فصل ۳

قانون‌های نیوتون

مکانیک کلاسیک چگونگی حرکت اجسام را توصیف می‌کند. یعنی مکان اجسام چگونه با زمان تغییر می‌کند. قانون‌های بنیادی مکانیک کلاسیک را می‌توان برای اجسام با هر اندازه‌ای به کار برد (اندازه‌های بزرگتر از ابعاد اتمی). آنها را برای اجسام با شکل و ساختارهای درونی گوناگون هم می‌توان به کار برد. در هیدرودینامیک کلاسیک در مورد مایع‌ها هم به کار می‌روند.

با این حال، روشن نیست که منظور از «مکان» جسمی بزرگ با شکلی پیچیده چیست. تنها در حالت آرمانی ذره‌ی نقطه‌ای «مکان» جسم معنی روشنی دارد. از این رو، نخست به اجسام کوچکی می‌پردازیم که می‌توان آنها را نقطه‌ای انگاشت و جایگاه-شان را در زمان t با بردار مکان $\mathbf{r}(t)$ مشخص کرد. در بررسی اجسام بزرگ، فرض خواهیم کرد که می‌توان آنها را به تعداد بسیار زیاد اجسام کوچک تقسیم کرد و هر کدام از این اجسام کوچک را به صورت ذره‌ی نقطه‌ای پنداشت. (درباره‌ی نیروهای درونی میان این ذره‌ها هم‌چنین وادار خواهیم شد فرض‌های دیگری را هم در نظر بگیریم.) اگر به حرکت کلی جسم بسیار بزرگی مانند سیاره، علاقمند باشیم، می‌توانیم آن را به صورت ذره‌ی نقطه‌ای در نظر بگیریم که در مرکز جسم جایگزیده است. به بیان دیگر، از خود قانون‌ها معنی«مکان» جسم دارای بعد به دست خواهد آمد.

۳ـ۱ قانون نخست نیوتون

همان‌گونه که در اصل نسبیت به آن پرداختیم، مفهوم و اندرونه‌ی قانون نخست نیوتون تعریف چارچوب‌های لخت است:

هر جسم حالت حرکت یکنواخت راست‌خط و یا سکون خود را حفظ می‌کند مگر آنکه نیرویی آن را وادار به تغییر حالت حرکت خود کند.

آزمایشی که در آن نیرویی حضور نداشته باشد نمی‌توان طراحی کرد؛ زیرا برای این کار باید جسم را منزوی کرد. به این دلیل، باید بخشی از اندرونه‌ی قانون نخست را به صورت ادراکی پذیرفت که با برون‌یابی نتایج آزمایش‌هایی که در آن نیروهای کوچک، اما محدود، حضور دارند، به دست می‌آید. در واقع، اصل لخت را گالیله بیان کرد و قانون نخست نیوتون در حقیقت بیان دوباره‌ی این اصل است (در واقع، گالیله اصل لخت را برای حرکت دایره‌ای بیان کرد). اصل لخت گالیله یا قانون نخست نیوتون می‌گوید اگر جسمی را به حال خود واگذاریم و اختلالی در آن ایجاد نکنیم، آنگاه جسم اگر در ابتدا در حال حرکت بود، با سرعت ثابت به حرکت راست‌خط خود ادامه خواهد داد و اگر در آغاز ساکن بود به حالت سکون خود ادامه خواهد داد. البته به نظر نمی‌رسد که در طبیعت این چنین باشد؛ زیرا اگر جسمی را روی میز لغزانده و رها کنیم، جسم سرانجام می‌ایستد. اما ایستادن آن به این خاطر است که جسم را به حال خود رها نکرده‌ایم بلکه، جسم در مالش با میز بوده است.

اگر جسمی به حال خود رها نشود، حالت حرکتی آن تغییر می‌کند. بنابراین، باید به دنبال قاعده‌ای بگردیم که چگونگی تغییر سرعت جسم تحت تأثیر نیرو را بیان کند. قانون دوم نیوتون روش مشخصی برای تعیین چگونگی تغییر سرعت جسمی را به دست می‌دهدکه تحت تأثیر نیروهای گوناگون است.

۳ـ۲ قانون دوم نیوتون ـ جرم و نیرو

یک جسم منزوی را در نظر بگیرید. منزوی به این معنی است که همه‌ی اجسام دیگر به اندازه‌ای در دوردست قرار دارند که می‌توان از اثر آنها بر روی جسم مورد نظر چشم‌پوشی کرد. این جسم را به اندازه‌ای کوچک فرض کنید که بتوان آن را ذره‌ی نقطه‌ای پنداشت. مکان جسم را در چارچوب لخت معینی با $\mathbf{r}(t)$ نشان بدهید. سرعت و شتاب این جسم عبارت‌اند از:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\,\mathbf{r}(t)}{dt} \tag{۳-۱}$$

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\,\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\mathbf{r}(t)}{dt}\right) = \frac{d^{2}\mathbf{r}(t)}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}(t) \tag{۳-۲}$$

پیش از آنکه بتوان قانون نیوتون را توضیح داد، باید ویژگی‌های جسم یا ذره را شناخت. هنگامی که می‌گوئیم جسم یا ذره‌ای را در نظر بگیرید یعنی شناسه‌های آن را بدانید. اگر بپرسیم ذره‌ی مورد نظرتان را توصیف کنید، چگونه می‌توان از عهده‌ی این کار برآمد؟ هر ذره‌ای با شناسه‌های خود از ذره‌ی دیگر متمایز می‌شود. به بیان دیگر ذره مانند انسان دارای شناسنامه است. در شناسنامه‌ی فرد نام خانوادگی، نام، قد، رنگ، جنسیت و غیره نوشته می‌شود. دو فرد هنگامی از یکدیگر متمایز می‌شوند که دست کم یک شناسه‌ی آنها متفاوت باشد. برای شناسه‌ی ذرات نیز چیزهایی مانند جرم، بار الکتریکی، اسپین، بار رنگ، چاشنی، بار لپتونی، بار هادرونی و... وجود دارند. در فیزیک، بررسی هر کدام از این شناسه‌ها پایه‌های نظریه‌های بنیادی خاصی است. برای نمونه، از بررسی جرم به نظریه‌ی مکانیک کلاسیک و گرانش می‌رسیم. با بررسی شناسه‌ی بار الکتریکی به نظریه‌ی الکترومغناطیس پی می‌بریم. بار رنگ به نظریه‌ی کرومودینامیک کوانتومی می‌انجامد و غیره. در اینجا، یعنی در مکانیک کلاسیک ما تنها به پی‌آمدهای جرم خواهیم پرداخت. ما از واژه‌ی جرم یک دریافت حسی داریم. نخست این دریافت حسی را دست‌مایه می‌کنیم و سپس به تعریف دقیق آن می‌پردازیم. اگر با دست خود جسمی را که سبک است هل بدهیم، جسم به آسانی حرکت می‌کند؛ چنانچه همان هل‌دادن را به جسم بسیار سنگین‌تری اعمال کنیم جسم به سختی حرکت خواهد کرد. درواقع باید واژه‌های «سبک» و «سنگین» را به واژه‌های «کم‌جرم» و «پرجرم» تغییر داد؛ زیرا میان «وزن» یک جسم و «لختی» آن تفاوتی وجود دارد که باید آن را فهمید (دشواری در به حرکت درآوردن جسم یک چیز است و وزن جسم چقدر است چیز دیگری است. اینها دو مفهوم کاملاً جدا از هم‌اند.) البته؛ وزن و لختی با یکدیگر متناسب‌اند و در سطح زمین، بیشتر وقت‌ها آنها را از نظر مقدار یکی می‌گیرند که به گمراهی دانشجو می‌انجامد. در کره‌ی مریخ وزن چیز دیگری خواهد بود، حال آنکه نیروی لازم (هل دادن) برای چیره شدن به لختی همان است که در سطح زمین بود.

ما از واژه‌ی «جرم» برای بیان کمی لختی استفاده خواهیم کرد؛ کمیتی که نشان می‌دهد یک جسم در برابر هل‌دادن و به حرکت وادار شدن چقدر از خود مقاومت نشان می‌دهد. به این ترتیب هر جسمی مقدار معینی جرم دارد و تفاوت دو جسم در این مقدار، آن ها را از یکدیگر متمایز می‌کند. در بخش ۴-۳ به مفهوم جرم بیشتر پرداخته خواهد شد. در این بخش، هدف این است که روش مشخصی برای چگونگی تغییر حالت حرکتی یک جسم بیابیم. خب، دو جسم با جرم‌های کاملاً متفاوت می‌توانند سرعت‌های یکسان داشته باشند. بنابراین، سرعت نمی‌تواند به تنهایی آنها را از یکدیگر متمایز کند. یکی از این دو جسم ممکن است جرم بزرگتری داشته باشد و از این‌رو تغییر حالت حرکتی آن به تلاش بیشتری نیاز خواهد داشت و چگونگی تغییر حالت حرکت آن در مقایسه با جسم کم‌جرم‌تر، اما با همان سرعت، متفاوت خواهد بود. پس باید کمیتی را بیابیم که این دو را از هم متمایز کند. این کمیت «**تکانه**» نام دارد وعبارت است از حاصل ضرب جرم و سرعت. آن را با نماد $\mathbf{p}$ نشان می‌دهیم.

$$\mathbf{p}_i = m_i\,\mathbf{v}_i \tag{۳-۳}$$

تکانه‌ی $\mathbf{p}_i$ نماینده‌ی حالت حرکت جسم i ام با جرم m_i و سرعت $\mathbf{v}_i$ است. معادله‌ای که چگونگی حرکت جسم را توصیف می‌کند، معادله‌ی حرکت نام دارد. این معادله بیان **قانون دوم نیوتن** است. می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد: تغییر حالت حرکتی یک جسم نسبت به زمان با نیرویی که به جسم اعمال می‌شود برابر است. به بیان ریاضی:

$$\mathbf{F} \equiv \dot{\mathbf{p}} = \frac{d\,\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \tag{۳-۴}$$

توجه بکنید که در اینجا دو فرض نهفته است.

۱- فرض کردیم که جرم جسم تغییر نمی‌کند ومقدارش ثابت است.

۲- اگر دو جسم را روی هم بگذاریم، جرمشان با هم جمع می‌شوند.

در بسیاری از کتاب ها سخن از جرم وابسته به سرعت به میان می‌آید. به ویژه، در نسبیت (یعنی هنگامی که سرعت ذره زیاد و قابل مقایسه با سرعت نور باشد) از واژه های "جرم سکون" و "جرم متحرک" ذره استفاده می شود. این واژه ها گمراه کننده اند و شایسته است که از به کار بردنشان خودداری کنیم.

نکته‌ی مهم دیگری که در قانون دوم نیوتن باید به آن توجه کرد این است که رابطه معادله‌ی حرکت یک رابطه‌ی برداری است. هنگامی که از تغییر تکانه صحبت می‌کنیم، نه تنها تغییر در اندازه‌ی تکانه بلکه تغییر در جهت آن را نیز در نظر داریم. نیروی $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ می‌تواند اندازه‌ی $\mathbf{p}$ را تغییر دهد؛ یا جهت آن را عوض کند و یا هر دو را. به یاد بیاورید که ذره‌ای که با اندازه سرعت ثابت مثلاً ۲ m/s روی یک دایره حرکت می‌کند شتاب دارد و در نتیجه به آن نیرو وارد می‌شود. این شتاب در اثر تغییر جهت سرعت ذره ایجاد می‌شود و برابر است با $a=v^{۲}/R$ و بر مسیر حرکت ذره عمود است. نیروی $ma=mv^{۲}/R$ که به سرعت عمود است سبب می‌شود تا ذره بر روی مسیر خمیده حرکت کند. شعاع خم را می‌توان از این رابطه به دست آورد.

جمع پذیری جرم‌ها که به طور ضمنی در قانون دوم نیوتن نهفته است و به آن اشاره شد در بخش (٤-۳) بررسی خواهد شد. قانون دوم نیوتن، $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$، هنگامی سودمند است که نیرو را بشناسیم. آنگاه می‌توان شتاب، سرعت و در نتیجه، حرکت جسم را بررسی کرد. به بیان دیگر به روابطی نیاز داریم که نیرو را مشخص کنند. نیوتن برای گرانش رابطه‌ی مشخصی را بیان کرد و ما به زودی به آن خواهیم پرداخت. با دانستن قانون نیروی گرانش می‌توان حرکت سیاره‌ها را به آسانی بررسی کرد. حالت ها و مسائل فراوان دیگری هم وجود دارند که نیوتن رابطه‌ی مشخصی برای آنها سامان نداده است؛ اما در چهارچوب قانون سوم خود، برخی آگاهی‌های عمومی را درباره‌ی سرشت نیروها فراهم کرده است. در بخش ۳-۳ این ویژگی عمومی نیروها و نتایج برآمده از قانون های نیوتن را بررسی می کنیم.

۳-۳ قانون سوم نیوتن ـ کنش و واکنش

اگر سامانه‌ی منزوی شامل بیش از یک جسم باشد، آنگاه قانون دوم نیوتن برای بررسی چگونگی تغییر حالت حرکت سامانه کافی نیست. قانون سوم راهکاری برای این وضعیت‌ها است.

فرض کنید سامانه‌ی منزوی از N ذره‌ی نقطه‌ای تشکیل شده است و می‌توان مکان هر ذره را با بردار مکان $\mathbf{r}_i(t)$ نشان داد. سرعت و شتاب هر یک از ذره‌ها برابراست با:

$$\mathbf{v}_i(t)=\frac{d\mathbf{r}_i(t)}{dt}=\dot{\mathbf{r}}_i(t) \qquad (۳-۵)$$

$$\mathbf{a}_i(t)=\frac{d\mathbf{v}_i(t)}{dt}=\dot{\mathbf{v}}(t)=\ddot{\mathbf{r}}_i(t) \qquad (۳-٦)$$

اگر جرم هر ذره m_i باشد ، تکانه‌ی آن عبارت خواهد بود از:

$$\mathbf{p}_i=m_i\,\mathbf{v}_i \qquad (۳-۷)$$

بنا به قانون دوم نیوتن، نیروی وارد به ذره‌ی $i-$ام عبارت است از:

$$\mathbf{F}_i=\dot{\mathbf{P}}_i=m_i\mathbf{a}_i \qquad (۳-۸)$$

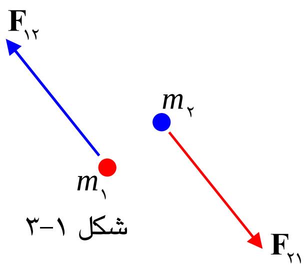
در اینجا $\mathbf{F}_i$ نیروی کل است که به ذره‌ی $i-$ام وارد می‌شود. چون سامانه منزوی است، نیرویی خارج از سامانه به آن وارد نمی‌شود؛ پس نیرو $\mathbf{F}_i$ بالا را باید بقیه‌ی ذره‌ها به ذره‌ی $i-$ام اعمال کنند. بنابراین، $\mathbf{F}_i$ جمع نیروهایی است که بقیه‌ی ذره‌ها به ذره‌ی $i-$ام وارد می‌کنند. اگر نیرویی را که ذره‌ی j–ام به ذره‌ی $i-$ام وارد می‌کند با $\mathbf{F}_{ij}$ نشان دهیم آنگاه داریم:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i۱} + \mathbf{F}_{i۲} + \cdots \mathbf{F}_{iN} = \sum_{j=۱}^{N} \mathbf{F}_{ij} \qquad (۳-۹)$$

توجه کنید که $\mathbf{F}_{ii} = ۰$ است، چون ذره‌ی $i-$ام به خودش نیرو وارد نمی‌کند. هم چنین توجه کنید که جمع سمت راست رابطه‌ی بالا جمع برداری است. $\mathbf{F}_{ij}$ نیرویی است که بین دو جسم i و j وجود دارد. قانون سوم نیوتون به نیروی بین دو جسم توجه دارد.

قانون سوم نیوتون می‌گوید نیروها جفت اند. کنش و واکنش همزمان‌اند و با هم برابرند. مفهوم این قانون را می‌توان بدین صورت بیان کرد: $\mathbf{F}_{ij}$ نیرویی است که جسم j–ام به جسم $i-$ام وارد می‌کند. همچنین $\mathbf{F}_{ji}$ نیرویی است که جسم $i-$ام به جسم j–ام وارد می‌کند. این دو نیرو همزمان اند. اگر $\mathbf{F}_{ij}$ ذره‌ی $i-$ام را به سویی هل بدهد، نیروی $\mathbf{F}_{ji}$ ذره‌ی j–ام را به همان اندازه در سوی مخالف هل خواهد داد. فراتر از این، این دو نیرو در یک راستا هستند. به بیان ریاضی این قانون را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

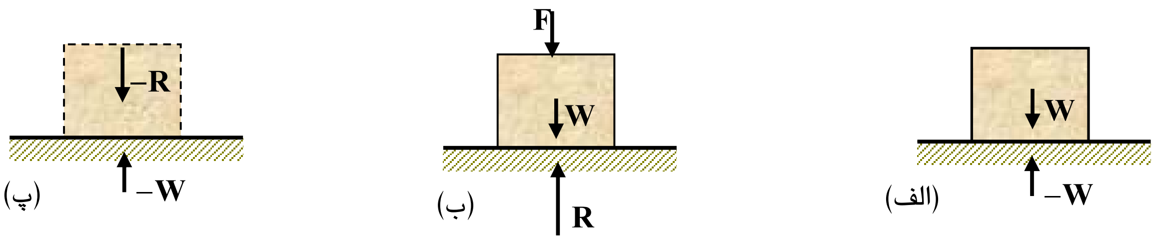
$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij} \qquad (۳-۱۰)$$



شکل ۱-۳

شکل (۳ـ۱) دو ذره را نشان می‌دهد که با یکدیگر برهم‌کنش متقابل دارند. جرم آنها $m_۱$ و $m_۲$ است. ذره‌ی $m_۱$ نیروی $\mathbf{F}_{۲۱}$ را به ذره‌ی دوم وارد می‌کند و جرم $m_۲$ نیروی $\mathbf{F}_{۱۲}$ را به جرم $m_۱$ وارد می‌کند. این دونیرو در خلاف جهت یکدیگرند.

مثال دیگر: قطعه چوبی را در نظر بگیرید که بر سطح افقی میزی قرار دارد. فرض کنید میز به زمین محکم شده است. در شکل (۲-۳ الف) نیروی $\mathbf{W}$ ، وزن قطعه، نیروی گرانش است که زمین به قطعه وارد می‌کند (همانگونه که بعداً خواهیم دید این نیرو به مرکز قطعه وارد می‌شود) و $-\mathbf{W}$ نیروی گرانش است که قطعه به زمین وارد می‌کند. نیروهای $\mathbf{W}$ و $-\mathbf{W}$ از طریق قانون سوم نیوتون به هم مربوطاند. به آنها نیروهای کنش و واکنش می‌گوئیم. در مقابل این ارتباط، نیروهایی وجود دارند که به وسیله‌ی شرایط کمکی دیگری به یکدیگر مربوطاند. برای مثال، شکل (۲-۳ب) تنها نیروهایی را نشان می‌دهد که به قطعه وارد می‌شوند. در این شکل، ما همچنین نیروی $\mathbf{F}$ را نشان دادیم که از بالا قطعه را به سوی پائین فشار می‌دهد.



شکل ۲-۳

وجود نیروی $\mathbf{R}$ را از آنجا درمی‌یابیم که چون نیروهای $\mathbf{F}$ و $\mathbf{W}$ رو به پائین به قطعه وارد می‌شوند، بنا به قانون دوم نیوتون؛ قطعه باید حرکت شتاب‌دار به سوی پائین داشته باشد؛ واقعیت اینکه قطعه نسبت به زمین حرکت شتاب‌دار ندارد می‌آموزد که سطح میز نیروی $\mathbf{R}$ را به قطعه وارد می‌کند. اندازه‌ی نیروی $\mathbf{R}$ با اندازه‌ی $\mathbf{W}+\mathbf{F}$ برابر و جهت آن درخلاف جهت $\mathbf{W}+\mathbf{F}$ است.

می‌بینیم که $\mathbf{R}$ با شرط ترازمندی به $\mathbf{W}$ و $\mathbf{F}$ مربوط می‌شود. در شکل (۲-۳پ) فقط نیروهایی که به زمین وارد می‌شوند نشان داده شده‌اند: $\mathbf{R}$ و $\mathbf{R}-$ توسط قانون سوم نیوتون به یکدیگر مربوطند. روشن است که به زمین نیروی خالص $\mathbf{-R - W}$ وارد می‌شود که با $\mathbf{F}$ برابر است. همین نیروی $\mathbf{F}$ به قطعه هم وارد می‌شود. در نتیجه، زمین (بعلاوه‌ی قطعه)، بنا به قانون دوم نیوتون، به سوی پائین حرکت شتاب‌دار دارند. اما به خاطر جرم زیاد زمین، این شتاب بسیارناچیز است و ما آن را حس نمی-کنیم.

کج فهمی قانون سوم نیوتون می‌تواند تناقض‌هایی به همراه داشته باشد. یکی از این تناقض‌ها به قرار زیر است:

فرض کنید که در سطح افقی؛ اسبی درشکه‌ای را می‌کشد. اسب به درشکه نیروی $\mathbf{F}$ وارد می‌کند، اما بنا به قانون سوم نیوتون، درشکه نیروی $\mathbf{F}-$ را در خلاف جهت به اسب وارد می‌کند. چگونه است که اسب می‌تواند درشکه را به حرکت دربیاورد؟ پاسخ این است که به درشکه تنها نیروی $\mathbf{F}$ وارد می‌شود و در نتیجه؛ بنا به قانون دوم نیوتون، درشکه حرکت می‌کند. نیروی واکنش درشکه، $\mathbf{F}-$ ، به اسب وارد می شود و نیرویی نیست که به درشکه وارد می‌شود. به بیان کوتاه‌تر؛ نیروی کنش و واکنش چون به دو جسم متفاوت اثر می‌کنند با هم جمع نمی‌شوند.

نیروی $\mathbf{F}_{ij}$ (و نیز $\mathbf{F}_{ji}$) توابعی از مکان و سرعت (و ساختار درونی) جسم‌های $i-$ ام و $j-$ ام اند. اما اجسام دیگر تأثیری بر آنها ندارد. به خاطر اصل نسبیت، درواقع نیرو می‌تواند به مکان نسبی دو ذره

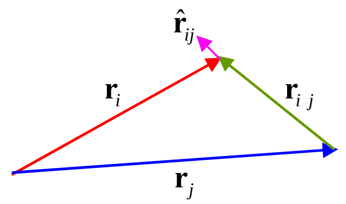
$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \qquad (۳\text{-}۱۱)$$

و سرعت نسبی آنها

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \qquad (۳\text{-}۱۲)$$

بستگی داشته باشد. (بکوشید تا توجیهی برای این گزاره پیدا و خود را قانع کنید). بردارهای $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{r}_j$ در شکل (۳-۳) نشان داده شده اند. اگر نیروها را به صورت توابعی از مکان و سرعت ذره‌ها بشناسیم، آنگاه با استفاده از قانون دوم نیوتون

$$\dot{\mathbf{P}}_i = m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \qquad (۳\text{-}۱۳)$$



شکل (۳-۳)

می‌توان رفتار بعدی ذره‌ها را پیش‌بینی کرد. با دانستن مکان و سرعت اولیه، می‌توان معادله‌های حرکت را به صورت تحلیلی یا عددی حل کرد و مکان ذره‌ها را در زمان دیرتری به دست آورد. پس، کار نخست ما این است که قانون‌های دقیقی را مشخص کنیم و به وسیله‌ی آنها نیروی میان دو ذره را به دست آوریم. از آن به بعد، با استفاده از قانون دوم نیوتون، حرکت ذره یا جسم به آسانی به دست می‌آید.

مهمترین گروه نیروها عبارت‌اند از نیروهای مرکزی و *پایستار*. این نیروها تنها به مکان نسبی دو ذره بستگی دارند و می‌توان آنها را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{F}_{ij} = \hat{\mathbf{r}}_{ij} \; f(r_{ij}) \qquad (۳\text{-}۱۴)$$

که در آن $\hat{\mathbf{r}}_{ij}$ بردار یکه در راستای $\mathbf{r}_{ij}$ و $f(r_{ij})$ تابعی عددی از فاصله نسبی r_{ij} است. اگر $f(r_{ij})$ مثبت باشد گوئیم نیروی $\mathbf{F}_{ij}$ یک نیروی **رانشی** است که در راستای خط واصل دو جسم و به سوی بیرون از جسم $i-$ ام است. اگر $f(r_{ij})$ منفی باشد نیرو **ربایشی** است و جهت آن به سمت ذره‌ی $i-$ ام است. بنا به **قانون جهانی گرانش نیوتون** ، بین هر جفت جسم یک چنین نیرویی وجود دارد؛ اندازه‌ی آن با جرم دو جسم متناسب است و به صورت زیر داده می شود

$$f\,(r_{ij}) = -\frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2} \tag{۳-۱۵}$$

که در آن G ثابت گرانش نیوتون است. مقدار آن $G = 6{,}673\times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$ است. چون جرم‌ها همواره مثبت‌اند، این نیرو همیشه ربایشی است. اگر به جای دو جرم دو بار الکتریکی **ساکن** را در نظر بگیریم، بین آنها نیروی کولنی الکتروستاتیک وجود دارد که عبارت است از:

$$f\,(r_{ij}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \tag{۳-۱۶}$$

q_i و q_j بارهای الکتریکی‌اند و $\varepsilon_\circ$ ثابت دیگری است: $\varepsilon_\circ = 8{,}85419\times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$. توجه کنید که در اینجا مانسته‌ی ثابت G نیوتون: $\left(1/4\pi\varepsilon_\circ\right) = 8{,}98755\times 10^{9}\,\mathrm{Nm^{-2}C^{-2}}$است. چون بارهای الکتریکی می‌توانند مثبت یا منفی باشند، بنابراین نیروی الکترواستاتیک می‌تواند رانشی یا ربایشی باشد. به تفاوت عظیم مرتبه‌ی بزرگی ثابت‌های G و $1/4\pi\varepsilon_\circ$ در یکاهای SI توجه کنید. این نشان می‌دهد که نیروی گرانش در مقایسه با نیروی الکتروستاتیک بسیار ضعیف است. علت اینکه نیروی گرانش برای ما چشمگیر به نظر می‌رسد، این است که ما بر روی جسمی با جرم بسیار زیاد، یعنی زمین، زندگی می‌کنیم. همچنین، بارهای بزرگ هرگز دیده نمی‌شوند زیرا بارهای مثبت و منفی یکدیگر را با تقریب زیادی حذف می‌کنند و در نتیجه بار اجسام بزرگ-مقیاس تقریباً نزدیک صفر است. (*توجه*: تفاوت عددی G و $1/4\pi\varepsilon_\circ$ به تنهایی بزرگی نیروی الکتریکی در برابر نیروی گرانشی را ثابت نمی‌کند. اگر نیروهای گرانشی و الکتریکی بین دو ذره‌ی بنیادی را مقایسه کنیم، تفاوت بزرگی‌های این دو نیرو معنی‌دار می‌شود).

