© Firooz Arash, 2003-2010

فصل ۲

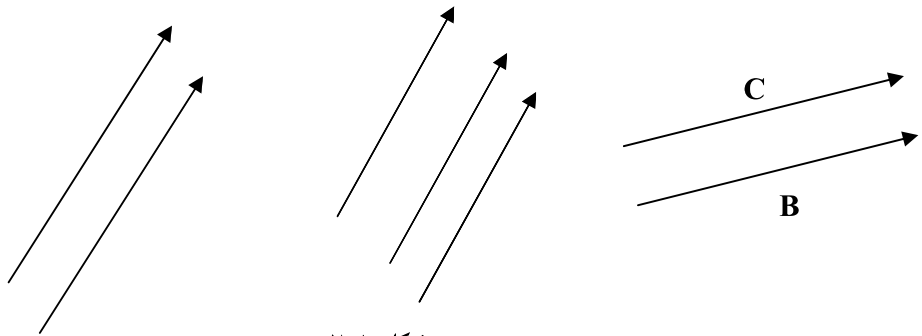
بردارها و پیش نیازهای ریاضی

۲-۱ پیشگفتار: مفهوم‌های مکانیک مانند نیرو، تکانه، تکانه‌ی زاویه‌ای و انرژی در همه‌ی گستره‌های فیزیک نقش برجسته‌ای پیدا می کنند. برای فهمیدن مفهوم‌های فیزیکی و اصول آن ناگزیر از بکارگیری زبان ریاضیات هستیم؛ چون زبان ریاضیات ما را در بیان روشن و کوتاه و دقیق توانا می‌کند و به روشنگری‌های تازه‌تر می‌انجامد. افزون بر این، ارتباط میان نظریه و آزمایش در فیزیک بر پایه‌ی پیش‌بینی‌های کیفی و اندازه‌گیری است. به این خاطر، در این فصل به پروراندن ابزار ریاضی لازم برای پی‌گیری دنباله‌ی مطلب خواهیم پرداخت.

۲-۲ بردارها: فراگیری جبر بردارها آغاز خوبی برای وارد کردن ریاضیات در فیزیک است. با استفاده از نمادهای برداری، بیشتر وقت‌ها قانون‌های فیزیکی را می‌توان ساده‌تر و کوتاهتر بیان کرد(ویلارد گیبس فیزیک‌دان دانشگاه ییل پایه‌گذار نمادهای مدرن برداری بود. او این کار را برای ساده سازی شکل معادله انجام داد). اگر چه ما از نمادهای برداری برای ساده‌تر کردن رابطه‌های فیزیکی استفاده خواهیم کرد، اما بردارها به مفهوم ژرفتری مربوط‌اند که اندیشه‌های بنیادی تقارن‌اند. از اینرو بکارگیری آنها می‌تواند به شکل های ناشناخته‌ی قانون‌ها بیانجامد.

تعریف بردار: بردارها را می‌توان از سه دیدگاه بررسی کرد: هندسی، تحلیلی، و اصول موضوعی. در اینجا ما از دیدگاه هندسی و تحلیلی به آنها خواهیم پرداخت.

از نگاه هندسی **بردار بخشی از یک خط جهت‌دار است**. آن را با نماد پر رنگ (سیاه) نشان خواهیم داد. برای توصیف یک بردار باید هم طول و هم جهت آن را مشخص کنیم. ما همچنین فرض خواهیم کرد که انتقال موازی یک بردار آن را تغییر نمی‌دهد. از این رو، پیکان های موازی درشکل(۱-۲) همگی یک بردار هستند.



شکل ۱-۲

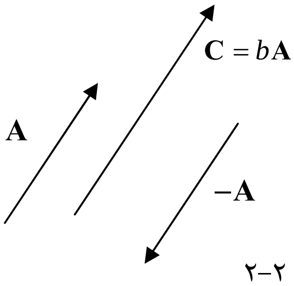
اگر طول و جهت دو بردار یکسان باشند، گوئیم آن دو با هم برابرند. بردارهای $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ در شکل (۱-۲) با هم برابرند: $\mathbf{B}=\mathbf{C}$.
طول یک بردار را **اندازه بردار** می‌نامند. اندازه‌ی بردار $\mathbf{A}$ را با $|\mathbf{A}|$ یا A نشان می‌دهند. اگر طول $\mathbf{A}$ برابر $\sqrt{۳}$ باشد آنگاه $|\mathbf{A}|=\mathbf{A}=\sqrt{۳}$. اگر طول برداری یک واحد باشد آن را بردار یکه می‌گویند و با کلاهی بالای نماد بردار نشان می‌دهند. بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{A}}$ موازی با بردار $\mathbf{A}$ موازی و عبارت است از:

$$\hat{\mathbf{A}}=\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \qquad \text{یا} \qquad \hat{\mathbf{A}}=|\mathbf{A}|\;\hat{\mathbf{A}} \tag{۱-۲}$$

۲-۳ جبر بردارها

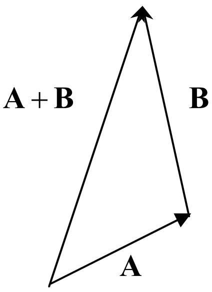
© Firooz Arash, 2003-2010

۱- ضرب بردار در یک عدد ثابت اگر بردار $\mathbf{A}$ را در عدد مثبت b ضرب کنیم بردار جدید $\mathbf{C}$ به دست می‌آید که طول آن b برابر طول بردار $\mathbf{A}$ است. در شکل (۲-۲) بردار $\mathbf{C}$ موازی بردار $\mathbf{A}$ است:
$\mathbf{C} = b\mathbf{A}$ و بنابراین $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{A}}$ و $|\mathbf{C}| = b\,|\mathbf{A}|$. اگر بردار $\mathbf{A}$ را در عدد ۱- ضرب کنیم نتیجه بردار جدیدی است که جهت آن وارون جهت $\mathbf{A}$ است (پاد موازی). پس ضرب یک بردار در عددی منفی می‌تواند هم طول و هم جهت آن را تغییر دهد.



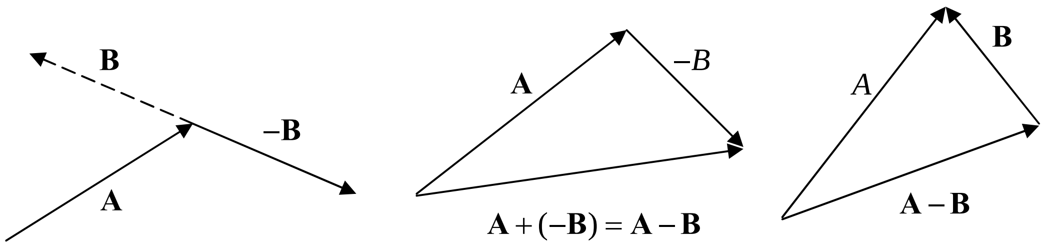
شکل ۲-۲

۲- جمع بردارها توصیف هندسی جمع دو بردار را به سادگی در شکل (۳-۲) می‌بینید. قاعده از این قرار است: برای افزودن $\mathbf{B}$ به $\mathbf{A}$ انتهای بردار $\mathbf{B}$ را در سر بردار $\mathbf{A}$ (پیکان $\mathbf{A}$) قرار دهید. حاصل برداری است از انتهای $\mathbf{A}$ به سر $\mathbf{B}$.



شکل ۳-۲

۳- تفریق دو بردار چون $\mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{A}+(\mathbf{-B})$ است، برای کم کردن $\mathbf{B}$ از $\mathbf{A}$ می‌توان $\mathbf{B}$ را در ۱- ضرب و سپس آن دو را با هم جمع کرد. شکل (٤-۲) این را نشان می‌دهد. شیوه‌ی دیگر ساختن $\mathbf{A}\text{-}\mathbf{B}$ در نمودار سمت راست شکل (٤-۲) نشان داده شده است:سرِ پیکان $\mathbf{A}$ و سرِ پیکان $\mathbf{B}$ را بر هم بگذارید. در این صورت $\mathbf{A}\text{-}\mathbf{B}$ برداری است که از انتهای $\mathbf{A}$ بسوی انتهای $\mathbf{B}$ کشیده می‌شود.
اثبات هندسی قانون‌های زیر آسان است آنها را به شما واگذار می‌کنیم.



شکل ٤-۲

قانون جا به جا پذیری
$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$$

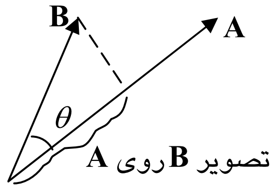
قانون شرکت پذیری
$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$$
$$c(d\ \mathbf{A}) = (cd)\ \mathbf{A}$$

قانون پخش پذیری
$$(c+d)\ \mathbf{A} = c\mathbf{A}+d\mathbf{A}$$
$$c(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$$

۴- ضرب داخلی (نقطه‌ای) بردارها ضرب داخلی بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را با $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ نشان می‌دهند و آن را ضرب نقطه‌ای یا

ضرب داخلی (نام دیگر: ضرب اسکالر، ضرب دکارتی) می‌نامند زیرا از ترکیب دو بردار یک کمیت عددی (اسکالر) نتیجه

© Firooz Arash, 2003-2010



شکل ۵-۲

می‌شود. ضرب $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

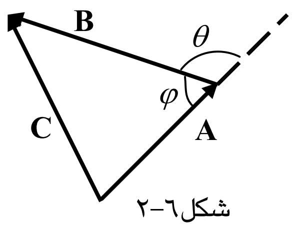
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|A||B|\cos\theta \qquad (۲-۲)$$

θ زاویه بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است و درشکل (۵-۲) نشان داده شده است. $|\mathbf{B}|\cos\theta$ تصویر بردار $\mathbf{B}$ روی بردار $\mathbf{A}$ است. بیان هم ارز این است که بگوییم $|\mathbf{B}|\cos\theta$ مولفه ی بردار $\mathbf{B}$ در راستای بردار $\mathbf{A}$ است. اگر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=۰$ باشد آنگاه یا $|\mathbf{A}|=۰$ یا $|\mathbf{B}|=۰$ و یا $\cos\theta=۰$ ($\mathbf{A}$ به $\mathbf{B}$ عمود است).

بنابراین ، ضرب داخلی دو بردار غیر صفر می تواند صفر باشد. همچنین توجه کنید که $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=|\mathbf{A}|^{۲}$ است. روشن است که $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=|\mathbf{B}||\mathbf{A}|\cos\theta$ و در نتیجه ضرب داخلی دو بردار جا به‌جاپذیر است. ضرب داخلی بخش‌پذیر نیز هست.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} \qquad (۳-۲)$$

سودمندی ضرب داخلی را در اثبات ساده‌ی قانون کسینوس‌ها می‌توان دید



شکل۶-۲

مثال ۱-۲ (قانون کسینوس‌ها): قانون سینوس ها را ثابت کنید

حل:

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$$
$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})$$
$$|\mathbf{C}|^{۲}=|\mathbf{A}|^{۲}+|\mathbf{B}|^{۲}+۲|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$$

معمول این است که نتیجه‌ی بالا برحسب زاویه‌ی φ در شکل (۶-۲) بیان شود. این کار را با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos\theta=\cos(\pi-\phi)=-\cos\varphi$ می‌توان انجام داد و داریم $C^{۲}=A^{۲}+B^{۲}-۲AB\cos\varphi$

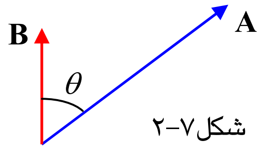
مثال ۲-۲ کار و ضرب داخلی یکی از مهمترین کاربردهای ضرب نقطه‌ای در بحث کار و انرژی است که در فصل‌های ٤ و ٥ به آن خواهیم پرداخت. شاید شما بدانید که کار (W) نیروی $\mathbf{F}$ روی جسمی که به اندازه‌ی d جابه‌جا شده است با حاصل ضرب جابه‌جایی d و مؤلفه‌ی $\mathbf{F}$ در راستای جابه‌جایی برابر است . اگر نیرو با راستای جابه‌جایی زاویه θ بسازد آنگاه کار نیرو با $W=(F\cos\theta)d$ برابر است. اگر بپذیرید که جابه‌جایی و نیرو هر دو بردارند آنگاه می‌توان نوشت: $W=\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}$.

