فصل ۱۲

چارچوبهای شتاب دار و حرکت های مقید

تاکنون همواره از چارچوب‌های لخت برای حل مسئله‌های مکانیک استفاده کردیم. در این چارچوب‌ها قانون‌های حرکت ساده‌ترین شکل خود را دارند. با وجود این ، مسئله‌هایی وجود دارند که حل آنها در چارچوب‌های غیر لخت ساده‌ترند. برای نمونه، وقتی حرکت ذره‌ای را در نزدیکی‌های سطح زمین بررسی می‌کنیم بهتر است از چارچوبی استفاده کنیم که به زمین وصل است و با آن می‌چرخد. نمونه‌های دیگر عبارت اند از آسانسور، صفحه‌ی چرخان و غیره. آیا راهی وجود دارد که قانون های نیوتون را چنان تغییر دهیم تا در چارچوب‌های غیر لخت هم برقرار باشند یا این که در این چارچوب‌ها باید $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ را به کلی فراموش کرد؟ در این فصل معادله‌های حرکت را نسبت به چنین چارچوب‌هایی خواهیم یافت و برخی کاربردهای آن را بررسی خواهیم کرد.

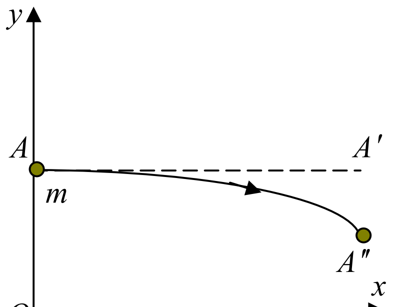
نخست، حرکت ذره‌ای را نسبت به چارچوب دلخواهی در نظر خواهیم گرفت که در حال حرکت است. توصیف حرکت نسبت به چارچوب متحرک، در مسئله‌هائی که شامل سطوح قیدی یا خم‌های شتاب دار اند سودمند است. دسته دیگر مسئله‌ها، توصیف حرکت آزاد ذره در دستگاه مختصاتی است که شتاب دارد. نمونه‌ای از مسئله‌های نوع نخست، حرکت ذره‌ای است که مقید به لغزیدن روی سطحی است که خود سطح شتاب دارد. نمونه‌ی گونه‌ی دوم، اثرهای ثانوی است که به نظریه‌ی ساده افزوده می‌شود . مانند حرکت پرتابه هنگامی که چرخش زمین را نیز در نظر بگیریم.

۱-۱۲ حرکت ذره در چارچوب شتابدار

سرشت مسئله چیست؟ خیلی وقت‌ها مجبوریم معادله‌های حرکت رادر مختصات غیر لخت بنویسیم. برای مثال، جسمی را در نظر بگیرید که مقید به حرکت روی سطح هموار میز است و میز به زمین چرخنده وصل است. در شکل (۱-۱۲) محورهای OX و OY را *سطح* میز فرض کنید. ذره در زمان $t_\circ$ در نقطه‌ی A روی میز در حال سکون است. نیروی ثابت F را موازی با محور xها به جسم وارد کنید (مثلا با دست جسم را هل دهید). بر پایه‌ی آموخته‌های خود شاید انتظار داریم که جسم روی خط راست AA' حرکت کند؛ چون معادله‌ی حرکت

$$m\ddot{x}=F \qquad (۱-۱۲)$$

این را می‌گوید. اما واقعیت این نیست. مسیر واقعی جسم خم AA'' است (اگر تحت اثر نیروی F جسم سرعت چشمگیری داشته باشد این را به آسانی می‌توان دید.) جسم اندکی به سمت راست مسیری که از رابط (۱-۱۲) انتظار داریم انحراف پیدا



شکل ۱-۱۲

می‌کند. تازه مسیر AA'' در نیمکره‌ی شمالی رخ می‌دهد. در نیمکره‌ی جنوبی این انحراف به سمت چپ خواهد بود. دشواری در این است که سامانه‌ی مختصات انتخابی (زمین) سامانه‌ی شتاب‌دار است. در زیر خواهیم دید که معادله‌های حرکت یک ذره نسبت به چارچوب شتاب‌دار شامل جمله‌هایی است که در اثر شتاب دستگاه مختصات نمایان می‌شوند. به بیان دیگر، اگر برخی

نیروهای *پنداری* را شناسایی کنیم هنوز هم می توانیم از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ در چارچوب‌های شتاب‌دار استفاده کنیم. نیروهای *پنداری*، نیروهایی هستند که ناظر نشسته در چارچوب شتاب‌دار *گمان* می‌کند که وجود دارند. اگر این ناظر نیروهای پنداری را هم در نظر بگیرد و در چارچوب خودش از $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ استفاده کند، آنگاه برای شتاب $\mathbf{a}$ که در چارچوب وی اندازه‌گیری می شود، پاسخ درست به دست می آورد.
برای این که موضوع این فصل را بتوانیم به طور کیفی بپرورانیم باید بدانیم که مختصات (و مشتق‌های آن) چارچوب شتاب‌دار چگونه به مختصات و مشتق آنها در چارچوب لخت مربوط می‌شوند. پیش از این که خود را درگیر این ریاضیات بکنیم بهتر است به مثال ساده‌ای بپردازیم که اندیشه‌ی نیروی پنداری را به نمایش می گذارد.