در اجسام دارای ساختار؛ هنوز نیروهای پایستار (یعنی نیروهایی که مستقل از سرعت‌اند) می‌تواند بین بخش‌های سازنده‌ی جسم وجود داشته باشد و برخی شرایط دیگر را هم راضی کند. ما در اینجا به آن شرایط نخواهیم پرداخت. اما این نیروها دیگر مرکزی نخواهند بود (یعنی در راستای خطی که دو جسم را به‌هم وصل می‌کند قرار نخواهند داشت.) مثالی از این دست، وجود توزیع بار الکتریکی در درون دو جسم است. در چنین اجسامی نیروهای ناپایستار وابسته به سرعت نیز ممکن است نمود پیدا کنند.

۳-۴ مفهوم جرم و نیرو

در فیزیک یک اصل عمومی وجود دارد که می‌گوید هر کمیتی را که نتوان، دستکم در بنیاد، اندازه‌گیری کرد نباید در نظریه‌ی فیزیکی وارد کرد. اینک دیدیم که در قانون‌های نیوتون، افزون بر سرعت و شتاب که اندازه‌گیری پذیرند (با اندازه‌گیری فاصله و زمان) دو مفهوم جرم و نیرو هم وجود دارند. برای این که به قانونی معنی فیزیکی بدهیم، ناگزیریم که نشان دهیم جرم و نیرو کمیت‌های قابل اندازه‌گیری‌اند.

این که نیرو و جرم را می‌توان اندازه‌گیری کرد، آن گونه که در نگاه نخست به نظر می‌رسند، چندان بدیهی نیست. چون، هر آزمایشی که برای اندازه‌گیری این کمیت‌ها طراحی شود؛ به ناگزیر از قانون‌های نیوتون برای توصیف استفاده می‌کند. بنابراین، تعریف‌های عملی جرم و نیرو (دستورالعمل اندازه‌گیری آنها) که برای مفهوم فیزیکی داشتن قانون‌ها لازم‌اند، درواقع در خود قانون‌ها نهفته‌اند. این نه غیرمعمول و نه غیرمنطقی است، بلکه می‌تواند به روشنگری این مفهوم‌ها یاری کند تا قانون‌ها را چنان بیان کنیم که عنصر تعریفی را از آن به دست آوریم.

نخست به اندازه‌گیری جرم می‌پردازیم. از آنجائی که یکای جرم دلخواه است، باید نخست شیوه‌ای را برای مقایسه‌ی جرم دو جسم داده شده بیابیم. توجه کنید که در اینجا ما درباره‌ی *«جرم لختی»* سخن می‌گوئیم، جرمی که در قانون دوم نیوتون ظاهر می‌شود، و نه جرم گرانشی که در رابطه‌ی نیروی گرانشی وجود دارد. همان‌گونه که پیش‌تر گفتیم، البته این دو متناسب‌اند، اما

این «اصل هم‌ارزی» یک قانون فیزیکی است که از تجربه به دست آمده است (مشاهده‌های گالیله در آزمایش اجسام در حال سقوط) ویک فرض اولیه نیست. برای آزمودن درستی قانون، باید بتوان هر کدام از جرم‌ها را مستقلاً اندازه‌گیری کرد. در نتیجه، نمی‌توان ، برای مثال، از ترازو که جرم‌های گرانشی را با هم مقایسه می‌کند، استفاده کرد. جرم‌های لختی دو جسم را می‌توان با اعمال نیروی یکسان به هر یک آنها، مقایسه کرد. چون به دو جسم نیروی‌های یکسان وارد می‌شود، آنها شتابیده می‌شوند و می‌توان با مقایسه‌ی شتاب‌شان به مقایسه‌ی جرم دو جسم پرداخت. البته این شیوه کمک نمی‌کند، مگر آنکه به گونه‌ای بدانیم که نیروهای وارد به دو جسم مساوی اند. می‌بینیم که در دور نافرجامی گیر افتاده‌ایم: برای مقایسه‌ی دو جرم باید بدانیم که نیروی وارد به هر یک از آن‌ها با هم برابرند تا بدین وسیله شتاب‌های دو جسم را مقایسه کنیم و برای مقایسه‌ی برابری دو نیرو به دانستن جرم‌ها نیاز داریم. یک وضعیت وجود دارد که می‌دانیم نیروها مساوی اند. این را قانون سوم نیوتون به ما می‌آموزد: اگر دو جسم مورد نظر را از بقیه‌ی ماده‌ی عالم منزوی و شتاب‌های متقابل آنها را مقایسه کنیم، آنگاه بنا به قانون‌های دوم و سوم نیوتون، یعنی رابطه‌های $\mathbf{F}_i = m_i\mathbf{a}_i$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \qquad \mathbf{F}_i = m_i\mathbf{a}_i \tag{۳-۱۷}$$

و در نتیجه

$$m_۱\mathbf{a}_۱ = -m_۲\mathbf{a}_۲ \tag{۳-۱۸}$$

بنابراین، جهت شتاب‌های دو ذره در خلاف هم‌اند و به طور معکوس با جرم ذره‌ها متناسب اند:

$$\mathbf{a}_۱ = -\frac{m_۲}{m_۱}\mathbf{a}_۲ \quad , \quad \mathbf{a}_۲ = -\frac{m_۱}{m_۲}\mathbf{a}_۱ \tag{۳-۱۹}$$

حال اگر اجازه دهیم که دو جسم کوچک با هم برخورد کنند، در طول برخورد، می‌توان از اثر اجسام دوردست، در مقایسه با اثر دو جسم بر یکدیگر، چشم پوشید و دو جسم را یک سامانه‌ی منزوی پنداشت. در این صورت با اندازه‌گیری سرعت‌ها ، پیش از برخورد و پس ازآن، می‌توان نسبت جرم‌ها را حساب کرد. اجازه دهید رابطه‌ی بالا را به صورت زیر بنویسیم:

$$m_۱\mathbf{a}_۱ + m_۲\mathbf{a}_۲ = ۰ \tag{۳-۲۰}$$

یا

$$m_۱\frac{d\mathbf{v}_۱}{dt} + m_۲\frac{d\mathbf{v}_۲}{dt} = ۰ \tag{۳-۲۱}$$

اگر از رابطه‌ی بالا نسبت به زمان انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$m_۱\mathbf{v}_۱ + m_۲\mathbf{v}_۲ = \text{ثابت} \tag{۳-۲۲}$$

رابطه (۳-۲۲) قانون **پایستگی تکانه** است که درواقع با قانون سوم نیوتون بیان شده است. اگر بخواهیم تعریف جرم را از اندرونه‌ی فیزیکی رابطه‌ی (۳-۱۷) جدا کنیم، می‌توانیم اصل اولیه‌ی زیر را بپذیریم.

در هر سامانه‌ی دو جسمی منزوی، شتاب همواره در رابطه‌ی $\mathbf{a}_۱ = -k_{۲۱}\mathbf{a}_۲$ صدق می‌کند. کمیت عددی $k_{۲۱}$ برای هر دو جسم، مقدار ثابتی است که مستقل ازمکان، سرعت و ساختار درونی آن دو جسم است.

در بالا گفتیم، یکای جرم دلخواه است. اگر به یکی از دو جسم، جرم واحد (مثلاً $m_۱ = ۱\text{kg}$) نسبت بدهیم می‌توانیم جرم جسم دوم را در یکای جسم نخست، $K_{۱۲}$، بنامیم (در اینجا $m_۲ = K_{۲۱}\,\text{kg}$). توجه کنید که برای حفظ سازگاری باید داشته باشیم $K_{۱۲} = ۱/K_{۲۱}$. هم‌چنین باید فرض کنیم که اگر جرم‌های سه جسم را به این شیوه مقایسه کنیم، قانون سازگار زیر را به دست می‌آوریم: برای سه جسم، ثابت های K_{ij} در رابطه $K_{۳۱} = K_{۳۲}K_{۲۱}$ ، صدق می‌کنند و داریم

$$k_{۱۲}k_{۲۳}k_{۳۱} = ۱ \tag{۳-۲۳}$$

پس، می‌بینیم که برای هر دو جسمی، رابطه‌ی $K_{32} = m_2/m_3$ برقرار است.

پیش‌تر یادآور شدیم که در قانون نیوتون جمع‌پذیری جرم‌ها به طور ضمنی نهفته است. برای نشان دادن آن، سامانه‌ای با سه جسم را در نظر بگیرید. معادله‌ی حرکت این سه جسم عبارتند از:

$$\begin{aligned} m_1\mathbf{a}_1 &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} \\ m_2\mathbf{a}_2 &= F_{21} + \mathbf{F}_{23} \\ m_3\mathbf{a}_3 &= F_{31} + \mathbf{F}_{32} \end{aligned} \qquad (۳-۲٤)$$

اگر این سه معادله را با هم جمع کنیم و به یاد داشته باشیم که $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$، آنگاه جمله‌های سمت راست دو به دو یکدیگر را حذف می‌کنند و خواهیم داشت.

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + m_3\mathbf{a}_3 = 0 \qquad (۳-۲۵)$$

که درواقع تعمیم رابطه‌ی پیشین $m_1\mathbf{a}_1 = -m_2\mathbf{a}_2$ است. حال اگر نیروی بین جسم دوم و سوم چنان باشد که آنها را به هم بپیوند و یک جسم ترکیبی بسازد، آنگاه باید بپذیریم که شتاب‌های جسم دوم و سوم باهم برابرند: $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$. در این حالت داریم

$$m_1\mathbf{a}_1 = -(m_2 + m_3)\mathbf{a}_2 \qquad (۳-۲٦)$$

که نشان می‌دهد جرم جسم ترکیبی با جمع جرم آنها برابر است: $m_{23} = m_2 + m_3$.

۳-۵ نیروهای خارجی

برای یافتن حرکت اجسام متفاوت در یک سامانه‌ی دینامیکی، باید دو مسئله‌ی خویشاوند را حل کنیم. نخست، با در دست داشتن مکان‌ها و سرعت‌ها در یک لحظه از زمان، باید نیروهایی را پیدا کنیم که به هر جسم وارد می‌شود. دوم، با دانستن نیرو، باید مکان‌ها و سرعت‌های جدید را پس از سپری شدن زمانی کوتاه حساب کنیم. در حالت عمومی، این دو مسئله به طور جدایی ناپذیری به یکدیگر تنیده‌اند و بنابراین، باید هم‌زمان حل شوند. با این حال، اگر با حرکت یک جسم کوچک یا گروهی از اجسام کوچک سر وکار داشته باشیم، می‌توان از اثر آن جسم بر روی اجسام دیگر چشم‌پوشی کرد. در این حالت دو مسئله را می‌توان از یکدیگر جدا کرد. برای نمونه، در بررسی حرکت یک ماهواره، می‌توان از اثر ماهواره بر روی زمین چشم‌پوشی کرد. چون حرکت زمین را می‌شناسیم، می‌توانیم نیروی وارد به ماهواره را به صورت تابعی از مکان و (اگر مقاومت هوای پیرامون زمین را هم در نظر بگیریم) سرعت ماهواره به دست آوریم. سپس، با فرض اینکه نیرو شناخته شده است، مسئله‌ی حرکت ماهواره را مستقلاً حل کنیم. در اینجا زمین به صورت یک عامل (نیروی) خارجی وارد مسئله می‌شود.

بنابراین، در حالت کلی سودمند است که توجه خود را به بخش کوچکی از سامانه‌ی دینامیکی تمرکز دهیم و اثر هر چیز دیگر بیرون از این بخش کوچک را با نیروهای خارجی نشان دهیم که فرض می‌کنیم آنها را می‌شناسیم. نیروهایی که در درون این بخش کوچک قرار دارند، نیروهای داخلی‌اند و در حرکت روی‌هم رفته‌ی جسم تاثیر ندارند.

۳-۶ ترازمندی نیروها

بهتر است که مکانیک را به دو بخش **ایستایی‌شناسی** و **دینامیک** تقسیم کنیم. دینامیک با حرکت اجسامی سروکار دارد که به آنها نیرو وارد می‌شود. ایستایی‌شناسی با اجسامی سروکار دارد که در حالت سکون یا حرکت یکنواخت‌اند. اگر نیروهایی حضور داشته باشند آنگاه مسئله‌ی ایستایی‌شناسی به یافتن آرایه‌ی نیروهایی تبدیل می‌شود که تحت آن نیروها، سامانه‌ی اجسام در حال سکون یا حرکت یکنواخت اند. به سامانه‌ای از اجسام که تحت اثر نیروهایی در حال سکون و یا حرکت یکنواخت باشد، گوئیم آن سامانه در حالت **ترازمندی ایستایی** است. نخست به ترازمندی یک تک‌ذره می‌پردازیم. .چون می‌خواهیم

ایستایی تک‌ذره را بررسی کنیم، روشن است که همه‌ی نیروهایی که ممکن است به ذره وارد شوند به یک نقطه وارد خواهند شد؛ به ذره. قانون دوم نیوتون می‌گوید اگر به ذره‌ای نیرو وارد شود، ذره حرکت شتاب‌دار خواهد داشت. پس شرط این که ذره تحت تأثیر نیروهای $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \cdots \mathbf{F}_n$ ترازمندی ایستایی داشته باشد این است که برآیند نیروهای وارد به آن صفر باشد

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots \mathbf{F}_n = 0 \qquad (۳\text{-}۲۷)$$

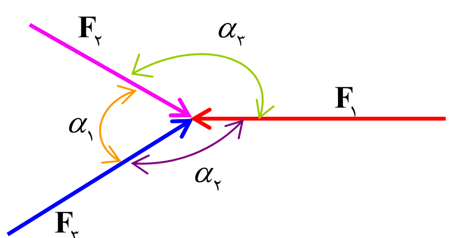
این رابطه‌ی برداری با سه معادله‌ی اسکالر زیر هم‌ارز است، هر معادله برای یکی از مؤلفه‌های نیروها:

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \cdots F_{nx} &= 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + \cdots F_{ny} &= 0 \\ F_{1z} + F_{2z} + \cdots F_{nz} &= 0 \end{aligned} \qquad (۳\text{-}۲۸)$$

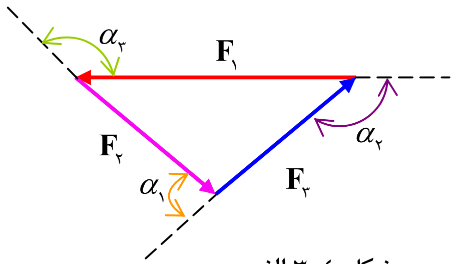
بنابراین می‌توان گفت: **اگر ذره‌ای تحت تأثیر چندین نیرو در حالت ترازمندی ایستایی باشد ، جمع جبری مؤلفه‌های x و y و z این نیروها باید به طور جداگانه صفر باشند.**

برای بررسی ترازمندی یک جسم، (در اینجا ذره)، بهتر است نخست آن را منزوی کنیم. ترازمندی تحت تأثیر سه نیرو، حالت خاصی است. حالت ترازمندی لازم می‌دارد که این سه بردار نیرو یک مثلث بسته بسازند. یعنی راستای سه نیرو همگی باید در یک صفحه قرار گیرند. اگر بیش از سه نیرو به ذره اعمال شود لازم نیست همگی در یک صفحه قرار گیرند. شکل (٤-٣ الف) ذره‌ای را تحت تأثیر سه نیروی $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{F}_3$ در حالت ترازمندی نشان می‌دهد. این سه نیرو یک مثلث بسته می‌سازند. طول ضلع‌های مثلث با اندازه‌ی نیروها متناسب است. از قانون سینوس‌ها در مثلثات و باتوجه به شکل(٤-٣ ب) داریم.

$$\frac{F_1}{\sin\alpha_1} = \frac{F_2}{\sin\alpha_2} = \frac{F_3}{\sin\alpha_3} \qquad (۳\text{-}۲۹)$$



شکل ٤-٣ ب

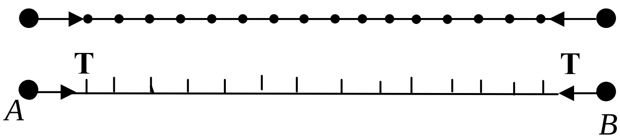


شکل ٤-٣ الف

۳-۷ ریسمان‌کشیده

سامانه‌های زیادی با ترازمندی ایستایی شامل ریسمان یا زنجیر و یا میله اند که به عنوان واسطه انتقال نیرو از یک نقطه سامانه به نقطه‌ی دیگر آن عمل می‌کند. نیروئی که به وسیله‌ی ریسمان کشیده (یا میله) انتقال می‌یابد **کشش** نامیده می‌شود. جهت کشش در ریسمان کشیده که دو جسم را به‌هم می‌پیوندد، همواره چنان است که می‌خواهد دو جسم را به‌هم نزدیک کند. ریسمان کاملاً کشیده شده نمی‌تواند **رانش** داشته باشد؛ یعنی نمی‌تواند دو ذره را از یکدیگر دور کند. اگر ریسمان کشیده نباشد، یعنی تحت کشش نباشد، هیچ نیرویی را منتقل نمی‌کند. در اینجا بهتر است ریسمان را آرمانی در نظر بگیریم. یعنی فرض کنیم سطح مقطع آن قابل چشم‌پوشی و جرمش صفر است و از تعداد بسیار زیادی ذره متصل به‌هم در راستای یک خط تشکیل شده است. کشش در دو سوی یکی از این ذره‌ها ، مثلاً ذره‌ی i - ام از نظر اندازه یکسان است؛ اگر چنین نمی‌بود، نیروی برآیند وارد به ذره‌ی i - ام صفر نمی‌شد و بنا به قانون دوم نیوتون وادار به حرکت می‌شد که نقض شرط ترازمندی ایستایی است. افزون بر این؛ بنا به قانون سوم نیوتون، چون ذره‌ی $(i-1)$ ام کشش $\mathbf{T}$ را به ذره‌ی i - ام وارد می‌کند پس، ذره‌ی i - ام هم

نیروی کشش به اندازه‌ی $\mathbf{T}$، به ذره‌ی $(i-1)$ام وارد می‌کند. این را می‌توان بر روی ریسمان از ذره‌ای به ذره‌ی دیگر تکرار کرد تا اینکه به نقطه‌های پیوند (A و B در شکل ۵-۳) رسید. می‌بینیم که ریسمان بدون جرم تحت کشش $\mathbf{T}$، نیروی $\mathbf{T}$ را در راستای ریسمان به هر یک از نقطه‌های پیوند منتقل می‌کند. به هر نقطه‌ی ریسمان کشیده دو نیروی مساوی و خلاف جهت وارد می‌شود؛ به جز نقطه‌های انتهایی که تنها از یک سوی به آنها نیرو وارد می‌شود. این نیرو را جسمی به ریسمان وارد می‌کند که ریسمان به آن بسته شده است. (توجه کنید که اگر ریسمان جرم‌دار هم می‌بود، هنوز هم نیروی افقی وارد به هر نقطه‌ی غیرانتهایی می‌تواند صفر باشد. نکته‌ی بحث بالا این است که در امتداد ریسمان نیروی کشش ثابت است).



شکل ۵-۳

ریسمان ممکن است کشش‌پذیر (**کشسان**) یا کشش‌ناپذیر (**ناکشسان**) باشد. طول ریسمان کشش ناپذیر تغییر نمی‌کند و مهم نیست که نیروی کشش وارد به آن چه قدراست (تا جایی که بیش از استحکام رسمان نباشد و به پاره شدن آن نیانجامد.)
ریسمان کشش‌پذیر یا **کشسان** اگر تحت تأثیر کشش قرار گیرد، طول آن تغییر می‌کند. این تغییر طول به اندازی کشش بستگی دارد. اگر کشش صفر باشد، ریسمان طول طبیعی ، L_0، خود را دارد. اگر تحت کشش $\mathbf{T}$ طول ریسمان به اندازه‌ی ΔL تغییر کند این تغییر طول با **قانون هوک** به $\mathbf{T}$مربوط است. قانون هوک یک قانون تقریبی است و می‌گوید: اگر ریسمان کشسان تحت کشش $\mathbf{T}$ باشد؛ تغییر طول آن با اندازه‌ی کشش متناسب است.

$$T = k\Delta L \tag{۳-۳۰}$$

ثابت تناسب k را **ثابت کشسانی** (یا ضریب کشسانی) ریسمان می‌نامند. (قانون هوک به ریسمان کشسان محدود نیست و در مورد همه‌ی اجسام **کشسان** تحت تنش درست است؛ چه این تنش کشش باشد یا رانش. فنر مثال دیگری است). گاهی به جای ثابت k از پارامتر دیگری بنام **مدول کشسانی** ریسمان، λ، استفاده می‌شود. λ کشش در واحد تغییر طول نسبی ریسمان است:

$$\lambda \equiv \frac{T}{\Delta L / L_0} \tag{۳-۳۱}$$

که در آن L_0 طول طبیعی و ΔL مقدار تغییر طول ریسمان است. روشن است که λ و k با رابطه‌ی

$$\lambda = kL_0 \tag{۳-۳۲}$$

به هم مربوط اند. بررسی قانون هوک نشان می‌دهد که بُعد k نیرو تقسیم بر طول است و λ بعد نیرودارد.

مثال ۱-۳ جسم سنگینی به وزن W با دو ریسمان ناکشسان از دو نقطه‌ی هم‌سطح A و B آویخته شده اند. ریسمان‌ها بدون جرم اند و با افق زاویه‌های θ و φ می‌سازند. جسم برابر شکل (۶-۳ الف) در نقطه‌ی C به دو ریسمان بسته شده است. کشش را در هر دو ریسمان بیابید.

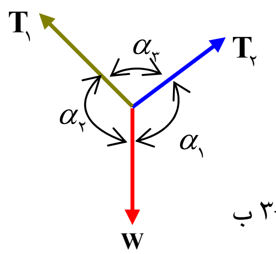
حل: مناسب ترین ذره برای بررسی تعادل آن، ذره‌ای است که در نقطه‌ی C است. این نقطه را منزوی کنید و نیروهایی را که به آن وارد می‌شود در نظر بگیرید. به این نقطه نیروهای کشش $\mathbf{T}_1$ و $\mathbf{T}_2$ در راستای دو ریسمان و کشش $\mathbf{W}$ که در راستای قایم به نقطه‌ی C وارد می‌شود (نیروی وزن $\mathbf{W}$ به طور مستقیم به نقطه‌ی C وارد نمی‌شود. از ترازمندی جسم سنگین می‌توان نتیجه گرفت که کشش در ریسمان قائم با نیروی $\mathbf{W}$ برابر است.) از قانون سینوس‌ها داریم

$$\frac{T_1}{\sin\alpha_1}=\frac{T_2}{\sin\alpha_2}=\frac{W}{\sin\alpha_3} \qquad (٣-٣٣)$$

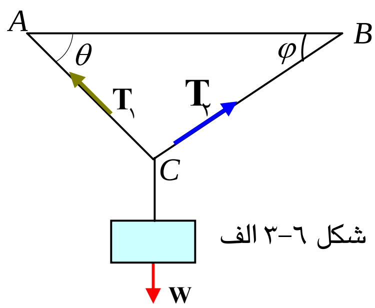
از شکل (٦–٣ الف) دیده می شود که:

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha_1 &= \sin(\pi-\alpha_1)=\cos\phi\\ \sin\alpha_2 &= \sin(\pi-\alpha_2)=\cos\theta\\ \sin\alpha_3 &= \sin(\theta+\phi)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad T_1=\frac{W\ \cos\varphi}{\sin(\theta+\varphi)} \quad , \quad T_2=\frac{W\ \cos\theta}{\sin(\theta+\varphi)} \qquad (٣-٣٤)$$

شکل (٦–٣ب) نمایش نمودار آزاد نیروها در نقطه‌ی C است. به کار گرفتن نمودار آزاد نیروها کار بسیار هوشمندانه در **حل** :



شکل ٦–٣ ب



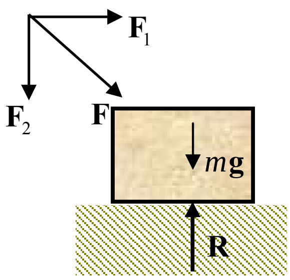
شکل ٦–٣ الف

حل مسئله‌های مکانیک است.

واقعیت مهم که در مثال بالا باید به آن توجه کرد اینست که وزنه در نقطه‌ی C بسته شده است و آزاد نیست که سُر بخورد. اگر وزنه می توانست بلغزد، مکان خود را تغییر می‌داد تا اینکه کشش در دو ریسمان از نظر اندازه برابر شوند.

٨–٣ سطح هموار

در بسیاری از مسئله‌های ایستایی‌شناسی، جسم با سطح تماس دارد. معمولاً این سطح به جسمی که در تماس با آن است، نیرو وارد می‌کند. در شکل (٧–٣) قطعه‌ای به جرم m روی سطح افقی میزی قرار دارد. وزن قطعه، mg ، نیرویی است که می‌توان آن را عمودی و به سمت پایین و در مرکز قطعه پنداشت. چون قطعه حرکت نمی‌کند میز باید نیرویی برابر mg و برخلاف جهت به قطعه وارد کند. در شکل این نیرو را با **R** نشان داده‌ایم. اگر سطح میز هموار باشد، هر نیروی واکنشی که سطح میز به قطعه وارد کند باید همواره به سطح میز عمود باشد. این رفتار، تعریف سطح بازدارنده‌ی هموار است. یعنی اگر سطح هموار باشد، نیروی واکنش آن به سطح عمود است. اگر نیروی دیگری مانند **F** به قطعه وارد شود و این نیرو در جهتی باشد که مؤلفه‌های موازی با سطح؛ F_1، و عمود بر سطح، F_2، داشته باشد، آنگاه قطعه در جهت F1 حرکت شتاب‌دار خواهد داشت. اندازه‌ی نیروی واکنش سطح، **R**، برابر با $mg+F_2$ است.