اگر بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با زمان و یا هر چیز دیگری تغییر کنند؛ یعنی هر کدام تابعی از متغیر عددی مانند t باشند مشتق حاصل‌ضرب داخلی آنها را به آسانی می‌توان به دست آورد. در اینجا ما آن را بیان می‌کنیم. در بخش‌های آینده‌ی این فصل به مشتق‌گیری از بردار خواهیم پرداخت.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt}=\mathbf{B}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}+\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt} \qquad (٤-۲)$$

۵ - ضرب برداری (خارجی) بردارها گونه‌ی دوم ضرب بردارها که به آن نیاز خواهیم داشت ضرب برداری یا خارجی دو بردار است. دراین گونه ضرب، آمیزه‌ی بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بردار سومی را می‌سازد. یعنی نتیجه‌ی ضرب خارجی یا برداری دو بردار خود یک بردار است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

© Firooz Arash, 2003-2010



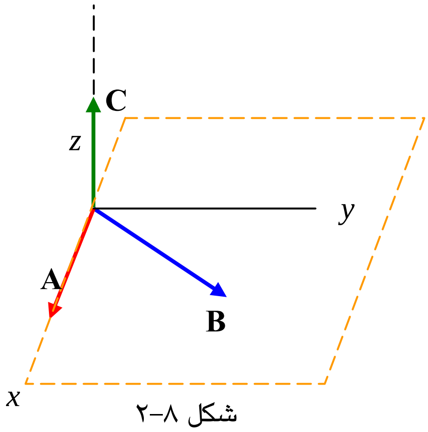
شکل۲-۷

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{B} \qquad (۲-۵)$$

ضرب برداری پیچیده‌تر از ضرب داخلی است زیرا اینک بایدهم اندازه و هم جهت بردار $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ را مشخص کنیم. اندازه‌ی بردار $\mathbf{C} \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\mathbf{C}| = \ |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta \qquad (۲-۶)$$

در اینجا هم θ زاویه‌ی بین بردار $\mathbf{A}$ و بردار $\mathbf{B}$ در شکل (۲-۷) است. برای این که ناروشنی را از میان برداریم θ را همواره کوچکتر از π در نظر خواهیم گرفت. اگر $|\mathbf{A}|$ و $|\mathbf{B}|$ هر دو غیر صفر باشند، ضرب خارجی هنگامی صفر می شود که $\theta = 0$ ($\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ موازی) یا $\theta = \pi$ ($\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ پاد موازی) باشد. دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در شکل (۲-۷) یک صفحه می‌سازند. حاصلضرب برداری $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ یعنی بردار $\mathbf{C}$ به صفحه‌ی دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود است. البته دو جهت وجود دارد که به این صفحه عمود است: «بیرون» از صفحه و به«درون» صفحه. کدام یک جهت $\mathbf{C}$ را مشخص می‌کند؟ این ناروشنی را با ***قاعده‌ی دست راست*** می‌توان از میان برداشت: اگر انگشت های دست راست شما در جهت بردار اول (دراینجا $\mathbf{A}$) قرار گیرد و آنها را به سوی بردار دوم (در اینجا $\mathbf{B}$) بچرخانید (در امتداد زاویه‌ی کوچکتر θ) آنگاه انگشت شست شما جهت بردار $\mathbf{C}$ را نشان خواهد داد. در شکل (۲-۷) جهت $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ به سوی بیرون از صفحه است و جهت $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ به سوی صفحه. سه بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ یک **سه تایه‌ی دست راستی** می‌سازند. به دستگاه مختصات راست‌دست شکل (۲-۸) بیندیشید که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در صفحه‌ی xy قرار دارند. $\mathbf{A}$ روی محور x هاست و $\mathbf{B}$ به محور y ها نزدیک است. اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ یک سه تایه‌ی دست راستی بسازند،آنگاه $\mathbf{C}$ روی محور z ها قرار می‌گیرد. یک نتیجه‌ی تعریف ما از ضرب برداری این است که



شکل ۲-۸

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \qquad (۲-۷)$$

یعنی ترتیب نوشتن بردارها در ضرب برداری مهم است. ضرب برداری جابه‌جا پذیر نیست. تغییر ترتیب بردارها، جهت بردار حاصلضرب را وارون می‌کند. بنابراین می‌بینیم که برای هر بردار دلبخواه $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = ۰ \qquad (۲-۸)$$

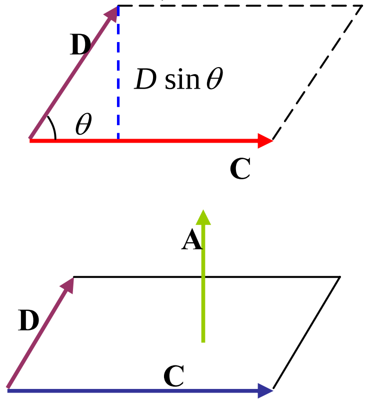
ضرب برداری ***بخش پذیر*** است:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \qquad (۲-۹)$$

از نظر هندسی، $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ مساحت متوازی الاضلاعی است که بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ می‌سازند.

مثال ۲-۳ مساحت: به طور معمول مساحت را با مقدار آن بیان می‌کنند اما در فیزیک، بیش‌تر وقت‌ها نیازمندیم که جهت‌گیری سطح را هم مشخص کنیم. برای نمونه، اگر بخواهیم آهنگ شارش آب رودخانه به درون لوله‌ای با سطح قاعده‌ی معینی را حساب کنیم. روشن است که اگر سطح قاعده‌ی لوله به شارش عمود باشد و یا با آن موازی باشد، آهنگ وارد شدن آب به لوله فرق می‌کند (درحالت موازی البته آهنگ شارش صفر است). این کار با استفاده از ضرب برداری شدنی است: سطح چهار ضلعی شکل (۲-۹) را در نظر بگیرید که با بردارهای $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ ساخته شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع عبارت است از طول ضربدر عرض: $A = (\text{طول}) \times (\text{عرض}) = CD\ \sin\theta = |\mathbf{C} \times \mathbf{D}|$. اگر به $\mathbf{A}$ همانند یک بردار نگاه کنیم، داریم $\mathbf{A} \equiv \mathbf{C} \times \mathbf{D}$. دیدیم که اندازه‌ی $\mathbf{A}$ مساحت متوازی‌الاضلاع است و ضرب برداری جهت آن را تعریف می‌کند.

© Firooz Arash, 2003-2010

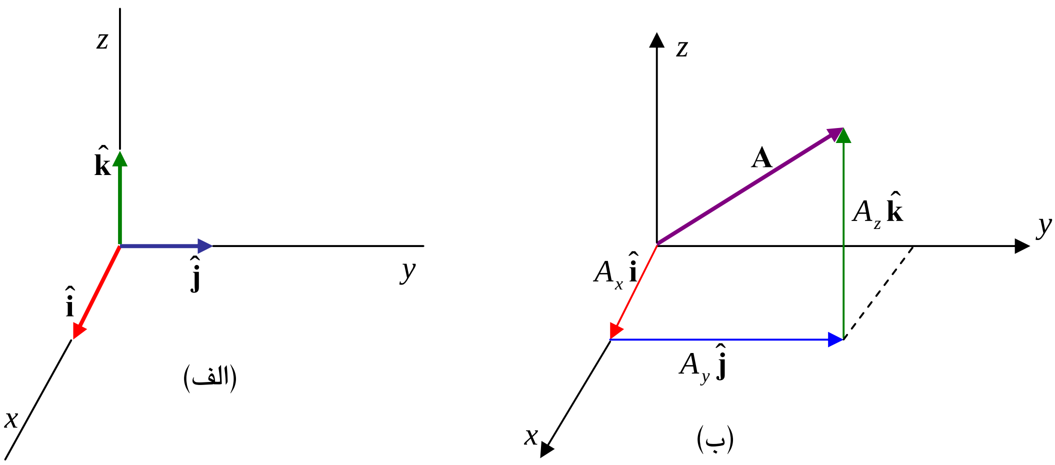


شکل ۹-۲

۲-۴ مؤلفه‌های بردار

تاکنون چهار عمل روی بردارها (جمع، تفریق، ضرب نقطه‌ای و ضرب برداری) را بدون این که دستگاه مختصات خاصی را در نظر بگیریم، بیان کردیم. این نشان می‌دهد که چرا بردارها سودمندند. عمل‌های برداری به چارچوب مختصات وابسته نیستند. اما، سرانجام ناگزیریم که نتایج خود را روشن‌تر و با عدد نشان دهیم. برای این کار باید چارچوب مختصاتی را برای کار کردن برگزینیم. مختصات کارتزی ساده‌ترین‌اند. فرض کنید $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ به ترتیب بردارهای یکه‌ی موازی با محور x و y و z در شکل (۱۰-۲ الف) باشند. هر بردار دلخواه $\mathbf{A}$ را می‌توان برابر شکل (۱۰-۲ ب) برحسب **بردارهای پایه** بسط داد:

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۱۰)$$



شکل ۱۰-۲

کمیت‌های A_x و A_y و A_z عدد اند و **مؤلفه‌های** بردار $\mathbf{A}$ نام دارند. از نظر هندسی آنها به ترتیب تصویر بردار $\mathbf{A}$ روی محورهای x و y و z اند. اینک می‌توانیم هر یک از چهار عمل روی بردارها را برحسب مؤلفه‌ها بنویسیم:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\hat{\mathbf{k}})+(B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}+B_z\hat{\mathbf{k}})$$
$$= (A_x+B_x)\hat{\mathbf{i}}+(A_y+B_y)\hat{\mathbf{j}}+(A_z+B_z)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۱۱)$$

قاعده ۱ : برای جمع بستن بردارها، مؤلفه‌های همسان را با هم جمع کنید.

$$b\mathbf{A} = b(A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\hat{\mathbf{k}}) = (bA_x)\hat{\mathbf{i}}+(bA_y)\hat{\mathbf{j}}+(bA_z)\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۱۲)$$

قاعده ۲ : در ضرب بردار با یک مقدار ثابت، هر مؤلفه را در مقدار ثابت ضرب کنید.

$\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ بردارهای یکه اند که بر هم عمودند. بنا به رابطه‌ی (۲-۲) ضرب داخلی آنها به قرار زیر است

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = ۱ \quad , \quad \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = ۰ \qquad (۲-۱۳)$$

در نتیجه

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\hat{\mathbf{k}})\cdot(B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}+B_z\hat{\mathbf{k}}) = A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad (۲-۱۴)$$

قاعده‌ی ۳ : در محاسبه‌ی ضرب داخلی دو بردار، مؤلفه‌های همسان را در هم ضرب کنید و سپس نتیجه را با هم جمع کنید. به ویژه

© Firooz Arash, 2003-2010

$$A=|\mathbf{A}|=\sqrt{A_x^{۲}+A_y^{۲}+A_z^{۲}} \qquad \text{یا} \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=A_x^{۲}+A_y^{۲}+A_z^{۲} \tag{۲-۱۵}$$

(این قضیه فیثاغورث در سه بعد است.) توجه کنید که حاصل ضرب داخلی بردار $\mathbf{A}$ با هریک از بردارهای ***یکه*** با مؤلفه‌ی بردار در راستای آن بردار یکه برابر است (یعنی $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{i}}=A_x$, $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{j}}=A_y$ و $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{k}}=A_z$).

به همین‌گونه می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۲-۵) ضرب برداری بردارهای یکه را حساب کرد. در چارچوب مختصات راست دست داریم:

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}}=\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}}=۰,$$

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}=-\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}}=\hat{\mathbf{k}}, \qquad \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}}=-\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{i}}, \qquad \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}}=-\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{j}} \tag{۲-۱۶}$$

اینک می‌توان ضرب برداری دو بردار را حساب کرد:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}&=(A_x\hat{\mathbf{i}}+A_y\hat{\mathbf{j}}+A_z\hat{\mathbf{k}})\times(B_x\hat{\mathbf{i}}+B_y\hat{\mathbf{j}}+B_z\hat{\mathbf{k}})\\&=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{\mathbf{i}}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{\mathbf{j}}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{۲-۱۷}$$

این رابطه‌ی پیچیده را می‌توان در شکل زیباتر دترمینان نوشت:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{۲-۱۸}$$

قاعده ۴: برای محاسبه‌ی ضرب برداری دترمیناتی تشکیل دهید که سطر نخست آن بردارهای یکـه، سـطر دوم آن بـردار اول (در اینجا $\mathbf{A}$) و سطر سوم آن بردار دوم (در اینجا $\mathbf{B}$) است . جمله‌های بسط دترمینان مؤلفه‌های بردار حاصل ضرب برداری $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ است.

مثال ۴-۲ بردارهای $\mathbf{A}=\hat{\mathbf{i}}+۳\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$ و $\mathbf{B}=۴\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+۳\hat{\mathbf{k}}$ داده شده اند بردار $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ را حساب کنید.

حل:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ ۱ & ۳ & -۱\\ ۴ & ۱ & ۳\end{vmatrix}=۱۰\hat{\mathbf{i}}-۷\hat{\mathbf{j}}-۱۱\hat{\mathbf{k}}$$

مثال ۵-۲ در مکعب **زیر**، شکل (۲-۱۱) زاویه‌ی θ را حساب کنید.

حل: طول ضلع مکعب یک است و $\mathbf{A}=۱\hat{\mathbf{i}}+۰\hat{\mathbf{j}}+۱\hat{\mathbf{k}}$ و $\mathbf{B}=۰\hat{\mathbf{i}}+۱\hat{\mathbf{j}}+۱\hat{\mathbf{k}}$ بنابراین، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(۱)(۰)+(۰)(۱)+(۱)(۱)=۱$ از سوی دیگر

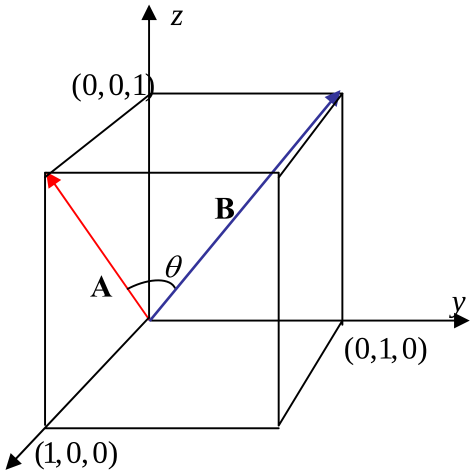
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta=\sqrt{۲}\sqrt{۲}\cos\theta=۲\cos\theta$$

$$۲\cos\theta=۱ \;\Rightarrow\; \cos\theta=\frac{۱}{۲} \;\Rightarrow\; \theta=۶۰^\circ$$

ضرب سه تایی بردارها:

چون ضرب برداری دو بردار، خود یک بردار است، این بردار را می‌توان با بردار دیگری ضرب نقطه‌ای یا برداری کرد و **ضرب**

© Firooz Arash, 2003-2010



شکل ۲-۱۱

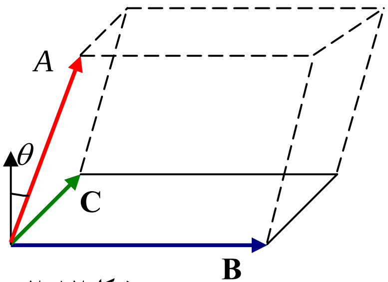
سه‌تایی بردارها را ساخت.