مثال ۱-۱۲ (قطار): فرض کنید در قطاری سرپا ایستاده‌اید و قطار با شتاب a به سمت راست شتابیده می‌شود. اگر بخواهید در همان نقطه در درون قطار باقی بمانید باید نیروی اصطکاکی به اندازه‌ی $F_f=ma$ و به سوی راست بین کف قطار و کف پاهای شما وجود داشته باشد. کسی که در چارچوبی لخت در روی زمین است وضعیت شما را این گونه توصیف خواهد کرد:
"نیروی اصطکاک $F_f=ma$ سبب می شود که شتاب شما a باشد." توصیف شما در چارچوب قطار از وضعیت چگونه خواهد بود؟ (فرض کنید قطار پنجره ندارد و شما فقط درون قطار را می بینید.) همانگونه که در زیر نشان خواهیم داد، شما یک نیروی پنداری انتقالی، $F_{\rm trans}=-ma$، به سمت چپ احساس خواهید کرد. بنابراین، توصیف شما از وضعیت، این گونه خواهد بود: "شتاب من صفر است. پس در چارچوب من- چارچوب قطار- نیروی اصطکاک $F_f=ma$ که به سمت راست است نیروی رازآمیز $F_{trans}=-ma$ را که به سوی چپ است باید دقیقا حذف کند و در نتیجه در چارچوب من شتاب من صفر است". البته اگر کف قطار اصطکاک نداشته باشد و نیرویی به کف پاهای شما وارد نشود خواهید گفت که نیروی خالص $F_{\rm trans}=-ma$ به سمت چپ به شما وارد می‌شود است و بنابراین، با شتاب a نسبت به چارچوب خودتان (قطار) به سمت چپ شتابیده می‌شوید. به بیان دیگر، نسبت به چارچوب لخت در روی زمین بی حرکت باقی خواهید ماند که البته برای کسی که روی زمین ایستاده است کاملا بدیهی است. اگر اصطکاک کف قطار غیر صفر اما به اندازه ای نباشد که از عهده‌ی حذف همه‌ی نیرو $F_{\rm trans}=-ma$ برآید، آنگاه شما به سوی انتهای قطار رانده خواهید شد مگر این که با دست به جایی بچسبید تا بقیه‌ی $F_{\rm trans}$ را هم حذف کنید.

نخست ساده‌ترین حالت شتاب انتقالی (خطی) رابررسی می‌کنیم وسپس به حالت دستگاه مختصات چرخان می‌پردازیم.

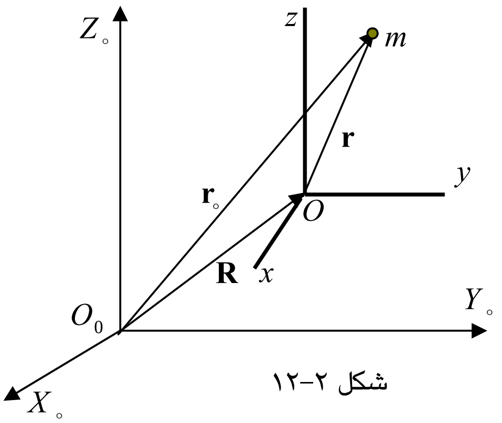
۲- ۱۲ چارچوب‌های شتاب‌دار و درستی قانون‌های نیوتون

در شکل (۲-۱۲) فرض کنید $O_\circ X_\circ Y_\circ Z_\circ$ سامانه‌ای است که در آن قانون‌های نیوتون درست‌اند (چارچوب لخت). بنا بر این، در این چارچوب رابطه‌ی

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\mathbf{r}}\right)=\mathbf{F} \tag{۱۲-۲}$$

توصیف دقیقی از حرکت ذره‌ای را فراهم می‌کند که به آن نیروی F وارد می‌شود. $Oxyz$ چارچوب دیگری است که نسبت به

اولی حرکت می‌کند. برای سادگی فرض می‌کنیم ox همواره موازی $O_\circ X_\circ$ و Oy موازی $O_\circ Y_\circ$ و Oz موازی $O_\circ Z_\circ$ باشند.



شکل ۲-۱۲

مکان O نسبت به $O_\circ$ با بردار $\boldsymbol{R}$ نشان داده شده است. یعنی از دید ناظر نشسته در مبداء $O_\circ$، مختصات $\boldsymbol{R}$ عبارتند از $X_\circ$ و $Y_\circ$ و $Z_\circ$. چون نقطه‌ی O نسبت به $O_\circ$ حرکت می‌کند، مؤلفه‌های $\boldsymbol{R}$ تغییر می‌کنند. بردار مکان ذره‌ای به جرم m در چارچوب $O_\circ$ با بردار $\mathbf{r}_\circ$ توصیف می‌شود. شکل (۲-۱۲) را ببینید. همین مکان در چارچوب O با بردار $\mathbf{r}$ داده شده است.

مؤلفه‌های معادله‌ی حرکت ذره در چارچوب $O_\circ$ عبارتند از:

$$m\ddot{x}_\circ = F_1 \quad \text{و} \quad m\ddot{y}_\circ = F_2 \quad \text{و} \quad m\ddot{z}_\circ = F_3 \qquad (۱۲-۳)$$

که $\ddot{x}$ و $\ddot{y}$ و $\ddot{z}$ مؤلفه‌های $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$ در مختصات $O_\circ$ است و $F_۱$ و $F_۲$ و $F_۳$ مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ در مختصات $O_\circ$ اند. در اینجا فرض می‌کنیم که $\mathbf{F}$ تنها تابعی از مکان است. اینک مؤلفه‌های $\mathbf{r}$ را در مختصات O در نظر بگیرید که عبارتند از: x و y و z. چون این مؤلفه‌های $\mathbf{r}$ با $X_\circ$ و $Y_\circ$ و $Z_\circ$ موازی اند، پس می‌توان نوشت:

$$z_\circ = Z_\circ + z \quad \text{و} \quad y_\circ = Y_\circ + y \quad ، \quad x_\circ = X_\circ + x \qquad (۱۲-٤)$$

و از اینجا داریم:

$$\ddot{z}_\circ = \ddot{Z} + \ddot{z} \quad \text{و} \quad \ddot{y}_\circ = \ddot{Y} + \ddot{y} \quad ، \quad \ddot{x}_\circ = \ddot{X} + \ddot{x} \qquad (۱۲-٥)$$

که با جایگزینی در رابطه‌ی (۳-۱۲) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_\circ &= m(\ddot{x} + \ddot{X}_\circ) = F_۱ \\ m\ddot{y}_\circ &= m(\ddot{y} + \ddot{Y}_\circ) = F_۲ \\ m\ddot{z}_\circ &= m(\ddot{z} + \ddot{Z}_\circ) = F_۳ \end{aligned} \qquad (۱۲-٦)$$