شکل ٧–٣

مثال٢–٣ کره‌ای به وزن W بین دو صفحه‌ی هموار شیب‌دار قرار دارد و در حال سکون است. صفحه‌ها با افق به ترتیب زاویه‌ی α_1 و α_2 می‌سازند (شکل ٨–٣ الف). این دو صفحه چه نیروهایی به کره وارد می‌کنند.

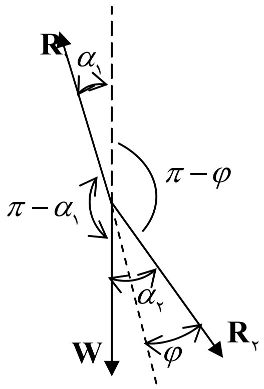
حل: نخست کره را منزوی کنید. روشن است که نیروهای وارد به کره عبارتند از: وزن **W** و نیروهای واکنش $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$ که صفحه‌ها به کره وارد می‌کنند. چون سطح‌ها هموارند این نیروهای واکنش باید بر سطح‌ها عمود باشند. کمیت‌های داده شده **W**،

α_1 و α_2 اند و ما می‌خواهیم $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$ را بیابیم. نمودار آزاد نیروها در شکل (۸-۳ ب) نشان داده شده است. کره تحت اثر سه نیروی $\mathbf{W}$، $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$ در حالت ترازمندی است یعنی: $\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2+\mathbf{W}=0$ اگر مؤلفه‌های افقی و عمودی را در نظر بگیریم، داریم

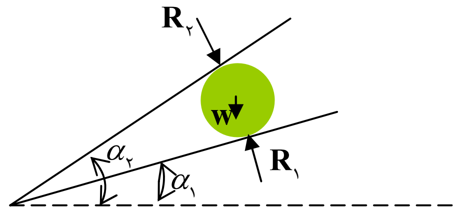
$$R_2\cos\alpha_2 + W = R_1\cos\alpha_1 \quad , \quad R_2\sin\alpha_2 = R_1\sin\alpha_1 \tag{۳-۳۵}$$

و از اینجا به دست می‌آید

$$R_2 = R_1\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \tag{۳-۳۶}$$



شکل ۸-۳ ب



شکل۸-۳ الف

با جایگذاری در رابطه‌ی نخست خواهیم داشت:

$$R_1(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1) = W\sin\alpha_2$$
$$\Rightarrow \quad R_1 = \frac{W\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} \quad , \quad R_2 = \frac{W\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} \tag{۳-۳۷}$$

این نتیجه را می‌توانستیم مستقیم از قانون سینوس‌ها هم بدست آوریم. خط اثر هر سه نیرو در مرکز کره به‌هم می‌رسند. پس

$$\frac{R_1}{\sin\alpha_2} = \frac{R_2}{\sin(\pi-\alpha_1)} = \frac{W}{\sin(\pi-\varphi)}$$
$$\Rightarrow \frac{R_1}{\sin\alpha_2} = \frac{R_2}{\sin\alpha_1} = \frac{W}{\sin\varphi} = \frac{W}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}$$
$$\Rightarrow \quad R_1 = \frac{W\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} \ , \qquad R_2 = \frac{W\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} \tag{۳-۳۸}$$

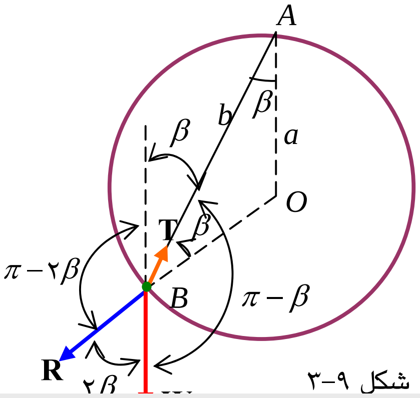
مثال ۳-۳ دانه‌ی تسبیحی به وزن $\mathbf{W}$ بر روی حلقه سیم دایره می‌لغزد. صفحه‌ی حلقه قائم و شعاع آن a است. افزون بر این، دانه‌ی تسبیح با ریسمان ناکشسان بدون جرم به طول b، برابر شکل (۹-۳) به بالای حلقه وصل است. کشش نخ و نیروی واکنش حلقه را پیدا کنید.

حل: کمیت‌های داده شده عبارتند از: $\mathbf{W}, a, b$. در شکل (۹-۳) دانه‌ی تسبیح در نقطه‌ی B است و با ریسمان به نقطه‌ی A وصل است. نیروهای وارد به دانه تسبیح عبارتند از: $\mathbf{W}$، $\mathbf{T}$ و $\mathbf{R}$. اگر دانه‌ی تسبیح را منزوی و از قانون سینوس‌ها استفاده کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{T}{\sin 2\beta} = \frac{R}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{W}{\sin(\pi-\beta)} \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{\sin 2\beta} = \frac{R}{\sin\beta} = \frac{W}{\sin\beta} \tag{۳-۳۹}$$

پس،

$$R = W \quad \text{و} \quad T = \frac{W \sin ۲\beta}{\sin \beta} = ۲W \cos \beta \qquad (۳-۴۰)$$

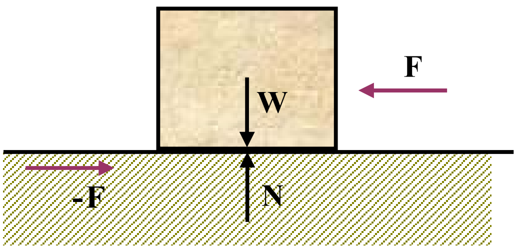


شکل ۹-۳

چون β مستقیماً داده نشده است، بهتر است آن را برحسب کمیت های داده‌شده بنویسیم. داریم $\cos\beta = b/۲a$. توجه کنید که جهت **R** را ما درست برگزیده‌ایم تا به سوی بیرون باشد. اگر آن را به دلخواه به‌سوی درون می‌گرفتیم، نتیجه‌ی به‌دست آمده با علامت منفی همراه می‌شد و نشان می‌داد که جهت **R** برعکس جهت انتخاب است

۹-۳ سطح ناهموار ـ نیروی اصطکاک

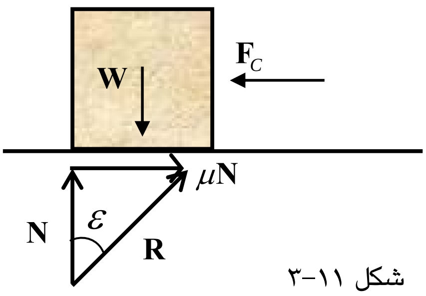
اگر جسمی روی سطح ناهمواری باشد، آنگاه ممکن است که نیروی واکنش سطح علاوه بر مؤلفه‌ی عمود بر سطح، مولفه‌ای نیز در صفحه‌ی تماس داشته باشد. واقعیت این است که در طبیعت سطح کاملاً هموار وجود ندارد. مؤلفه‌ی مماس بر سطح تماسِ نیروی واکنش، **نیروی اصطکاک** نام دارد: نیرویی که اصطکاک سطح به جسم وارد می کند. ساده‌ترین نمونه در شکل (۱۰- ۳) نشان داده شده است. در این شکل جسمی به وزن **W** روی سطح افقی ناهموار میزی در حال سکون است. برای حالت ساده‌ای که هیچ نیرویی به جز **W** وجود ندارد می‌دانیم که جسم در حال سکون باقی خواهد ماند. در نتیجه، واکنش سطح، نیروی **N** خواهد بود که برابر با **W** و در جهت خلاف آن است. اینک فرض کنید، نیروی **کوچک** **F** به طور افقی به جسم وارد می‌شود. از تجربه می‌دانیم که جسم در حال سکون باقی خواهد ماند. تنها توجیه برای بی حرکت ماندن جسم این است که بگوئیم سطح ناهموار نیرویی مساوی و در خلاف جهت، **F**−، به جسم وارد می‌کند. اگر چنین نمی‌بود، بنا به قانون نیوتون، باید جسم در جهت نیروی **F** حرکت می‌کرد. تجربه نشان می‌دهد که با افزایش **F** جسم ساکن باقی می‌ماند تا این که نیرو به یک مقدار بحرانی خاصی برسد. این بدان معنی است که نیروی بازدارنده‌ی اصطکاک در این بازه چنان تغییر می‌کند که همواره با مقدار **F** برابر باشد. با این حال، واقعیت این که سرانجام حرکت روی می‌دهد، نشان می‌دهد که نیروی اصطکاک به حدی رسیده است که پس از آن نمی‌تواند افزایش پیدا کند. آزمایش نشان می‌دهد که به تقریب، مقدار بحرانی نیروی اصطکاک، $\mathbf{F}_C$ ، مستقل از مساحت سطح تماس است و تنها به سرشت سطوح تماس بستگی دارد. افزون بر این، مقدار بحرانی $\mathbf{F}_C$ لازم برای آغاز حرکت (که جسم را در آستانه‌ی حرکت قرار می‌دهد) به طور مستقیم با نیرویی که جسم را به سطح می‌فشارد متناسب است (در مثال ما نیروی وزن). ضریب تناسب μ را **ضریب اصطکاک ایستایی** می‌نامند.



شکل ۱۰-۳

$$\mathbf{F}_C \equiv \mu \mathbf{N} \qquad (۳-۴۱)$$

توجه کنید که μ فقط هنگامی تعریف می‌شود که جسم در *آستانه‌ی لغزش* باشد. این بدان معنی نیست که نیروی اصطکاک تنها در این وضعیت حدی وجود دارد، بلکه بدین معنی است که تنها در این وضعیت حدی است که نیروی اصطکاک با μN برابر است. رابطه‌ی بالا می‌گوید نسبت مقدار بحرانی نیروی افقی اعمال‌شده به جسم و نیروی عمودی واکنش، مقدار ثابتی است که به سرشت سطح‌های تماس دو جسم



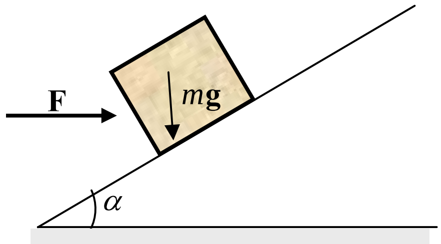
شکل ۱۱-۳

بستگی دارد و با μ، ضریب اصطکاک ایستایی، برابر است. نیروی واکنش واقعی **R** ، برآیند **N** و μ**N** یعنی نیروهای واکنش عمودی و اصطکاک است. این نیروها در شکل (۱۱-۳) نشان داده شده اند. زاویه‌ی اصطکاک ، ε، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tan\varepsilon = \frac{\mu N}{N} = \mu \qquad (۳\text{-}۴۲)$$

که برای جفت سطح‌های داده‌شده مقدار ثابتی است. εو μ را می‌توان با استفاده از سطح شیب‌دار به دست آورد.

مثال ۴-۳: برابر شکل (۱۲-۳) قطعه‌ی مکعب شکلی به جرم m بر روی سطح شیب‌دار ناهمواری قرار دارد که با افق زاویه‌ی α می‌سازد. نیروی **F** به طور افقی به مکعب وارد می‌شود و راستای آن از مرکز هندسی قطعه می‌گذرد. ضریب اصطکاک ایستایی سطح μ است. کمینه و بیشینه مقدار نیروی **F** را چنان بیابید که با تعادل ایستایی سازگار باشند.



شکل ۱۲-۳

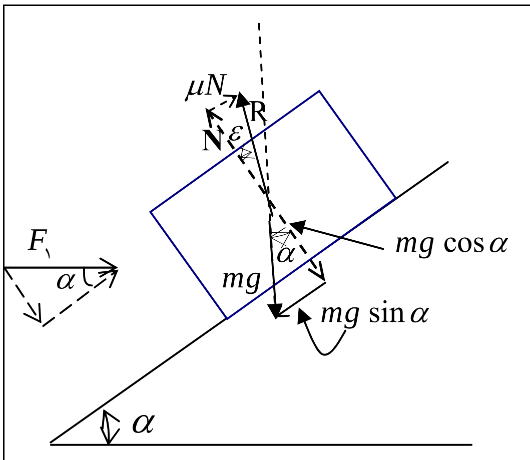
حل: نخست به **F** بپردازیم. اگر قطعه در آستانه‌ی لغزش به سوی پائین سطح باشد **F** کمینه خواهد بود. آن را $\mathbf{F}_1$ بنامید. پس، در این حالت نیروهائی که به قطعه وارد می‌شوند عبارتند از: $\mathbf{F}_1$ (که باید پیدا کنیم)، نیروی وزن **mg** و نیروی واکنش سطح (که در شکل نشان داده نشده است). نیروهایی را که به قطعه وارد می‌شوند به مؤلفه‌هایی در امتداد سطح و عمود بر سطح تجزیه کنید. در شکل (۱۳-۳) این مولفه ها نشان داده شده اند. شرط ترازمندی حدی عبارت است از

$$F_1\sin\alpha + mg\cos\alpha = N \qquad (۳\text{-}۴۳)$$
$$F_1\cos\alpha + \mu N = mg\sin\alpha$$

N مؤلفه‌ی عمودی نیروی واکنش سطح است. اگر از دو رابطه‌ی بالا N را حذف کنیم، به دست می‌آید: $F_1(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. بنابراین،

$$F_1 = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = \frac{mg(\cos\varepsilon\sin\alpha - \sin\varepsilon\cos\alpha)}{(\cos\alpha\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\sin\alpha)} = mg\tan(\alpha - \varepsilon) \qquad (۳\text{-}۴۴)$$

حالتی هم که **F** بیشینه باشد به همین ترتیب حل می‌شود؛ با این تفاوت که این بار قطعه در آستانه‌ی لغزش رو به بالاست.



(شکل ۱۳-۳)

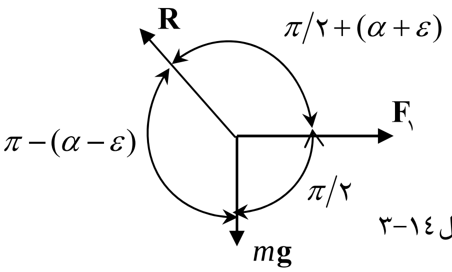
بیشینه‌ی **F** را $\mathbf{F}_2$ بنامید. این بار نیروی اصطکاک رو به پائین است و

$$F_2\sin\alpha + mg\cos\alpha = N',$$
$$F_2\cos\alpha = \mu N' + mg\sin\alpha \qquad (۳\text{-}۴۵)$$
$$\Rightarrow \quad F_2 = mg\tan(\alpha + \varepsilon)$$

از قانون سینوس ها هم می‌توانستیم برای حل مسئله استفاده کنیم. در اینجا فقط حالت کمینه رادر نظر می‌گیریم. خط اثر نیروهای $\mathbf{F}_1$، **mg** و **N** از مرکز هندسی قطعه می‌گذرند. مسئله، بررسی تعادل ذره تحت تأثیر این نیروهاست. از شکل (۱۴-۳) داریم:

$$\frac{F_1}{\sin[\pi - (\alpha - \varepsilon)]} = \frac{mg}{\sin[\pi/2 + (\alpha - \varepsilon)]}$$

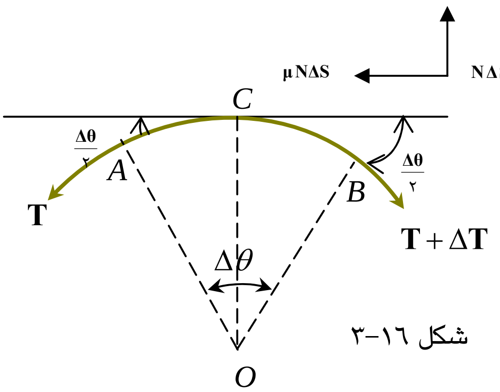
یا



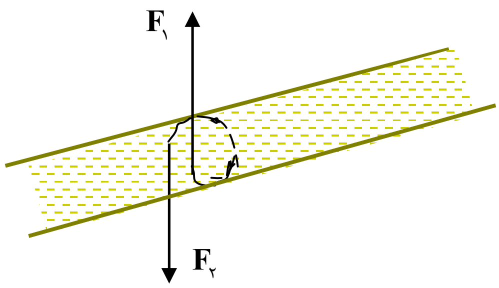
شکل ۳-۱۴

$$\frac{F_۱}{\sin(\alpha-\varepsilon)}=\frac{mg}{\cos(\alpha-\varepsilon)} \quad \Rightarrow \quad F_۱=mg\tan(\alpha-\varepsilon)$$

مثال۵-۳ : همه دیده‌ایم که با پیچیدن ریسمانی دور یک تیرک یا میله می‌توان با نیروی به نسبت اندک به نیروی بسیار بزرگتری چیره شد (شکل۳-۱۵ را ببینید.) تنها محدودیت این است که بیشینه کششی را که ریسمان می‌تواند تحمل کند از نیروی بزرگتر بیشتر باشد. نیروی کوچکتر را $\mathbf{F}_۱$ و نیروی بزرگتر را $\mathbf{F}_۲$ بنامید. در شکل (۳-۱۶) قسمت کوچک Δs ریسمان (خم AB) را که در تماس



شکل ۳-۱۶



شکل۳-۱۵

با سطح ناهمواراست، با درشت نمایی نشان داده‌ایم. ضریب اصطکاک ایستـایی μ است و ریسمان در آستانه‌ی لغزش به سمت راست است. اگر نیروی واکنش عمودی سطح در واحد طول ریسمان $\mathbf{N}$ باشد آنگاه در طول Δs ریسمان نیروی اصطکاکی به اندازه‌ی $\mu\mathbf{N}\Delta s$ و به سوی چپ وجود خواهد داشت. با دقتی پذیرفتی، می‌توان فرض کرد که هر دوی این نیروها به وسط طول کوچک Δs و در نقطه‌ی C وارد می‌شوند. افزون بر این، Δs در حالت تعادل ایستایی است. بنابراین، جمع مؤلفه‌های همه‌ی نیروها در هر جهتی باید صفر باشند. اگر مؤلفه‌های مماس بر سطح را در نظر بگیرید. داریم

$$T\cos(\Delta\theta/۲)+\mu N\Delta s=(T+\Delta T)\cos(\Delta\theta/۲) \quad \Rightarrow \quad \mu N\Delta s=\Delta T \qquad (۳-۴۶)$$

چون زاویه‌ی $\Delta\theta$ کوچک است، در رابطه‌ی بالا از $\cos(\Delta\theta/۲)\approx ۱$ استفاده کردیم. اگر مولفه‌ی عمودی نیروها را در نقطه‌ی C در نظر بگیرید ، دیده می شود که

$$N\,\Delta s=T\,\sin(\Delta\theta/۲)+(T+\Delta T)\sin(\Delta\theta/۲) \quad \Rightarrow \quad N\,\Delta s=T\,\Delta\theta \qquad (۳-۴۷)$$

چون زاویه‌ی $\Delta\theta$ کوچک است، در رابطه ی بالا از تقریب $\sin(\Delta\theta/2)\approx\Delta\theta/2$ استفاده کردیم. از ترکیب دو رابطه و با فرض این‌که $\Delta\theta$ خیلی کوچک و در نتیجه $\Delta\theta\approx d\theta$ است، خواهیم داشت.

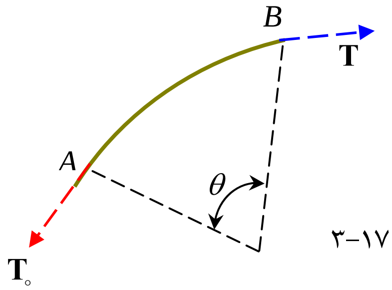
$$\frac{dT}{T}=\mu\,d\theta \qquad (۳-۴۸)$$

که اگر از آن انتگرال بگیریم به دست می‌آید

$$\ell\mathrm{n}T=\mu\theta+\ell\mathrm{n}T_۰ \quad \Rightarrow \quad T=T_۰e^{\mu\theta} \qquad (۳-۴۹)$$

معنی این رابطه را می‌توان با رجوع به شکل (۳-۱۷) بدین گونه فهمید: ریسمان در آستانه‌ی لغزیدن به سوی راست است و $\mathbf{T}_۰$ کششی است که باید به انتهای سمت چپ ریسمان وارد شود تا به نیروی بزرگتر $\mathbf{T}$ در سمت راست چیره شد. θ زاویه‌ی بین دو خط عمود بر سطح در دو نقطه‌ی A و B است. در این نقاط ریسمان از سطح جدا می‌شود. اگر نقطه‌ی تماس سطح و

ریسمان کاملاً هموار باشد، ضریب اصطکاک μ صفر است؛ یعنی کشش ریسمان در اثر تماس با سطح هموار تغییر نمی‌کند.

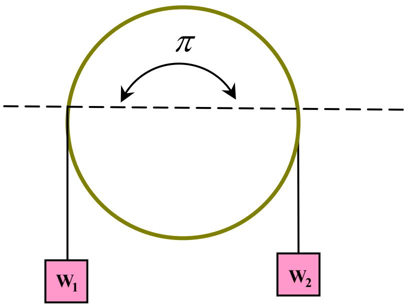


شکل ۱۷-۳

گاهی دانستن نیروی واکنش عمودی برحسب شعاع انحنای سطح سودمند است. می‌توان آن را از رابطه‌های بالا و به ویژه از رابطه‌ی (۴۷-۳) به دست آورد. در حد θ کوچک، هنگامی که $\Delta\theta \approx d\theta$ است، رابطه‌ی (۴۷-۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$N = \frac{T}{ds/d\theta} \;\Rightarrow\; N = \frac{T}{r} \qquad (۵۰-۳)$$

که در آن $r = ds/d\theta$ شعاع خم سطح است



شکل ۱۸-۳

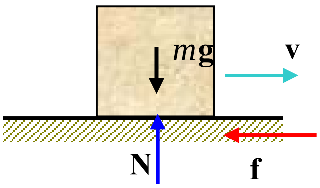
مثال ۶-۳: دو وزنه‌ی $W_۱$ و $W_۲$ $(W_۲ > W_۱)$ به دو انتهای یک ریسمان بسته شده‌اند. ریسمان از روی تنه‌ی ناهموار درختی، همانند شکل (۱۸-۳) آویزان است. تنه‌ی درخت افقی است و سامانه در ترازمندی حدی قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان تنه‌ی درخت و ریسمان ۱/۲ است. نسبت $W_۲/W_۱$ را پیدا کنید.

حل: زاویه‌ی بین دو نقطه‌ای که ریسمان سطح درخت را ترک می‌کند π است. در نتیجه از رابطه‌ی $T_۱ = T_۲ e^{\mu\theta}$ داریم: $W_۲/W_۱ = e^{\pi/۲} = ۴{,}۸۱$

اگر ریسمان یک دور کامل به تنه‌ی درخت پیچیده شده باشد آنگاه $\theta = ۳\pi$ و نسبت $W_۲/W_۱ = ۱۱۱{,}۳۱۸۳$ می‌شود. می‌بینیم که حتی با زاویه‌ی کوچک تماس نیز می‌توان به نیروهای بزرگ چیره شد.

۱۰-۳ اصطکاک جنبشی

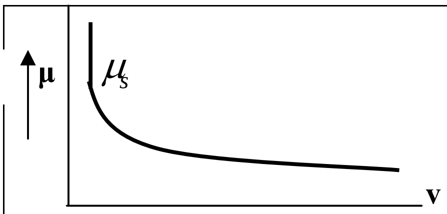
مفهوم **اصطکاک جنبشی** را می‌توان همانند اصطکاک ایستایی فهمید. به تجربه دیده می‌شود که هرگاه جسمی بر روی سطح بلغزد، نیروی اصطکاک با حرکت جسم مخالفت می‌کند. دوباره، جسمی را همانند شکل (۱۹-۳) در نظر بگیرید که بر روی سطح ناهموار می‌لغزد. اگر هیچ نیروی دیگری حضور نداشته باشد پس از مدتی جسم از لغزش باز خواهد ماند. نیرویی درخلاف جهت حرکت جسم باید سبب ایستادن جسم شود. این نیرو، نیروی اصطکاک است. آن را با **f** نشان دهید. این نیرو با نیروی عمود بر سطح (نیرو واکنش سطح) متناسب است:



شکل ۱۹-۳

$$\mathbf{f} = \mu_k \mathbf{N} \qquad (۵۱-۳)$$

ثابت μ_k **ضریب اصطکاک جنبشی** نام دارد. ضریب اصطکاک جنبشی یک سطح همواره از ضریب اصطکاک ایستایی آن کوچکتر است. اما این بدان معنی نیست که نیروی اصطکاک در گذار از ایستایی به جنبشی ناپیوسته است. در شکل (۲۰-۳) تغییر ضریب اصطکاک با سرعت نشان داده شده است. با این وجود، تغییر μ با سرعت پیچیده است و به شرایط فیزیکی بستگی دارد.



شکل ۲۰-۳

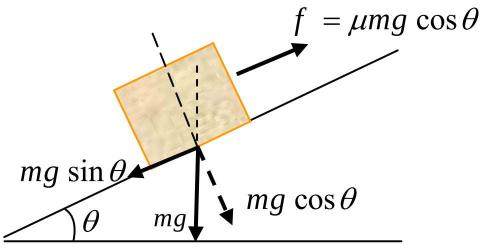
مثال ۷-۳: قطعه‌ای به جرم m بر روی سطح شیبدار ناهمواری رو به پایین می‌لغزد. سطح با افق زاویه‌ی θ می‌سازد و ضریب اصطکاک جنبشی آن μ

است .شتاب جسم رابیابید.

حل: باتوجه به شکل (۲۱-۳) داریم:

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad a = \ddot{x} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) \qquad (۳-۵۲)$$

ضریب اصطکاک جنبشی را می‌توان با تجربه به دست آورد. در مثال بالا، جسم روی سطح شیب‌دار حرکت شتاب‌دار دارد.