۱- **ضرب سه‌تایی نقطه‌ای** $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$: از نگاه هندسی $|\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})|$ حجم متوازی‌السطوح شکل (۲-۱۲) است که با $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ ساخته شده است؛ چون $|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|$ مساحت قاعده و $|A\cos\theta|$ ارتفاع آن است و داریم

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \qquad (۱-۱۹)$$

زیرا همه‌ی اینها مربوط به یک حجم اند. توجه کنید که ترتیب الفبایی حفظ شده است. اگر ضرب سه‌تایی بالا را برحسب مؤلفه‌های بردارها بنویسیم داریم:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (۲-۲۰)$$



شکل۲-۱۲

توجه کنید که می‌توان جای نقطه $(\cdot)$ و ضرب $(\times)$ را عوض کرد:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} \qquad (۲-۲۱)$$

این رابطه از (۱-۱۹) نتیجه شده است. اما توجه کنید که پرانتزها را نمی‌توان جا به جا کرد: $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ بی‌معنی است چون با یک کمیت عددی $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ نمی‌توان ضرب برداری ساخت .

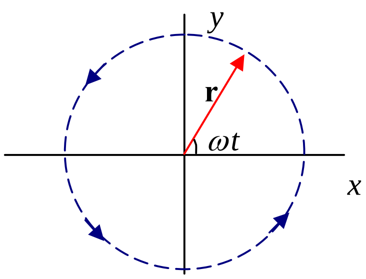
۲- **ضرب سه تایی برداری**: $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ این ضرب سه تایی را می‌توان با استفاده از قاعده‌ی $BAC-CAB$ ساده کرد:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \qquad (۲-۲۲)$$

توجه کنید که $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=-\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=-\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})+\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})$ بردار دیگری است. با تکرار رابطه (۲-۲۲) می‌توان ضرب بردارهای بیش از سه تا راهم ساده‌تر کرد. بنابراین، هرگز لازم نیست که بیش از یک ضرب برداری در رابطه‌ای وجود داشته باشد. برای نمونه:

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}.\mathbf{D})(\mathbf{B}.\mathbf{C}) \qquad (۲-۲۳)$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}))=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}))-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) \qquad (۲-۲۴)$$



شکل ۲-۱۳

مثال ۶-۲ حرکت دایره‌ای یکنواخت: ذره‌ای برابرشکل (۲-۱۳) در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند. بردار مکان آن $\mathbf{r}=r(\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}}+\sin\omega t\,\hat{\mathbf{j}})$ است که در آن r و ω مقدار های ثابت‌اند. مسیر، سرعت و شتاب ذره را به دست آورید.

حل: داریم

$$|\mathbf{r}|=\left(r^2\cos^2\omega t+r^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}=r\left(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t\right)^{1/2}=r \qquad (۲-۲۵)$$

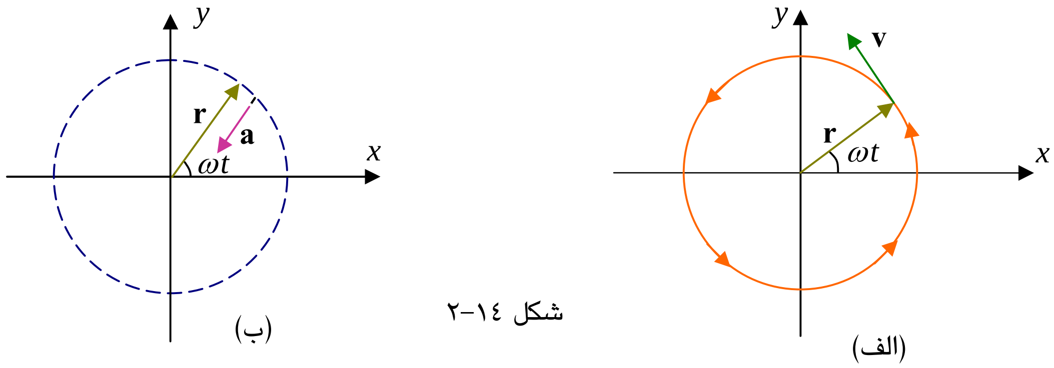
که مقدار ثابتی است. پسریال مسیر دایره‌ای به شعاع r است. ذره روی دایره پاد

© Firooz Arash, 2003-2010

ساعتگرد می‌چرخد و در زمان $t=0$ از نقطه‌ی $(r,0)$ آغاز به حرکت می‌کند. در زمان T، ذره یک دور کامل روی دایره می‌پیماید، به طوری که $\omega T=2\pi$ شود. سرعت زاویه‌ای حرکت، ω، است. و یکای آن رادیان بر ثانیه است. T زمان یک دور چرخیدن است و به آن **دوره** حرکت می‌گویند.

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=r\omega(-\sin\omega t\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}}) \qquad (۲-۲۶)$$

می‌توان نشان داد که $\mathbf{v}$ و $\mathbf{r}$ بر هم عمودند، یعنی $\mathbf{v}$ همواره بر مسیر حرکت مماس است. این کار را با حساب کردن $\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}$ انجام می‌دهیم: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}=r^{۲}\omega(-\sin\omega t\cos\omega t+\cos\omega t\sin\omega t)=۰$



(ب) شکل ۱۴-۲ (الف)

چون $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{r}$ عمود است، پس $\mathbf{v}$ به دایره نیز مماس است (شکل ۱۴-۲ ب را ببینید). برای این که نشان دهیم اندازه‌ی $\mathbf{v}$ مقدار ثابت و برابر $|\mathbf{v}|=r\omega$ است ، توجه کنید که داریم.

$$|\mathbf{v}|=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{۱/۲}=\left[r\omega(-\sin\omega t\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}})\cdot r\omega(-\sin\omega t\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}})\right]^{۱/۲}=r\omega \qquad (۲-۲۷)$$

شتاب ذره عبارت است از

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=r\omega^{۲}(-\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}}-\sin\omega t\,\hat{\mathbf{j}})=-\omega^{۲}\mathbf{r} \qquad (۲-۲۸)$$

شتاب در راستای شعاع و به سوی مرکز است که همان شتاب مرکز گراست و درشکل(۱۴-۲ب) نشان داده شده است

۵-۲ مشتق: فرض کنید f تابعی از یک متغیر، مانند x است: $f(x)$. مشتق df/dx یعنی چه؟ پاسخ روشن است: df/dx می‌گوید هنگامی که x به اندازه‌ی مقدار جزیی dx تغییر کند تابع f با چه آهنگی تغییر خواهد کرد

$$df=(\frac{df}{dx})dx \qquad (۲-۲۹)$$

یعنی اگر x را به اندازه‌ی dx تغییر دهیم، آنگاه f به اندازه df تغییر می‌کند. مشتق df/dx ضریب تناسب میان تغییر x و تغییر f است. از دید هندسی، مشتق df/dx شیب خم $f(x)$ است.

گرادیان : اینک فرض کنید تابعی داریم که به سه متغیر وابسته است. برای نمونه دمای اتاق را در نظر بگیرید: $T(x,y,z)$. اجازه دهید مفهوم مشتق را به توابعی مانند T که به بیش از یک متغیر وابسته‌اند ، گسترش دهیم.

خب؛ قرار است مشتق به‌ما بگوید که اگر اندکی جابه‌جا شویم آنگاه تابع با چه آهنگی تغییر می‌کند. اکنون مسئله درباره‌ی تابعی مانند T اندکی دشوارتر است، چون به جهتی که در آن سو جابه‌جا می‌شویم بستگی دارد. اگر رو به بالا برویم به احتمال زیاد تغییر دما خیلی سریع است؛ اما اگر افقی حرکت کنیم، شاید تغییر دما محسوس نباشد و اگر در جهت بینابینی حرکت کنیم تغییر

© Firooz Arash, 2003-2010

دما هم بینابینی خواهد بود. پس، پرسش این که « دمای اتاق یا تابع $T\ (x\ ,y\ ,z\ )$ با چه سرعتی تغییر می‌کند؟ » بینهایت پاسخ دارد. برای هر جهتِ جا به‌جایی یک پاسخ وجود دارد. به نظر می‌رسد که برای توصیف تغییر $T\ (x\ ,y\ ,z\ )$ به بینهایت مشتق نیاز داریم. خوشبختانه، مسئله این قدرها هم نا امید کننده نیست. قضیه‌ای در حساب پارمشتق‌ها (مشتق‌های جزیی) می‌گوید:

$$dT\ =(\frac{\partial T}{\partial x})dx+(\frac{\partial T}{\partial y})dy+(\frac{\partial T}{\partial z})dz \qquad (۲-۳۰)$$

این قاعده می‌گوید که با تغییر هر سه متغیر به اندازه‌ی‌های کوچک dx، dy و dz ، چگونه T تغییرمی‌کند. توجه کنید که به بینهایت مشتق‌گیری نیازی نیست؛ سه تا مشتق بسنده است: سه پارمشتق، هر کدام در راستای یک محور مختصات! بهتر است این قاعده را در شکل مناسب‌تری بنویسیم و بکوشیم دستاوردهای آن را بشناسیم. رابطه‌ی (۲-۳۰) را می‌توان به صورت ضرب داخلی دو بردار نوشت

$$dT\ =(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial T}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{k}})\cdot(dx\ \hat{\mathbf{i}}+dy\hat{\mathbf{j}}+dz\hat{\mathbf{k}})\equiv(\nabla\mathbf{T})\cdot(d\ \mathbf{l}) \qquad (۲-۳۱)$$

در سمت راست دو کوتاه نوشت زیر را جایگزین کردیم

$$d\ \mathbf{l}\equiv dx\hat{\mathbf{i}}+dy\ \hat{\mathbf{j}}+dz\ \hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۳۲)$$

که **بردار جابه‌جایی جزیی** است، و

$$\nabla\mathbf{T}\equiv(\frac{\partial T}{\partial x})\hat{\mathbf{i}}+(\frac{\partial T}{\partial y})\hat{\mathbf{j}}+(\frac{\partial T}{\partial z})\hat{\mathbf{k}} \qquad (۲-۳۳)$$

که **گرادیان** T نام دارد و یک کمیت برداری با سه مؤلفه است. رابطه‌ی (۲-۳۱) تعمیم رابطه‌ی (۲-۲۹) است که در پی آن بودیم . توصیف هندسی گرادیان دشوار نیست: مانند هر برداری، گرادیان هم اندازه و جهت دارد. برای اینکه معنی هندسی آن را بفهمیم رابطه‌ی (۲-۳۱) را به صورت زیر بنویسید.

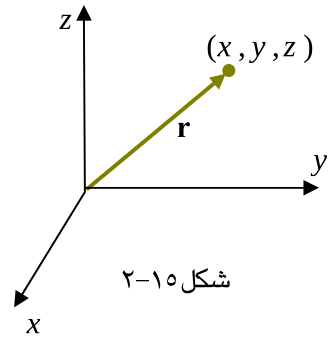
$$dT\ =\nabla\mathbf{T}\cdot d\ \mathbf{l}\ =\ |\nabla\mathbf{T}|\ |d\ \mathbf{l}|\cos\theta \qquad (۲-۳٤)$$

که در آن θ زاویه‌ی بین $\nabla\mathbf{T}$ و $d\ \mathbf{l}$ است. حال اگر اندازه‌ی $|d\mathbf{l}|$ را ثابت نگهداریم و در جهت‌های گوناگون بگردیم (یعنی θ را تغییر دهیم) می‌بینیم که بزرگترین تغییر در T (یعنی dT) هنگامی پدید می‌آید که $\theta=0$ است. یعنی به ازای $|d\mathbf{l}|$ معین؛ $d\mathbf{T}$ هنگامی بزرگترین است که در جهت $\nabla\mathbf{T}$ حرکت کنیم. پس: $\nabla\mathbf{T}$ جهت بیشترین افزایش تابع T است. فرض کنید در دامنه‌ی کوهپایه‌ای ایستاده‌اید و می‌خواهید بدانید که بیشترین شیب سربالایی کوه در کدام یال آن است. یالی که تیزترین شیب سر بالایی را دارد جهت **گرادیان** است. اندازه‌ی شیب کوه در آن یال **اندازه‌ی** گرادیان است. در اینجا تابع ارتفاع کوه و متغیرهای آن طول و عرض جغرافیایی اند و تابع فقط به دو متغیر وابسته است.

مثال ۷-۲ در شکل (۱۵-۲) فرض کنید $r=(x\ ,y\ ,z\ )$ فاصله‌ی نقطه $(x\ ,y\ ,z\ )$ از مبداء مختصات است؛ یعنی داریم: $r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$. گرادیان r را بدست آورید.