پس:

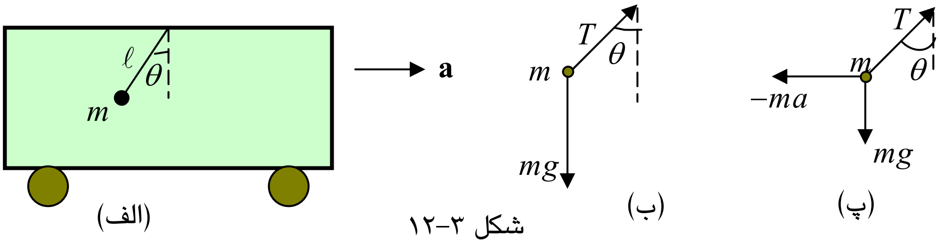
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_۱ - m\ddot{X}_\circ \\ m\ddot{y} &= F_۲ - m\ddot{Y}_\circ \\ m\ddot{z} &= F_۳ - m\ddot{Z}_\circ \end{aligned} \qquad (۱۲-۷)$$

رابطه‌ی (۷-۱۲) حرکت ذره را در چارچوب $Oxyz$ توصیف می کند که تحت اثر نیروی $\mathbf{F}$ با مؤلفه‌های $F_۱$ و $F_۲$ و $F_۳$ است و با معادله‌های حرکت ساده‌ی (۳-۱۲) فرق دارد. در سمت راست رابطه‌ی (۷-۱۲) جمله‌های اضافی $-m\ddot{X}_\circ$ و $-m\ddot{Y}_\circ$ و $-m\ddot{Z}_\circ$ نمایان شده‌اند که در رابطه‌ی (۳-۱۲) وجود ندارند. این جمله‌ها به خاطر شتاب‌دار بودن $Oxyz$ نسبت به $O_\circ X_\circ Y_\circ Z_\circ$ ظاهر شده‌اند. این جمله‌های اضافی وقتی صفرند که: (۱) O نسبت به $O_\circ$ با سرعت ثابت حرکت بکند (یعنی $dX_\circ/dt = \circ$ و غیره). (۲) اگر O نسبت $O_\circ$ در حال سکون باشد. در هر دو حالت مشتق دوم زمانی $\mathbf{R}$ صفر می‌شود و رابطه‌ی (۷-۱۲) به رابطه‌ی (۳-۱۲) کاهش می‌یابد. در بخش بعدی خواهیم دید که اگر $Oxyz$ نسبت به $O_\circ X_\circ Y_\circ Z_\circ$ می‌چرخید باز هم جمله‌های اضافی در معادله‌های حرکت نمایان می‌شدند.

سامانه‌ی $O_\circ X_\circ Y_\circ Z_\circ$ که در آن قانون‌های نیوتون برقرار است *سامانه‌ی لخت* نام دارند. $m\ddot{X}_\circ$ و $m\ddot{Y}_\circ$ و $m\ddot{Z}_\circ$ بعد نیرو

دارند. آن ها را *نیروهای پنداری* می‌نامند. به ذره‌ی m تنها یک نیرو $\mathbf{F}$ وارد می‌شود. نیروهای پنداری نتیجه‌ی شتاب‌دار بودن چارچوب مرجع است. با وارد کردن این نیروهای پنداری در واقع از سامانه‌ی مختصات شتاب دار چارچوبی هم ارز با چارچوب لخت می‌سازیم که بتوانیم در آن قانون‌های نیوتون را به کار ببریم.

مثال ۲-۱۲ (آونگ در واگن شتاب‌دار) : آونگ ساده‌ای با جرم m و طول ℓ را در نظر بگیرید که از سقف واگنی آویخته است.



شکل ۳-۱۲

واگن با شتاب $\mathbf{a}$ به سمت راست در حرکت است، شکل (۳-۱۲). به ازای کدام زاویه ی θ آونگ نسبت به واگن (شتاب‌دار) در حالت سکون باقی خواهد ماند؟

حل: نخست مسأله را از دید ناظر لخت (ناظری که کنار خط آهن بر روی زمین قرار دارد) نگاه کنید. از دید ناظر لخت نیروهایی که به آونگ وارد می شوند عبارتند از نیروی کشش ریسمان، T، و نیروی وزن mg. بنابراین معادله‌ی حرکت آونگ برای ناظر لخت عبارت است از:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \qquad (۱۲\text{-}۸)$$

بر حسب مؤلفه‌های x, y خواهیم داشت:

$$\sum F_X = T\sin\theta = ma \quad , \quad \sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \qquad (۱۲\text{-}۹)$$

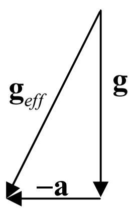
از حل همزمان این دو معادله، ناظر لخت نتیجه می‌گیرد که:

$$a = g\tan\theta \quad , \quad \theta = \tan^{-1}(a/g) \qquad (۱۲\text{-}۱۰)$$

اینک از نگاه ناظر غیر لخت (ناظری که در درون واگن نشسته و به آونگ می‌نگرد) مسئله را بررسی می‌کنیم. از دید این ناظر آونگ در حال سکون و شتاب آن صفر است. بنابراین، ناظر غیر لخت برای این که در حال سکون بودن آونگ را توصیف کند نتیجه می‌گیرد که نیروی *پنداری* $m\mathbf{a}$، همانند شکل (۳-۱۲ پ) به آونگ وارد می شود. او معادله‌ی حرکت آونگ را به صورت زیر می نویسد

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} - m\mathbf{a} = \mathbf{T} + m(\mathbf{g} - \mathbf{a}) = \mathbf{T} + m\mathbf{g}_{eff} \qquad (۱۲\text{-}۱۱)$$