شکل ۲۱-۳

با کم‌کردن زاویه‌ی شیب، θ، می‌توان به وضعیتی دست یافت که حرکت شتاب‌دار قطعه به حرکت با سرعت ثابت تبدیل شود. فرض کنید به ازای $\theta = \varepsilon$، این وضعیت پدید آید. در آن صورت برآیند نیروهای وارد به جسم در امتداد سطح شیب‌دار باید صفر باشد؛ یعنی باید داشته باشیم:

$$mg\sin\theta = \mu mg\cos\varepsilon \qquad (۳-۵۳)$$

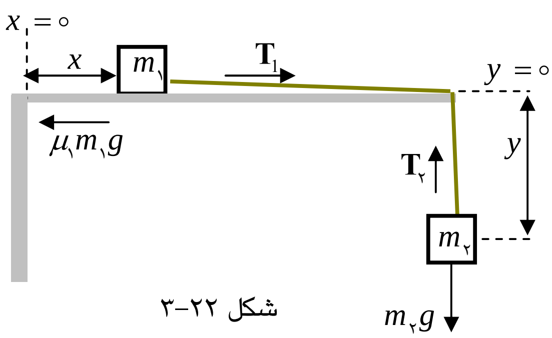
$$\Rightarrow \mu = \tan\varepsilon \quad ; \quad \forall\theta = \varepsilon$$

بنابراین، مثل زاویه‌ی اصطکاک ایستایی، می‌توانیم **زاویه‌ی اصطکاک جنبشی** را تعریف کنیم. درمثال بالا؛ شتاب را می‌توان برحسب زاویه‌ی اصطکاک جنبشی نوشت:

$$\ddot{x} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) = g\sec\varepsilon(\sin\theta\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\cos\theta) = g\sec\varepsilon\sin(\theta - \varepsilon) \qquad (۳-۵۴)$$

نکته: قطعه‌ای را در نظر بگیرید که روی سطح افقی و ناهموار میزی می‌لغزد. برای این که قطعه با سرعت ثابت v_1 روی میز بلغزد، نیروی $\mathbf{F}_1$ لازم است (نیروی $\mathbf{F}_1$ به اصطکاک چیره می‌شود). اگر بخواهیم همین قطعه در روی همین سطح با سرعت ثابت $v_2 > v_1$ بلغزد باز همان نیروی $\mathbf{F}_1$ لازم است. البته باید نیروی $\mathbf{F} > \mathbf{F}_1$ در بازه‌ی زمانی dt به جسم اعمال شود تا سرعتش از v_1 به v_2 افزایش یابد. در این بازه‌ی زمانی، جسم شتابیده می‌شود. اما درست هنگامی که سرعت جسم به v_2 رسید نیرو به $\mathbf{F}_1$ کاهش پیدا می‌کند و شتاب دوباره صفر می‌شود.

مثال ۸-۳: جسمی به جرم m_1 مقید است که روی سطح ناهموار میزی حرکت کند. این جسم با ریسمان بدون جرمی به وزنه‌ی دیگری با جرم m_2 وصل است. جرم m_2 از لبه‌ی میز آویزان است. ریسمان فقط در لبه با میز در تماس است و میان ریسمان و لبه اصطکاک وجود دارد. این وضعیت در شکل (۲۲-۳) نشان داده شده است. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم m_1 و سطح میز μ_1 و ضریب اصطکاک جنبشی میان لبه‌ی میز و ریسمان μ_2 باشند. شتاب های جرم‌های m_1 و m_2 را بیابید.

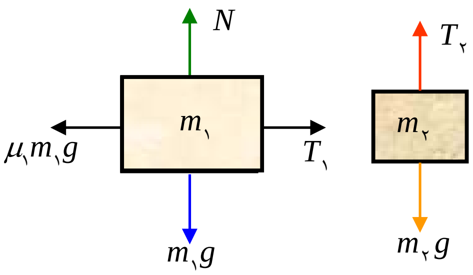


شکل ۲۲-۳

حل: در راستای حرکت، به جرم m_1 نیروی اصطکاک $\mu_1 m_1 g$ و کشش $\mathbf{T}_1$ (در امتداد بخشی از ریسمان که موازی سطح میز است) وارد می شود. نیروهای وارد به جرم m_2 در راستای حرکت آن عبارتند از نیروی کشش $\mathbf{T}_2$ در بخش عمودی ریسمان و نیروی وزن $m_2 g$. نمودار آزاد نیروها در شکل (۲۳-۳) نشان داده شده‌اند. مختصات x و y را چنان انتخاب کنید که جهت مثبت آنها در راستای حرکت باشند. معادله‌های حرکت را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$m_1\ddot{x} = T_1 - \mu_1 m_1 g \quad , \quad m_2\ddot{y} = m_2 g - T_2 \qquad (۳-۵۵)$$

چون ریسمان ناکشسان است، پس داریم $\ddot{y} = \ddot{x}$. فزون بر این، می‌توان



شکل ۳-۲۳

فرض کرد که زاویه‌ی تماس ریسمان با لبه‌ی میز $\pi/2$ است. چون شرایط این تماس ریسمان با لبه‌ی میز درست مانند حالت اصطکاک ایستایی (مثال-های ۵ و ٦) است، (البته ضریب اصطکاک متفاوت است) می‌توان از همان شیوه‌ی مثال‌های ۵ و ٦ برای یافتن کشش های $\mathbf{T}_1$ و $\mathbf{T}_2$ استفاده کرد.

روشن است که:

$$T_2 = T_1 e^{\mu_1 \pi/2} \qquad (۳-۵٦)$$

پس داریم:

$$m_2\ddot{x} = m_2 g - T_1 e^{\mu_2 \pi/2} \quad , \quad m_1\ddot{x} = T_1 - \mu_1 m_1 g \qquad (۳-۵۷)$$

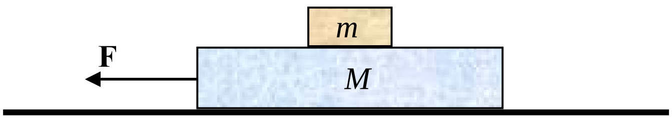
اگر بین این دو رابطه T_1 را حذف کنیم، به دست می‌آید

$$T_1 = m_1\ddot{x} + \mu_1 m_1 g \qquad (۳-۵۸)$$

پس:

$$\begin{aligned} m_2\ddot{x} &= m_2 g - (m_1\ddot{x} + \mu_1 m_1 g)e^{\mu_2 \pi/2} \\ &\Rightarrow \ddot{x}(m_2 + m_1 e^{\mu_2 \pi/2}) = m_2 g - \mu_1 m_1 g\, e^{\mu_2 \pi/2} \\ &\Rightarrow \ddot{x} = \frac{g(m_2 - \mu_1 m_1 e^{\mu_2 \pi/2})}{m_2 + m_1 e^{\mu_2 \pi/2}} \end{aligned} \qquad (۳-۵۹)$$

چون $\ddot{x}$ را یافتیم T_1 و T_2 از معادله‌های حرکت، رابطه‌ی (۳-۵۷) ، به دست می‌آیند.

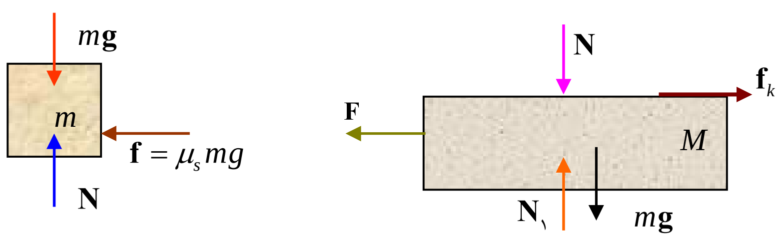


شکل ۳-۲٤

مثال ۹-۳ برابر شکل (۳-۲٤) ، جسمی به جرم $m = 20\ \mathrm{kg}$ روی الواری به جرم $M = 10\ \mathrm{kg}$ قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و الوار به ترتیب $\mu_S = 0{,}25$ و $\mu_K = 0{,}20$ است. اگر الوار با نیروی ثابت $F = 80\ \mathrm{N}$ به سمت

چپ کشیده شود، شتاب جسم و الوار را نسبت به زمین به دست آورید. میان زمین و الوار اصطکاک وجود ندارد. $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$

حل: برای حل این گونه مسئله‌ها ، بهتر است نمودار آزاد نیروها را بکشید. در شکل (۳-۲۵) ، نمودار آزاد نیروها برای هر یک از دو جسم نشان داده شده است.



شکل ۳-۲۵

به جسم m سه نیرو وارد می‌شود: نیروی وزن mg ، نیروی اصطکاک ایستایی $\mu_s mg$ و نیروی واکنش الوار $\mathbf{N}$. اگر جرم m در روی الوار در حال سکون باشد و نسبت به الوار حرکت نکند؛ آنگاه درآستانه‌ی لغزش می‌توان نوشت:

$$f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg = (0.25)(20)(10) = 50\ \mathrm{N}$$

$$f_{\max} = ma_۱ \;\Rightarrow\; a_۱ = \frac{f_{\max}}{m} = \frac{۵۰\ \text{N}}{۲۰\ \text{kg}} = ۲٫۵\, m/s^۲$$

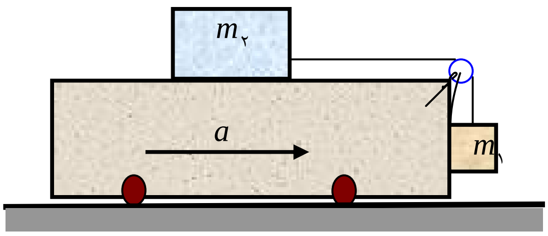
در این وضعیت که دو جسم نسبت به هم ساکن‌اند، شتاب جرم‌های m و M نسبت به زمین با هم برابرند یعنی $a_1 = a_2$. آیا نیروی $F = ۵۰\ \text{N}$ که به الوار وارد می‌شود می‌تواند این وضعیت را برقرار کند؟ پاسخ این پرسش را می‌توان به صورت زیر یافت: به نمودار آزاد نیروهای وارد به الوار توجه کنید. می‌پرسیم برای اینکه الوار با شتاب $a_1 = a_2$ حرکت کند چه نیرویی باید به آن وارد شود؟ این نیرو را $F_۱$ بنامید. بنا به قانون دوم نیوتن داریم: $-۵۰\ \text{N} = (۱۰)(۲٫۵) = ۷۵\ \text{N}$
$F_1 - f_{\max} = Ma_2 \;\Rightarrow\; F_1$ پس برای این که هر دو جسم با هم و با یک شتاب نسبت به زمین حرکت کنند و نسبت به هم ساکن باشند $F_۱ = ۷۵\text{N}$ لازم است. نیروی $F = ۸۰\ \text{N}$ البته از $F = ۷۵\ \text{N}$ بزرگتر است (F_1 بیشینه نیرویی است که به ازای آن دو جسم می‌توانند هم‌شتاب باشند)، پس، شتاب‌های a_1 و a_2 با هم برابر نیستند و دو جسم نسبت به هم حرکت خواهند کرد. این حرکت سبب می‌شود که نیروی اصطکاک بین دو جسم به مقدار $f_k = \mu_k N$ کاهش یابد. برای جسم m داریم:

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg = (۰٫۲)(۲۰\text{kg})(۱۰) = ۴۰\text{N} \;\Rightarrow\; f_k = ma_۱ \;\Rightarrow\; a_۱ = \frac{۴۰\text{N}}{۲۰\text{kg}} = ۲\,\text{m/s}^۲ \qquad (۳-۶۰)$$

و برای جسم M

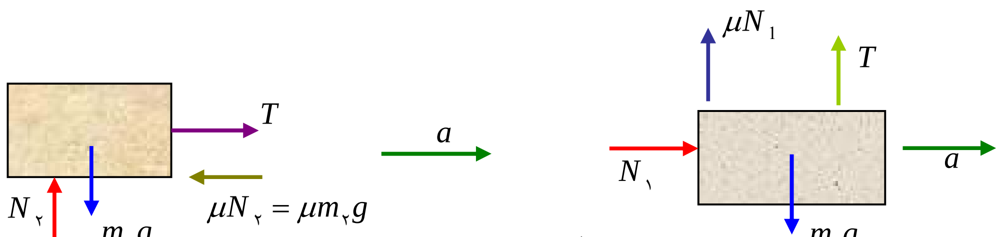
$$F - f_k = Ma_۲ \;\Rightarrow\; a_۲ = \frac{۸۰\text{N} - ۴۰\text{N}}{۱۰\text{kg}} = ۴\,\text{m/s}^۲ \qquad (۳-۶۱)$$

مثال ۱۰-۳ : برابر شکل (۲۶-۳)، ارابه با چه شتابی حرکت کند تا وزنه‌ی $m_۱$ در آستانه‌ی لغزش رو به پایین قرار گیرد. ضریب اصطکاک میان وزنه‌ها و سطح‌های تماس را μ فرض کنید و از جرم و اصطکاک قرقره چشم‌پوشی کنید.



شکل ۲۶-۳

حل: نمودار آزاد نیروهای وارد به جسم های $m_۱$ و $m_۲$ در شکل (۲۷-۳) رسم شده اند. از این نمودارها و باتوجه به قانون نیوتن داریم:



شکل ۳-۲۷

$$m_۲: \quad T - \mu m_۲ g = m_۲ a \qquad (۳-۶۲)$$

$$m_۱: \quad T - m_۱ g + \mu N_۱ = ۰ \quad , \quad N_۱ = m_۱ a \qquad (۳-۶۳)$$

$$\Rightarrow\; T - m_۱ g + \mu m_۱ a = ۰ \qquad (۳-۶۴)$$

در نتیجه با حذف T از دو رابطه‌ی (۶۲-۳) و (۶۴-۳) خواهیم داشت.

$$a = \frac{(m_۱ - \mu m_۲)g}{m_۲ + \mu m_۱} \qquad (۳-۶۵)$$

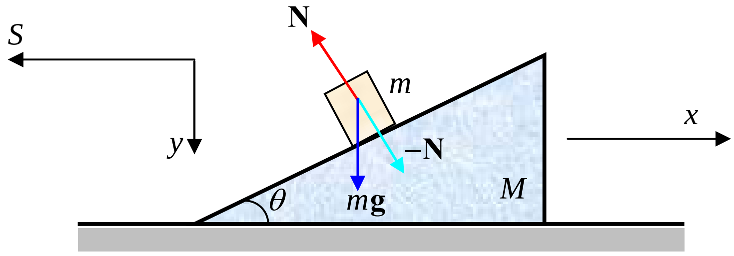
مثال ۱۱-۳: در شکل (۲۸-۳) گوه‌ای به جرم M وشیب θ نشان داده شده است که روی سطح افقی هموار قرار دارد. وزنه‌ی m می‌تواند روی این سطح شیب‌دار بلغزد. از همه‌ی اصطکاک ها چشم‌پوشی کنید و شتاب گوه را پیش از آنکه وزنه از گوه جدا شود حساب کنید.

حل: نیروی عمودی بین گوه و وزنه‌ی m را N بنامید. معادله‌های حرکت جرم m در راستای S و y عبارت اند از:

$$N\ \sin\theta = m\ddot{S}\ ,\qquad mg - N\ \cos\theta = m\ddot{y} \tag{۳-۶۶}$$

و برای گوه در راستای x داریم:

$$-N\ \sin\theta = M\ddot{x} = -m\ddot{S} \quad\Rightarrow\quad \ddot{S} = -\frac{M}{m}\ddot{x} \tag{۳-۶۷}$$



شکل ۲۸-۳

معادله‌ای که قید باقی ماندن جرم m روی سطح شیب‌دار را تعریف می‌کند عبارت است از:

$$\frac{\ddot{y}}{\ddot{S}-\ddot{x}} = \tan\theta \tag{۳-۶۸}$$

چون جرم m با لغزش در روی گوه، نسبت به زمین به اندازه‌ی S به سمت چپ جابه‌جا می‌شود و در اثر حرکتش به همراه گوه، به اندازه‌ی x به سوی راست جابه‌جا می‌شود. بنابراین ، جابه‌جایی افقی کل آن $S-x$ است. در مدتی که این جابه‌جایی افقی صورت می گیرد، جرم m به اندازه‌ی y هم جابه‌جایی عمودی دارد. برای این که جرم m در طول این دو جابه‌جایی افقی و عمودی همواره در روی سطح گوه باقی بماند باید داشته باشیم: $\tan\theta = y/(S-x)$. مشتق‌گیری از این رابطه به معادله‌ی قیدی (۶۸-۳) می‌انجامد. اگر از دو رابطه‌های (۶۶-۳) نخست N را حذف کنیم و از رابطه‌ی (۶۷-۳) به جای $\ddot{S}$ قراردهیم $\ddot{S} = -(M/m)\ddot{x}$، خواهیم داشت

$$m\ddot{y} = mg + M\ cot\theta\,\ddot{x} \tag{۳-۶۹}$$

با حذف $\ddot{S}$ بین رابطه‌های (۶۷-۳) و (۶۸-۳) خواهیم داشت

$$\ddot{y} = (\ddot{S}-\ddot{x})\tan\theta \ \Rightarrow \ddot{y} = \left(-\frac{M}{m}\ddot{x}-\ddot{x}\right)\tan\theta$$
$$\Rightarrow -\ddot{y}\ \cot\theta = \left(\frac{M}{m}+۱\right)\ddot{x} \quad\Rightarrow\quad \ddot{x} = \frac{-\ddot{y}\ \cot\theta}{۱+M/m} \tag{۳-۷۰}$$

و سرانجام اگر $\ddot{y}$ را بین دو رابطه‌ی (۶۹-۳) و(۷۰-۳) حذف کنیم به دست می‌آید

$$\ddot{x} = \frac{-mg\ \cot\theta}{(M+m)+M\ \cot^{۲}\theta} \tag{۳-۷۱}$$

۳-۱۱ نگاهی ژرف به قانون های نیوتون ، بازخوانی $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ و $\mathbf{F} = \frac{d\,\mathbf{p}}{dt}$

در بخش‌های پیش کوشیدیم برخی نیروها را بشناسانیم و با مثال‌هایی اهمیت نمودار آزاد نیروها را یاد آوری کنیم. نمودار آزاد نیروها ابزار سودمندی برای حل مسئله اند. عادت کردن به آن و یاد گیری استفاده از نمودار آزاد نیروها کمک می‌کند تا فیزیک مسئله را روشن‌تر ببینیم.

قانون‌های نیوتون را آموختیم و برخی کاربردهای آن‌ها را دیدیم. اینک به جاست که نگاهی فراتر و ژرف به قانون‌های نیوتون بیندازیم و اندرونه‌های این قانون‌ها را دریابیم. شاید بازگویی قانون‌های نیوتون برای شما خسته کننده باشد. با وجود این، یک بار دیگر هم آن‌ها را بازگو می‌کنم و سپس به اندرونه‌ی آن‌ها می‌پردازم.

۱-۱۱-۳ قانون های نیوتون و اندرونه‌ی آنها

نیوتون در سال ۱۶۸۷ در کتاب *Principia Mathematica* سه قانون خود را منتشر کرد. این که کدام بخش این قانون‌ها تعریف‌اند و کدام بخش از اندرونه‌ی فیزیکی برخوردار است موضوعی است که اندیشمندان بسیاری به آن پرداخته اند. این قانون‌ها را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

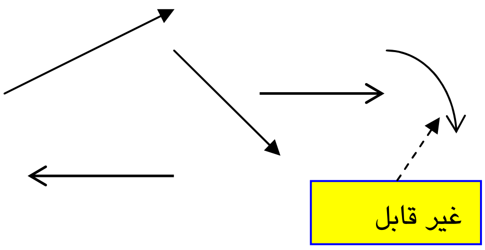
قانون نخست: هر جسمی با سرعت ثابت حرکت می‌کند مگر آنکه به آن نیرو وارد شود.

قانون دوم: آهنگ تغییر تکانه‌ی هر جسم با نیرویی که به آن جسم وارد می‌شود، برابر است.

قانون سوم: به ازای هر نیرویی که به یک جسم وارد می‌شود، نیرویی مساوی و در خلاف جهت به جسم دیگری وارد می‌شود.

می‌توان در باره‌ی این که آیا گزاره‌های بالا قانون‌های فیزیکی‌اند یا تعریف، روزها بحث کرد. دیگران این بحث‌ها را کرده اند. برای نمونه، سرآرتور ادینگتون در اظهارنظری ناخوشایند در باره‌ی قانون نخست نیوتون گفت: قانون اول اساسا می‌گوید" هر ذره‌ای حالت سکون یا حرکت یکنواخت خود را در راستای خط راست حفظ می‌کند مگر آن که این کار را نکند" . با وجود این، شاید در نگاه نخست این سه قانون خالی از محتوا به نظر آیند، اما اندرونه‌ی این قانون‌ها بیش از آن است که از گفتار ادینگتون برمی‌آید. در این جا می‌خواهم به اندرونه‌ی فیزیکی این قانون‌ها بپردازم.

اندرونه ی قانون نخست: در این قانون تعریف نیروی صفر داده شده است. افزون بر این، کار دیگری که این قانون می‌کند، تعریف چارچوب لخت است. چارچوب لخت چارچوبی است که قانون نخست نیوتون در آن برقرار است. چون در قانون نخست واژه‌ی" سرعت" به کار رفته است، باید مشخص کنیم که این سرعت نسبت به کدام چارچوب اندازه‌گیری می شود. قانون اول در هر چارچوب دلخواهی برقرار نیست. برای نمونه، در چارچوب صفحه‌ی چرخان برقرار نیست (در این گونه چارچوب ها باید نیروهای پنداری – مجازی- را وارد کرد تا بتوان از قانون‌های نیوتون استفاده کرد.) به طور شهودی، چارچوبی لخت است که با سرعت ثابت حرکت کند. اما این تعریف ابهام دارد، چون باید بگوییم حرکتِ با سرعت ثابت *نسبت به کدام چارچوب* انجام می‌گیرد. اگر از این ابهام بگذریم چارچوب لخت، تعریف چارچوب خاصی است که قانون نخست نیوتون در آن برقرار است. بنابراین، می‌بینیم که تعریف‌های "نیرو" و"چارچوب لخت" درهم تنیده اند. در این جا اندرونه‌ی فیزیکی چندانی دیده نمی‌شود.نکته‌ی مهم اما این است که این قانون در باره‌ی **همه‌ی** ذره‌ها درست است. پس، اگر ذره‌ای در چارچوبی با سرعت ثابت حرکت کند، آنگاه **همه‌ی** ذره‌ها در آن چارچوب با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. این گزاره پرمحتواست: نمی‌توانیم مشتی ذره‌ی آزاد داشته باشیم که با سرعت ثابت حرکت می‌کنند و مشتی ذره‌ی آزاد دیگر که حرکتشان با پیچ و تاب است و یا در مسیری خمیده مانند شکل (۲۹-۳) حرکت کنند.



شکل ۲۹-۳

اندرونه ی قانون دوم: تکانه با $m\mathbf{v}$ تعریف می‌شود (در اینجا همه چیز را غیرنسبیتی در نظر می‌گیریم) اگر m ثابت باشد (در این درس جرم را ثابت فرض می‌کنیم اما تمرین‌های زیادی با جرم متغیر هم خواهیم داشت) آنگاه قانون دوم می گوید

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (۳-۷۲)$$

که در آن $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{v}/dt$ است. این قانون فقط در چارچوب لخت درست است که با قانون نخست تعریف می‌شود. شاید فکر کنید که قانون دوم فقط نیرو را تعریف می‌کند. اما، اندرونه‌ی آن فراتر از این است. در این قانون موضوع ناگفته‌ای نهفته است. این "نیرو" چیزی است که موجودیتش کاملا به جرم" m " ذره که در قانون ظاهر می‌شود، بستگی ندارد (در قانون سوم در این باره بیشتر خواهیم گفت). برای نمونه، نیروی فنر هرگز به جرم ذره‌ای که به آن وصل است، بستگی ندارد. تنها بخشی از نیروی گرانش، $GMm/r^{۲}$، به جرم جسمی که تحت تاثیر قرار می‌گیرد بستگی دارد و بخش دیگر آن به چیز دیگری (جرم دیگری) وابسته است.

اگر دوست دارید تعریف بسازید می‌توانید کمیت تازه‌ای مانند $\mathbf{G} = m^2\mathbf{a}$ تعریف کنید. آزادید این کار را بکنید اما یک چنین تعریفی بیهوده است. می‌توانید آن را برای هر ذره‌ای در عالم و برای هر شتابی تعریف کنید. نکته‌ی کلیدی این است که این تعریف‌ها هیچ ربطی به یکدیگر ندارند. در عالم هیچ کمیتی (غیر اختراعی- غیرمن درآوردی) وجود ندارد که اگر به جرم-های m و $۲m$ اثر کند نسبت شتاب های آن ها ٤ به ۱ باشد.

اصلی‌ترین چیزی که قانون دوم می‌گوید این است که در حقیقت کمیتی مانند $\mathbf{F}$ وجود دارد که اگر به ذره‌های متفاوت اثر کند همان $m\mathbf{a}$ را تولید می‌کند. ادعای وجود یک چنین کمیتی بسیار فراتر از تعریف است.

در همین راستا، توجه کنید که قانون دوم نیوتون می‌گوید $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ و نه چیزی مانند $\mathbf{F} = m\mathbf{v}$ یا $\mathbf{F} = m\, d^3\mathbf{x}/dt^3$. اینها با دنیای واقعی سازگار نیستند. افزون بر این، آنها با قانون نخست نیوتون هم ناسازگارند. $\mathbf{F} = m\mathbf{v}$ می‌گوید برای سرعت غیر صفر نیرو نیاز است و این با قانون نخست در تناقض است. $\mathbf{F} = m\, d^3\mathbf{x}/dt^3$ می‌گوید ذره با شتاب ثابت (به جای سرعت ثابت) حرکت می‌کند مگر آنکه به آن نیرو وارد شود. این هم با قانون نخست تناقض دارد.

مانند قانون نخست، قانون دوم هم برای **همه‌ی** ذره ها درست است. به بیان دیگر، اگر نیرویی (مثل فنری که به اندازه‌ی معین کشیده شده باشد) به دو ذره‌ی با جرم های $m_۱$ و $m_۲$ اثر کند، آنگاه رابطه‌ی (۷۲-۳) می‌گوید شتاب ذره‌ها با رابطه‌ی زیر به هم مربوط اند.

$$\frac{a_۱}{a_۲} = \frac{m_۲}{m_۱} \qquad (۳-۷۳)$$

جدا از این که نیروی مشترک (همان نیرو) وارد به این دو جسم چیست، این رابطه برقرار است. بنابراین، اگر یک بار از نیرویی برای یافتن جرم نسبی دو جسم استفاده کردیم، می‌دانیم که اگر جرم‌ها تحت تاثیر هر نیروی دیگری هم قرار گیرند، نسبت $\mathbf{a}$ ها چه خواهد بود. البته ما هنوز جرم را تعریف نکرده‌ایم. اما رابطه‌ی (۷۳-۳) روشی تجربی برای تعیین جرم هر جسمی را نسبت به یک جرم استاندارد به دست می‌دهد که هر دو جسم تحت اثر همان نیروواند.