حل: در این مثال پیش از آنکه $\nabla\mathbf{r}$ را حساب کنیم، می‌توان جهت و اندازه‌ی $\nabla\mathbf{r}$ را به دست آورد: روشن است که هر چه در امتداد شعاع r از مرکز دورتر می‌شویم، r نیز با آهنگ بزرگ‌تری افزایش پیدا می‌کند. افزون براین، اگر در امتداد شعاعی به اندازه‌ی $d\ \ell$ از مبداء دور شویم، r به اندازه‌ی $d\ \ell$ افزایش پیدا می‌کند یعنی $dr=d\ \ell$. پس اندازه‌ی $|\nabla\mathbf{r}|$ برابربرابر یک است.

© Firooz Arash, 2003-2010



شکل ۲-۱۵

در اینجا $\Delta\mathbf{r}$ بردار یکه‌ای در امتداد شعاع است. بنابراین، $\Delta\mathbf{r}=\hat{\mathbf{r}}$. اینک به محاسبه‌ی آن می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{r} &= \frac{\partial r}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial r}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial r}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\\ &= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{j}}+\frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{k}}\\ &= \frac{x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\mathbf{r}}{r}=\hat{\mathbf{r}}\end{aligned} \qquad (۲-۳۵)$$

۲-۶ عملگر ∇: گرادیان $\vec{\nabla}T$ شبیه این است که برداری به نام ∇ در یک کمیت عددی مانند T ضرب شده باشد.

$$\nabla T=(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z})T \qquad (۲-۳۶)$$

(در اینجا بردارهای یکه را در سمت چپ نوشته‌ایم تا با $\partial\hat{\mathbf{i}}/\partial x$ ، $\partial\hat{\mathbf{j}}/\partial y$ و $\partial\hat{\mathbf{k}}/\partial z$ اشتباه نشود.) جمله‌ی درون پرانتز تعریف نماد ∇ است.

$$\nabla\equiv\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (۲-۳۷)$$

اگرچه ∇ شکل یک بردار با مؤلفه‌های $\partial/\partial x$ ، $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$ را دارد اما، به مفهوم معمولی یک بردار نیست؛ بلکه یک **عملگر برداری** است. با وجود این، ∇ از هر نظر رفتار یک بردار معمولی را دارد. یک بردار معمولی را می‌توان به سه گونه ضرب کرد: (i) در یک عدد، (ii) ضرب داخلی با یک بردار دیگر و (iii) ضرب خارجی با یک بردار دیگر. همین کار را می‌توان با ∇ انجام داد.

(۱) ضرب در یک تابع عددی مانند T : در این صورت ∇T همان گرادیان است.

(۲) ضرب در یک بردار مانند $\mathbf{F}$: در این صورت $\nabla\cdot\mathbf{F}$ **دیورژانس** یا **واگرایی** $\mathbf{F}$ نامیده می‌شود.

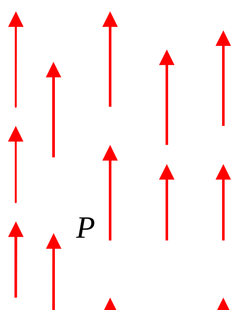
(۳) ضرب برداری در یک بردار مانند $\mathbf{F}$: در این صورت $\nabla\times\mathbf{F}$ را **تاو** تا **کرل** بردار $\mathbf{F}$ می‌نامند.

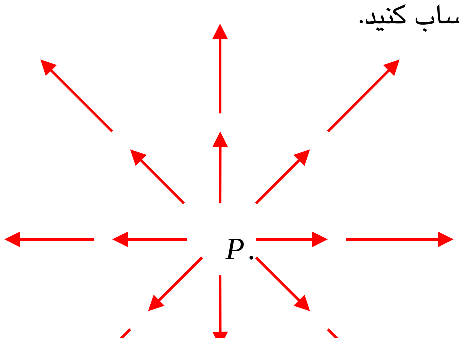
۲-۷ دیورژانس: در این کتاب ما از دیورژانس استفاده نخواهیم کرد اما برای کامل شدن موضوع در اینجا به کوتاهی به آن می‌پردازیم. از تعریف ∇ داریم:

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z})\cdot(F_x\hat{\mathbf{i}}+F_y\hat{\mathbf{j}}+F_z\hat{\mathbf{k}})=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad (۲-۳۸)$$

روشن است که دیورژانسِ یک تابع برداری، کمیت عددی، $\nabla\cdot\mathbf{F}$، است (تابع عددی دیورژانس ندارد.) از نظر هندسی؛ دیورژانس $\mathbf{F}$ سنجه‌ی واگرایی بردار $\mathbf{F}$ در نقطه‌ی مورد نظر است. تابع برداری شکل (۲-۱٦ الف) در نقطه‌ی P واگرایی بزرگی دارد. حال آنکه دیورژانس تابع برداری شکل (۲-۱٦ب) در نقطه‌ی P صفر است.

مثال ۲-۸ دیورژانس بردارهای **(الف)**: $\mathbf{r}=x\,\hat{\mathbf{i}}+y\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}$ مربوط به شکل (۲-۱٦ الف) و **(ب)** $\mathbf{F}=2\hat{k}$ مربوط به شکل (۲-۱٦ب) را حساب کنید.





© Firooz Arash, 2003-2010

حل: (**الف**)

$$\nabla\cdot\mathbf{r}=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=۱+۱+۱=۳ \qquad (۲-۳۹)$$

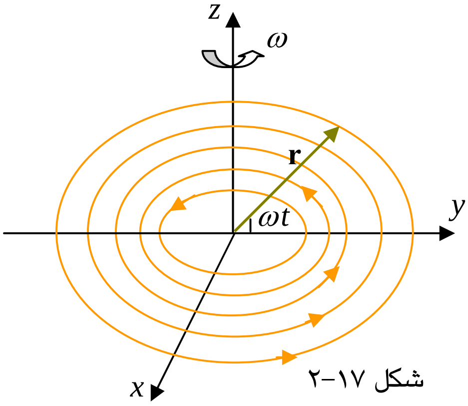
(**ب**):

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}(\circ)+\frac{\partial}{\partial y}(\circ)+\frac{\partial}{\partial z}(۲)=۰+۰+۰=۰ \qquad (۲-۴۰)$$

۲-۸ کرل یا تاو : همانگونه که گفتیم؛ تاو یا کرل یک تابع برداری ضرب برداری ∇ با آن بردار است. کرل یا تاو بردار $\mathbf{F}$ عبارت است از:

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\hat{\mathbf{i}}(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z})+\hat{\mathbf{j}}(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x})+\hat{\mathbf{k}}(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}) \qquad (۲-۴۱)$$

می‌بینیم که کرل بردار $\mathbf{F}$، خود یک بردار است.



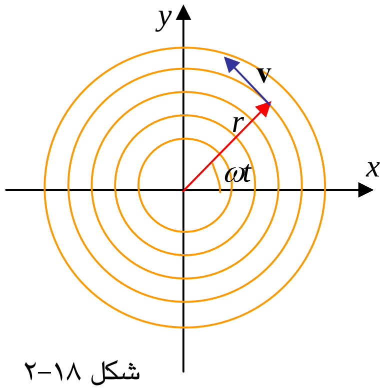
شکل ۲-۱۷

توصیف هندسی کرل یا تاو: کرل برای توصیف ویژگی‌های حرکتی شاره‌ها اختراع شد. کرل یک تابع برداری سنجه‌ای برای اندازه‌گیری چرخش آن بردار در یک نقطه است. برای این‌که ببینید چگونه کرل به چرخش مربوط می‌شود، گرداب آرمانی (شکل ۲-۱۷) را در نظر بگیرید که آب با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول مرکز می‌چرخد. سرعت آب در $\mathbf{r}$ عبارت است از $\mathbf{v}=r\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$ که در آن $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بردار یکه‌ی مماس بر مسیر است. در شکل (۲-۱۸) بردار سرعت در یک نقطه نشان داده شده است. بردار سرعت $\mathbf{v}$ در مختصات کارتزی به صورت

$$\mathbf{v}=r\omega(-\sin\omega t\ \hat{\mathbf{i}}+\cos\omega t\ \hat{\mathbf{j}})=r\omega(-\frac{y}{r}\hat{\mathbf{i}}+\frac{x}{r}\hat{\mathbf{j}})=-\omega y\ \hat{\mathbf{i}}+\omega x\ \hat{\mathbf{j}}$$

است. بنابراین،

© Firooz Arash, 2003-2010



شکل ۱۸-۲

$$\nabla\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix} \qquad (۲-۴۲)$$

$$=\hat{\mathbf{k}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega x)-\frac{\partial}{\partial y}(-\omega y)\right]=2\omega\hat{\mathbf{k}}$$

مثال ۹-۲ نیروی گرانش میان دو جسم به صورت زیر است که در آن A مقدار ثابتی است

$$\mathbf{F}=\frac{A}{r^2}\hat{\mathbf{r}}=A\frac{\mathbf{r}}{r^3}=A\frac{x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}}{r^3} \qquad (۲-۴۳)$$

مؤلفه‌ی x کرل $\mathbf{F}$ ، یعنی $\left(\nabla\times\mathbf{F}\right)_x=\left(\partial F_z/\partial y\right)-\left(\partial F_y/\partial z\right)$ را حساب کنید.

حل: داریم

$$\left(\nabla\times\mathbf{F}\right)_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Az}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Ay}{r^3}\right) \qquad (۲-۴۴)$$

و چون $r^3=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$ است، در نتیجه، جمله‌ی اول سمت راست رابطه‌ی (۴۴-۳) عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial y}\ Az\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}=Az\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}(2y)=-3A\frac{zy}{r^5} \qquad (۲-۴۵)$$

همچنین برای جمله‌ی دوم داریم $\partial/\partial z\left(Ay/r^3\right)=-3A\left(yz/r^5\right)$ و بنابراین:

$$\left(\nabla\times\mathbf{F}\right)_x=-3A\frac{zy}{r^5}+3A\frac{yz}{r^5}=0 \qquad (۲-۴۶)$$

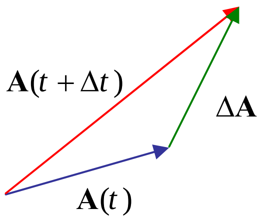
به همین ترتیب می‌توان مؤلفه‌های دیگر $\nabla\times\mathbf{F}$ را حساب کرد. آن‌ها هم صفرند. پس، برای نیروی گرانش $\nabla\times\mathbf{F}=0$. در آینده خواهیم دید که اگر کرل نیرویی صفر باشد آن نیرو پایستار است.

۹-۲ مشتق یک بردار در شکل (۱۹-۲) بردار $\mathbf{A}(t)$ را در نظر بگیرید که تابع زمان است . تغییر بردار $\mathbf{A}$ در بازه‌ی زمانی بین t و $t+\Delta t$ عبارت است از $\Delta\mathbf{A}=\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)$. همان‌گونه که در مشتق‌گیری از بردار مکان $\mathbf{r}$ در فصل ۱ انجام دادیم در اینجا هم مشتق زمانی $\mathbf{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)}{\Delta t} \qquad (۲-۴۷)$$

توجه کنید که $d\mathbf{A}/dt$ بردار جدیدی است که می‌تواند بزرگ یا کوچک باشد و ممکن است در هر سویی جهت‌گیری کند. این همه به رفتار $\mathbf{A}$ بستگی دارد. یک فرق بنیادی بین $d\mathbf{A}/dt$ و مشتق یک تابع عددی وجود دارد. $\mathbf{A}$ می‌تواند هم با تغییر **اندازه** و هم با تغییر در **جهت** آن، تغییر کند؛ حال آنکه فقط اندازه‌ی تابع عددی می‌تواند تغییر کند. این تفاوت بسیار مهم است. در عمومی ترین حالت، هم جهت و هم اندازه‌ی $\mathbf{A}$، هر دو می‌توانند هم زمان تغییر کنند. در مثال ۶-۲ از حرکتی سخن گفتیم که بردار مکان با $\mathbf{r}=r(\cos\omega t\ \hat{\mathbf{i}}+\sin\omega t\ \hat{\mathbf{j}})$ داده شده بود. سرعت این حرکت عبارت است از $\mathbf{v}=r\omega(-\sin\omega t\ \hat{\mathbf{i}}+\cos\omega t\ \hat{\mathbf{j}})$

© Firooz Arash, 2003-2010



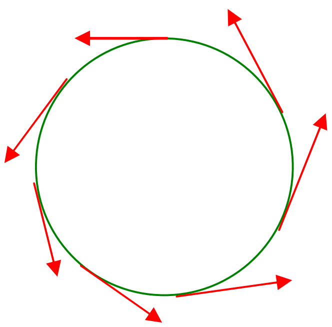
شکل ۲-۱۹

و چون داریم

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = r^{2}\omega(-\cos\omega t\,\sin\omega t + \sin\omega t\,\cos\omega t) = 0 \qquad (۲-٤٨)$$

پس می‌بینیم که $\mathbf{v} \equiv d\,\mathbf{r}/dt$ به بردار $\mathbf{r}$ عمود است. نتیجه آنکه اندازه‌ی $\mathbf{r}$ ثابت و بنابراین، تنها راه ممکن برای تغییر $\mathbf{r}$ تغییر جهت آن است. یعنی $\mathbf{r}$ می‌چرخد. چون مسیر دایره است، $\mathbf{r}$ حول مبداء می‌چرخد. در مثال ۲-٦ همچنین نشان دادیم که $\mathbf{a} = -\omega^{2}\mathbf{r}$ است. چون $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = 0$ است ، نتیجه می‌گیریم که $\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = -\omega^{2}\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = 0$ و بنابراین، $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{v}/dt$ بر $\mathbf{v}$ عمود است.