که $\mathbf{g}_{eff} \equiv \mathbf{g} - \mathbf{a}$. می بینیم که معادله‌ی حرکت آونگ در چارچوب شتاب‌دار مانند معادله ی حرکت در چارچوب لخت است که به جای $\mathbf{g}$ اینک g_{eff} قرار دارد. روشن است که اگر آونگ بخواهد (در چارچوب قطار) در حال سکون بماند $\ddot{\mathbf{r}}$ باید صفر و $\mathbf{T} = -m\mathbf{g}_{eff}$ باشد. اگر نیروها را برحسب مؤلفه‌های x' , y' بنویسیم، آنگاه در مختصات غیر لخت خواهیم داشت:



شکل ٤-۱۲

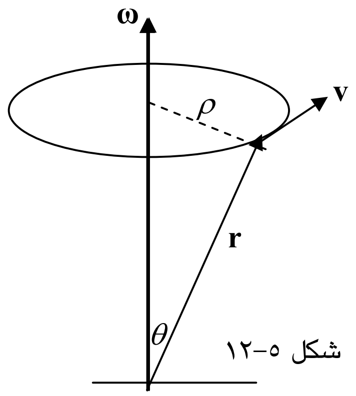
$$\sum F'_x = T\sin\theta - ma = 0 \quad , \quad \sum F'_y = T\cos\theta - mg = 0 \qquad (۱۲\text{-}۱۲)$$

از تقسیم این دو رابطه داریم:

$$\tan\theta = \frac{a}{g} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(a/g) \tag{۱۲-۱۳}$$

۱۲-۳ چارچوب‌های چرخان - سرعت زاویه‌ای، آهنگ تغییر بردار

جسمی را در نظر بگیرید که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور ثابتی می‌چرخد. فرض کنید $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکه در راستای محور چرخش است و جهت آن با قانون انگشت‌های دست راست تعریف می‌شود. بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ را برداری تعریف می‌کنیم که اندازه‌ی آن ω و جهت آن در جهت $\hat{\mathbf{n}}$ باشد: $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{n}}$. روشن است که سرعت زاویه‌ای همانند تکانه‌ی زاویه‌ای بردار محوری است. اگر مبدأ مختصات را روی محور چرخش در نظر بگیریم آنگاه سرعت یک نقطه در روی جسم به فاصله‌ی $\mathbf{r}$ از مبداءمختصات، (شکل ۵-۱۲)، عبارت ست از:



شکل ۵-۱۲

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{۱۲-۱۴}$$

برای اثبات این رابطه، توجه کنید که نقطه‌ی روی جسم، روی دایره‌ای به شعاع $\rho = r\sin\theta$ با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. بنابراین سرعت ذره برابر است با

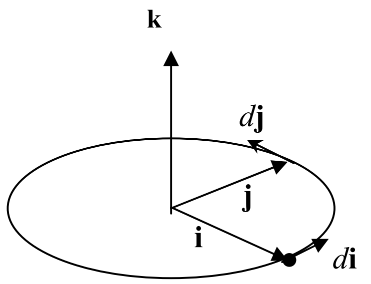
$$|\mathbf{v}| = \frac{2\pi\rho}{t} = \omega\rho = \omega r\sin\theta = |\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}| \tag{۱۲-۱۵}$$

افزون بر این، جهت $\mathbf{v}$ همانا جهت $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ است؛ یعنی $\mathbf{v}$ بر صفحه‌ی $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{r}$ عمود است و جهت آن به درستی با قانون انگشت های دست راست سازگار است. پس رابطه‌ی (۱۲-۱۴) هم از نظر اندازه و هم از نظر جهت درست است. لازم نیست که $\mathbf{r}$ بردار مکان نقطه‌ای روی جسم گردنده باشد. اگر $\boldsymbol{\alpha}$ هر بردار ثابتی در روی جسم گردنده باشد، آنگاه همواره داریم

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\alpha} \tag{۱۲-۱۶}$$

این رابطه‌ی بسیار مهمی است و به حرکت دایره‌ای حول یک محور مربوط است. به طور کلی، مشتق نسبت به زمان هر بردار $\boldsymbol{\alpha}(t)$ که در صفحه‌ی $x-y$ حول محور z حرکت دایره‌ای انجام دهد، با ضرب خارجی $d\boldsymbol{\alpha}(t)/dt = \omega\hat{\mathbf{z}}\times\boldsymbol{\alpha}(t)$ داده می‌شود به ویژه اگر $\hat{\mathbf{i}}$و $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ بردارهای یکه باشند که بر روی جسم گردنده استوارند، (شکل ۶-۱۲)، آنگاه داریم

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\mathbf{i}} \;,\quad \frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\mathbf{j}} \;,\quad \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\mathbf{k}} \tag{۱۲-۱۷}$$



شکل ۶-۱۲

برای نمونه، اگر $\boldsymbol{\omega}$ در جهت $\hat{\mathbf{k}}$ باشد، $\left(d\,\hat{\mathbf{i}}/dt\right) = \omega\hat{\mathbf{j}}$، $\left(d\,\hat{\mathbf{k}}/dt\right) = 0$ و $\left(d\,\hat{\mathbf{j}}/dt\right) = 0$ اند.
حال برداری مانند $\mathbf{a}$ را نسبت به محورهای چرخان $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ در نظر بگیرید. در این سامانه‌ی مختصات، مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ عبارتند از a_x و a_y و a_z و داریم