توجه کنید که $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ یک رابطه‌ی برداری است و بنابراین، در چارچوب کارتزی سه معادله‌ی $F_x = ma_x$ ، $F_y = ma_y$ و $F_z = ma_z$ را یک جا و در یک رابطه بیان می‌کند.

اندرونه ی قانون سوم: این قانون می‌گوید اگر دو ذره‌ی منزوی داشته باشیم که به وسیله‌ی نیرویی با هم برهم‌کنش می‌کنند، آنگاه شتاب دو ذره در خلاف جهت یکدیگر است و با جرمشان به طور وارون متناسب است. بیان هم‌ارز این است که بگوییم این قانون بیان پایستگی (یعنی مستقل از زمان بودن) تکانه کل سامانه‌ی منزوی است. برای این که این پایستگی تکانه را ببینیم، دو ذره را در نظر بگیرید که هر یک فقط با ذره‌ی دیگر برهم‌کنش می‌کند و نه با چیز دیگری در عالم. در این صورت داریم

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d\,(m_۱\mathbf{v}_۱+m_۲\mathbf{v}_۲)}{dt}=m_۱\mathbf{a}_۱+m_۲\mathbf{a}_۲=\mathbf{F}_۱+\mathbf{F}_۲ \qquad (۳-۷۴)$$

$\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ نیروهایی اند که به ترتیب به ذره‌ی $m_۱$ و ذره‌ی $m_۲$ وارد می‌شوند. این نمایش پایستگی تکانه (یعنی $d\,\mathbf{p}/dt=0$) است. و با قانون سوم (یعنی $\mathbf{F}_۱=-\mathbf{F}_۲$) همارز است.

قانون سوم نیوتون چیزی را تعریف نمی‌کند و در نتیجه، یک مفهوم خالص است. به هر حال نمی‌تواند هم تعریف باشد، چون همیشه درست نیست. تنها در باره‌ی نیروهای از نوع "هل دادن " یا "کشش" درست است. برای نمونه، در مورد نیروی مغناطیسی درست نیست (در آنجا میدان الکترومغناطیسی هم تکانه دارد و بنابراین، تکانه‌ی کل ذره ها و میدان پایسته است.) ما در این جا با میدان‌ها سرو کار نخواهیم داشت؛ تنها به ذره‌ها خواهیم پرداخت. در نتیجه، برای وضعیت‌هایی که در نظر خواهیم گرفت، قانون سوم همواره برقرار است.

در قانون سوم آگاهی بسیار مهمی نهفته است. قانون سوم می‌گوید هرگز نمی‌توان ذره‌ای یافت که شتابیده شود مگر آنکه ذرّهٔ دیگری در جایی دیگر شتابیده شود. ذره‌ی دوم شاید در جایی دوردست باشد، مانند سامانه‌ی زمین- خورشید، اما همیشه در جایی وجود دارد. توجه کنید که اگر فقط قانون دوم را داشتیم، آنگاه بدون این که اتفاق دیگری در عالم رخ دهد، امکان این که ذره‌ای به خودی خود شتابیده شود وجود می‌داشت. فقط کافی است شتاب ذره‌ی دیگری با دو برابر جرم، در همان مکان نصف شتاب ذره‌ی اول باشد تا همه چیز با قانون دوم سازگار شود. در این صورت می‌توان گفت که نیرویی با اندازه‌ی معین در آن مکان به هر جسمی اعمال می‌شود و همه چیز با هم سازگار می‌شد. اما قانون سوم می‌گوید رفتار عالم (دستکم عالمی که ما در آنیم) این گونه نیست. به بیان دیگر، نیروی بدون همزاد افسانه است؛ حال آن که نیروی همراه با همزادی برابر و در خلاف جهت، سرشت "علت و معلولی" دارد و به نظر فیزیکی‌تر می‌آید.

سرانجام این که نباید به قانون‌های نیوتون بیش از حد پیرایه ببندیم. چون، اگر چه آنها دستاوردهای هوشمندانه‌ی برجسته‌اند و به زیبایی از پسِ توصیف فیزیک فرایندهای هر روزه‌ی برمی‌آیند، با این وجود، قانون‌های نظریه‌ای تقریبی‌اند. فیزیک نیوتون حالت حدی نظریه‌های درست‌تر نسبیتی و مکانیک کوانتومی است و این نظریه‌ها هم به نوبه‌ی خود حالت‌های حدی نظریه‌های درست‌تردیگری اند. برهم‌کنش ذرات (یا موج‌ها، ریسمان‌ها و یا هر نامی که به آن‌ها بدهید) در سطحی بنیادی‌تر هیچ شباهتی به آن چه که ما آن را نیرو می‌نامیم، ندارند.

۳-۱۱-۲ به کار بردن قانون های نیوتون: نمودار جسم آزاد

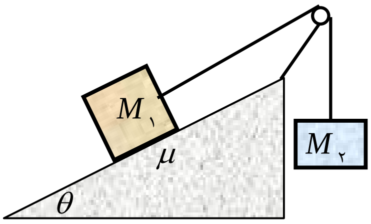
قانون دوم نیوتون ما را برای انجام محاسبه توانمند می‌کند و اجازه می‌دهد که با زبان عدد سخن بگوییم. برای هر نیروی داده شده‌ای می‌توان $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ را به کار برد و شتاب ذره را به دست آورد. با دانستن شتاب، و به شرطی که مکان و سرعت اولیه داده شوند، می‌توان رفتار جسم (یعنی در چه مکانی قرار دارد و سرعتش چیست) را تعیین کرد. این فرایند گاهی نیازمند مقداری کار است. اما دو وضعیت پایه‌ای و عمومی وجود دارد که همواره روی می‌دهد:

- در بسیاری از مسئله‌ها، یک وضعیت فیزیکی (برای نمونه: قطعه‌ای که روی یک سطح ساکن است، یا جرم‌هایی که به ریسمان‌ها وصل‌اند، و غیره) داده می‌شود و وظیفه‌ی ما این است که از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ استفاده کنیم و نیروهایی را که به جسم وارد می‌شوند، پیدا کنیم. معمولا نیروها در جهت‌های مختلف به جسم وارد می‌شوند وبه سادگی می‌توان پی-گیری آنها را گم کرد. از این رو سودمند است که جسم‌ها را منزوی کنیم و همه‌ی نیروهای وارد به هر کدام از آنها را رسم کنیم. موضوع این بخش همین است.
- در مسئله‌های دیگر، نیرو به صورت تابع صریحی از زمان، مکان، ویا سرعت داده می‌شود و کار ما به حل ریاضی معادله‌ی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}\equiv m\ddot{\mathbf{x}}$ (در این جا فقط یک بعد را در نظر می‌گیریم) تبدیل می‌شود. حل دقیق (یا به بیانی درست‌تر،

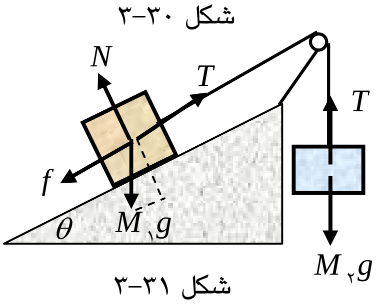
حل تحلیلی) این معادله‌ی دیفرانسیل ممکن است دشوار (یا نشدنی) باشد. در این باره در جای خود سخن خواهیم گفت.

اینک حالت عمومی اول را بررسی می‌کنیم که یک وضعیت فیزیکی داده شده است و می‌خواهیم همه‌ی نیروها را بیابیم. از واژه‌ی **نمودار آزاد نیروها** برای نشان دادن همه‌ی نیروهای وارد به یک جسم استفاده می‌شود. با رسم کردن یک چنین نموداری برای هر جسم موجود در سامانه، می‌توان همه‌ی $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ های مربوط را نوشت. حاصل، تعدادی معادله برحسب نیروهای ناشناخته و شتاب‌ها خواهد شد که می‌توان آنها را حل کرد. فهمیدن این فرایند با مثالی ساده‌تر می‌شود. در بخش‌های نخستین این فصل نمونه‌هایی را دیدید. اینک نمونه‌هایی بیشتر.

مثال ۱۲- ۳ (یک سطح و دو جسم): جرم M_1 روی سطح شیب‌داری با شیب θ نگه داشته شده است. جرم M_2 از کنارسطح برابر شکل (۳۰- ۳) آویزان است. جرم‌ها با ریسمان بی‌جرم که از روی قرقره‌ی بدون جرم می‌گذرد به هم وصل اند. ضریب اصطکاک جنبشی بین M_1 وسطح μ است. جرم M_1 را رها می‌کنیم. فرض کنید M_2 به اندازه‌ای بزرگ است که جرم M_1 به بالا کشیده می‌شود. شتاب جرم ها چیست و کشش در ریسمان چقدر است؟



شکل ۳۰-۳



شکل ۳۱-۳

حل: نخستین کاری که باید کرد رسم همه‌ی نیروهایی است که به دو جرم وارد می‌شوند. شکل (۳۱- ۳) این نیروها را نشان می‌دهد. نیروی‌های وارد به M_2 گرانش و کشش ریسمان اند. نیروهای وارد به M_1 عبارتند از گرانش، اصطکاک، کشش ریسمان و نیروی قائم. توجه کنید که نیروی اصطکاک رو به پایین سطح است، چون فرض کردیم M_1 رو به بالا حرکت می‌کند. حالا که همه‌ی نیروها را رسم کردیم، اینک باید همه‌ی $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ها را بنویسیم. وقتی با M_1 سرو کار داریم، می‌توانیم نیروها را به افقی و عمودی تجزیه کنیم. اما استفاده از مولفه‌های نیروها در راستای سطح و عمود بر سطح از روشنگری بیشتری برخوردار است. (در مسئله‌های با سطح شیب‌دار یکی از این دو دستگاه مختصات بهتر از دیگری است. گاهی خیلی روشن نیست که کدام بهتر است. اما اگر در یکی از این گزینه‌ها مسئله پیچیده‌تر شد، همواره می‌توان از دیگری استفاده کرد.)

از این دو مولفه به همراه معادله‌ی عمودی $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} T - f - M_1 g \sin\theta &= M_1 a \\ N - M_1 g \cos\theta &= 0 \\ M_2 g - T &= M_2 a \end{aligned} \qquad (۳-۷۵)$$

در این جا، از این واقعیت استفاده شده است که هر دو جرم با یک آهنگ شتابیده می‌شوند و جهت مثبت را برای M_2 رو به پایین تعریف کردیم. هم‌چنین فرض کردیم که کشش در هر دو انتهای ریسمان یکسان است؛ چون درغیر این صورت نیروی خالصی در جایی به ریسمان وارد می‌شود و سبب می‌شود ریسمان با شتاب بینهایت (زیرا ریسمان بدون جرم است) حرکت کند. در معادله‌های (۷۵-۳) چهار ناشناخته وجود دارند که عبارتند از T، a ، N و f . اما تنها سه معادله داریم. خوشبختانه معادله‌ی چهارمی هم وجود دارد: $f = \mu N$ ؛ چون فرض می‌کنیم که جرم M_1 حرکت می‌کند و بنابراین می‌توانیم از توصیف اصطکاک جنبشی استفاده کنیم. از معادله‌ی دوم رابطه‌ی (۷۵-۳) داریم $f = \mu N = \mu M_1 g \cos\theta$ و بنابراین، معادله‌ی نخست به صورت $T - \mu M_1 g \cos\theta - M_1 g \sin\theta = M_1 a$ درمی‌آید. اگر این را با معادله‌ی سوم رابطه‌ی (۷۵-۳) جمع کنیم تنها $\mathbf{a}$ باقی می‌ماند . پس داریم

$$\Rightarrow \quad T = \frac{M_1 M_2 g\,(1+\mu\cos\theta+\sin\theta)}{M_1+M_2}$$

$$a = \frac{g\,(M_2-\mu M_1\cos\theta - M_1\sin\theta)}{M_1+M_2} \qquad (۳-۷۶)$$

توجه کنید که برای حرکت رو به بالای جرم M_1 (یعنی $a>0$) باید $M_2 > M_1(\mu\cos\theta+\sin\theta)$ باشد که با نگاه کردن به نیروها در راستای سطح آشکار است.

نکته: اگر فرض می‌کردیم که M_1 به اندازه‌ی کافی سنگین و در نتیجه رو به پایین سطح حرکت می‌کند، آنگاه نیروی اصطکاک رو به بالا می‌شد و به دست می‌آوردیم

$$a = \frac{g\,(M_2+\mu M_1\cos\theta - M_1\sin\theta)}{M_1+M_2} \quad \text{و} \quad T = \frac{M_1 M_2 g}{M_1+M_2}(1-\mu\cos\theta+\sin\theta) \qquad (۳-۷۷)$$

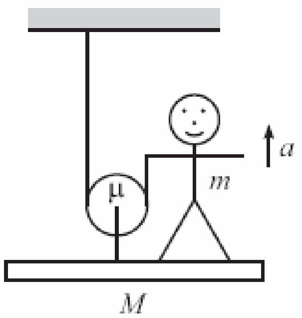
برای این که M_1 رو به پایین حرکت کند (یعنی $a<0$) باید داشته باشیم $M_2 < M_1(\sin\theta-\mu\cos\theta)$. بنابراین، برای این که سامانه حرکت نکند، بازه‌ی مقادیر M_2 عبارت است از

$$M_1(\sin\theta-\mu\cos\theta) < M_2 < M_1(\sin\theta+\mu\cos\theta) \qquad (۳-۷۸)$$

اگر μ خیلی کوچک باشد M_2 باید اساسا برابر $M_1\sin\theta$ باشد تا سامانه حرکت نکند. اگر $\tan\theta \le \mu$ باشد، حتی با $M_2=0$ هم M_1 به پایین سُر نخواهد خورد. ♣

در مسئله‌های از گونه‌ی بالا روشن است که چه چیزی را به عنوان جسم باید برگزینیم و نیروها را برایش رسم کنیم. اما در مسئله‌های دیگر که زیرسامانه‌های مختلف دارند، باید هوشیار بود که همه‌ی نیروهای مربوط به یک زیرسامانه را در نظر گرفت. کدام زیرسامانه را برگزینیم بستگی به این دارد که چه کمیتی را می‌خواهیم پیدا کنیم. مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال۱۳-۳ (صفحه و قرقره): شخصی برابر شکل (۳۲-۳) بر روی سامانه‌ی صفحه و قرقره ایستاده است. جرم صفحه، شخص و قرقره به ترتیب عبارتند از M ، m و μ. ریسمان بدون جرم است. شخص انتهای ریسمان را به بالا می‌کشد تا به خودش شتاب رو به بالای a بدهد (فرض کنید صفحه مقید است که همواره افقی بماند- شاید با قرار دادن دو انتهای آن روی دو ریل عمودی). کشش ریسمان، نیروی قائم بین صفحه و شخص و نیز کشش در میله‌ای که قرقره را به صفحه وصل می کند چقدرند؟



شکل ۳۲-۳

حل: برای یافتن کشش ریسمان، زیرسامانه را تمامی سامانه، به‌جز سقف، در نظر می‌گیریم . اگر بپنداریم که سامانه را در جعبه‌ی سیاهی قرار داده‌ایم (برای این که تاکید کنیم نیروهای داخلی سامانه مهم نیستند) آنگاه می‌بینیم نیروهایی که از جعبه‌ی سیاه "نشت" می‌کنند عبارتند از سه وزن (Mg، mg و μg) که همگی رو به پایین‌اند و کشش T که رو به بالاست. با استفاده از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ برای تمامی سامانه به دست می‌آید:

$$T-(M+m+\mu)g = (M+m+\mu)a \qquad (۳-۷۸)$$

$$\Rightarrow \quad T = (M+m+\mu)(g+a)$$

برای یافتن نیروی قائم، N ، بین شخص و صفحه و نیز نیروی کشش f ، درمیله‌ای که صفحه را به قرقره وصل می‌کند، در نظر گرفتن تمامی سامانه کافی نیست. زیرا، برای این سامانه ، نیروهای بالا، نیروهای

داخلی به حساب می‌آیند و بنابراین در هیچ معادله‌ی $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (که تنها شامل نیروهای خارجی نسبت به سامانه است) ظاهر نمی‌شوند. بنابراین باید زیرسامانه‌هایی دیگری را در نظر بگیریم:

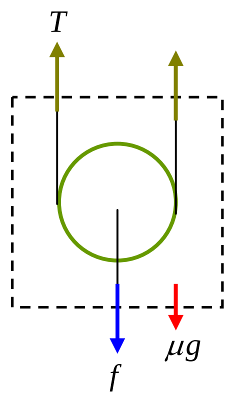
- نخست $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را برای شخص به کار ببرید. نیروهایی که به شخص وارد می‌شوند عبارتند از گرانش، نیروی قائم از سوی صفحه و کشش از سوی ریسمان (که دست شخص را به پایین می‌کشد). پس داریم

$$N - T - mg = ma \qquad (۳-۷۹)$$

- حالا $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را برای صفحه به کار ببرید. نیروهای وارد به صفحه عبارتند از گرانش، نیروی عمودی که از سوی شخص به صفحه وارد می‌شود و نیروی رو به بالا که میله به صفحه وارد می‌کند. پس داریم

$$f - N - Mg = Ma \qquad (۳-۸۰)$$

- اینک $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را برای قرقره به کار ببرید. نیروهای وارد به قرقره عبارتند از گرانش، نیروی رو به پایین از سوی میله



شکل ۳-۳۳

و **دو برابر** کشش ریسمان (چون ریسمان قرقره را از هر دو طرف به بالا می‌کشد. شکل (۳-۳۳)) . پس داریم

$$2T - f - \mu g = \mu a \qquad (۳-۸۱)$$

توجه کنید که اگر این سه معادله را با هم جمع کنیم معادله‌ی (۳-۷۸) به دست می‌آید. باید هم این چنین باشد، چون تمامی سامانه جمع این سه زیرسامانه هاست. معادله‌های (۳-۷۹) تا (۳-۸۱) سه معادله با سه مجهول N, T و f اند. جمع آنها مقدار T را همانند معادله‌ی (۳-۲۸) به دست می‌دهد. از رابطه‌های (۳-۷۹) و (۳-۸۱) به ترتیب خواهیم داشت

$$N = (M + 2m + \mu)(g + a)$$
$$f = (2M + 2m + \mu)(g + a) \qquad (۳-۸۲)$$

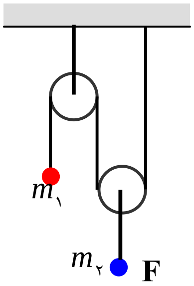
نکته: این نتیجه‌ها را با زیرسامانه‌های متفاوت از آنچه که در بالا در نظر گرفتیم هم می‌شد به دست آورد. برای نمونه، می‌شد زیرسامانه‌ی قرقره بعلاوه‌ی صفحه را در نظر گرفت و یا زیرسامانه‌ی دیگری را. هر گونه که بخواهید سامانه را به زیرسامانه ها تقسیم کنید باید بتوانید سه معادله‌ی مستقل $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ بنویسید تا بتوانید آن ها را حل کنید و N, T و f را به دست آورید.

در مسئله‌های از این دست برخی نیروها به سادگی فراموش می‌شوند، مانند T دوم در رابطه‌ی (۳-۸۱). مطمئن‌ترین کار این است که هر زیرسامانه‌ای را منزوی کنید و دور آن چارچوبی بکشید. مانند چارچوب نقطه‌چین در شکل (۳-۳۳) و سپس همه‌ی نیروهای" نشتی" از این چارچوب را رسم کنید. به بیان دیگر نمودار آزاد نیرو ها را بکشید. ♣

دسته ی دیگری از مسئله‌های شبیه مسئله‌ی بالا، **ماشین های آتوود** است. ماشین آتوود نامی است برای سامانه‌ای که از مجموعه‌ی جرم‌ها، ریسمان‌ها و قرقره‌ها تشکیل شده باشد. در حالت عمومی ریسمان‌ها و قرقره‌ها جرم دارند. در این فصل ما تنها به حالتی خواهیم پرداخت که قرقره‌ها بی جرم‌اند. من در این جا یک مثال را حل خواهم کرد و آرایه‌های پیچیده‌تر و عجیب-تر را به مسئله‌ها و به پیوست واگذار خواهم کرد. در پیوست این فصل، حل عمومی ماشین آتوود را با چند مثال خواهم آورد. همان‌گونه که خواهید دید، برای حل مسئله‌ی آتوود دو گام وجود دارد: (۱) همه‌ی معادله‌های $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را بنویسید و (۲) شتاب جرم ها را با توجه به این که طول ریسمان (ها) تغییر نمی‌کند (این واقعیت را ما "پایستگی طول ریسمان" خواهیم نامید.) به

هم دیگر مربوط کنید.

مثال۱۴-۳ (ماشین آتوود): سامانه‌ی قرقره‌های شکل (۳۴-۳) و جرم‌های m_1 و m_2 را در نظر بگیرید. ریسمان و قرقره ها جرم ندارند. شتاب جرم‌ها چیست و کشش ریسمان چقدر است؟



شکل ۳۴-۳

حل: نخستین چیزی را که باید به آن توجه کرد این است که کشش T در همه جای ریسمان بدون جرم یکسان است. زیرا در غیر این صورت در بخشی از ریسمان می بایست شتاب بینهایت باشد. پس، نتیجه می شود که در ریسمان کوتاهی که به m_2 وصل است، کشش برابر $2T$ است. چون باید نیروی خالص وارد به قرقره‌ی سمت راست صفر باشد و گرنه شتاب آن بینهایت می‌شود. بنابراین، معادله‌ی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ برای دو جرم عبارت اند از

$$T-m_1g=m_1a_1 \quad , \quad 2T-m_2g=m_2a_2 \tag{۸۳-۳}$$

حالا دو معادله داریم با سه مجهول a_1 ، a_2 و T . پس به یک معادله‌ی دیگر هم نیاز داریم. این را از "پایستگی طول" به دست می‌آوریم که شتاب‌های a_1 ، a_2 را به هم مربوط می‌کند. اگر تصور کنید که m_2 و قرقره‌ی سمت راست را به اندازه‌ی d بالا ببرید، آنگاه به اندازه‌ی $2d$ از طول ریسمان بالای قرقره‌ی سمت راست ناپدید می‌شود. این مقدار طول ریسمان باید در جای دیگری ظاهر شود. در نتیجه در آن بخش از ریسمان که در تماس با m_1 است پدیدار می‌شود. پس، m_1 به اندازه‌ی $2d$ پایین می‌رود. به بیان دیگر، $y_1=-2y_2$ ، (که در آن y_1 و y_2 جابه‌جایی جرمها از مکان‌های اولیه‌ی است.) با دو بار مشتق گیری از این رابطه ، نتیجه‌ی دلخواه ما که رابطه‌ای میان a_1 ، a_2 است به دست می‌آید

$$a_1=-2a_2 \tag{۸۴-۳}$$

از ترکیب رابطه‌های (۸۳-۳) و (۸۴-۳) پاسخ های a_1 ، a_2 و T به دست می‌آیند.

$$a_1=g\frac{2m_2-4m_1}{4m_1+m_2}, \qquad a_2=\frac{2m_1-m_2}{4m_1+m_2}, \qquad T=\frac{3m_1m_2g}{4m_1+m_2} \tag{۸۵-۳}$$

نکته: در این جا حالت‌های خاص و حدی وجود دارند که می‌توان آنها را آزمود. از جمله: (۱) اگر $m_2=2m_1$ باشد، از رابطه-های (۸۵-۳) داریم $a_1=a_2=0$ و $T=m_1g$. همه چیز در حال سکون‌اند.

(۲) اگر $m_1 \gg m_2$ باشد آنگاه رابطه‌ی (۸۵-۳) می‌گوید $a_2=-g$ و $a_1=2g$ و $T=3m_1g$. در این صورت m_2 سقوط آزاد می‌کند در حالی که m_1 با شتاب $2g$ به بالا می‌رود و T درست به اندازه‌ای است که نیروی وارد به m_1 را برابر $m_1(2g)$ بکند؛ چون $T-m_1g=3m_1g-m_1g=m_1(2g)$. حالت $m_2 \gg m_1$ را شما بیازمایید. ♣

۳-۱۱-۳ $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ یا $\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ ، کدام یک؟

در مکانیک غیر نسبیتی وقتی m ثابت است، $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ و $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ هر دو یک چیز را بیان می‌کنند. اما اگر m ثابت نباشد، $\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}=m\mathbf{a}+\frac{dm}{dt}\mathbf{v}$ دیگر با $m\mathbf{a}$ برابر نیست. در چنین وضعیت هایی آیا باید از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ استفاده شود یا از $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ ؟ کدام یک فیزیک مسئله را درست توصیف می‌کند؟ پاسخ این پرسش بستگی به این دارد که چه چیزی را "سامانه" می‌نامید و کمیت های m و $\mathbf{p}$ و $\mathbf{a}$ را به آن نسبت می‌دهید. بیشتر مسئله‌ها را می‌توان با استفاده از هر دوی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ و $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ حل کرد؛ اما باید در گزینش اجزاء سامانه هشیار بود و دانست که چگونه باید با آن ها رفتار کرد. دو مثال زیر پیچیدگی‌ها و ظرافت‌های این موضوع را روشن می‌کنند.

مثال ۱۵-۳ (ریزش ماسه به درون ارابه): دانه‌های ماسه از بالا و به طور عمودی با آهنگ $dm/dt=\sigma$ به درون ارابه‌ای ریزش می‌کند. ارابه را با چه نیرویی باید هل بدهیم تا با سرعت ثابت افقی v حرکت کند.

حل ۱: فرض کنید $m(t)$ جرم مجموعه‌ی" ارابه بعلاوه‌ی ماسه‌ی درون آن" باشد (این مجموعه را سامانه‌ی C بنامید.) اگر از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ استفاده کنیم (در اینجا a شتاب ارابه است. چون ارابه با سرعت ثابت حرکت می‌کند پس شتاب آن صفر است) آنگاه خواهیم داشت $F=۰$ که نادرست است. رابطه‌ی درستی که باید استفاده کنیم $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ است و خواهیم داشت

$$F=\frac{dp}{dt}=ma+\frac{dm}{dt}v=۰+\sigma v \qquad (۳-۸۶)$$

این پاسخ ، پذیرفتنی است؛ چون نیروی هل دادن تکانه‌ی C را افزایش می‌دهد. تکانه‌ی C به این خاطر زیاد می‌شود که جرمش زیاد می‌شود (سرعت ثابت است).

