cos\beta}=ut-\frac{1}{2}(g\sin\beta)t^2\ \Rightarrow\ \frac{v\cos\theta}{\cos\beta}=u-\frac{1}{2}(g\sin\beta)\left(\frac{u}{g\sin\beta}\right) \qquad (٤-١٣٥)$$

و بنابراین

$$v\cos\theta=\frac{1}{2}u\cos\beta \qquad (٤-١٣٦)$$

این پاسخ پذیرفتنی است: سزعت افقی گلوله با میانگین سرعت افقی ارابه برابر است. از ترکیب رابطه‌های (۱۳۴-۴) و (۱۳۶-۴) به دست می‌آید

$$v\cos\theta=\frac{1}{2}\big(2v\sin\beta\cos\theta(\tan\theta-\tan\beta)\big)\cos\beta$$
$$\Rightarrow\quad 1=\sin\beta\cos\beta(\tan\theta-\tan\beta) \qquad (٤-١٣٧)$$

به ازای $\beta=45^\circ$ داریم

$$1=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\tan\theta-1)\ \Rightarrow\ \tan\theta=3\quad\therefore\quad\theta=71.6^\circ \qquad (٤-١٣٨)$$

حل ۲ محورهای مختصات را موازی و عمود بر سطح شیب‌دار در نظر بگیرید. ارابه و گلوله حرکت خود را از یک مکان آغاز می‌کنند و شتاب هر دو در امتداد سطح یکی است: $-g\sin\beta$. بنابراین، مولفه‌ی سرعت آنها در امتداد سطح باید برابر باشد؛

چون در این صورت است که مولفه‌ی سرعت‌ها در امتداد سطح همواره برابر خواهند بود. این بدان معنی است که در این چارچوب، گلوله همواره بالای سرِ ارابه خواهد بود. از برابری این مولفه‌های اولیه‌ی سرعت خواهیم داشت

$$v\cos(\theta-\beta)=u \qquad (\text{٤-١٣٩})$$

حالا می‌خواهیم گلوله وقتی بر روی سطح فرود بیاید که ارابه در روی سطح شیب‌دار در دورترین فاصله‌اش از نقطه‌ی آغاز است. زمان لازم برای این که گلوله با سطح برخورد کند عبارت است از $2v\sin(\theta-\beta)/g\cos\beta$ چون $g\cos\beta$ مولفه‌ی شتاب عمود بر سطح است و $v\sin(\theta-\beta)$ سرعت اولیه در راستای y است. زمانی را که طول می‌کشد تا ارابه به دورترین فاصله در روی سطح برسد $u/g\sin\beta$ است؛ چون $g\sin\beta$ شتاب در امتداد سطح شیب‌دار است. از برابری این دو زمان داریم

$$\frac{2v\sin(\theta-\beta)}{g\cos\beta}=\frac{u}{g\sin\beta} \qquad (\text{٤-١٤٠})$$

از ترکیب رابطه‌های (٤-١٣٩) و (٤-١٤٠) به دست می‌آید

$$\frac{2v\sin(\theta-\beta)}{g\cos\beta}=\frac{v\cos(\theta-\beta)}{g\sin\beta} \quad\Rightarrow\quad 2\tan(\theta-\beta)\tan\beta=1 \qquad (\text{٤-١٤١})$$

این رابطه‌ای است که θ را تعیین می‌کند. و با رابطه‌ی (٤-١٣٧) هم‌ارز است. می‌توانید این را نشان دهید.

ت-٩ مسافت‌های افقی و عمودی عبارتند از

$$x=(v_\circ\cos\theta)t \quad , \quad y=(v_\circ\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2 \qquad (\text{٤-١٤٢})$$

مربع فاصله تا نقطه‌ی P عبارت است از

$$\ell^2=x^2+y^2=(v_\circ t\cos\theta)^2+(v_\circ t\sin\theta-gt^2/2)^2=v_\circ^2t^2-v_\circ gt^3\sin\theta+\frac{1}{4}g^2t^4 \qquad (\text{٤-١٤٣})$$

می‌خواهیم مشتق ℓ هرگز صفر نباشد. این بدان معنی است که مشتق ℓ^2 هرگز صفر نیست (چون در $\ell=0$ نیستیم). مشتق وقتی **صفر است** که

$$0=\frac{d\ell^2}{dt^2}=v_\circ^2-\frac{3}{2}v_\circ gt\sin\theta+\frac{1}{2}g^2t^2 \quad\Rightarrow\quad g^2t^2-3v_\circ gt\sin\theta+2v_\circ^2=0$$

$$\Rightarrow\quad t=\frac{3v_\circ g\sin\theta\pm\sqrt{9v_\circ^2g^2\sin^2\theta-8v_\circ^2g^2}}{2g^2} \qquad (\text{٤-١٤٤})$$

اگر $9v_\circ^2g^2\sin^2\theta-8v_\circ^2g<0$ باشد، t پاسخ حقیقی **ندارد**. در نتیجه $\sin\theta<2\sqrt{2}/3$ است که متناظر با $\theta=70{,}5^\circ$ است. برای زاویه‌های کم‌تر از این مقدار، ℓ^2 (یا ℓ) یک تابع افزایشی برحسب t است.