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}} \tag{۱۲-۱۸}$$

(اگر چه گفتار ما کاملاً کلی است، شاید اگر به $\mathbf{a}$ همانند بردار مکان یک نقطه نسبت به زمین بیندیشیم در روشن شدن موضوع یاری کند. فرض کنید زمین حول محور گذرنده از مرکز آن می‌چرخد. در روی سطح زمین دستگاه مختصاتی را در نظر بگیرید که بردارهای یکه‌ی آن $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ اند. در این مختصات بردار مکان نقطه‌ای را در روی زمین $\mathbf{a}$ بنامید. روشن است که چون زمین می‌چرخد، پس دستگاه مختصات $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ هم به همراه آن می‌چرخند و $\mathbf{a}$ در این دستگاه چرخان نوشته شده است).
حال باید دو گونه‌ی" آهنگ تغییر" را از یکدیگر متمایز کنیم. ما آهنگ تغییر بردار $\mathbf{a}$ را از دیدگاه ناظر لخت (مثلا ناظری که در مرکز زمین نشسته است)با $[\dot{\mathbf{a}}]_\circ$ نشان خواهیم داد و آهنگ تغییر بردار از دیدگاه ناظری که در دستگاه چرخان قرار دارد، با $\dot{\mathbf{a}}$ نشان خواهیم داد. اگر چه این دو ناظر در آهنگ تغییر بردار با هم اختلاف خواهند داشت، اما در آهنگ تغییر هر کمیت اسکالر با یکدیگر موافق خواهند بود. به ویژه، آنها در آهنگ تغییر مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ یعنی a_z, a_y, a_x با یکدیگر توافق خواهند داشت (توجه کنید که برای ناظر لخت a_z, a_y, a_x مؤلفه‌های بردار $\mathbf{a}$ در دستگاه مختصات لخت **نیستند**؛ با این حال، ناظری که روی سطح زمین قرار دارد (مختصات چرخان) و ناظری که بیرون از سطح زمین (یا در مرکز زمین ـ اگر فرض کنیم مرکز زمین نمی‌چرخد) قرار دارد همواره در عرض و طول جغرافیایی جسمی که روی سطح زمین حرکت می کند توافق خواهند داشت؛ اگر چه a_x، a_y و a_z مختصاتی نیستند که ناظر لخت برای توصیف مکان ذره به کار خواهد برد. پس می‌توان نوشت

$$[\dot{a}_z]_\circ = \dot{a}_z \quad \text{و} \quad [\dot{a}_y]_\circ = \dot{a}_y \quad ، \quad [\dot{a}_x]_\circ = \dot{a}_x \tag{۱۲-۱۹}$$

برای ناظر نشسته بر روی جسم چرخان آهنگ تغییر $\mathbf{a}$ کاملا با آهنگ تغییر مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ داده می شود و بنابراین

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{a}_x\hat{\mathbf{i}} + \dot{a}_y\hat{\mathbf{j}} + \dot{a}_z\hat{\mathbf{k}} \tag{۱۲-۲۰}$$

اما برای ناظر لخت، محورهای $\hat{\mathbf{i}}$ و $\hat{\mathbf{j}}$ و $\hat{\mathbf{k}}$ نیز با زمان می‌چرخند و بنا به رابطه‌ی (۱۲-۱۷) داریم:

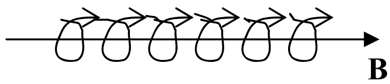
$$\begin{aligned}[\dot{\mathbf{a}}]_\circ &= \left(\frac{da_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{da_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{da_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}\right) + \left(a_x\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + a_y\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + a_z\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt}\right) \\ &= (\dot{a}_x\hat{\mathbf{i}} + \dot{a}_y\hat{\mathbf{j}} + \dot{a}_z\hat{\mathbf{k}}) + \boldsymbol{\omega}\times(a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}})\end{aligned} \tag{۱۲-۲۱}$$

پس داریم:

$$[\dot{\mathbf{a}}]_\circ = \dot{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a} \tag{۱۲-۲۲}$$

حال اگر این رابطه را برای بردار مکان $\mathbf{r}$ بکار ببریم، نتیجه روشن است، زیرا رابطه‌ی (۱۲-۲۲) برای $\mathbf{a}=\mathbf{r}$ می‌گوید که سرعت نسبت به ناظر لخت با جمع سرعت $\dot{\mathbf{r}}$ نسبت به ناظر چرخان و سرعت $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ ذره ای که در $\mathbf{r}$ با جسم می‌چرخد برابر است. این پیش گفتار را در بخش ۱۲-۷ به حالتی که مختصات چرخان، افزون بر چرخش، حرکت انتقالی هم نسبت به مختصات لخت داشته باشد، گسترش خواهیم داد. پیش از آن؛ یک مثال

مثال ۱۲-۳ ذره‌ای با بار الکتریکی q با سرعت $\mathbf{v}$ در یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ حرکت می‌کند. نیروی مغناطیسی وارد به این ذره $\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ است. معادله‌ی حرکت عبارت ست از: $m[\dot{\mathbf{v}}]_\circ = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ اما این رابطه همان شکل رابطه‌ی (۱۲-۱٦) را دارد که بجای ω مقدار $q\mathbf{B}/m$ نشسته است. بنابراین، بردار سرعت حول جهت $\mathbf{B}$ با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد و مسیر



شکل ۷-۱۲

حرکت ذره مارپیچی است که محور آن راستای میدان $\mathbf{B}$ است. اگر جهت $\mathbf{B}$ را جهت محور Z ها فرض کنیم آنگاه بردار $\mathbf{v}$ یک مؤلفه در راستای محور Z ها خواهد داشت و یک مؤلفه هم در صفحه‌ی XY که برابر شکل (۷-۱۲) با سرعت زاویه‌ای ω روی دایره‌ای می‌چرخد. اگر $\mathbf{v}$ از آغاز با $\mathbf{B}$موازی باشد، ذره با سرعت یکنواخت در راستای $\mathbf{B}$ حرکت خواهد کرد ($\mathbf{v}\times\mathbf{B}=0$). اگر $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{B}$عمود باشد، ذره روی دایره‌ای به شعاع $r=v/\omega=mv/qB$ حرکت می‌کند. این پدیده در شتاب دهنده‌ی ذرات ، *سیکلوترون*، به کار می‌رود. برای جلوگیری از گریز ذره؛ میدان مغناطیسی قوی به کار می‌برند که ذره را وادار به حرکت روی دایره بکند. کمیت $\omega_c\equiv qB/m$ بسامد سیکلوترون نام دارد.