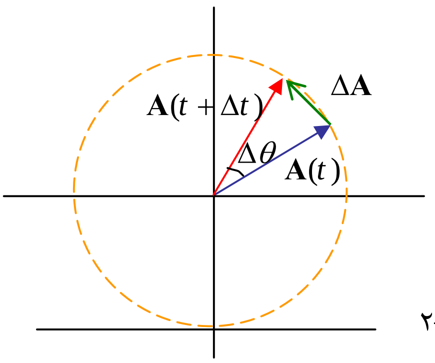
این بدان معنی است که اندازه‌ی بردار سرعت ثابت است و تنها جهت آن تغییر می‌کند. پس، اگر بردار $\mathbf{v}$ بخواهد تغییر کند باید بچرخد. این را می‌توان در شکل (۲-۲۰) به روشنی دید. به طور کلی، اگر اندازه‌ی بردار $\mathbf{A}(t)$ ثابت باشد تنها راهی که $\mathbf{A}(t)$ می‌تواند تغییر کند، چرخش آن است. اینک می‌خواهیم رابطه‌ی سودمندی برای مشتق زمانی، $d\mathbf{A}/dt$ ، یک چنین بردار چرخان بیابیم. مشتق $d\mathbf{A}/dt$ همواره بر بردار $\mathbf{A}$ عمود است (شکل ۲-۲۱).


شکل ۲-۲۰

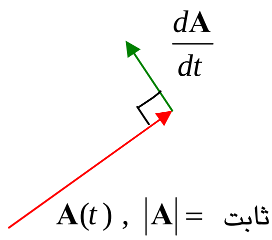
اندازه $d\mathbf{A}/dt$ را می‌توان به صورت زیر به دست آورد: تغییر $\mathbf{A}$ بین زمان t و $t+\Delta t$ عبارت است از $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)$. با استفاده از زاویه‌ی $\Delta\theta$ در شکل (۲-۲۲) داریم: $|\Delta\mathbf{A}| = 2A\sin(\Delta\theta/2)$ و در نتیجه، برای $\Delta\theta \ll$ آنگاه $\sin(\Delta\theta/2) \approx \Delta\theta/2$. در نتیجه، $|\Delta\mathbf{A}| = 2A\,(\Delta\theta/2) = A\,\Delta\theta$ است. در حد $\Delta t \to 0$ خواهیم داشت

$$\left|\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right| = A\,\frac{d\theta}{dt} \qquad (۲-٤٩)$$

در این جا $d\theta/dt$ سرعت زاویه‌ای بردار $\mathbf{A}$ است. نمونه‌ی ساده‌ی کاربرد رابطه (۲-٤٧) را در مثال ۲-٦ می‌توان دید.



شکل ۲-۲۲



شکل ۲-۲۱

اگر $\mathbf{A}$ بردار چرخان r در مثال ۲-٦ باشد واگر $\theta = \omega t$ آنگاه:

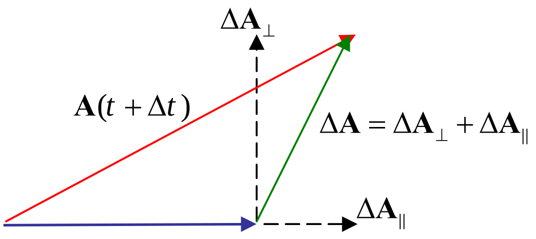
$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = r\,\frac{d}{dt}(\omega t) = r\omega \quad \text{یا} \quad v = r\omega \qquad (۲-٥٠)$$

در حالت کلی، تغییر بردار $\mathbf{A}$ نتیجه‌ی چرخش بردار $\mathbf{A}$ (تغییر جهت) و تغییر اندازه‌ی آن است. تغییر اندازه یعنی کم و زیاد شدن طول $\mathbf{A}$ در امتداد خود. همان‌گونه که دیدیم تغییر $\mathbf{A}$ در اثر تغییر جهت آن بر $\mathbf{A}$ عمود است. بنابراین، تغییر $\mathbf{A}$ را می‌توان به صورت جمع این دو تغییر نوشت. با توجه به (شکل ۲-۲۳) برای Δt کوچک داریم $|\Delta\mathbf{A}_{\parallel}| = \Delta A$ و $|\Delta\mathbf{A}_{\perp}| = A\,\Delta\theta$ که اگر آنها را به Δt تقسیم کنیم ، خواهیم داشت

© Firooz Arash, 2003-2010

$$\left|\frac{d\mathbf{A}_\perp}{dt}\right| = A\,\frac{d\theta}{dt} \qquad , \qquad \left|\frac{d\mathbf{A}_\parallel}{dt}\right| = \frac{dA}{dt} \tag{۲-۵۱}$$

اگر $\mathbf{A}$ نچرخد $(d\theta/dt = 0)$ است و $d\mathbf{A}_\perp/dt = 0$ می‌شود و اگر اندازه‌ی $\mathbf{A}$ ثابت باشد $d\mathbf{A}_\parallel/dt = 0$ است.



شکل ۲-۲۳

این بخش را با چند رابطه‌ی مشتق‌گیری از بردارها به پایان می‌بریم. اثبات آنها به عهده خواننده واگذار شده است. اگر b تابعی اسکالر وابسته به زمان باشد و بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ تابعی از زمان باشند آنگاه:

$$\frac{d}{dt}(c\mathbf{A}) = \frac{dc}{dt}\mathbf{A} + c\,\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{۲-۵۲}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

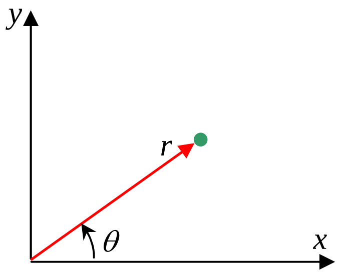
در رابطه‌ی دوم اگر $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ باشد آنگاه:

$$\frac{d}{dt}(A^{۲}) = ۲\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} \tag{۲-۵۳}$$

و باز می‌بینیم که اگر $d\mathbf{A}/dt$ بر $\mathbf{A}$ عمود باشد، اندازه‌ی $\mathbf{A}$ ثابت است.

۲-۱۰ حرکت در مختصات قطبی

مختصات کارتزی برای توصیف حرکت راست‌خط بسیار مناسب است اما این سامانه‌ی مختصات برای توصیف حرکت دایره‌ای خیلی مناسب نیست. چون حرکت دایره‌ای نقش چشمگیری در فیزیک دارد به جاست که چارچوب مختصاتی را بشناسیم که برای توصیف حرکت دایره‌ای طبیعی‌تر است. اگر چه ما در گزینش نوع مختصات آزادیم، اما گزینه‌ی به جا و مناسب دستگاه مختصات، حل مسئله را بسیار آسان‌تر می‌کند.



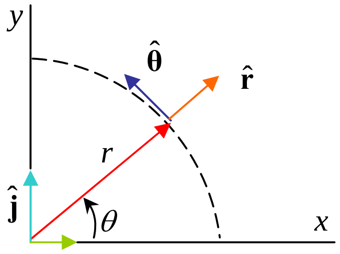
شکل ۲-۲۴

ذره‌ای را در نظر بگیرید که در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند: مکان ذره را می‌توان با مختصات x و y آن مشخص کرد که نمایش مکان ذره در مختصات کارتزی است. می‌توان در هر لحظه مکان ذره را با فاصله‌ی r ذره از مبداء مختصات و زاویه‌ی θ که r با محور xها می‌سازد بیان کرد؛ این مختصات قطبی است. به جای متغیرهای $(x\,,y)$ اینک دو متغیر $(r\,,\theta)$ داریم. از شکل (۲-۲۴) پیداست که $(x\,,y)$ و $(r\,,\theta)$ به یکدیگر مربوط اند:

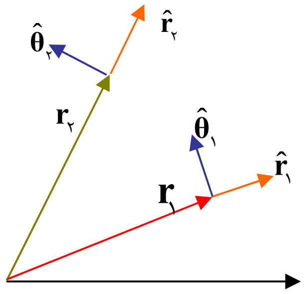
$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} \quad , \quad \theta = \tan^{-۱}\frac{y}{x} \tag{۲-۵۴}$$

همان‌گونه که در بخش ۲-۳ بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ را در راستای افزایش x و y و z شناساندیم در این‌جا هم دو بردار یکه $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ را در جهت افزایش r و θ معرفی می‌کنیم (شکل ۲-۲۵). تفاوت مهم بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ با $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ در این است که جهت $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ با مکان تغییر می‌کند؛ حال آنکه جهتهای $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ ثابت اند. در شکل (۲-۲۶) این بردارهای یکه در دو مکان متفاوت نشان داده شده‌اند. چون $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ با مکان تغییر می‌کنند، رابطه‌های سینماتیک ممکن است در مختصات قطبی پیچیده‌تر از

© Firooz Arash, 2003-2010



شکل ۲-۲۵



(شکل ۲-۲۶)

مختصات کارتزی به نظر برسند. بردارهای یکه‌ی $(\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}})$ و $(\hat{\mathbf{r}},\hat{\boldsymbol{\theta}})$ را می‌توان برحسب یکدیگر نوشت: در نقطه‌ای در صفحه‌ی xy داریم

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}\cos\theta + \hat{\mathbf{j}}\sin\theta \qquad , \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{i}}\sin\theta + \hat{\mathbf{j}}\cos\theta \qquad (۲–۵۵)$$

$\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بر یکدیگر عمودند. این را می‌توان با حساب کردن $\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}$ نشان داد. امتحان کنید!

بردار $\mathbf{r}$ در مختصات کارتزی در دو بعد عبارت است از $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}$. همین بردار در مختصات قطبی به صورت $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ نوشته می‌شود. این دو بیان هم‌ارزند؛ چون اگر به جای $\hat{\mathbf{r}}$ مقدار آن را از رابطه‌ی (۲–۵۵) جایگزین کنیم خواهیم داشت: $\mathbf{r} = r(\hat{\mathbf{i}}\cos\theta + \hat{\mathbf{j}}\sin\theta)$ اما $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ اند. پس، از $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ به آسانی به $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ می‌رسیم.

نکته : نگارش $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ گاهی گمراه کننده به نظر می‌رسد و به ظاهر هیچ اشاره‌ای به θ ندارد. می‌دانیم که برای معین کردن مکان نقطه‌ای در صفحه به دو پارامتر نیاز داریم (در مختصات کارتزی: x و y). اما به نظر می‌رسد که در رابطه‌ی $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ تنها یک کمیت، r، وجود دارد. دلیل این ناسازگاری ظاهری این است که $\hat{\mathbf{r}}$ بردار ثابت نیست. اگر چه θ در رابطه‌ی $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ نمایان نمی‌شود، اما برای اینکه بگوئیم جهت $\hat{\mathbf{r}}$ چیست به دانستن θ نیاز داریم و برای اینکه $\hat{\mathbf{r}}$ را بدانیم باید θ را بدانیم. شاید بهتر است که بنویسیم $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}(\theta)$ تا تأکید کنیم که $\hat{\mathbf{r}}$ به θ بستگی دارد.

از متعامد بودن $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ و این که بردارهای یکه‌اند: $|\hat{\mathbf{r}}| = |\hat{\boldsymbol{\theta}}| = ۱$ می‌توان ضرب داخلی بردارها را مانند پیش انجام داد. اگر $\mathbf{A} = A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ و $\mathbf{B} = B_r\,\hat{\mathbf{r}} + B_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ آنگاه $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_rB_r + A_\theta B_\theta$. البته $\hat{\mathbf{r}}$ها و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ها باید برای هر دو بردار در یک نقطه باشند.

۲-۱۱ سرعت در مختصات قطبی

در مختصات کارتزی برای سرعت داریم

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} \qquad (۲–۵۶)$$

این بردار، $\mathbf{V}$، در مختصات قطبی عبارت است از:

$$\mathbf{V} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{\mathbf{r}}) = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{dt} \qquad (۲–۵۷)$$

جمله‌ی نخست سمت راست مؤلفه‌ی سرعت در راستای شعاع است. بنابراین، انتظار داریم جمله‌ی دوم مؤلفه‌ی مماسی (در راستای $\hat{\boldsymbol{\theta}}$) سرعت باشد. این درست است اما برای اثبات آن باید $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ را حساب کنیم. این کار ظریفی است و ما آن را به سه روش حساب خواهیم کرد.