حل ۲ این مسئله را با استفاده از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ هم می‌توان حل کرد؛ به شرطی که سامانه را جزء کوچک جرمی در نظر گرفت که به ارابه افزوده می‌شود. حالا، نیروی شما چیزی است که به این جزء جرم شتاب می‌دهد و سرعتش را از صفر به v می‌رساند. فرض کنید در زمان Δt جزء جرم کوچک Δm به درون ارابه می‌افتد. فرض کنید این جرم در آغاز بازه‌ی Δt به طور یک پارچه (مثل یک توده) به درون ارابه می‌افتد و سپس شتابیده می‌شود و پس از زمان Δt سرعتش به v می‌رسد (و این نتیجه برای هر بازه‌ی Δt بعدی هم تکرار می‌شود). بنابراین، داریم $F=ma=\Delta m(v/\Delta t)$. اگر سمت راست آن را به صورت $\Delta m(v/\Delta t)=(\Delta m/\Delta t)v$ بازنویسی کنیم خواهیم داشت $F=\sigma v$ که همان پاسخ حل ۱ است.

مثال ۱۶-۳ (نشت ماسه از ارابه): ماسه با آهنگ $dm/dt=\sigma$ از کف ارابه به بیرون نشت می کند. اگر به ارابه نیروی F اعمال شود، شتاب ارابه را پیدا کنید.

حل: فرض کنید $m(t)$ جرم سامانه‌ی" ارابه بعلاوه‌ی ماسه‌ی درون آن" است (این سامانه را C بنامید). در این مثال برای حل مسئله می‌خواهیم از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ استفاده کنیم. بنابراین، شتاب $a=F/m$ است. توجه کنید که چون m با زمان کاهش می-یابد، a با زمان افزایش پیدا می‌کند. در این‌جا به این خاطر از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ استفاده کردیم که جرم m چیزی است که به وسیله‌ی نیروی F شتاب داده می‌شود. می‌توانید تصور کنید که این فرایند در گام‌های گسسته رخ می‌دهد: نیرو جرم را برای زمان کوتاهی هل می‌دهد، سپس بخش کوچکی (جرم Δm) از آن جدا می‌شود..... روشن است که در این فرایند گسسته، $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ رابطه‌ی درست است، زیرا برای هر گام فرایند درست است. تنها ابهام در این است که آیا باید از m یا $m+\Delta m$ استفاده کرد. اما این به خطای بسیار اندکی می‌انجامد و می‌توان از آن چشم پوشید.

نکته: در این مسئله هنوز هم $F=dp/dt$ برقرار است؛ اما به شرطی که F نیروی **کل** و p تکانه‌ی **کل** باشند. در مسئله البته F تنها نیروی موجود است. اما تکانه‌ی کل سامانه دو بخش دارد: تکانه‌ی ماسه‌ی درون ارابه و تکانه‌ی ماسه‌ای که نشت می‌کند و در هوا سقوط می‌کند (اگر هوا مقاومت داشته باشد باید در به کار بردن $F=dp/dt$ نگران آن هم باشیم؛ چون p تکانه‌ی کل است). اشتباه معمول در استفاده از $F=dp/dt$ این است که p را فقط تکانه‌ی سامانه‌ی C در نظر بگیریم. مثال ساده‌ای وجود دارد که نشان می‌دهد اگر p فقط تکانه‌ی سامانه‌ی C باشد چرا $F=dp/dt$ کار نمی‌کند. تصور کنید $F=۰$ است و فرض کنید ارابه با سرعت v حرکت می‌کند. ارابه را به دو بخش جدا از هم تقسیم کنید. بخش عقب آن را "ماسه‌ی نشت کرده" و بخش جلو را" ارابه" بنامید. اگر بخواهید در $dp/dt=F=۰$ تکانه‌ی p ارابه را قرار دهید، می‌بینید که سرعت ارابه با نصف شدن جرمش دوبرابر می‌شود. این پاسخ بی‌معنی است زیرا هر دو بخش ارابه با آهنگ یکسان به

حرکتشان ادامه می‌دهند. ♣

نکته: (یادداشت دکتر محمد خرمی) برای سامانه‌های باز، یعنی سامانه‌هایی که جرم‌شان ثابت نیست، در حالت عمومی شکل درست قانون دوم نیوتون به صورت $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F} - \mathbf{I}$ است که در آن $\mathbf{I}$ جریان تکانه نامیده می‌شود که حاصل انتقال یا تغییر جرم سامانه است و بنا به قرارداد اگر جرم از سامانه حارج شود، مثبت است. ♣

جمع بندی کنیم: $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ همواره درست است به شرطی که نیروی **کل** و تکانه‌ی **کل** سامانه‌ی ذرات مورد نظر را در آن به کار ببریم. این رویکرد در برخی وضعیت ها پیچیده می‌شود. بنابراین، در برخی وضعیت ها ساده‌تر است که از $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ استفاده شود؛ اما باید هوشیار بود و سامانه‌ای را که با نیروی $\mathbf{F}$ شتابیده می‌شود به درستی مشخص کرد. ناتقارنی در دو مثال بالا در این است که در مثال اول (مثال ١٤-٣) نیرو در واقع ماسه‌ی فرودی را شتاب می‌دهد حال آنکه در مثال ١٥-٣ نیرو به ماسه‌ی نشتی شتاب نمی‌دهد (آن را واشتابیده هم نمی‌کند). $\mathbf{F}$ کاری به ماسه‌ی نشتی ندارد.

پیوست : روش عمومی حل مسئله های ماشین آتوود.

هفت گام زیر شما را به حل هر مسئله‌ی ماشین آتوود توانا می‌کند.

گام ۱: شتاب هر جرم متحرک را با نمادهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots$ نشان دهید.

گام ۲: شتاب هر یک از قرقره‌های **متحرک** را با نمادهای $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3 \ldots\ldots$ نشان دهید.

گام ۳: به هر ریسمانی کشش‌های $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \ldots$ را نسبت دهید.

گام ۴: برای هر جرم معادله‌ی $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را بنویسید. $\mathbf{F}$ نیروی برآیند وارد به هر جرم است.

گام ۵: برای هر قرقره‌ی متحرک معادله‌ی $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را بنویسید. $\mathbf{F}$ نیروی برآیند است. اگر قرقره بدون جرم باشد (مانند بیشتر حالت هایی که ما در نظر خواهیم گرفت) آنگاه $\mathbf{F} = ۰$ است.

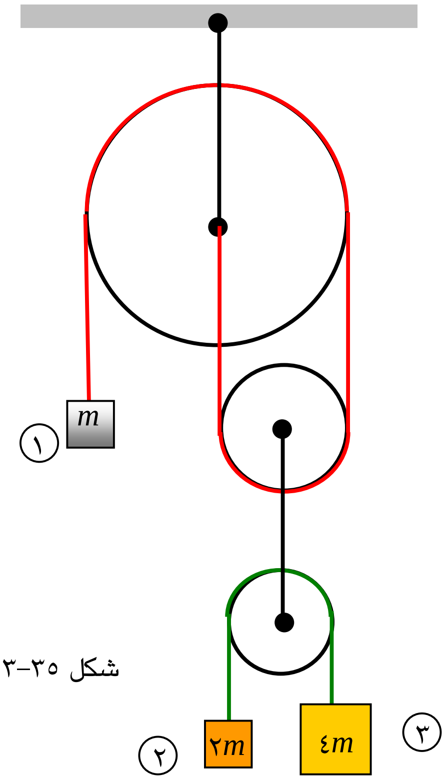
گام ۶: معادله‌ی پایستگی طول ریسمان را برای هر یک از ریسمان ها بنویسید.

توجه: با این گام تعداد معادله‌های شما با تعداد مجهول‌ها برابر می‌شود. زیرا هر ریسمان به شما یک مجهول (یک کشش، T) و یک معادله (پایستگی طول) می‌دهد و هر جزء متحرک (جرم یا قرقره) یک مجهول (شتاب آن) و یک معادله ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ آن) می‌دهد. پس می‌توان با حل همزمان آنها مجهول‌ها را به دست آورد. بهتر است که منظم بود و یک راه منظم بودن این است که

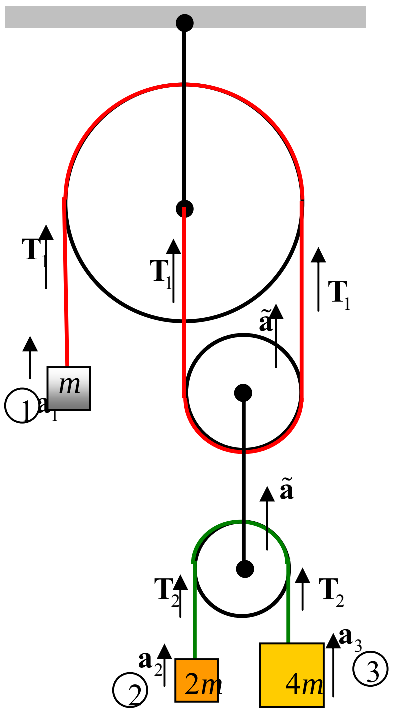
گام ۷: برای این که از دست مجهولی رها شوید، معادله‌ای را که مجهول شما را در بر دارد برگزینید و آن را برحسب مجهول خود حل کنید. پاسخ مجهول را در همه‌ی معادله‌های دیگر جای‌گزین کنید. از معادله‌ای که برای یافتن مجهول‌تان استفاده کردید تا هنگامی که همه‌ی مجهول ها را از بین نبرده‌اید دیگر استفاده نکنید. این کار را تکرار کنید تا هیچ مجهولی در معادله‌های شما باقی نماند. این فرایند پاسخ آخرین مجهول را به شما خواهد داد. برای این که مجهول‌های دیگر را به دست آورید، آخرین پاسخ را به طور واگرد در معادله‌هایتان جایگزین کنید. گام آخر ابلهانه به نظر می‌رسد. بگذارید آن را برای یک مثال به کار ببریم. به آرایه‌ی شکل (٣٥-٣) توجه کنید. **گام‌های ۱تا ۳** در شکل (٣٦-٣) نشان داده شده‌اند. در **گام ۴** رابطه‌های $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را برای جرم‌ها می‌نویسیم که عبارتند از

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_۱ - m\mathbf{g} &= m\mathbf{a}_۱ \\ \mathbf{T}_۲ - ۲m\mathbf{g} &= ۲m\mathbf{a}_۲ \\ \mathbf{T}_۲ - ٤m\mathbf{g} &= ٤m\mathbf{a}_۲ \end{aligned} \qquad (پ-۱)$$

در **گام ۵** معادله‌های $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را برای قرقره‌های متحرک می‌نویسیم. چون دو قرقره‌ی متحرک را همانند یک قرقره فرض



شکل ۳-۳۵



شکل ۳-۳٦

کردیم و شتاب یکسانی به هر دو نسبت دادیم، پس تنها یک معادله داریم.

$$2\mathbf{T}_1 - 2\mathbf{T}_2 = 0 \qquad (پ-۲)$$

طرف دوم این رابطه به این خاطر صفر است که جرم قرقره صفر است. حالا می‌رسیم به **گام ۶** که اعمال "پایستگی طول ریسمان" است. اگر جرم ۱ را به اندازه‌ی y_1 بالا بکشید. به اندازه‌ی y_1 از طول ریسمان بالای جرم ۱ ناپدید می‌شود. در اثر این جابه‌جایی، جرم ۱ شتاب $\mathbf{a}_1$ پیدا می‌کند. چون قرقره‌ی بزرگ حرکت نمی‌کند، این مقدارگم شده از طول ریسمان باید در دو طرف قرقره‌ی متحرک بالایی ظاهر شود. یعنی در هر دو طرف قرقره میانی به طول ریسمان بالای آن افزوده می‌شود و قرقره‌ی میانی به اندازه‌ی y_2 سقوط می‌کند. y_2 مقداری است که از دو سوی به ریسمان بالای قرقره‌ی میانی افزوده شده است. پس داریم

$$y_1 = -2y_2 \qquad (پ-۳)$$

(علامت منفی در سمت راست به این خاطر است که جهت مثبت را رو به بالا فرض کردیم و قرقره‌ی میانی سقوط می‌کند.) اگر از رابطه‌ی (پ-۳) دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم ، خواهیم داشت

$$\mathbf{a}_1 + 2\tilde{\mathbf{a}}_2 = 0 \qquad (پ-٤)$$

اینک به ریسمان گذرنده از قرقره‌ی پایین توجه کنید. جرم ۲ را به اندازه‌ی x بالا ببرید. این کار سبب می‌شود که جرم ۲ شتاب $\mathbf{a}_2$ به دست آورد. ریسمان دور قرقره شل می‌شود. مقدار شل شدگی ریسمان در دو طرف قرقره‌ی پایینی باید از میان برود. پس قرقره‌ی پایینی به اندازه‌ی $\tilde{x}$ سقوط می‌کند. یعنی، بخشی از طول x ریسمان به $2\tilde{x}$ تبدیل می شود و بخش دیگرش سبب می-شود که جرم ۳ به اندازه‌ی z سقوط کند. پس می‌توان نوشت:

$$x = 2\tilde{x} - z \qquad (پ-۵)$$

علامت منفی در رابطه‌ی (پ-۵) به این خاطر است که جهت مثبت جابه‌جایی را رو به بالا فرض کردیم و جرم ۳ به پایین سقوط می کند. اگر از رابطه (پ-۵) دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم خواهیم داشت

$\ddot{x} = 2\ddot{\tilde{x}} - \ddot{z} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_2 - 2\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{a}_3 = 0$	(پ-٦)

این معادله‌ی پایستگی طول ریسمان پایینی است که جرمهای ۲ و ۳ را به هم وصل کرده‌است و از روی قرقره‌ی پایینی می‌گذرد. کار تمام شد. حالا شش مجهول $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1, \mathbf{a}_3)$ داریم و شش معادله که عبارت اند از

$$\mathbf{T}_1 - m\mathbf{g} = m\,\mathbf{a}_1 \qquad (پ-٧)$$

$$\mathbf{T}_2 - 2m\mathbf{g} = 2m\,\mathbf{a}_2 \qquad (پ-٨)$$

$$\mathbf{T}_2 - 4m\mathbf{g} = 4m\,\mathbf{a}_3 \qquad (پ-٩)$$

$$2\mathbf{T}_1 - 2\mathbf{T}_2 = 0 \qquad (پ-١٠)$$

$$\mathbf{a}_1 + 2\tilde{\mathbf{a}} = 0 \qquad (پ-١١)$$

$$\mathbf{a}_2 - 2\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{a}_3 = 0 \qquad (پ-١٢)$$

گام ٧: حالا این معادله‌ها را همزمان حل می‌کنیم. نخست، چیزهایی را که نمی‌خواهیم حذف می‌کنیم. یعنی $\mathbf{T}$ها و $\mathbf{a}$ها را حذف می‌کنیم. برای حذف $\mathbf{T}_1$ معادله‌ی (پ-١٠) را انتخاب کنید (هر معادله‌ی دیگری هم که در آن $\mathbf{T}_1$ وجود داشته باشد، می‌تواند برگزیده شود. من ساده ترین شان را انتخاب کردم. از رابطه‌ی (پ-١٠) داریم $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$. آن را در بقیه‌ی معادله‌ها جایگزین کنید. پنج معادله و پنج مجهول باقی می‌ماند:

$$\mathbf{T}_2 - m\,\mathbf{g} = m\,\mathbf{a}_1 \qquad (پ-١٣)$$

$$\mathbf{T}_2 - 2m\,\mathbf{g} = 2m\,\mathbf{a}_2 \qquad (پ-١٤)$$

$$\mathbf{T}_2 - 4m\,\mathbf{g} = 4m\,\mathbf{a}_3 \qquad (پ-١٥)$$

$$\mathbf{a}_1 + 2\tilde{\mathbf{a}} = 0 \qquad (پ-١٦)$$

$$\mathbf{a}_2 - 2\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{a}_3 = 0 \qquad (پ-١٧)$$

حالا $\mathbf{T}_2$ را حذف کنید. من از معادله‌ی (پ-١٣) استفاده می‌کنم. خواهیم داشت $\mathbf{T}_2 = m\,\mathbf{g} + m\,\mathbf{a}_1$. این رابطه را در چهار معادله‌ی دیگر جایگزین می‌کنیم. چهار معادله و چهار مجهول باقی می‌ماند.

$$(m\,\mathbf{g} + m\,\mathbf{a}_1) - 2m\,\mathbf{g} = 2m\,\mathbf{a}_2 \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{g} + \mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 \qquad (پ-١٨)$$

$$(m\,\mathbf{g} + m\,\mathbf{a}_1) - 4m\,\mathbf{g} = m\,\mathbf{a}_3 \quad \Rightarrow \quad -3\mathbf{g} + \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 \qquad (پ-١٩)$$

$$\mathbf{a}_1 + 2\tilde{\mathbf{a}} = 0 \qquad (پ-٢٠)$$

$$\mathbf{a}_2 - 2\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{a}_3 = 0 \qquad (پ-٢١)$$

اکنون $\tilde{\mathbf{a}}$ را حذف می‌کنیم. از رابطه‌ی (پ-٢٠) داریم $\tilde{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}_1/2$. اگر این مقدار را در سه معادله‌ی دیگر قرار دهیم سه معدله و سه مجهول خواهیم داشت

$$-\mathbf{g} + \mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 \qquad (پ-٢٢)$$

$$-3\mathbf{g} + \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 \qquad (پ-٢٣)$$

$$\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 = 0 \qquad (پ-٢٤)$$

از دست کمیت‌هایی که نمی‌خواهیم، رها شدیم. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ و $\mathbf{a}_3$ شتاب‌هایی است که واقعا در پی آنهاییم. باید به یاد داشته باشد که کدام معادله را برای حذف کدام متغیر برگزیدیم. با $\mathbf{a}_1$ آغاز می‌کنیم و برای حذف آن از رابطه‌ی (پ- ٢٢) استفاده می‌کنیم.

(پ-٢٤ ⁕) (این معادله را به یاد بسپارید) $\qquad \mathbf{a}_1 = \mathbf{g} + 2\mathbf{a}_2$

و آن را در رابطه‌های (پ-٢٣) و (پ-٢٤) جایگزین کنید:

$$-\mathbf{g} + \mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_3 \qquad (پ- ٢٥)$$

$$\mathbf{g} + 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = 0 \qquad (پ-٢٦)$$

حالا با استفاده ازرابطه‌ی (پ-٢٥) می‌توان $\mathbf{a}_2$را حذف کرد.

(پ-٢٧ ⁕) (این معادله را هم به یاد بسپارید) $\qquad \mathbf{a}_2 = \mathbf{g} + 2\mathbf{a}_3$

و آن را در رابطه‌ی (پ–۲٦) قرار می‌دهیم. به دست می‌آید:

(پ–۲۸ ✻) (این معادله را هم به یاد بسپارید)
$$\mathbf{g}+۳(\mathbf{g}+۲\mathbf{a}_۲)+\mathbf{a}_۲=۰$$

از رابطه‌ی (پ–۲۸ ✻) داریم:

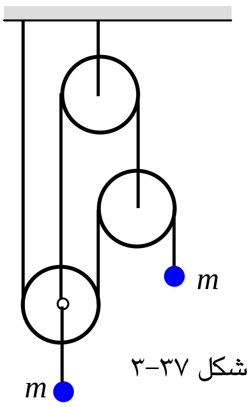
(پ–۲۹)
$$\mathbf{a}_۲=-\frac{٤}{۷}\mathbf{g}$$

و با جاگذاری آن در رابطه‌ی (پ–۲۷ ✻) خواهیم داشت:

(پ–۳۰)
$$\mathbf{a}_۲=\mathbf{g}+۲\left(-\frac{٤}{۷}\mathbf{g}\right)\quad\Rightarrow\quad \mathbf{a}_۲=-\frac{۱}{۷}\mathbf{g}$$

سرانجام این که اگر از رابطه‌ی (پ–۳۰) استفاده کنیم و در رابطه‌ی (پ–۲٤ ✻) قرار می دهیم، $\mathbf{a}_۱$ به دست می‌آید:

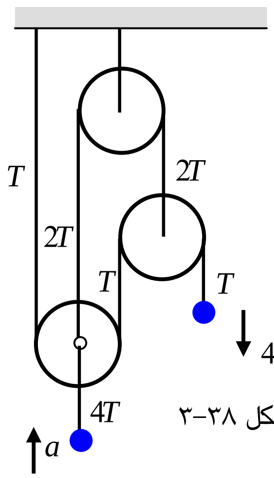
(پ–۳۱)
$$\mathbf{a}_۱=\mathbf{g}+۲\left(-\frac{۱}{۷}\mathbf{g}\right)\quad\Rightarrow\quad \mathbf{a}_۱=\frac{٥}{۷}\mathbf{g}$$



شکل ۳–۳۷

مثال ۱۷–۳: ماشین آتوود شکل (۳–۳۷) را در نظر بگیرید. همه‌ی قرقره‌ها و ریسمان ها بدون جرم‌اند. و جرم هر دو وزنه m است. دو ریسمان که به وسط قرقره‌ی سمت چپ وصل شده اند به محور قرقره وصل‌اند. شتاب وزنه‌ها را به دست آورید.

حل : با توجه به شکل (۳–۳۸) کشش ریسمانی را که به جرم سمت راست وصل است T بنامید. این ریسمان از دو قرقره‌ی پایینی می‌گذرد و چون همواره کشیده است، در همه‌جای آن کشش T است. حال اگر به قرقره‌ی (بدون جرم) سمت راست نگاه کنید، می‌بینید که کشش در ریسمانی که آن را به قرقره‌ی بالایی وصل می‌کند (و پس از گذشتن از روی آن به مرکز قرقره‌ی پایینی وصل می‌شود) برابر $2T$ است. حال به قرقره‌ی (بدون جرم) سمت چپ (قرقره‌ی پایینی) توجه کنید. کشش در ریسمان کوتاهی که از مرکز آن آویزان است و جرم m به آن وصل است، $4T$ است. فرض کنید شتاب جرم سمت چپ a و رو به بالاست. از پایستگی طول ریسمان می‌توان دریافت که شتاب جرم سمت راست $4a$ و رو به پایین است. این نکته کلیدی است؛ بنابراین، بگذارید آن را بفهمیم: دو قرقره‌ی پایینی به یک اندازه جابه‌جا می‌شوند (یکی به بالا و دیگری به پایین)؛ چون هر دو با یک ریسمان به هم وصل‌اند. اگر قرقره‌ی سمت چپ به اندازه‌ی d بالا برود، به اندازه‌ی $۲d$ از طول دو ریسمان بالای آن کاسته و "ناپدید" می‌شود. همچنین، اگر قرقره‌ی سمت راست به اندازه‌ی d پایین برود، به اندازه‌ی $۲d$ از طول دوریسمان‌های آویزان در زیر آن کاسته و" ناپدید" می‌شود. بنابراین، طول کل $٤d$ باید در بالای جرم سمت راست ظاهر شود. به بیان دیگر، جرم سمت راست به اندازه‌ی $٤d$ سقوط می‌کند: $y_{\text{right}}=٤d$. اگر دو بار از y_{right} نسبت به زمان مشتق بگیریم خواهیم داشت: $a_{\text{right}}=٤a_{\text{left}}$ (از نظر اندازه). بنابراین، دو معادله‌ی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ عبارت‌اند از



شکل ۳–۳۸

(پ–۳۲) (برای جرم سمت چپ)
$$٤T-mg=ma$$

(پ–۳۳) (برای جرم سمت راست)
$$mg-T=m(٤a)$$

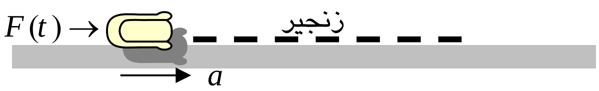
از رابطه‌ی (پ–۳۳) T را به دست آورید و در رابطه‌ی (پ–۳۲) قرار دهید. خواهیم داشت

(پ–۳٤)
$$٤(mg-٤ma)-mg=ma\quad\Rightarrow\quad ۳mg=۱۷ma\quad\therefore\ a=\frac{۳}{۱۷}g$$

این شتاب رو به بالای جرم سمت چپ است. پس، شتاب جرم سمت راست رو به پایین وبرابر است با $\text{٤}a = (\text{١٢}/\text{١٧})g$.

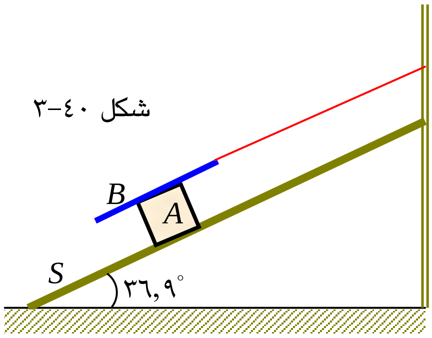
مثال‌های تکمیلی

ت-۱ زنجیر همگنی با چگالی جرمی $\sigma(kg/m)$ در روی سطح بدون اصطکاک برابر شکل (۳۹-۳) خوابانیده شده است. در کنار زنجیر خاک‌انداز بدون جرمی در حال سکون است. خاک انداز را با نیروی $F(t)$ به جلو هل می‌دهیم (تا زنجیر به تدریج در خاک‌انداز جمع شود). این نیرو در همه‌ی زمان‌ها به خاک‌انداز (و آن مقدار از زنجیر که در درونش قرار گرفته است) شتاب ثابت a می‌دهد. بین خاک‌انداز و سطح، اصطکاک وجود ندارد. نیروی $F(t)$ را بیابید.



شکل ۳۹-۳

ت-۲ از لحظه‌ی $t=\text{٠}$ به جسمی به جرم m نیروی $F(t)=F_\circ \sin\omega t$ وارد می‌شود. اگر مکان اولیه‌ی جسم $x_\circ$ و سرعت اولیه‌اش $v_\circ$ باشد، مکان $x(t)$ و سرعت $v(t)$ را در زمان t حساب کنید.



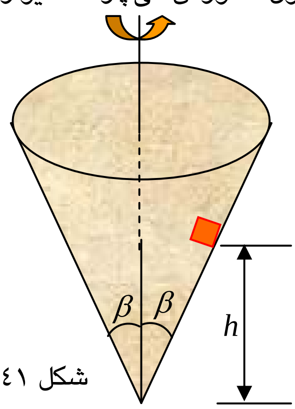
شکل ۴۰-۳

ت-۳ قطعه‌ی A با وزن $\text{٣}w$ روی سطح شیب‌دار S شکل (۴۰-۳) با شیب ٣٦,٩° با سرعت ثابتی به پایین می‌لغزد و میله‌ی B با وزن w بر روی آن ساکن است. میله‌ی B برابر شکل با ریسمانی به دیوار وصل است.