۴-۱۲ شتاب؛ گرانش ظاهری

می‌توان رابطه‌ی (۲۲-۱۲) را دوباره به کار برد و رابطه‌ای میان شتاب ذره در سامانه‌ی لخت (شتاب مطلق) $[\ddot{\mathbf{r}}]_\circ$ و شتاب ذره در چارچوب چرخان به دست آورد. سرعت ذره در سامانه‌ی لخت عبارت است از

$$[\mathbf{v}]_\circ=[\dot{\mathbf{r}}]_\circ=\dot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \qquad (۲۳-۱۰)$$

اگر همین رابطه را برای آهنگ تغییر سرعت در چارچوب لخت به کار ببریم خواهیم داشت

$$[\ddot{\mathbf{r}}]_0=[\dot{\mathbf{v}}]_\circ=\left[\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]_\circ=\left[\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\right]_\circ=[\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}}]_\circ+[\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})]_\circ \qquad (۲٤-۱۲)$$

اگر $\boldsymbol{\omega}$ ثابت باشد، رابطه‌ی (۲٤-۱۲)به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned}[\ddot{\mathbf{r}}]_\circ&=\left[\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}}\right]+\boldsymbol{\omega}\times[\frac{d}{dt}\mathbf{r}]_\circ=\ddot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times(\dot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\\&=\ddot{\mathbf{r}}+2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\end{aligned} \qquad (۲۵-۱۲)$$

جمله‌ی آخر در سمت راست رابطه‌ی (۲۵-۱۲) شتاب *مرکزگرا* است. جمله دوم *شتاب کوریولیس* نام دارد. شتاب مرکزگرا به سمت درون و بسوی محور دوران و عمود بر آن است. با توجه به اتحاد برداری $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ شتاب مرکزگرا را می‌توان بصورت $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=(\boldsymbol{\omega}.\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}=(\boldsymbol{\omega}.\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}-\omega^2\mathbf{r}$ نوشت که مرکزگرا بودن آن را نمایان می‌کند. چون بردار شتاب مرکزگرا به بردار $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ عمود است بنابراین باید در صفحه‌ی $\boldsymbol{\omega}$ و $\boldsymbol{r}$ باشد و در نتیجه ترکیب خطی از $\boldsymbol{\omega}$ و $\boldsymbol{r}$ است.

مهمترین کاربرد رابطه‌ی (۲۵-۱۲)مربوط به حرکت ذره‌ای در نزدیکی‌های سطح زمین است. برای ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی گرانش و نیروی مکانیکی دیگر $\mathbf{F}$ حرکت می‌کند، معادله‌های حرکت عبارتند از $m\,d^2\mathbf{r}/dt^2=m\mathbf{g}+\mathbf{F}$ که در آن $\mathbf{g}$ برداری است به سوی پائین (مرکز زمین) و اندازه‌ی آن g است. با استفاده از رابطه‌ی (۲۵-۱۲) داریم

$$m[\ddot{\mathbf{r}}]_\circ=m\ddot{\mathbf{r}}+2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}+m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=m\mathbf{g}+\mathbf{F}$$ یا

$$m\ddot{\mathbf{r}}=m\mathbf{g}+\mathbf{F}-2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \qquad (۲٦-۱۲)$$

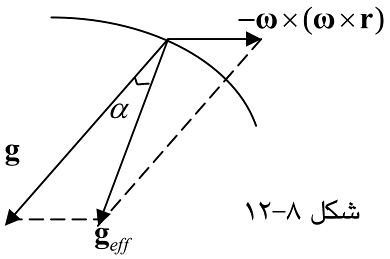
دو جمله‌ی آخری سمت راست نیروهای *پنداری* (یا *مجازی*) هستند که به خاطر سرشت غیرلختی چارچوب مرجع نمایان

می‌شوند. در این جا، نخست از جمله‌ی سوم سمت راست رابطه‌ی (۲۶-۱۲) یعنی نیروی کوریولیس چشم پوشی می کنیم و بررسی تأثیر آن را به بخش بعدی واگذار می کنیم. و به نقش جمله‌ی آخری را که همان نیروی آشنای مرکز گریز است می پردازیم. این نیرو تابعی است که به آهستگی با مکان تغییر می‌کند و همانند گرانش با جرم ذره متناسب است. هنگامی که در آزمایشگاه شتاب گرانشی را اندازه گیری می‌کنیم آنچه که واقعاً اندازه‌گیری می‌شود $\mathbf{g}$ نیست بلکه مقدار موثری است که به صورت

$$\mathbf{g}_{eff} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \qquad (۱۲-۲۷)$$

تعریف می کنیم. به ویژه؛ خط شاغولی کاملاً به سوی مرکز زمین نیست، بلکه به سبب نیروی مرکز گریز به اندازه‌ی زاویه‌ی کوچکی بیرون از آن قرار دارد (شکل ۸-۱۲ را ببینید).

ذره‌ای را در نظر بگیرید که درمتمم عرض جغرافیایی θ (یعنی: عرض جغرافیایی $\pi/2-\theta$) قرار دارد، آنگاه



شکل ۸-۱۲

$$|\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})| = \omega\,|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}| = \omega^2 r\sin\theta \qquad (۱۲-۲۸)$$

بنابراین مؤلفه‌های افقی و عمودی شتاب مؤثر گرانش، $\mathbf{g}_{eff}$، عبارتند از: (عمودی یعنی بسوی مرکز زمین)

$$g_{v,eff} = g - \omega^2 r\sin^2\theta$$
$$g_{h,eff} = \omega^2 r\sin\theta\cos\theta \qquad (۱۲-۲۹)$$

(تصحیح‌های دیگری برای g وجود دارد که براثر کاملاً کروی نبودن زمین نتیجه می‌شود و ما به آن خواهیم پرداخت.)