روش ۱: چون $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه است، اندازه‌ی آن مقدار ثابتی است و $d\hat{\mathbf{r}}/dt$ به $\hat{\mathbf{r}}$ عمود است. با افزایش θ، بردار $\hat{\mathbf{r}}$ می‌چرخد. در شکل (۲-۲۷) داریم

$$|\Delta\hat{\mathbf{r}}| \approx |\hat{\mathbf{r}}|\Delta\theta = \Delta\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{|\Delta\hat{\mathbf{r}}|}{\Delta t} \approx \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (۲–۵۸)$$

© Firooz Arash, 2003-2010

و اگر حد $\Delta t \to ۰$ آن را حساب کنیم به دست می‌آید

$$\left|\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right| = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \qquad (۲-۵۹)$$

همان‌گونه که از شکل (۲-۵۷) پیداست با افزایش θ، بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ در جهت $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ می‌چرخد. بنابراین،

$$\frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۲-۶۰)$$

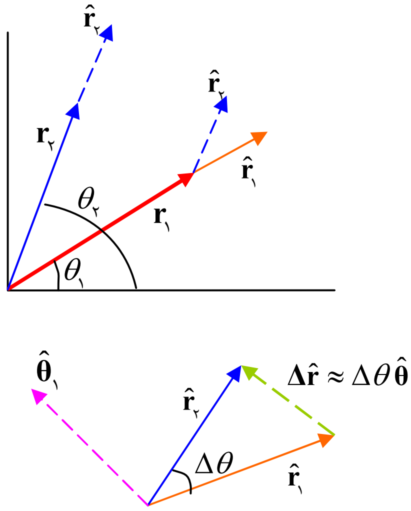
شیوه ۲: داریم $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}\cos\theta + \hat{\mathbf{j}}\sin\theta$. توجه کنید که $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ بردارهای یکه‌ی ثابت‌اند و با زمان تغییر نمی‌کنند. با مشتق‌گرفتن از دو طرف داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} &= \hat{\mathbf{i}}\frac{d}{dt}(\cos\theta) + \hat{\mathbf{j}}\frac{d}{dt}(\sin\theta) \\ &= -\hat{\mathbf{i}}\sin\theta\,\dot{\theta} + \hat{\mathbf{j}}\cos\theta\,\dot{\theta} = (-\hat{\mathbf{i}}\sin\theta + \hat{\mathbf{j}}\cos\theta)\dot{\theta}\end{aligned} \qquad (۲-۶۱)$$

اما از رابطه (۲-۵۵) داریم $-\hat{\mathbf{i}}\sin\theta + \hat{\mathbf{j}}\cos\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ پس:

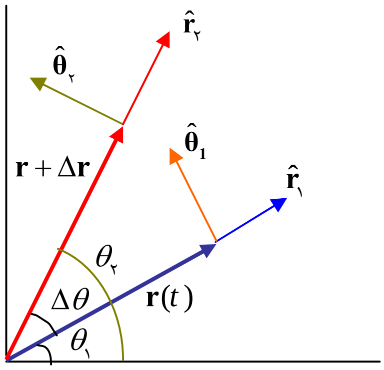
$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۲-۶۲)$$

که همان رابطه‌ی (۲-۶۰) است.



(شکل۲-۲۷)

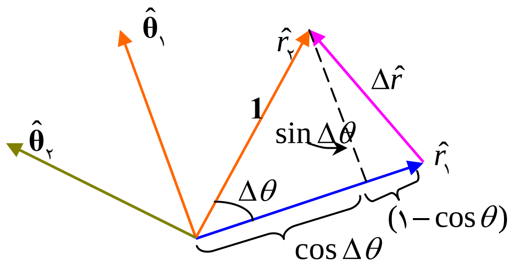
روش ۳: در شکل (۲-۲۸) بردار $\mathbf{r}$ در دو زمان t و $t+\Delta t$ نشان داده شده است. در زمان t مختصات $(r\,,\theta)$ است و در زمان $t+\Delta t$ عبارتند از $(r+\Delta r\,,\theta+\Delta\theta)$. توجه کنید که زاویه‌ی بین $\hat{\mathbf{r}}_1$ و $\hat{\mathbf{r}}_2$ با زاویه‌ی بین $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}_2$ برابرند. در شکل (۲-۲۹) این بردارها را اندکی بزرگتر کشیده‌ایم و تغییر در $\hat{\mathbf{r}}$ را برای بازه‌ی زمانی Δt نشان داده‌ایم. دیده می‌شود که $\Delta\hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_1\sin\Delta\theta - \hat{\mathbf{r}}_1(1-\cos\Delta\theta)$ و بنابراین



شکل ۲-۲۸

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\hat{\mathbf{r}}}{\Delta t} &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_۱\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta t} - \hat{\mathbf{r}}_۱\frac{(۱-\cos\Delta\theta)}{\Delta t} \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_۱\left(\frac{\Delta\theta + \frac{۱}{۶}(\Delta\theta)^۳ + \cdots}{\Delta t}\right) - \hat{\mathbf{r}}_۱\left(\frac{\frac{۱}{۲}(\Delta\theta)^۲ - \frac{۱}{۲۴}(\Delta\theta)^۴ + \cdots}{\Delta t}\right)\end{aligned}$$

(۲-۶۳)



شکل ۲-۲۹

در اینجا ما از بسط سری سینوس و کسینوس استفاده کرده‌ایم. حال باید $d\,\hat{\mathbf{r}}/dt = \lim\limits_{\Delta t\to ۰}(\Delta\hat{\mathbf{r}}/\Delta t)$ را حساب کنیم. در این حد $\Delta\theta$ نیز به صفر میل می‌کند: $\Delta\theta/\Delta t \to d\theta/dt$. بنابراین، برای $n>0$ داریم $\lim\limits_{\Delta t\to ۰}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}(\Delta\theta)^n = ۰$ و جمله‌ی ضریب $\hat{\mathbf{r}}_۱$ صفر می‌شود. آنچه باقی می‌ماند عبارت است از

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۲-۶۴)$$

© Firooz Arash, 2003-2010

که همان رابطه‌ی (۲-۶۰) یا (۲-۶۲) است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (۲-۶۵)$$

بکوشید با استفاده از شیوه‌های بالا برای $d\,\hat{\mathbf{r}}/dt$ ، رابطه‌ی (۲-۶۵) را اثبات کنید. پس داریم

$$\boxed{\frac{d\,\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\ , \qquad \frac{d\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{r}}} \qquad (۲-۶۶)$$

حالا می‌توانیم به مسئله‌ی خودمان در رابطه‌ی (۲-۵۹) برگردیم و با توجه به نتایج بالا آن را به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$\mathbf{V} = \frac{d}{dt} r\,\hat{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۲-۶۷)$$

همان‌گونه که انتظار داشتیم ، جمله‌ی دوم در راستای مماسی (یعنی $\hat{\boldsymbol{\theta}}$) است.

مثال ۱۰-۲ ذره‌ای روی دایره‌ای به شعاع b حرکت می‌کند. سرعت زاویه‌ای آن با $\dot{\theta} = \alpha t$ داده شده است (α برحسب رادیان بر ثانیه بتوان دو است.) سرعت ذره را در مختصات قطبی توصیف کنید.

حل: چون $r = b =$ ثابت ، پس $\mathbf{V}$ مماسی و برابر با $\mathbf{V} = b\,\alpha t\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ است. مکان ذره عبارت است از:

$$r = b\ , \qquad \theta = \theta_{\circ} + \int_{\circ}^{t} \dot{\theta} dt = \theta_{\circ} + \int_{\circ}^{t} \alpha t dt = \theta_{\circ} + \frac{۱}{۲}\alpha t^{۲} \qquad (۲-۶۸)$$

اگر در زمان $t = ۰$ ذره روی محور x باشد آنگاه $\theta_{\circ} = ۰$ و بردار مکان ذره $\mathbf{r} = b\hat{r}$ است. برای مشخص کردن جهت $\hat{\mathbf{r}}$ باید θ را بدانیم.

مثال ۱۱-۲ ذره‌ای با سرعت ثابت $\mathbf{V} = u\hat{\mathbf{i}}$ برابر شکل (۲-۳۰) روی خط $y = ۲$ حرکت می‌کند. سرعت ذره را در مختصات قطبی بنویسید.

حل:

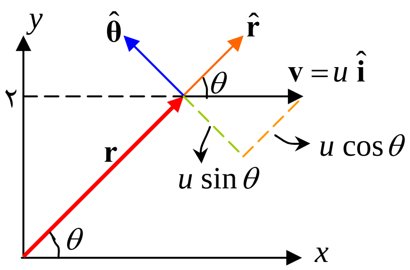
$$\mathbf{V} = V_r\hat{\mathbf{r}} + V_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۲-۶۹)$$

از شکل دیده می‌شود که:

$$V_r\hat{\mathbf{r}} = u\cos\theta, \qquad V_\theta = -u\sin\theta \qquad (۲-۷۰)$$

پس:

$$\mathbf{V} = u\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - u\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۲-۷۱)$$

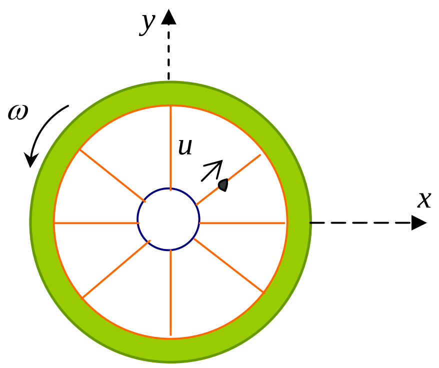


شکل ۳۰-۲

مثال ۱۲-۲ چرخی در صفحه‌ی عمودی با سرعت زاویه‌ای یکنواخت $\dot{\theta} = \omega$ رادیان بر ثانیه حول محور خود می‌چرخد. همانند شکل (۲-۳۱) دانه‌ی تسبیحی روی یکی از میله‌های آن با سرعت ثابت u متر بر ثانیه می‌لغزد. در زمان $t = ۰$ میله در امتداد محور x هاست و دانه تسبیح در مبداء مختصات قرار دارد. سرعت دانه تسبیح را در زمان t حساب کنید:

(الف) : در مختصات قطبی

© Firooz Arash, 2003-2010



شکل ۲-۳۱

(ب): در مختصات کارتزی

حل: **(الف)** داریم: $\dot\theta=\omega$ ، $\dot r=u$ ، $\mathbf r=ut$ و بنابراین

$$\mathbf V=\dot r\,\hat{\mathbf r}+r\,\dot\theta\,\hat{\boldsymbol\theta}=u\hat r+ut\,\omega\,\hat{\boldsymbol\theta} \qquad (۲-۷۲)$$

برای اینکه مؤلفه‌های سرعت را بشناسیم، باید جهت‌های $\hat{\mathbf r}$ و $\hat{\boldsymbol\theta}$ را بدانیم. این از $\mathbf r=(r\,,\theta)=(u\,t\,,\omega t)$ به دست می‌آید.

(ب) دانه‌ی تسبیح دونوع سرعت دارد: سرعت مربوط به لغزش آن روی میله، $\mathbf v_r$، و سرعت $r\omega$ حاصل از چرخیدن چرخ. بنابراین،

$$v_x=v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta \quad , \quad v_y=v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta \qquad (۲-۷۳)$$

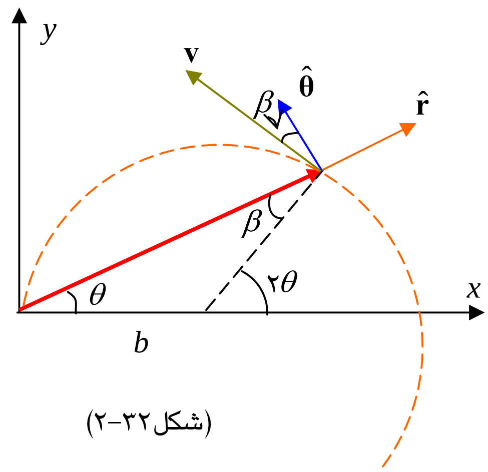
چون $v_r=u\,,\; v_\theta=r\omega=ut\,\omega\,,\; \theta=\omega t$ اند، پس

$$\mathbf v=(u\cos\omega t-ut\,\omega\sin\omega t)\,\hat{\mathbf i}+(u\sin\omega t+ut\,\omega\cos\omega t)\,\hat{\mathbf j} \qquad (۲-۷٤)$$

می‌بینید که در مختصات قطبی چقدر نتیجه ساده‌تر است.

مثال ۲-۱۳ ذره‌ای برابر شکل (۲-۳۲) با سرعت ثابت v روی دایره‌ای به شعاع b حرکت می‌کند. مبداء مختصات را در یک نقطه روی دایره انتخاب کنید و سرعت ذره را در مختصات قطبی بیابید.