(الف): نمودار نیروهایی را که به قطعه‌ی A وارد می‌شوند، رسم کنید.

(ب): اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه و میله با ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه و سطح S برابر باشد، آن را پیدا کنید.

ت-۴ قطعه‌ی کوچکی به جرم m در درون قیفی قرار دارد. قیف در زمان T یک دور کامل حول محورش می‌چرخد. دیواره‌ی قیف برابر شکل (۴۱-۳) با خط قائم زاویه‌ی β می‌سازد. ضریب اصطکاک ایستایی بین قطعه و دیوار قیف μ_s است. برای این که قطعه در ارتفاع ثابت h باقی بماند، بیشینه و کمینه‌ی T را بیابید.

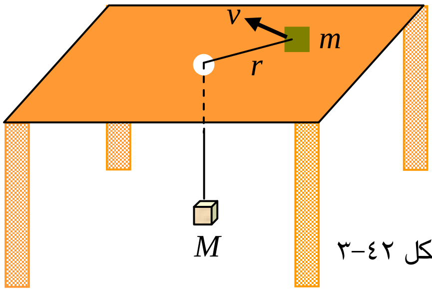


شکل ۴۱-۳

ت-۵ جعبه‌ای به وزن w را با ریسمانی از یک سربالایی به بالا می‌کشیم. کشش ریسمان T است. سربالایی با افق زاویه‌ی α دارد و ریسمان با سطح شیب‌دار زاویه‌ی رو به بالای θ دارد. ضریب اصطکاک جنبشی بین جعبه و سطح شیب‌دار μ_k است. نشان دهید که مقدار α هر چه باشد، هنگامی شتاب جعبه بیشینه است که $\theta=\tan^{-1}\mu_k$ باشد.

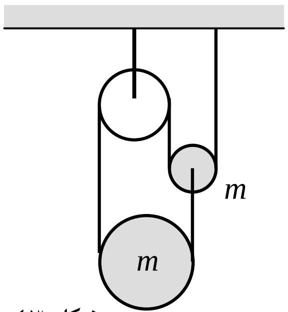
ت-۶ ذره‌ای به جرم m روی میز افقی بدون اصطکاک در فاصله‌ی r از مرکز یک سوراخ قرار دارد. ذره برابر شکل (۴۲-۳) با

با ریسمانی به وزنه‌ی سنگین‌تر M وصل است که در زیر میز از انتهای دیگر ریسمان آویزان است. جرم کوچک‌تر m را با سرعت v به حرکت یکنواخت دایره‌ای وادار می‌کنیم. برای این که جرم بزرگ‌تر M ساکن بماند، سرعت v چقدر باید باشد؟



شکل ۴۲-۳

ت-۷ ماشین آتوود شکل (۴۳-۳) را در نظر بگیرید. جرم هر یک از قرقره‌های خاکستری m است. ریسمان روی قرقره‌ها بدون اصطکاک می‌سُرد (بنابراین، نگران حرکت چرخشی نباشید). شتاب این دو قرقره را حساب کنید.



شکل ۴۳-۳

مسئله‌ها:

۳ـ۱ جسم A با سرعت **v** حرکت می‌کند و با جسم در حال سکون B برخورد می‌کند. پس از برخورد A با سرعت $\mathbf{v}/۲$ و B با سرعت $۳\mathbf{v}/۲$ حرکت می‌کنند. نسبت جرم آنها را بیابید. اگر پس از برخورد، دو جسم به‌هم بچسبند با چه سرعتی جسم ترکیبی حرکت خواهد کرد.

(پاسخ: $m_A/m_B = ۳$; $۳\mathbf{v}/٤$)

۳ـ۲ اگر دو مؤلفه‌ی یک ستاره‌ی دوتایی در دایره‌هایی با شعاع‌های $r_۱$ و $r_۲$ حرکت کنند، نسبت جرم آنها چیست؟ (راهنمایی: شتاب ستاره‌ها را برحسب سرعت زاویه‌ای چرخشی‌شان بنویسید).

۳ـ۳ یک سامانه‌ی سه ذره‌ای را در نظر بگیرید. جرم ذره‌ها m است، اگر ذره‌ی ۲ و ۳ را یک جسم مرکب با جرم $۲m$ در نظر بگیریم که در $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_۲ + \mathbf{r}_۳)/۲$ جایگزیده است؛ معادله‌های حرکت را که رفتار یک سامانه‌ی دو جسمی مرکب از ذره‌ی ۱ و جسم ترکیبی (۳+۲) را توصیف می‌کند، بنویسید. چه نیرویی به جسم ترکیبی از سوی جسم ۱ وارد می‌شود؟ هنگامیکه جرم‌ها نابرابر باشند، تعریف درست مکان جسم ترکیبی (۳+۲) که هنوز در $m_۱\mathbf{a}_۱ = -m_۲\mathbf{a}_۲$ صدق کند کدام است؟

۳-۴ فاصله‌ی میان دو پروتون را چنان پیدا کنید که نیروی رانشی میان آنها با نیروی ربایشی گرانشی میان زمین و یکی از آنها برابر باشد. (بار پروتون $۱{,}٦\times۱۰^{-۱۹}$ C و جرم آن $۱{,}۷\times۱۰^{-۲۷}$ kg).

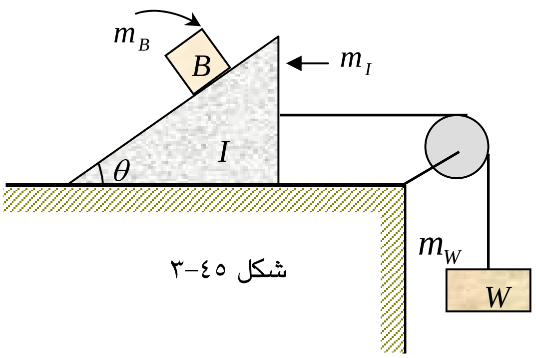
۳-۵ تبدیلی به چارچوب با حرکت یکنواخت نسبی را در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{r}_۱$ با $\mathbf{r}'_۱ = \mathbf{r}_۱ - \mathbf{v}t$ جایگزین شده است. در اینجا $\mathbf{v}$ سرعت نسبی دو چارچوب است. مکان نسبی $\mathbf{r}_{ij}$ چگونه تبدیل می‌شود؟ تکانه‌ها و نیروها چگونه تبدیل می‌شوند؟ به روشنی نشان دهید که اگر رابطه‌های $\dot{\mathbf{p}}_۱ = m_۱\mathbf{a}_۱ = \mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_{ij} = \hat{\mathbf{r}}_{ij} f(r_{ij})$ در چارچوب نخست صادق باشند در چارچوب جدید نیز درست اند.

۳-۶ در شکل (۳-٤٤) $m_۱ = ۲$ kg، $m_۲ = ٤$ kg و $m_۳ = ۷$ kg اند. هر کدام از قرقره‌ها حول محور ثابتی می‌چرخند. ریسمان کشسان نیست و اصطکاک نیز در مسئله وجود ندارد. می‌توانید $g = ۱۰ \text{ m/s}^۲$ فرض کنید.

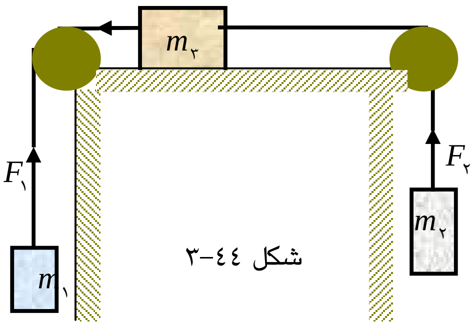
(الف): شتاب سامانه را حساب کنید. **(ب)**: نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ را که ریسمان‌ها به جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ وارد می‌کنند، حساب کنید.

(پ): نیروی F_s را که ریسمان سمت چپ به جرم $m_۳$ وارد می‌کند به دست آورید.

۳-۷ در شکل (۳-٤٥) قطعه B روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی با شیب θ می‌لغزد. سطح شیب‌دار بر روی میز افقی بدون اصطکاک می‌لغزد. وزنه‌ی W به وسیله‌ی ریسمان کشیده به سطح شیبدار وصل و از روی قرقره‌ی بدون جرم و اصطکاک آویزان است. شتاب وزنه‌ی W را بیابید.

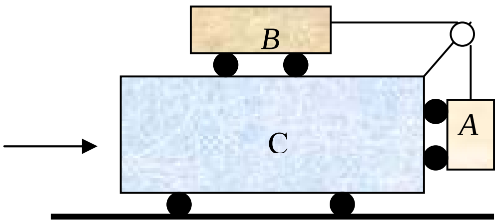


شکل ۳-٤٥



شکل ۳-٤٤

۳-۸ در شکل (۳-٤٦) سامانه‌ای مکانیکی از سه ارابه به جرم‌های $m_A = ۰{,}۳$ kg، $m_B = ۰{,}۲$ kg و $m_C = ۱{,}۵$ kg تشکیل



شکل ۴۶-۳

شده است. از اصطکاک، پس‌کشی هوا چشم‌پوشی کنید. قرقره جرم ندارد.

(الف): نیروی F در راستای افقی به ارابه‌ی C وارد می‌شود. این نیرو به اندازه‌ای قوی است که ارابه‌های A و B نسبت به C در حال سکون باقی می‌مانند. نیروی F و کشش ریسمان را به‌دست آورید.

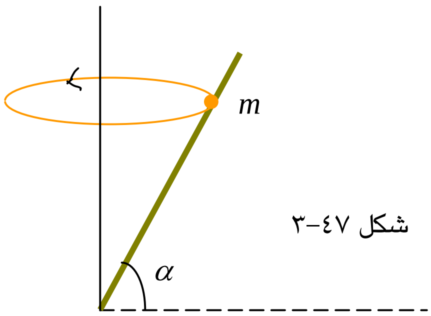
(ب): ارابه‌ی C در حال سکون است، شتاب ارابه‌های A و B و کشش ریسمان را حساب کنید.

۹-۳ جرم m تحت اثر نیروی وابسته به سرعت $F(v)=-F_{\circ}e^{v/C}$ در راستای محور x ها حرکت می‌کند. $F_{\circ}$ و C مقادیر ثابت‌اند.

(الف): اگر در زمان $t=\circ$ سرعت اولیه جرم $v_{\circ}>\circ$ باشد، سرعت ذره را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

(ب): در چه هنگامی این جرم به سکون لحظه‌ای می رسد؟ **(پ)**: این جرم چه مسافتی را می‌پیماید تا اینکه به سکون لحظه‌ای برسد؟

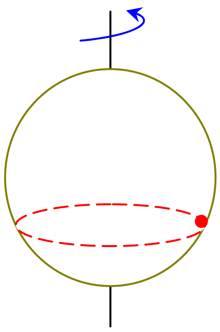
۱۰-۳ **(الف)**: نشان دهید که قانون دوم نیوتن را می‌توان به صورت $t=m\int\frac{dv'}{F(v')}$ نوشت که در آن $F(v')$ نیرویی است که در حالت عمومی به سرعت بستگی دارد. **(ب)**: فرض کنید زمان $t=\circ$ سرعت جرم v_0 است و در راستای محور xها حرکت می‌کند. نیرویی به صورت $F(v)=-cv^{۳/۲}$ به این جسم اثر می‌کند (این نیرو بازدارنده است). سرعت v را به صورت تابعی از زمان t بدست آورید. چه موقع این جسم به حالت سکون خواهد رسید.



شکل ۴۷-۳

۱۱-۳ میله‌ای حول محور عمودی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. میله با افق زاویه‌ی α می‌سازد. ذره‌ای به جرم m همانند شکل (۴۷-۳) می‌تواند روی میله بلغزد. ضریب اصطکاک میان میله و جرم m برابر است با μ. برای اینکه ارتفاع ذره در طوت چرخش میله ثابت بماند چه شرطی لازم است.

۱۲-۳ کره‌ی توخالی به شعاع $R=\circ/\text{۵}$ m حول قطر عمودی خود با سرعت زاویه‌ای $\omega=\text{۵}\,s^{-۱}$ می‌چرخد. در درون کره و در ارتفاع $R/۲$ ، همانند شکل (۴۸-۳) ، قطعه‌ی کوچکی با کره می‌چرخد.



شکل ۴۸-۳

(الف): کمینه مقدار ضریب اصطکاک چقدر باشد تا این حرکت برای قطعه فراهم شود؟

(ب): اگر $\omega=\text{۸}s^{-۱}$ باشد، شرط برقراری این وضعیت را بیابید.

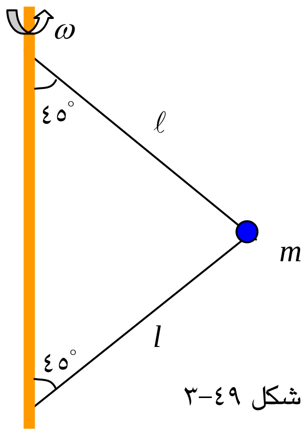
(پ): پایداری جسم را برای دو حالت زیر بررسی کنید.

(۱): تغییر اندکی در مکان جسم؛ (۲) تغییر اندکی در سرعت زاویه‌ای کره .

۱۳-۳ قطعه چوبی با سرعت اولیه‌ی $v_{\circ}$ بر رروی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک رو به بالا حرکت می‌کند. سطح با افق زاویه‌ی θ می‌سازد.

(الف): قانون دوم نیوتن را برای قطعه چوب بنویسید، آن را حل کنید و مکان قطعه چوب را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

(ب): چه زمانی طول می‌کشد تا قطعه به نقطه‌ی آغازین خود برگردد.

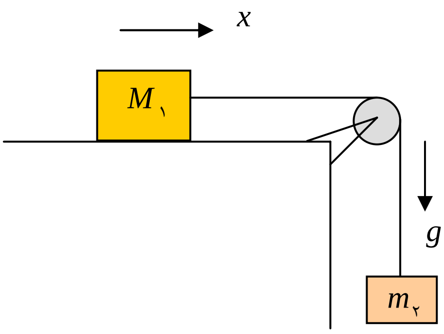


شکل ۴۹-۳

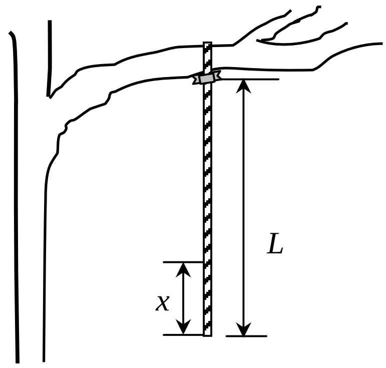
۳-۱۴ جرم m به وسیله‌ی دو ریسمان به طول ℓ برابر شکل (۴۹-۳) به میله‌ای بسته شده است. میله با سرعت زاویه‌ای ω حول محور خود می‌چرخد و جرم m را نیز با خود می‌چرخاند. ریسمان‌ها با میله زاویه‌ی ۴۵° می‌سازند. نیروهای کشش را در هر دو ریسمان حساب کنید.

۳-۱۵ برابر شکل (۵۰-۳) یک انتهای ریسمانی را به شاخه‌ی درخت گره زده‌ایم. طول L این ریسمان از درخت آویزان است. اگر ریسمان همگن و جرم طول L آن M باشد. کشش ریسمان را در فاصله‌ی x از انتهای آزاد ریسمان حساب کنید. در نقطه‌ی آویز و نیز در انتهای آزاد ریسمان کشش چقدر است ؟

۳-۱۶ دو جرم M_1 و M_2 با ریسمان بدون جرمی برابر شکل (۵۱-۳) به هم وصل‌اند. اگر این سامانه را از حالت سکون رها کنیم مسافت پیموده شده توسط M_1 را بر حسب زمان به دست آورید. از اصطکاک چشم پوشی کنید.

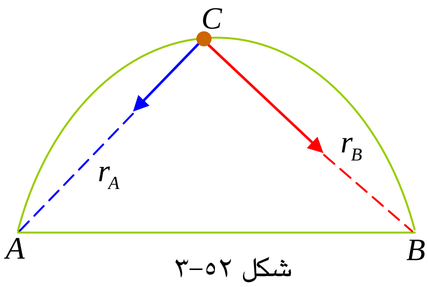


شکل ۵۱-۳



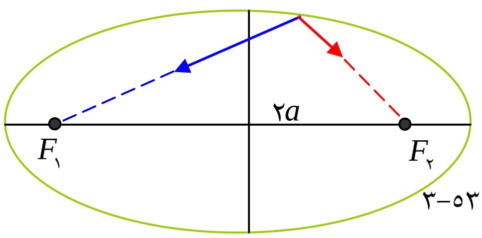
شکل ۵۰-۳

۳-۱۷ دو مرکز نیرو در دو انتهای قطر دایره‌ای به شعاع r (قطر AB در شکل(۵۲-۳)) قرار دارند. این دو مرکز به کره‌ی کوچکی نیروی ربایشی متناسب با فاصله‌های BC و AC وارد می‌کنند: $F_A = K_A r_A$ و $K_B K_A$ و $F_B = K_B r_B$. K_i ها مقدارهای ثابت‌اند. کره به حرکت روی دایره محدود است. اگر از اصطکاک چشم‌پوشی کنیم، مکانی ترازمندی کره کجاست؟



شکل ۵۲-۳

۳-۱۸ یک جرم نقطه‌ای مقید به حرکت روی سطح بیضی‌واری با قطر بزرگ‌تر $2a$ است. هر یک از کانون‌های بیضی‌وار مرکز نیرو است که به جرم نقطه‌ای اثر می‌کند (شکل ۵۳-۳). جهت نیروها به سوی مرکز نیروست و اندازه‌ی آنها با $n-$ امین توان فاصله‌ی میان جرم نقطه‌ای و مرکز نیرو متناسب اند. توان هر دو نیرو یکسان اما ضریب‌های تناسب متفاوت‌اند. فاصله‌های ذره از کانون‌ها را هنگامی که ذره در حالت ترازمندی است به دست آورید.



شکل ۵۳-۳

۳-۱۹ نشان دهید که اگر جرم نقطه‌ای m بر روی خمی در صفحه حرکت کند و نیروی خارجی وارد بر آن در همان صفحه باشد، آنگاه اگر ذره با سرعت v حرکت کند نیرویی به اندازه‌ی $F_n = mv^{2}/\rho$ به خم وارد خواهد کرد. مؤلفه‌ی عمودی نیروی خارجی F است و ρ شعاع خمش مسیر ذره است.

۳-۲۰ سامانه‌ای سه ذره‌ای را در نظر بگیرید. جرم هر کدام از ذره‌ها m است. اگر ذره‌ی ۲ و ۳ به هم پیوسته باشند و جسم مرکبی به جرم $2m$ بسازند که در نیم‌راه میان آن دو $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)/2$ جایگزیده باشد. معادله‌هایی که حرکت سامانه‌ی دو جسمی شامل ذره‌ی ۱ و جسم ترکیبی (۳+۲) را توصیف کنند، کدامند.

۳-۲۱ در کلاس، ما از جرم همانند کمیت بنیادی نام بردیم و جرم واحد و شیوه‌ی اندازه‌گیری جرم‌ها را بررسی کردیم. اینک در امکان اینکه به جای جرم، اگر نیرو را کمیت بنیادی فرض کنیم و برای مثال، وزن خاصی را در ارتفاع یا عرض جغرافیایی خاصی نیروی واحد فرض کنیم، چگونه باید جرم جسمی را تعریف و آن را اندازه‌گیری کرد؟

۳-۲۲ جسمی به وزن W بر سطح افقی قرار دارد. زاویه‌ی اصطکاک ایستایی بین سطح‌ها εاست. جهت و اندازه‌ی کمینه نیروی لازم برای به حرکت واداشتن جسم را بیابید.

۳-۲۳ ریسمان ناکشسانی به طول b به دو نقطه‌ی هم‌تراز که به‌فاصله‌ی a $(a \langle b)$ از یکدیگرند قرار دارند، بسته شده است. دانه تسبیح سنگینی به جرم m روی ریسمان آزادانه می‌لغزد. نیروی افقی F چنان به دانه‌ی تسبیح اعمال می‌شود که آن را درست در زیر یکی از نقطه‌های آویز ریسمان در حالت ترازمندی نگه می‌دارد. کشش ریسمان و اندازه‌ی نیروی F را حسا ب کنید.

۳-۲۴ ذره‌ای به جرم m به حرکت روی دایره‌ای افقی مقید است. در نقطه‌ای بر روی مسیر ذره، مرکز نیرویی وجود دارد که به ذره نیروی ربایشی وارد می‌کند. اندازه‌ی نیرو با فاصله‌ی مرکز نیرو و ذره متناسب است. ضریب تناسب D است. از اصطکاک چشم‌پوشی کنید، با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیلی برای حرکت جرم نقطه‌ای ، نشان دهید که حرکت ذره همانند نوسانگر ساده است.

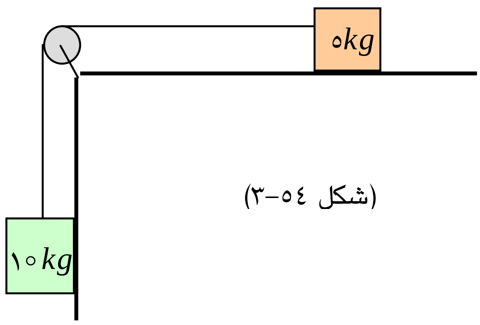
۳-۲۵ آونگ ساده‌ای به جرم m و طول l داریم. بیشینه انحراف از حالت عمودی آونگ ϕ است. آونگ را روی ترازویی قرار می‌دهیم؛ وزن آونگ را هنگامی که زاویه‌ی انحراف آن ϕ است، حساب کنید.

۳-۲۶ جرم نقطه‌ای m تحت تاثیر دو مرکز نیروی O_1 و O_2 است. O_1 ربایشی و O_2 رانشی است. هر دو نیرو با فاصله از جرم m متناسب‌اند و ضریب تناسب‌ها یکسان‌اند. با شرایط اولیه دلخواه؛ نشان دهید که مدار جرم نقطه‌ای همواره سهمی است.

۳-۲۷ ذره‌ای به جرم m در قطب شمال نیم‌کره‌ای وارون به شعاع a قرار دارد. اگر به ذره اختلال اندکی وارد کنیم در چه نقطه‌ای سطح نیم کره را ترک خواهد کرد. سطح کره هموار است.

۳-۲۸ دو دانه تسبیح به وزن‌های W_1 و W_2 می‌توانند روی سیم هموار دایره شکل بلغزند. دانه‌های تسبیح با ریسمان ناکشسان بدون جرم به‌هم وصلند. هنگامیکه دانه‌های تسبیح در روی نیم‌دایره‌ی بالایی در حالت ترازمندی‌اند، زاویه‌ی مرکزی باز شده به ریسمان وتر 2β است. در این حالت، ریسمان چه زاویه‌ای با خط افق می‌سازد

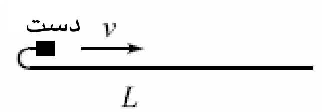
۳-۲۹ دو کره‌ی همگن یکسان به وزن W و شعاع a در درون کاسه‌ی هموار نیم‌کره قرار دارند. شعاع کاسه b است. نیروی بین کره‌ها و نیروی واکنش کاسه روی هر کدام از کره‌ها را بدست آورید؟ (*راهنمایی:* کره‌ها چنان در درون کاسه قرار می‌گیرند که خطی که مرکزهای آنها را به هم وصل می کند، افقی است. چرا؟)



(شکل ۳-۵٤)

۳-۳۰ در شکل (۳-۵٤)، قرقره‌ی بدون جرم و بدون اصطکاک به لبه‌ی میز هموار ثابت شده است. دو قطعه به جرمهای $5kg$ و $10kg$ با ریسمان بدون جرم که از روی قرقره می‌گذرد بهم وصلند. اگر قطعه‌ی۵ کیلوگرمی را با چسب به سطح میز بچسبانیم، کشش ریسمان افزایش پیدا می‌کند یا کاهش می‌یابد؟ (چرا؟). مقایسه با حالتی است که قطعه به میز چسبیده نیست.

۳-۳۱ زنجیری به طول L و چگالی جرم $\sigma\,\mathrm{kg/m}$ را بر روی میز بدون اصطکاک افقی دراز کرده ایم یک انتهای ریسمان را با دست می‌گیریم و با سرعت ثابت v بر روی خود برمی‌گردانیم. بخش در حال حرکت زنجیر موازی بخش ساکن است (شکل۳-۵۵). دست چه نیرویی به زنجیروارد می‌کند.

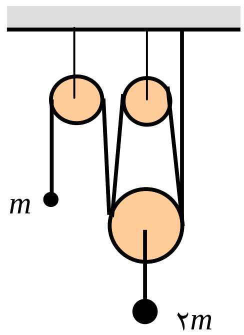


شکل ۳-۵۵

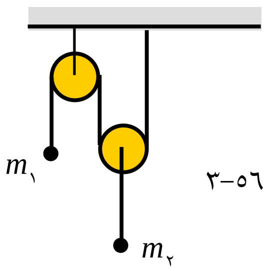
۳-۳۲ در مسئله ی ۳-۳۱ اگر دست شما از حالت سکون به حرکت آغاز کند و شتاب ثابت a داشته باشد نیروی دست شما در لحظه‌ای که دست به انتهای دیگر زنجیر می‌رسد چقدر است؟ (*راهنمایی:* فرض کنید x مسافتی است که دست شما جابه‌جا می‌شود و x را برحسب تابعی از زمان ، t ، بنویسید.

۳-۳۳ در سامانه‌ی قرقره‌های شکل (۳-۵٦) با دو جرم m_1 و m_2 شتاب جرم‌ها و کشش ریسمان را پیدا کنید. ریسمان و قرقره ها بدون جرم‌اند.

۳-۳۴ ماشین آتوود شکل (۳-۵۷) سه قرقره‌ی بدون جرم دارد. جرم $2m$ با ریسمان کوتاهی از قرقره‌ی پایینی آویزان است. ریسمان دراز دیگری دو بار از زیر قرقره‌ی پایینی و یک بار از روی هر دو قرقره

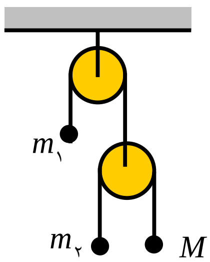


شکل ۳-۵۷



شکل ۳-۵٦

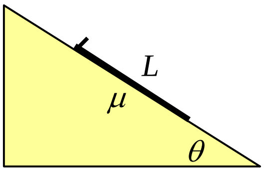
های بالایی گذشته است. وزنه‌ای به جرم m از انتهای آزاد ریسمان دراز آویزان است. شتاب‌ها را بیابید.