اندازه‌ی نیروی مرکز گریز را می‌توان با جایگزینی $\omega = ۷{,}۲۹۲\times۱۰^{-۵}s^{-۱}$ و شعاع میانگین زمین $r = ۶۳۷۱\,\mathrm{km}$ حساب کرد.

$$\omega^۲ r = ۳۴\mathrm{mms}^{-۱} \qquad (۱۲-۳۰)$$

چون $\omega^2 r << g$ است؛ زاویه‌ی بین خط عمود واقعی (راستای g_{eff}) و راستای ظاهری (g) به تقریب برابر است با

$$\alpha \approx \frac{g_{h,eff}}{g_{v,eff}} \cong \frac{\omega^۲ r}{g}\sin\theta\cos\theta \qquad (۱۲-۳۱)$$

بیشینه ی آن در $\theta = ۴۵^\circ$ است. برای این مقدار θ زاویه $\alpha \approx ۰{,}۶'$ است. در قطب، نیروی مرکزگریز صفر است و $g_{eff} = g$. در استوا $(\theta = \pi/۲)$ داریم $g_{eff} = g - \omega^۲ r$. پس می‌توان گفت که اندازه‌گیری مقدار شتاب گرانش در قطب به اندازه‌ی $۳۴\ \mathrm{mm}\,s^{-2}$ بیشتر از مقدار آن در استوا است. اندازه‌گیری تجربی، این اختلاف را در واقع اندکی بیشتر نشان می دهد

$$\Delta g_{eff} = g_{eff,pole} - g_{eff,equator} = ۵۲\mathrm{mms}^{-۲} \qquad (۱۲-۳۲)$$

تفاوت بین مقدار اندازه‌گیری شده و مقدار حساب شده به خاطر اینست که زمین کره ی کامل نیست بلکه در قطب، کره وار است (مسطح). بنابراین شتاب گرانش حتی بدون در نظر گرفتن جمله‌ی مربوط به مرکزگریزی ، در قطب بزرگتر از استوا است. این دو اثر به واقع مستقل از یکدیگر نیستند، زیرا مسطح بودن زمین درقطب نتیجه‌ی چرخش زمین است.

مثال دیگری از اثر نیرو ی مرکزگریز سطح مایع در ظرف چرخان است.

مثال ۴-۱۲ سطح مایع چرخان

ظرفی با سرعت زاویه ای ω می چرخد و مایع درون آن هم با همان سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. معادله‌ی سطح مایع را بیابید.

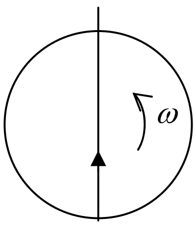
حل: از چارچوبی که با ظرف می‌چرخد استفاده کنیم. بنابراین در این چارچوب چرخان، مایع ساکن ولی تحت تأثیر نیروی مرکزگریز است. این نیرو پایستار و متناظر با یک انرژی پتانسیل است.

$$V_{cent.} = m\omega^{۲}\rho^{۲} = -\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}(x^{۲}+y^{۲}) \qquad (۱۲-۳۳)$$

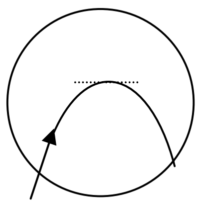
ذره‌ای را در سطح مایع در نظر بگیرید. اگر انرژی پتانسیل در سطح مایع مقدار ثابتی نباشد و از نقطه ای تا نقطه ی دیگر تغییر کند ، آنگاه ذره به ناحیه‌ایکه انرژی پتانسیل در آن جا کمترین است حرکت خواهد کرد. بنابراین اگر مایع تحت تأثیر نیروهای گرانش و مرکزگریز در حال تعادل باشد آنگاه سطح آن باید یک سطح هم پتانسیل باشد. بنابراین باید داشته باشیم $gz + (-۱/۲)\omega^{۲}(x^{۲}+y^{۲}) = \text{const.}$ که معادله‌ی یک سهموی چرخان حول محور z است. این اثر درساختن تلسکوپ های نوری پرتوان به کار می‌رود. زیرا سهموی شکل دلخواه برای کانونی کردن نوری است که درست از بالا می‌تابد. آیینه با چرخاندن لایه‌ی نازک مایع، مانند جیوه، ساخته می‌شود . این ارزانتر از ساختن آیینه‌های شیشه‌ای با شکل دقیق است. اگر چه کاستی آن اینست که با اینگونه تلسکوپها تنهامی‌توان به اشیاء نزدیک سمت الراس نگاه کرد

۱۲-۵ نیروی کوریولیس

نیروی کوریولیس، $-۲m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}$، نیروی پنداری (مجازی) وابسته به سرعت است که در اثر چرخش زمین ظاهر می‌شود. برای اینکه ریشه‌ی فیزیکی آن را بهتربفهمیم ، یک صفحه‌ی تخت چرخان را در نظر بگیرید. فرض کنید ذره‌ای قطر صفحه را تحت تأثیر *هیچ نیرویی* می‌پیماید. بنابراین ناظر لخت حرکت ذره را روی خط راستی در امتداد قطر صفحه خواهد دید (شکل۹-۱۲ الف) و ناظری که روی صفحه قرار دارد، مسیر ذره را به صورت خم (شکل۹-۱۲ ب) می بیند. اگر این ناظر نمی‌دانست که صفحه می‌چرخد، آنگاه خم را نتیجه ی اثر نیرویی که عمود بر سرعت ذره به آن وارد می‌شود کی پنداشت. این نیروی کوریولیس است



الف



ب

شکل ۹-۱۲

.

شکل (۹-۱۲) را می‌توان همانند زمین دانست که از قطب شمال به آن نگریسته می شود. بنابراین ، اثر نیروی کوریولیس در نیمکره‌ی شمالی این است که ذره را به راست و در نیمکره‌ی جنوبی آن را به سوی چپ منحرف می‌کند. نیروی کوریولیس در حرکت هوا در هواشناسی اهمیت زیاد دارد و ما به آنها خواهیم پرداخت. نخست به برخی اثرهای نیروی کوریولیس که در آزمایشگاه قابل دیدن هستند می‌پردازیم.