حل: با این گزینه‌ی مبداء مختصات، دیگر اندازه‌ی $\mathbf r$ ثابت نیست و $\mathbf v$ هم مماس خالص (در راستای $\hat{\boldsymbol\theta}$) نیست. پس، داریم



(شکل۲-۳۲)

$$\mathbf v=-v\,\sin\beta\,\hat{\mathbf r}+v\,\cos\beta\,\hat{\boldsymbol\theta}$$
$$=-v\,\sin\theta\,\hat{\mathbf r}+v\,\cos\theta\,\hat{\boldsymbol\theta} \qquad (۲-۷٥)$$

اینک باید θ را بر حسب زمان بنویسیم. از هندسه مسئله روشن است که $\theta=\beta$ و $۲\theta=\omega t$. در نتیجه $\theta=\omega t/۲$ و $\omega=v/b$. پس:

$$\mathbf v=-\mathbf v\sin\frac{v}{۲b}t\;\hat{\mathbf r}+v\,\cos\frac{v}{۲b}t\;\hat{\boldsymbol\theta} \qquad (۲-۷٦)$$

۲-۱۲ شتاب در مختصات قطبی

این بخش را با محاسبه‌ی شتاب در مختصات قطبی به پایان می‌بریم. برای یافتن شتاب از سرعت $\mathbf v$، نسبت به زمان مشتق بگیرید.

$$\mathbf a=\frac{d}{dt}\mathbf v=\frac{d}{dt}(\dot r\,\hat{\mathbf r}+r\dot\theta\,\hat{\boldsymbol\theta})=\ddot r\,\hat{\mathbf r}+\dot r\,\frac{d}{dt}\hat{\mathbf r}+\dot r\dot\theta\,\hat{\boldsymbol\theta}+r\ddot\theta\,\hat{\boldsymbol\theta}+r\dot\theta\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol\theta} \qquad (۲-۷۷)$$

اگر به جای $d\,\hat{\mathbf r}/dt$ و $d\,\hat{\boldsymbol\theta}/dt$ $\frac{d\,\hat{\boldsymbol\theta}}{dt}$ از رابطه‌های (۲-٦٦) جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$\mathbf a=\ddot r\,\hat{\mathbf r}+\dot r\dot\theta\,\hat{\boldsymbol\theta}+\dot r\ddot\theta\,\hat{\boldsymbol\theta}+r\ddot\theta\,\hat{\boldsymbol\theta}-r\dot\theta^{۲}\,\hat{\mathbf r}=(\ddot r-r\dot\theta^{۲})\hat{\mathbf r}+(r\ddot\theta+۲\dot r\dot\theta)\hat{\boldsymbol\theta} \qquad (۲-۷۸)$$

جمله‌ی $\ddot r\,\hat{\mathbf r}$ شتاب خطی در راستای شعاعی است که نتیجه‌ی تغییر سرعت شعاعی است. همچنین $\dot r\,\ddot\theta\hat{\boldsymbol\theta}$ شتاب خطی در راستای مماسی است که نتیجه‌ی تغییر **اندازه‌ی سرعت زاویه‌ای** است. جمله‌ی $-r\dot\theta^2\,\hat{\mathbf r}$ شتاب مرکزگراست که در مثال ۲-٦ به صورت $-r\omega^2$ با آن روبرو شدیم. سرانجام، $۲\dot r\dot\theta\,\hat{\boldsymbol\theta}$ شتاب **کوریولیس** است و به نیروی کوریولیس مربوط است. این نیرو یک نیروی

© Firooz Arash, 2003-2010

پنداری (مجازی) است که در چارچوب‌های چرخان نمایان می‌شود و ما در فصل ۱۲به آن خواهیم پرداخت. در اینجا، اما شتاب کوریولیس، شتاب واقعی است و هر گاه r و θ هر دو تغییر کنند نمایان می‌شود.

مثال ۱۴-۲ شتاب دانه تسبیح در مثال ۱۲-۲ را در مختصات قطبی به دست آورید. فرض کنید دانه‌ی تسبیح در زمان $t=0$ از مرکز چرخ آغاز و به سوی بیرون حرکت می‌کند. موقعیت زاویه‌ای با $\theta=\omega t$ داده شده است.

حل: از رابطه‌ی (۶۷-۲) می‌دانیم $\mathbf{v}=\dot{r}\,\hat{\mathbf{r}}+r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ است.آگاهی‌های داده شده در مسئله عبارتند از: $\dot{r}=u$ و $\dot{\theta}=\omega$. موقعیت شعاعی دانه تسبیح $r=ut$ است و داریم: $\mathbf{v}=u\,\hat{\mathbf{r}}+ut\,\omega\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. بنابراین، شتاب برابر است با:

$$\mathbf{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}\;=-ut\,\omega^2\hat{\mathbf{r}}+2u\,\omega\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{۲-۷۹}$$

مثال ۱۵-۲ ذره‌ای روی مسیر مارپیچ به سوی بیرون در حرکت است. معادله مسیر به صورت $r=A\theta$ است که در آن A مقداری ثابت و برابر $A=(1/\pi)\,\text{m/rad}$. است. θ با زمان بر اساس $\theta=\alpha t^2/2$ افزایش می یابد. α مقدار ثابتی است.

(الف): مسیر حرکت را رسم کنید و مقدارهای تقریبی سرعت و شتاب را در چند نقطه نشان دهید.

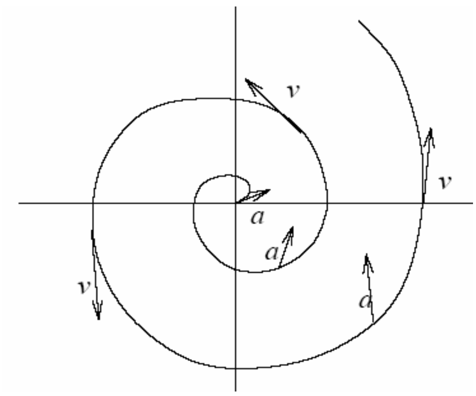
(ب): نشان دهید که به ازای $\theta=1/\sqrt{2}\ \text{rad}$ شتاب شعاعی صفر است.

(پ): در چه زاویه‌ای اندازه‌های شتاب‌های شعاعی و مماسی با هم برابرند؟

حل: **(الف)**: مسیر ذره عبارت است از $r=\theta/\pi=\alpha t^2/2\pi$. پس، $\dot{r}=\alpha t/\pi$ و $\dot{\theta}=\alpha t$. پس داریم $\ddot{r}=\alpha/\pi$ و $\ddot{\theta}=\alpha$. در نتیجه:

$$\mathbf{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}=\left(\frac{\alpha}{\pi}-\frac{\alpha^3t^4}{2\pi}\right)\hat{\mathbf{r}}+\left(\frac{5}{2}\frac{\alpha^2t^2}{\pi}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{۲-۸۰}$$

که در شکل (۳۳-۲) نشان داده شده اند .



شکل ۳۳-۲

(ب): شتاب شعاعی عبارت است از $a_r=\dfrac{\alpha}{\pi}-\dfrac{\alpha^3t^4}{2\pi}$ که در زمان $t^4=2/\alpha^2$ یا $t^2=\sqrt{2}/\alpha$ صفر می شود؛ چون $\theta=\alpha t^2/2$ است. پس به ازای $\theta=1/\sqrt{2}\,\text{rad}$ شتاب شعاعی a_r صفر می شود.

(پ): به ازای $|5\theta|=|1-2\theta^2|$ داریم $a_r=a_\theta$ و یا

$$1-2\theta^2\mp5\theta=0\quad\Rightarrow\quad\theta_{1,2}=\frac{\mp5+\sqrt{33}}{4} \tag{۲-۸۱}$$

پس دو پاسخ داریم $\theta_1=0{,}19=11^\circ$ و $\theta_2=2{,}69=154^\circ$.

۱۳-۲ شیوه‌های تقریب ریاضی

© Firooz Arash, 2003-2010

در حل برخی از مسئله‌های فیزیک، هرازگاهی، رابطه‌های ریاضی شکل‌های ناهنجاری پیدا می‌کنند و به نظر می‌رسد که خود فیزیک در لابلای آنها گم شده است. در چنین وضعیت‌هایی بهتر است از تقریب‌های ساده‌ی ریاضی استفاده کرد و برای رابطه‌های ریاضی مسئله‌ی فیزیکی پاسخ های تقریبی، اما قابل دسترس یافت. این کار در اطمینان یافتن به درستی حل مسئله یاری می‌کند. یک نمونه از این دست را هنگامی که می‌خواستیم سرعت را در مختصات قطبی (شیوه ۳) حساب کنیم، دیدیم. در آنجا به جای سینوس و کسینوس از مقدارهای تقریبی استفاده کردیم. این شیوه‌ها بر پایه بسط توابع استوار است. در این بخش به برخی شیوه‌های بسط سری توابع خواهیم پرداخت. با سود بردن از تقریب‌های سری؛ رابطه‌های پیچیده‌تر را می‌توان ساده‌تر کرد و رفتار بنیادی فیزیکی را به دست آورد.

۱- **بسط دو جمله‌ای ها** برای $-1 < x < 1$ داریم:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k-1)}{k!}x^k + \cdots \tag{2-82}$$

این بسط سری در بازه‌ی $-1 < x < 1$ برای هر مقدار n صادق است. اگر n عدد صحیح باشد، تعداد جمله‌ها محدود و آخرین جمله‌ی آن x^n می‌شود. این سری دقیق است. تقریب هنگامی وارد می‌شود که ما در جایی آن را قطع کنیم. فرض کنید $n = 1/2$ باشد آنگاه رابطه‌ی بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots \qquad ; \qquad -1 < x < 1 \tag{2-83}$$

چون $|x|$کوچکتر از یک است، هر چه توان x بیشتر باشد آن جمله نسبت به جمله‌ی پیشین کوچکتر‌می‌شود و بسته به اینکه تا چه دقتی $\sqrt{1+x}$ را می‌خواهیم حساب کنیم، در جایی از بقیه‌ی جمله‌ها می‌توان چشم پوشی کرد. اگر به دقت تا مرتبه‌ی x^2 نیاز داشته باشیم آنگاه $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ کافی خواهد بود. خطای این تقریب از مرتبه‌ی x^3 است. یعنی اگر $x = 0{,}2$ باشد آنگاه $(1+0{,}2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(0{,}2) - \frac{1}{8}(0{,}2)^2 = 1{,}095$ حال آنکه مقدار دقیق ۱٫۰۹۵٤٤۵۱ است. پاسخ تقریبی ما تا مرتبه‌ی هزارم درست است و خطای پاسخ از مرتبه‌ی ده هزارم است. نخستین جمله‌ی بزرگ نادیده انگاشته شده در این مثال $\frac{1}{16}x^3 = \frac{1}{16}(0{,}2)^3 = 0{,}0005$ است که از مرتبه‌ی ده هزارم است.

اگر $|x| > 1$ باشد هنوز می‌توان از سری (۲-۸۳) استفاده کرد. کافی است آن را بازنویسی کنیم:

$$(1+x)^n = \left[x\left(\frac{1}{x} + 1\right)\right]^n = x^n\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \tag{2-84}$$

حال در عبارت $(1+x)^n$، می‌دانیم که $-1 < \frac{1}{x} < 1$ است و شرایط بسط سری (۲-۸۳) را دارد. پس اگر در رابطه‌ی (۲-۸۳)، x را با $1/x$جایگزین کنیم، آنگاه خواهیم داشت

$$(1+x)^n = x^n\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n = x^n\left[1 + n\frac{1}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots\right] \tag{2-85}$$

مثال ۱۶-۲ به بسط سری عبارت‌های زیر توجه کنید.

حل:

© Firooz Arash, 2003-2010

$$(۱):\quad \frac{۱}{۱+x}=(۱+x)^{-۱}=۱-x+x^{۲}-x^{۳}+\cdots \qquad ; \qquad -۱\langle x\langle ۱ \tag{۲-۸۶}$$

$$(۲):\quad \frac{۱}{۱-x}=(۱-x)^{-۱}=۱+x+x^{۲}+x^{۳}+\cdots \qquad ; \qquad -۱\langle x\langle ۱ \tag{۲-۸۷}$$

$$(۳):\quad (۱,۰۰۱)^{\frac{۱}{۳}}=(۱+۰,۰۰۱)^{\frac{۱}{۳}}=۱+\frac{۱}{۳}(۰,۰۰۱)+\frac{(\frac{۱}{۳})(\frac{۱}{۳}-۱)}{۲!}(۰,۰۰۱)^{۲}+\cdots=۱+۰,۰۰۰۳۳۳-۰,۰۰۰۰۰۰۱+\cdots \tag{۲-۸۸}$$

$$\begin{aligned}(٤):\quad &(۱۰۰۱)^{\frac{۱}{۳}}=(۱۰۰۰+۱)^{\frac{۱}{۳}}\simeq(۱۰۰۰)^{\frac{۱}{۳}}(۱+۰.۰۰۱)^{\frac{۱}{۳}}\\ &=۱۰\left[۱+۰,۰۰۱(\frac{۱}{۳})+\cdots\right]\simeq ۱۰(۱,۰۰۰۳)=۱۰,۰۰۳\end{aligned} \tag{۲-۸۹}$$

$$(٥):\qquad ۲-\frac{۱}{\sqrt{۱+x}}-\frac{۱}{\sqrt{۱-x}}=$$

$$۲-(۱+x)^{-\frac{۱}{۲}}-(۱-x)^{-\frac{۱}{۲}}=۲-(۱-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۸}x^{۲}+\cdots-(۱+\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۸}x^{۲}+\cdots)=-\frac{۳}{٤}x^{۲}+Q(x^{۳}) \tag{۲-۹۰}$$

۲- **بسط تیلور** همانند بسط دو جمله‌ای، هر تابعی مانند $f(x)$ را می‌توان به صورت یک سری نمایی از x نوشت:

$$f(x)=a_{\circ}+a_{۱}x+a_{۲}x+a_{۳}x^{۳}+\cdots=\sum_{k=۰}^{\infty}a_{k}x^{k} \tag{۲-۹۱}$$

به ازای $x=۰$ باید داشته باشیم $f(۰)=a_{\circ}$. فرض کنید تابع $f(x)$ مشتق پذیر است آنگاه :

$$\frac{df}{dx}=f'(x)=a_{۱}+۲a_{۲}x+۳a_{۳}x^{۲}+\cdots \tag{۲-۹۲}$$

اگر این مشتق را در $x=۰$ حساب کنیم خواهیم داشت:

$$f'(x)|_{x=۰}=a_{۱} \tag{۲-۹۳}$$

و چنانچه این کار را ادامه دهیم:

$$f''=\frac{d^{۲}f}{dx^{۲}}=۲a_{۲}+٦a_{۳}x+\cdots \tag{۲-۹٤}$$

که به ازای $x=۰$ برابر است با

$$f''(x)|_{x=۰}=۲a_{۲} \quad\Rightarrow\quad a_{۲}=\frac{۱}{۲}f''(۰)=\frac{۱}{۲\times۱}f''(۰)=\frac{۱}{۲!}f''(۰) \tag{۲-۹٥}$$