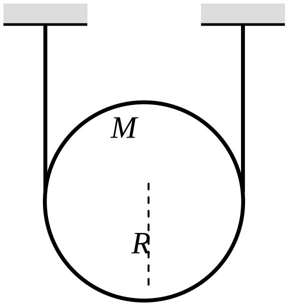
شکل ۳-۵۸

۳-۳۵ ماشین آتوود شکل (۳-۵۸) را در نظر بگیرید. قرقره‌ها و ریسمان ها بدون جرم‌اند. جرم‌ها را ازحالت سکون رها می‌کنیم. برحسب m_1 و m_2 مقدار M باید چقدر باشد تا m_1 بدون حرکت بماند؟ برای وجود این مقدار M چه رابطه ای باید بین m_1 و m_2 برقرار باشد ؟

۳-۳۶ ریسمانی به طول L و با چگالی جرمی ρ در واحد طول روی سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب θ برابر شکل (۳- ۵۹)، دراز شده است. انتهای بالایی ریسمان را با میخ به سطح بسته‌ایم و ضریب اصطکاک میان ریسمان و سطح μ است. مقدارهای ممکن کشش در انتهای بالایی ریسمان کدامند؟



شکل ۵۹-۳



شکل ۶۰-۳

۳۷-۳ قرصی به جرم M وشعاع R با ریسمان بدون جرمی برابر شکل (۶۰-۳) در هوا نگه داشته شده‌است. سطح قرص بدون اصطکاک است.

(الف): کشش ریسمان را حساب کنید و نیروی عمودی در واحد طول را که ریسمان به قرص وارد می‌کند بدست آورید.

(ب): اینک فرض کنید بین ریسمان و قرص اصطکاک وجود دارد و ضریب اصطکاک μ است. کمینه مقدار شدنی کشش ریسمان در پایین ترین نقطه‌ی آن چیست؟

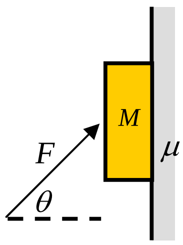
۳۸-۳ جرم m با ریسمان بدون جرم به طول ℓ به نوک مخروط بدون اصطکاک وصل است. نیم زاویه‌ی راس مخروط θ است. اگر جرم m با سرعت v روی دایره‌ی افقی حرکت کند ، کشش ریسمان و نیروی عمودی مخروط را پیدا کنید. برای این که جرم در تماس با رویه‌ی مخروط باقی بماند بیشینه سرعت v چقدر است؟ (شکل ۶۱-۳).

۳۹-۳ کتابی به جرم M را به دیوار عمودی تکیه می‌دهیم. ضریب اصطکاک میان کتاب و دیوار μ است. برای اینکه از افتادن کتاب جلوگیری کنیم، نیروی F را با زاویه‌ی θ نسبت به افق $(-\pi/۲ \le \theta \le \pi/۲)$ همانند شکل (۶۲-۳) به آن وارد می کنیم .

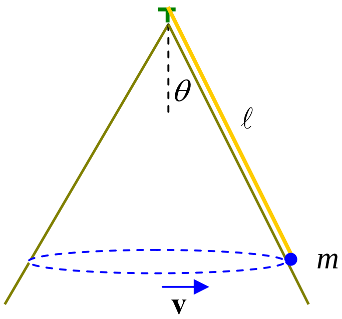
(الف): کمینه نیروی F لازم برای یک θ معین چقدر است؟

(ب): به ازای کدام θ این نیروی کمینه کوچکترین است؟ در این حالت نیروی کمینه را بیابید

(پ): مقدار حدی θ که کمتر از آن نیروی F برای نگه‌داری کتاب وجود نداشته باشد ، چیست؟



شکل ۶۲-۳



شکل ۶۱-۳

۴۰-۳ قطعه ای روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی با زاویه‌ی θ از حالت سکون به پایین می لغزد.

(الف): زاویه‌ی θ چقدر باشد تا قطعه مسافت افقی معینی را در کمترین زمان به پیماید؟

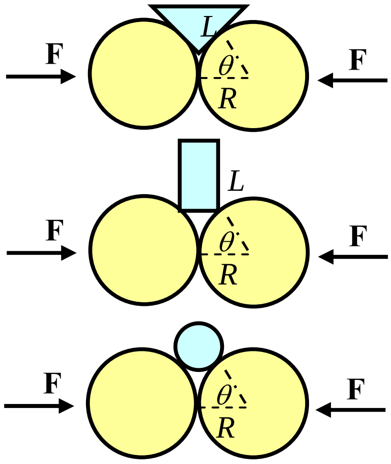
(ب): اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان سطح و قطعه μ باشد پرسش بالا را پاسخ دهید.

۴۱-۳ چگالی جرم سطحی هر یک از جسمهای تخت شکل (۶۳-۳) σ است. زاویه‌ی مرکزی بین خط افق و نقطه‌ی تماس جسمها با دایره θاست. در هر یک از حالت‌ها چه نیرویی باید به دایره‌ها وارد شود تا آنها را پهلوی هم نگه دارد (یعنی دایره-ها در تماس با هم باقی بمانند) ؟ به ازای چه مقدار θ این نیرو کمینه یا بیشینه است؟

(الف): مثلث متساوی الساقین به ضلع L.

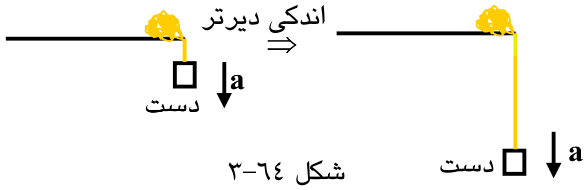
(ب): مستطیل به طول L .

(پ): یک دایره



شکل ۳-۶۳

۳-۴۲ کلاف نخی با چگالی جرم $\sigma\,\mathrm{kg/m}$ بر لبه‌ی میزی قرار دارد. در آغاز، یک سر نخ به اندازه‌ی بسیار اندکی از کلاف بیرون آمده است (شکل ۳-۶۴). با دست این سر را می‌گیریم و با شتاب a به پایین می‌کشیم. دست چه نیرویی را، به صورت تابعی از زمان، به نخ وارد می کند؟ اندازه‌ی a را چنان بیابید که نیروی دست همواره صفر باشد (فرض کنید نخ با باز شدن از کلاف اصطکاکی با کلاف ندارد).



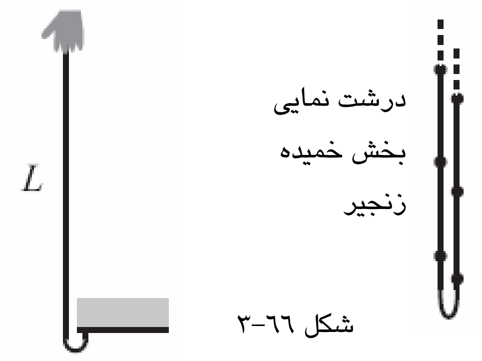
شکل ۳-۶۴

۳-۴۳ سامانه ی قرقره‌های شکل(۳-۶۵) را در نظر بگیرید. قرقره‌ها و ریسمان‌ها جرم ندارند و جرم قطعه‌ی به شکل L برابر M است. جرم قطعه‌ی آویزان m است. ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه‌ها μ است و سطح زمین اصطکاک ندارد.

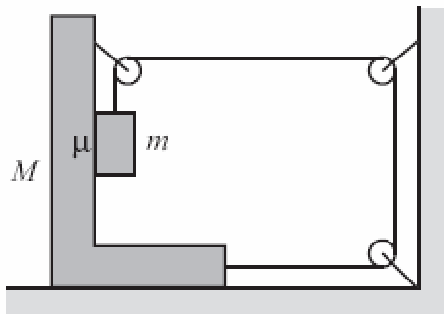
(الف): نمودار آزاد هردو قطعه را رسم کنید و مطمئن باشید که همه نیرو ها را در نظر گرفته‌اید.

(ب): شتاب قطعه‌ی به شکل L را پیدا کنید.

۳-۴۴ زنجیری به طول L و چگالی جرمی $\sigma\,\mathrm{kg/m}$ در وضعیتی نگه داشته شده است که در سمت چپ شکل (۳-۶۶) دیده می‌شود. یک انتهای زنجیر به زیر میزی وصل است و طول بسیار اندکی از آن در زیر آویزگاه قرار دار. زنجیر را رها می‌کنیم تا بیفتد. آویزگاه چه نیرویی به زنجیر وارد می‌کند؟ زنجیر را به



شکل ۳-۶۶



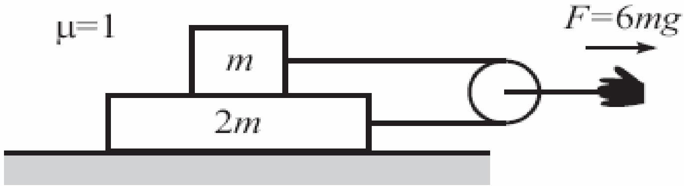
شکل ۳-۶۵

صورت جرم‌های نقطه‌ای فرض کنید که با ریسمان بدون جرم به هم وصل‌اند. هم چنین فرض کنید پهنای بخش خمیده‌ی زنجیر در مقایسه با طول آن ناچیز است. این یعنی پایین ترین قسمت زنجیر شل است و بنابراین، طول سمت چپ زنجیر سقوط آزاد می‌کند.

۳-۴۵ قطعه‌ای به جرم m روی قطعه‌ی دیگری به جرم $2m$ قرار دارد که بر روی میز افقی نشسته است. ضریب اصطکاک جنبشی میان همه سطح ها $\mu = 1$ است. ریسمان بدون جرمی را به هر دو قطعه وصل می‌کنیم و آن را چند بار برابر شکل (۳-۶۷) دور قرقره‌ای می‌پیچیم. قرقره را با نیروی $6mg$ می‌کشیم.

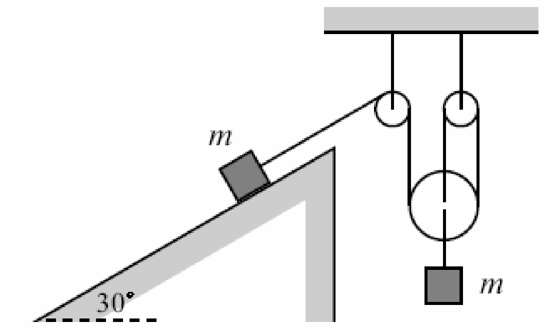
(الف): نمودار آزاد هر یک از قطعه ها را بکشید و همه‌ی نیروها را (افقی و عمودی) نشان دهید.

(**ب**): شتاب دست را حساب کنید



شکل ٦٧-٣

۴۶-۳ ماشین آتوود شکل (٦٨-٣) را با دو جرم m در نظر بگیرید. قرقره و ریسمان‌ها جرم ندارند و سطح بدون اصطکاک است. شتاب هر دو جرم را پیدا کنید.



شکل ٦٨-٣

حل مثال‌های تکمیلی

ت-۱ چون a ثابت است داریم: $x=(1/2)at^2$ و $v=at$.

تکانه‌ی خاک‌انداز و اندرونه‌اش برابر است با $p=mv=(\sigma x)v=\sigma\left(\frac{1}{2}at^2\right)(at)=\frac{1}{2}\sigma a^2t^3$

$$\Rightarrow\ F=\frac{dp}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sigma a^2t^3\right)=\frac{3}{2}\sigma a^2t^2=\frac{3}{2}\sigma v^2$$

هم چنین می‌توانستیم بنویسیم $p=\sigma x\dot{x}\Rightarrow F=\frac{dp}{dt}=\frac{d}{dt}(\sigma x\dot{x})=\sigma\dot{x}^2+\sigma x\ddot{x}$ و با جاگذاری $\dot{x}=at$ و $x=\frac{1}{2}at^2$ خواهیم داشت $F=(3/2)\sigma a^2t^2$ که همان پاسخ بالاست.

نکته: نیرو در شکل $F=\sigma\dot{x}^2+\sigma x\ddot{x}$ به روشنی نشان می‌دهد که نیروی شما دو کار انجام می‌دهد: (۱) بخشی باید جرم موجود در خاک‌انداز را شتابیده کند و برابر است با $F=ma=(\sigma x)a$ و (۲) همچنین باید حلقه‌های جدیدی را که در حال سکون بودند به حرکت وا بدارد. این بخش عبارت است از

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{d(mv)}{dt}=\frac{dm}{dt}v=\frac{\sigma dx}{dt}v=\sigma v^2$$

ت-۲ شتاب a را به صورت dv/dt بنویسید. معادله‌ی $F=ma$ به صورت زیر در می‌آید:

$$F_0\sin\omega t=m\frac{dv}{dt}\ \Rightarrow\ \int_0^t\frac{F_0}{m}\sin\omega t\,dt=\int_{v_0}^{v}dv$$

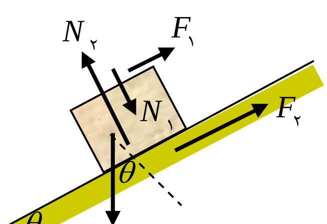
$$\Rightarrow\ -\frac{F_0}{m\omega}\cos\omega t\,\Big|_0^t=v-v_0\ \Rightarrow\ v(t)=v_0+\frac{F_0}{m\omega}(1-\cos\omega t)\qquad (۳-۸۷)$$

حال v را به صورت dx/dt بنویسید. خواهیم داشت

$$\frac{dx}{dt}=v_0+\frac{F_0}{m\omega}(1-\cos\omega t)\ \Rightarrow\ \int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t\left(v_0+\frac{F_0}{m\omega}(1-\cos\omega t)\right)dt$$

$$\Rightarrow\ x-x_0=\left(v_0t+\frac{F_0t}{m\omega}-\frac{F_0t}{m\omega}\sin\omega t\right)\Big|_0^t\ \Rightarrow\ x(t)=x_0+v_0t+\frac{F_0t}{m\omega}-\frac{F_0t}{m\omega}\sin\omega t\qquad (۳-۸۸)$$

توجه کنید که در مقایسه با جسمی که با سرعت ثابت v_0 حرکت می‌کند، این جسم با گذشت زمان مسافت بزرگی پیش می‌افتد.



شکل ۶۹-۳

ت-۳ (الف): نیروهای وارد به قطعه عبارتند از دو نیروی عمودی و دو نیروی اصطکاک (یکی از سوی سطح شیب‌دار و یکی از سوی میله) و نیروی گرانش. نودار آزاد نیروها در شکل (۶۹-۳) دیده می‌شوند.

(ب): در امتداد سطح شتاب صفر است. بنابراین، جمع نیروها در امتداد سطح هم باید صفر باشت. یعنی $(3m)g\sin\theta$ باید با جمع دو نیروی اصطکاک F_1 و F_2 برابر باشد. نیروهای اصطکاک باید با نیروهای عمودی به ترازمندی برسند. پس، داریم

$$F_1 = \mu N_1 = \mu mg \cos\theta \qquad (۳-۸۹)$$

$$F_2 = \mu N_2 = \mu\left(N_1 + 3mg\cos\theta\right) = 4\mu mg\cos\theta \qquad (۳-۹۰)$$

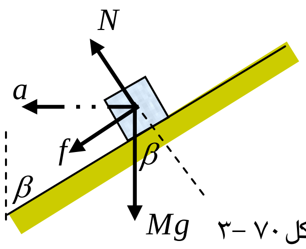
در نتیجه، به دست می‌آید

$$(3m)g\sin\theta = \mu mg\cos\theta + 4\mu mg\cos\theta \;\Rightarrow\; \mu = (3/5)\tan\theta \qquad (۳-۹۱)$$

به ازای $\tan 36.9^\circ \approx 4/3$ داریم $\mu = (3/5)(3/4) = 9/20 = 0.45$. حالت‌های حدی: $\theta \to 0$ داریم $\mu \to 0$ و $\theta \to 90$ داریم $\mu \to \infty$ که هر دو پذیرفتنی‌اند.

ت-۴ اجازه دهید، برحسب v مسئله را حل کنیم.

$$v = r\omega = (h\tan\theta)(2\pi/T) \;\Rightarrow\; T = \frac{2\pi h\tan\theta}{v} \qquad (۳-۹۲)$$



شکل ۷۰-۳

نخست حالتی را در نظر بگیرید که سرعت بیشینه (T کمینه) است. (این همان مسئله‌ی حرکت اتوموبیل در پیچ شیب‌دار است). اگر v بیشینه باشد، نیروی اصطکاک f به سوی راس قیف است؛ چون در این حالت، اصطکاک از سُریدن قطعه به طرف قاعده جلوگیری می‌کند. بنابراین، نمودار آزاد نیروها همانند شکل (۷۰-۳) است. معادله‌های $F = ma$ در راستای سطح و عمود بر آن عبارتند از

$$f + mg\cos\beta = ma\sin\beta \;\Rightarrow\; f = m\left(\frac{v^2}{h\tan\beta}\right)\sin\beta - mg\cos\beta \qquad (۳-۹۳)$$

$$N - mg\sin\beta = ma\cos\beta \;\Rightarrow\; N = m\left(\frac{v^2}{h\tan\beta}\right)\cos\beta + mg\sin\beta \qquad (۳-۹۴)$$

اما μ با شرط $f \le \mu N$ محدود است . در نتیجه، داریم

$$\left(\frac{v^2}{h\tan\beta}\right)\sin\beta - g\cos\beta \le \left(\left(\frac{v^2}{h\tan\beta}\right)\cos\beta + g\sin\beta\right)$$

$$\Rightarrow\quad v^2(\sin\beta - \mu\cos\beta) \le gh\tan\beta(\mu\sin\beta + \cos\beta)$$

$$\Rightarrow\quad v \le \sqrt{\frac{gh\tan\beta(\mu\sin\beta + \cos\beta)}{\sin\beta - \mu\cos\beta}} \qquad (۳-۹۵)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۹۲-۳) نتیجه می‌گیریم که

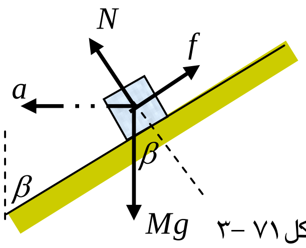
$$T = \frac{2\pi h\tan\beta}{v} \ge 2\pi h\tan\beta\sqrt{\frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{gh\tan\beta(\mu\sin\beta + \cos\beta)}}$$

$$\Rightarrow T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{h\tan\beta(\sin\beta - \mu\cos\beta)}{g\,(\mu\sin\beta + \cos\beta)}} \qquad (۳-۹۶)$$

حالت حدی: این نتیجه فقط هنگامی درست است که $\mu \ge \tan\beta$ باشد؛ چون اگر $\mu < \beta$ باشد، آنگاه سطر دوم در رابطه‌ی (۹۵-۳) نشان می‌دهد که نابرابری به ازای هر مقدار v برقرار است، چون سمت چپ منفی است. بنابراین، اگر $\mu \le \tan\beta$ باشد،

قطعه می‌تواند با سرعت بینهایت حرکت کند و $T_{\min}=0$ می‌شود (با زاویه‌ی β به اندازه‌ی کافی کوچک هم قطعه به دیواره فشرده می‌شود و نیروی اصطکاک بسیار بزرگی تولید می‌کند.)

اگر $\beta\to 90^\circ$ آنگاه خواهیم داشت $T_{\min}\to\infty$ و این هم پذیرفتنی است؛ چون در ارتفاع h، شعاع حرکت دایره‌ای قطعه، $r=h\tan\beta$ ، خیلی بزرگ می‌شود و بنابراین، حتی سرعت زاویه‌ای ω اندک هم به نیروی اصطکاک $m\omega^2 r$ بسیار زیادی نیز دارد. اینک حالت سرعت کمینه (T بیشینه) را در نظر بگیرید. تنها فرقی که این حالت با حالت بالا دارد در این ایت که این بار جهت f به سوی قاعده‌ی مخروط است، چون نیروی اصطکاک از سریدن قطعه به سوی راس قیف جلوگیری می‌کند. نمودار آزاد نیروها همانند شکل (۷۱-۳) است. محاسبه هم همانند بالاست و تنها جند علامت منفی جایگزین می‌شود. معادله‌های $F=ma$ عبارت‌اند از



شکل ۷۱ -۳

$$-f+mg\cos\beta=ma\sin\beta\ \Rightarrow\ f=-m\left(\frac{v^2}{h\tan\beta}\right)\sin\beta+mg\cos\beta \tag{۳-۹۷}$$

$$N-mg\sin\beta=ma\cos\beta\ \Rightarrow\ N=m\left(\frac{v^2}{h\tan\beta}\right)\cos\beta+mg\sin\beta \tag{۳-۹۸}$$

از شرط محدود کننده‌ی $f\le\mu N$ داریم

$$-\left(\frac{v^2}{h\tan\beta}\right)\sin\beta+g\cos\beta\le\mu\left(\left(\frac{v^2}{h\tan\beta}\right)\cos\beta+g\sin\beta\right)$$

$$\Rightarrow\ gh\tan\beta\left(-\mu\sin\beta+\cos\beta\right)\le v^2\left(\sin\beta+\mu\cos\beta\right)$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{\frac{gh\tan\beta\left(-\mu\sin\beta+\cos\beta\right)}{\sin\beta+\mu\cos\beta}}\le v \tag{۳-۹۹}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۹۲-۳) نتیجه می‌گیریم که بیشینه مقدار T عبارت است از

$$T=\frac{2\pi h\tan\beta}{v}\le 2\pi h\tan\beta\sqrt{\frac{\sin\beta+\mu\cos\beta}{gh\tan\beta\left(-\mu\sin\beta+\cos\beta\right)}}$$

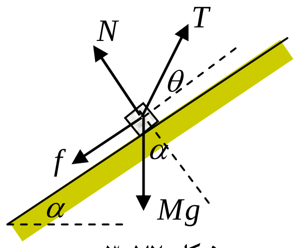
$$\Rightarrow\ T_{\max}=2\pi\sqrt{\frac{h\tan\beta\left(\sin\beta+\mu\cos\beta\right)}{g\left(-\mu\sin\beta+\cos\beta\right)}} \tag{۳-۱۰۰}$$

نکته: همین نتیجه را می‌توانستیم با $\mu\to-\mu$ از دستاورد قسمت نخست هم به دست آوریم؛ چون در نمودار آزاد نیروها فقط f به $-f$ تبدیل شده است.

حالت حدی: نتیجه‌ی بالا تنها برای $\beta\le 1/\mu$ درست است؛ چون اگر $\beta>1/\mu$ باشد، سطر دوم در رابطه‌ی (۹۹-۳) نشان می-دهد که نابرابری به ازای هر مقدار v برقرار است؛ زیرا س نابرابری منفی است. پس، اگر $\beta\ge 1/\mu$ باشد، قطعه می‌تواند در حال سکون بماند و $T=\infty$ باشد (نیروی اصطکاک به اندازه‌ای بزرگ است که می‌تواند به مولفه‌ی نیروی گرانش، $mg\cos\beta$ ، به سوی راس قیف چیره شود).

اگر $\beta\to 0^\circ$، آنگاه داریم $T_{\max}\to 0$. این نتیجه پذیرفتنی است؛ چون شعاع حرکت دایره‌ای، $r=h\tan\beta$، بسیار کوچک است و بنابراین، برای این که نیروی عمودی $m\omega^2 r$ ناچیز نباشد، سرعت زاویه‌ای ω باید بسیار بزرگ باشد (و این به نیروی

اصطکاک بزرگی می‌انجامد که قطعه را نگه می‌دارد.)



شکل ۷۲-۳

ت-۵ نمودار آزاد نیروهای وارد به قطعه در شکل (۷۲-۳) دیده می‌شود. نیروی خالص عمود بر سطح شیب‌دار باید صفر باشد و در نتیجه، نیروی عمودی N عبارت است از $N = mg\cos\alpha - T\sin\theta$. برآیند نیروها در در امتداد سطح عبارت است از

$$F = T\cos\theta - Mg\sin\alpha - \mu\left(Mg\cos\alpha - T\sin\theta\right)$$
$$= T\left(\cos\theta + \mu\sin\alpha\right) - Mg\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right) \qquad (۳-۱۰۱)$$

بیشینه کردن F با بیشینه کردن کمیت $\cos\theta + \mu\sin$ هم‌ارز است. اگر از آن مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم خواهیم داشت $\tan\theta = \mu$ و این نتیجه‌ای است که به دنبالش بودیم.

ت-۶ کشش ریسمان را T بنامید. اگر وزنه‌ی سنگین آویزان در زیر میز در حال سکون باشد، داریم $T = Mg$. اما، جرم کوچک‌تر روی میز، حرکت دایره‌ای دارد. بنابراین، همچنین داریم $T = mv^2/r$. پس:

$$\frac{mv^2}{r} = Mg \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Mgr}{m}} \qquad (۳-۱۰۲)$$

ت-۷ بین دو قرقره‌ی خاکستری یک خط افقی بکشید. اگر قرقره‌ی سمت راست به اندازه‌ی d پایین برود، طول d در بالای خط افقی ظاهر می‌شود (چون طول $2d$ در بالای قرقره‌ی خاکستری بالایی ظاهر می‌شود؛ اما به اندازه‌ی d درست در زیر آن ناپدید می‌شود). این طول d باید از زیر خط افقی ناپدید شده باشد. طول d ریسمان که در بالای خط افقی ظاهر می‌شود، به طور مساوی بین دو بخش ریسمان که با قرقره‌ی پایینی در تماس‌اند تقسیم می‌شود. بنابراین، قرقره‌ی پایینی به اندازه‌ی $2d$ به بالا می‌رود. پس، داریم $2a_2 = a_1$. یعنی شتاب رو به بالای قرقره‌ی بالایی دو برابر شتاب رو به بالای قرقره‌ی پایینی است.
معادله‌های $F = ma$ برای قرقره‌های بالایی و پایینی عبارت‌اند از

$$mg + T - 2T = ma_1, \qquad 2T - mg = ma_2 \qquad (۳-۱۰۳)$$

از این دو رابطه به همراه $2a_2 = a_1$ مقادیر شتاب‌ها به دست می‌آیند: $a_1 = 2g/5$ و به سوی پایین و $a_2 = g/5$ و به سوی بالا. مقدار T عبارت است از $T = 3mg/5$.