ت – ١٠ حل ١ (الف): محورهای دستگاه مختصات را افقی و عمودی در نظر بگیرید. داریم

$$x=v_\circ\cos(\theta+\varphi)t \quad , \quad y=v_\circ\sin(\theta+\varphi)t-\frac{1}{2}gt^2 \qquad (\text{٤-١٤٥})$$

توپ وقتی بر روی سطح فرود می‌آید که $y/x=\tan\theta$ باشد:

$$\frac{v_\circ \sin(\theta+\varphi)t - gt^{۲}/۲}{v_\circ \cos(\theta+\varphi)t} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad v_\circ \sin(\theta+\varphi) - \frac{۱}{۲} gt = \tan\theta\, v_\circ \cos(\theta+\varphi) \qquad (۴-۱۴۶)$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی، به دست می‌آید

$$t = \frac{۲v_\circ}{g}\left[\left(\cancel{\sin\theta\cos\varphi} + \cos\theta\sin\varphi\right) - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left(\cancel{\cos\theta\cos\varphi} - \sin\theta\sin\varphi\right)\right] \qquad (۴-۱۴۷)$$

یا

$$t = \frac{۲v_\circ}{g}\left(\cos\theta\sin\varphi + \frac{\sin^{۲}\theta}{\cos\theta}\sin\varphi\right) = \frac{۲v_\circ}{g\cos\theta}\left(\cos^{۲}\theta + \sin^{۲}\theta\right)\sin\varphi \;= \frac{۲v_\circ \sin\varphi}{g\cos\theta} \qquad (۴-۱۴۸)$$

برای این زمان ، مسافت در امتداد سطح عبارت است از

$$d = \frac{x}{\cos\theta} = \frac{v_\circ \cos(\theta+\varphi)t}{\cos\theta} = \frac{v_\circ \cos(\theta+\varphi)}{\cos\theta}\frac{۲v_\circ \sin\varphi}{g\cos\theta}$$
$$= \left(\frac{۲v_\circ^{۲}}{g\cos^{۲}\theta}\right)\sin\varphi\cos(\theta+\varphi) \qquad (۴-۱۴۹)$$

(**ب**) : برای بیشینه کردن این باید مشتق $\sin\varphi\cos(\theta+\varphi)$ را نسبت به φ حساب کنیم و مساوی صفر قرار دهیم

$$۰ = \frac{d}{d\varphi}\sin\varphi\cos(\theta+\varphi) = \cos\varphi\cos(\theta+\varphi) - \sin\varphi\sin(\theta+\varphi)$$
$$= \cos(\varphi+(\theta+\varphi)) = \cos(\theta+۲\varphi) \quad \Rightarrow \quad \theta+۲\varphi = ۹۰^\circ \quad \Rightarrow \therefore \varphi = ۴۵^\circ - \frac{\theta}{۲} \qquad (۴-۱۵۰)$$

حل ۲ دستگاه مختصات را چنان برگزینید که محور x در امتداد سطح شیب‌دار و محور y آن عمود بر سطح باشند. شتاب در امتداد سطح $-g\sin\theta$ و در راستای عمود بر سطح $-g\cos\theta$ است . مولفه‌های سرعت اولیه عبارت‌اند از $v_\circ\cos\varphi$ و $v_\circ\sin\varphi$. زمان کل حرکت برابر است با

$$T = \frac{۲v_{\circ y}}{g\cos\theta} = \frac{۲v_\circ \sin\varphi}{g\cos\theta} \qquad (۴-۱۵۰)$$

این نتیجه با پاسخ بالا سازگار است. پس، مسافت کل در امتداد سطح شیب‌دار عبارت است از

$$d = (v_\circ\cos\varphi)t - \frac{۱}{۲}(g\sin\theta)t^{۲} = (v_\circ\cos\varphi)\left(\frac{۲v_\circ\sin\varphi}{g\cos\theta}\right) - \frac{۱}{۲}(g\sin\theta)\left(\frac{۲v_\circ\sin\varphi}{g\cos\theta}\right)^{۲}$$
$$= \frac{۲v_\circ^{۲}\sin\varphi}{g\cos^{۲}\theta}(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) = \left(\frac{۲v_\circ^{۲}}{g\cos^{۲}\theta}\right)\sin\varphi\cos(\theta+\varphi) \qquad (۴-۱۵۱)$$

این نتیجه هم با حل ۱ سازگار است. قسمت (ب) مانند بالا ست.

ت-۱۱

$$\mathbf{a} = \left(\ddot r - r\dot\theta^{۲}\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(r\ddot\theta + ۲\dot r\dot\theta\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\beta^{۲}r_\circ e^{\beta t} - r_\circ e^{\beta t}\omega^{۲}\right)\hat{\mathbf{r}} + ۲\beta r_\circ \omega e^{\beta t}\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۴-۱۵۲)$$

اگر $\beta = \pm\omega$ باشد قسمت شعاعی $\mathbf{a}$ صفر می‌شود. در نگاه نخست به نظر عجیب است که وقتی $r = r_\circ e^{\beta t}$ است، شتاب شعاعی ذره صفر باشد. خطای این گونه اندیشیدن این است که می‌پندارد فقط $\ddot r$ در a_r سهیم است؛ جمله‌ی $-r\dot\theta^{۲}$ هم بخشی از شتاب شعاعی است و نمی‌توان آن را نادیده گرفت.

ناسازه در این است که اگرچه $a_r = \circ$ است، سرعت شعاعی $v_r = \dot{r} = r_\circ \omega e^{\beta t}$ با زمان در راستای شعاع افزایش پیدا می‌کند.
پاسخ ناسازه این است که حالت خاص در مختصات کارتزی می‌تواند گمراه کننده باشد. در مختصات قطبی $v_r \neq \int a_r(t)dt$
چون در $\int a_r(t)dt$ واقعیت این که بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ توابعی از زمان‌اند به حساب نمی‌آیند.