می‌بینیم که ضرایب ناشناخته a_k در رابطه‌ی (۹۱-۲) به گونه‌ای به مشتق‌های تابع $f(x)$ در $x=۰$ مربوط اند: a_0 به مشتق مرتبه‌ی صفرم (یعنی خود تابع در $x=۰$)، $a_۱$ به مشتق اول، $a_۲$ به مشتق دوم و ... پس

$$a_{k}=\frac{۱}{k!}\overset{(k)}{f}(x)|_{x=۰} \tag{۲-۹٦}$$

که در آن $\overset{(k)}{f}(x)$ مشتق kام تابع است. بسط (۸۳-۲) بسط تیلور نام دارد و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=f(۰)+f'(۰)x+\frac{۱}{۲!}f''(۰)x^{۲}+\frac{۱}{۳!}f'''(۰)x^{۳}+\cdots \tag{۲-۹۷}$$

© Firooz Arash, 2003-2010

اگر این سری همگرا باشد، آنگاه برای xهای کوچک (xهای نزدیک صفر) تقریب خوبی برای تابع $f(x)$ به دست می‌دهد. تعمیم آن به قرار زیر است:

$$f(x+a)=f(a)+f'(a)x+\frac{۱}{۲!}f''(a)x^{۲}+\frac{۱}{۳!}f'''(x)x^{۳}+\cdots \qquad (۲-۹۸)$$

که رفتار تابع را در همسایگی نقطه‌ی $x=a$ به دست می‌دهد. این بسط هنگامی درست است که سری همگرا باشد. شکل دیگر آن عبارتست از:

$$f(t)=f(a)+f'(a)(t-a)+f''(a)\frac{(t-a)^{۲}}{۲!}+\cdots \qquad (۲-۹۹)$$

(الف) بسط توابع مثلثاتی. تابع $f(x)=\sin x$ را در نظر بگیرید. بسط آن در $x=۰$ عبارت است از:

$$f(۰)=\sin(۰)=۰ \quad , \; f'(۰)=\cos(۰)=۱ \; , \; f''(۰)=-\sin(۰)=۰ \qquad (۲-۱۰۰)$$

$$f'''(۰)=-\cos(۰)=-۱ \quad , \; \overset{(v)}{f}(۰)=\sin(۰)=۰ \quad ,\cdots$$

پس:

$$\sin x=۰+۱x-\frac{۱}{۲!}(۰)x^{۲}+\frac{۱}{۳!}(-۱)x^{۳}+\frac{۱}{۴!}(۰)x^{۴}+\cdots=x-\frac{۱}{۳!}x^{۳}+\frac{۱}{۵!}x^{۵}-\frac{۱}{۷!}x^{۷}+\cdots \qquad (۲-۱۰۱)$$

همچنین برای $f(x)\cos x$ داریم:

$$\cos x=۱-\frac{۱}{۲!}x^{۲}+\frac{۱}{۴!}x^{۴}-\frac{۱}{۶!}x^{۶}+\cdots \qquad (۲-۱۰۲)$$

بسط این دو تابع برای هر مقدار x همگراست اما برای مقادیر کوچک x به ویژه سودمندند. تا مرتبه‌ی توان دوم x، $O(x^{۲})$ ، داریم: $\cos x=۱-\left(x^{۲}/۲\right) \; , \; \sin x=x$

(ب) بسط دو جمله‌ای : رابطه (۲-۸۲) را می‌توان از بسط تیلور به دست آورد. برای $f(x)=(1+x)^{n}$ داریم:

$$f(۰)=۱\;,\; f'(x)=n(۱+x)^{n-۱}\big|_{x=۰}=n \;,\; f''(x)=n(n-۱)(۱+x)^{n-۲}\big|_{x=۰}=n(n-۱)$$

$$\overset{(k)}{f}(x)=n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k-۱)(۱+x)^{n-k}\big|_{x=۰}=n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k+۱) \qquad (۲-۱۰۳)$$

پس:

$$(۱+x)^{n}=۱+nx+\frac{۱}{۲!}n(n-۱)x^{۲}+\cdots+\frac{n(n-۱)....(n-k+۱)}{k!}x^{k}+\cdots \qquad (۲-۱۰۴)$$

(پ) بسط تابع نمایی e^x : اگر $f(x)=e^{x}$ باشد، بنا به تعریف $f'(x)=f(x)$. همچنین $\overset{(k)}{f}(x)=f(x)$ و چون $e^{۰}=۱$ است خواهیم داشت:

$$e^{x}=۱+x+\frac{۱}{۲!}x^{۲}+\frac{۱}{۳!}x^{۳}+\cdots \qquad (۲-۱۰۵)$$

این سری برای هر مقدار x همگراست.

(ت) بسط تابع لگاریتمی $\ell n(1+x)$: چون $\ell n x$ در $x=۰$ تعریف نشده است نمی‌توان آن را بر حسب توان‌های x بسط داد. بنابراین تابع $f(x)=\ell n(۱+x)$ را در نظر می‌گیریم. مشتق های این تابع به قرار زیر است:

© Firooz Arash, 2003-2010

$$f'(x)=\frac{۱}{۱+x}\quad , f''(x)=-\frac{۱}{(۱+x)^{۲}}\quad , f'''(x)=\frac{۲}{(۱+x)^{۳}}$$
$$\overset{(٤)}{f}(x)=-\frac{۳!}{(۱+x)^{٤}}\quad , \quad \overset{(٥)}{f}(x)=-\frac{٤!}{(۱+x)^{٥}}\quad , \quad \cdots \tag{۲-۱۰٦}$$

بنابراین برای $k\geq ۱$ داریم:

$$\overset{(k)}{f}(x)=(-۱)^{k+۱}\quad \frac{(k-۱)!}{(۱+x)^{k}}\quad , \quad \overset{(k)}{f}(۰)=(-۱)^{k+۱}\left(k-۱\right)!\quad , \quad \frac{\overset{(k)}{f}(۰)}{k!}=\frac{(-۱)^{k+۱}}{k} \tag{۲-۱۰۷}$$

چون $f\left(۰\right)=۰$ است، بسط تیلور $ln(۱+x)$ در بازه‌ی $-۱< x <۱$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\ell n(۱+x)=x-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}-\cdots=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{k+۱}}{k}x^{k} \tag{۲-۱۰۸}$$

یک نتیجه‌ی سودمند بسط تیلور این است که اگر سری همگرا باشد آنگاه جایگزین بسیار خوبی برای خود تابع می‌شود و در نتیجه می‌توان از سری مشتق یا انتگرال بگیریم. برای نمونه:

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\frac{d}{dx}(x-\frac{۱}{۳!}x^{۳}+\frac{۱}{٥!}x^{٥}+\cdots)\ =۱-\frac{۱}{۲!}x^{۲}+\frac{۱}{٤!}x^{٤}+\cdots=\cos x \tag{۲-۱۰۹}$$

افزون بر این سری تیلور برای ضرب دو تابع، همانا حاصلضرب سری‌های متناظر با آنهاست:

$$\begin{aligned}\sin x\ \cos x &=(x-\frac{۱}{۳!}x^{۳}+\frac{۱}{٥!}x^{٥}+\cdots)(۱-\frac{۱}{۲!}x^{۲}+\frac{۱}{٤!}x^{٤}+\cdots)\\ &=x-(\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۲!})x^{۳}+(\frac{۱}{٤!}+\frac{۱}{۳!۲!}+\frac{۱}{٥!})x^{٥}+\cdots\\ &=x-\frac{٤x^{۳}}{۳!}+\frac{۱٦x^{٥}}{٥!}+\cdots\\ &=\frac{۱}{۲}\left[(۲x)-\frac{(۲x)^{۳}}{۳!}+\frac{(۲x)^{٥}}{٥!}+\ ....\right]=\frac{۱}{۲}\left[\sin(۲x)\right].\end{aligned} \tag{۲-۱۱۰}$$

و سرانجام اینکه در محاسبه‌ی انتگرال ها، بسط سری تیلور گاهی سودمند می‌شود. مثال زیر این نکته را روشن می‌کند.

مثال ۱۷-۲ پاسخ انتگرال $\int_{۱}^{۱,۱}\frac{e^{z}}{z}dz$ را تخمین بزنید:

حل: فرض کنید $z=۱+x$ باشد آنگاه:

$$\int_{۱}^{۱,۱}\frac{e^{z}}{z}dz=\int_{۰}^{۰,۱}\frac{e^{(۱+x)}}{۱+x}dx=(e)\int_{۰}^{۰,۱}\frac{e^{x}}{۱+x}dx\cong(e)\int_{۰}^{۰,۱}\frac{(۱+x)}{(۱+x)}dx=ex\ |_{۰}^{۰,۱}\cong ۰,۱e \tag{۲-۱۱۱}$$

این تخمین با تقریب $e^{x}\cong ۱+x$ انجام شد یعنی تنها دو جمله‌ی اول بسط e^{x} را در نظر گرفتیم؛ با این حال تخمین ما بهتر از یک در صد است.

© Firooz Arash, 2003-2010

مسئله‌ها:

۲-۱ با استفاده از تعریف‌های (۲-۲) و (۲-٦) و نمودارهای مناسب نشان دهید که ضرب برداری و ضرب داخلی بخش پذیرند.

۲-۲ آیا ضرب برداری شرکت پذیر است؟ اگر پاسخ آری است اثبات کنید و اگر نیست، یک مثال نقیض بزنید.

۲-۳ قانون $BAC-CAB$ را اثبات کنید: هر دو طرف این رابطه را بر حسب مؤلفه‌ها بنویسید.

نشان دهید که $[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]+[\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})]+[\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})]=0$ تحت چه شرایطی $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ ؟

۲-۴ گرادیان توابع زیر را پیدا کنید.

$$(a)\quad f(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$$

$$(b)\quad f(x,y,z)=x^{۲}y^{۳}z^{٤}$$

$$(c)\quad f(x,y,z)=e^{x}\sin(y)ln(z)$$

۲-۵ ارتفاع کوهی با تابع زیر داده شده است (y برحسب کیلومتر، فاصله به سوی شمال است و (x برحسب متر رو به شرق) $h(x,y)=۱۰(۲xy-۳x^{۲}-٤y^{۲}-۱۸x+۲۸y+۱۲)$

(الف): قله‌ی کوه در کجاست؟

(ب): ارتفاع کوه را پیدا کنید؟

۲-۶ اگر $\mathbf{r}$ برداری از نقطه‌ی (x_0,y_0,z_0) به نقطه (x,y,z) باشد و طول آن برابر r باشد نشان دهید:

الف: $\nabla(\mathbf{r}^{۲})=۲\mathbf{r}$

ب: $\nabla(\frac{۱}{r})=-\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^{۲}}$ ($\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه در راستای $\mathbf{r}$ است)

۲-۷ کرل توابع برداری زیر را حساب کنید.

الف: $\mathbf{F}_{۱}=x^{۲}\,\hat{\mathbf{i}}+۳xz^{۲}\,\hat{\mathbf{j}}-۲xz\,\hat{\mathbf{k}}$

ب: $\mathbf{F}_{۲}=xy\,\hat{\mathbf{i}}+۲yz\,\hat{\mathbf{j}}+۳zx\,\hat{\mathbf{k}}$

پ: $\mathbf{F}_3=y^{۲}\,\hat{\mathbf{i}}+(۲xy+z^{۲})\,\hat{\mathbf{j}}+۲yz\,\hat{\mathbf{k}}$

۲=۸ فرض کنید بردارهای یکه $\hat{\mathbf{a}}$ و $\hat{\mathbf{b}}$ در صفحه‌ی xy قرار دارند. بردار $\hat{\mathbf{a}}$ با محور x ها زاویه‌ی θ و بردار $\hat{\mathbf{b}}$ با محور x ها زاویه‌ی φ می‌سازد. با استفاده از جبر بردارها ثابت کنید $\cos(\theta-\varphi)=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi$

۲-۹ شتاب گرانش را می‌توان با آزمایش زیر اندازه‌گیری کرد: جسمی را به طور قائم به هوا پرتاب کنید. دو نقطه A و B را در راستای حرکت جسم به فاصله‌ی h از هم در نظر بگیرید. اگر T_A بازه‌ی زمانی باشدکه جسم از Aگذشته و دوباره به A بازگشته است و T_B بازه‌ی زمانی باشد که جسم در هنگام رفت و برگشت از Bگذشته است، آنگاه با اندازه‌گیری T_A و T_B می‌توان مقدار g را بدست آورد. نشان دهید که مقدار g برابر است با $g=\frac{۸h}{T_A^{۲}-T_B^{۲}}$.

۲-۱۰ ذره‌ای با سرعت شعاعی $\dot{r}$ =٤ m/s حرکت می‌کند. اندازه سرعت زاویه‌ای آن ثابت و برابر است با $\dot{\theta}=۲$ rad/s. هنگامیکه ذره در سه متری از مبداء مختصات باشد (الف) اندازه سرعت، (ب) اندازه شتاب آن را بیابید.