ذره‌ای را در نظر بگیرید که نزدیک سطح زمین در متمم عرض جغرافیایی θحرکت می‌کند. فرض کنید مسافتی را که ذره می‌پیماید به اندازه‌ای کوتاه باشد که بتوان اثر نیروهای گرانش و مرکز گریز را در این فاصله ثابت انگاشت و آنها را با هم و با شتاب گرانش موثر $\mathbf{g}_{eff}$ نشان داد. معادله‌ی حرکت عبارت است از

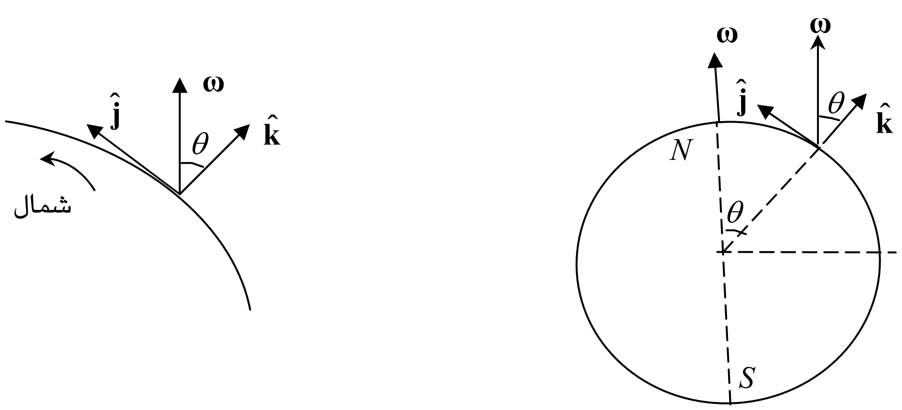
$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g}_{eff} + \mathbf{F} - ۲m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}} \qquad (۱۲\text{-}۳٤)$$

مثال ۵-۱۰ سقوط آزاد یک جسم

از ارتفاع h بالای زمین، ذره ای از حالت سکون رها می‌شود. در چه فاصله‌ای از راستای عمودی سقوط، به زمین خواهد نشست؟

حل: برای بررسی این مسئله، نخست باید دستگاه مختصات راست گردی را انتخاب کرد. برای این کار، $\hat{\boldsymbol{i}}$ را به سوی شرق، $\hat{\boldsymbol{j}}$ را بسوی شمال و $\hat{\boldsymbol{k}}$ را رو به بالا (یعنی در خلاف جهت g_{eff}) در نظر بگیرید.

در شکل (۱۰-۱۲) این چارچوب نشان داده شد است. زاویه‌ی θ زاویه‌ی بین $\hat{\mathbf{k}}$ و محور زمین است.



شکل ۱۰-۱۲

مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega} = (\circ, \omega\sin\theta, \omega\cos\theta)$ است و نیز داریم $\dot{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{i}}\dot{x} + \hat{\boldsymbol{j}}\dot{y} + \hat{\boldsymbol{k}}\dot{z}$ نیروی کوریولیس را اینک می‌توان حساب کرد. چون

$$\boldsymbol{\omega} = \hat{\mathbf{i}}\omega_x + \hat{\mathbf{j}}\omega_y + \hat{\mathbf{k}}\omega_z = \circ\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\omega\sin\theta + \hat{\mathbf{k}}\omega\cos\theta \qquad (۱۲\text{-}۳۵)$$

پس

$$\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ ۰ & \omega\sin\theta & \omega\cos\theta\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix}$$

$$=\hat{\mathbf{i}}(\dot{z}\,\omega\sin\theta-\dot{y}\,\omega\cos\theta)-\hat{\mathbf{j}}(-\dot{x}\,\omega\cos\theta)+\hat{\mathbf{k}}(-\dot{x}\,\omega\sin\theta) \qquad (۱۲-۳۶)$$

$$\Rightarrow\quad -۲m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}=۲m\,\omega(\dot{y}\,\cos\theta-\dot{z}\,\sin\theta)\,\hat{\mathbf{i}}-۲m\,\omega\dot{x}\,\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}+۲m\,\omega\dot{x}\,\sin\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$

بنابراین، اگر از نیروی کوریولیس چشم پوشی می‌کردیم، حرکت با رابطه های زیر توصیف می‌شد

$$x=۰\ ,\qquad y=۰\ ,\qquad z=h-\frac{۱}{۲}gt^{۲}$$

حال اگر در رابطه‌ی (۱۲-۳۴) به جای $\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ مقدارش را از رابطه (۱۲-۳۶) قرار دهیم و نیروی $\boldsymbol{F}$ را برابر صفر در نظر بگیریم، داریم

$$m\ddot{\mathbf{r}}=m\mathbf{g}_{eff}+۲m\,\omega[(\dot{y}\,\cos\theta-\dot{z}\,\sin\theta)\,\hat{\mathbf{i}}-\dot{x}\,\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}+\dot{x}\,\sin\theta\,\hat{\mathbf{k}}] \qquad (۱۲-۳۷)$$

یا برحسب مولفه ها خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=-۲\omega(\dot{z}\,\sin\theta-\dot{y}\,\cos\theta)\\ \ddot{y}&=-۲\omega(\dot{x}\,\cos\theta)\\ \ddot{z}&=-g+۲\omega\dot{x}\,\sin\theta\end{aligned} \qquad (۱-۳۸)$$

اگر از این رابطه ها نسبت به t انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-۲\omega(z\,\sin\theta-y\,\cos\theta)+\dot{x}_{۰}\\ \dot{y}&=-۲\omega x\,\cos\theta+\dot{y}_{۰}\\ \dot{z}&=-gt+۲\omega x\,\sin\theta+\dot{z}_{۰}\end{aligned} \qquad (۱۲-۳۹)$$

ثابت های انتگرال‌گیری $\dot{x}_{۰}$ ، $\dot{y}_{۰}$ و $\dot{z}_{۰}$ مؤلفه‌های سرعت اولیه اند. از دو معادله‌ی آخری در رابطه‌ی (۱۲-۳۹) مقدارهای $\dot{y}_{۰}$ و $\dot{z}_{۰}$ را می‌توان به دست آورد و در معادله‌ی نخست رابطه‌ی (۱۲-۳۸) جایگزین کرد . خواهیم داشت

$$\ddot{x}=-۲\omega(-gt+۲\omega x\,\sin\theta+\dot{z}_{۰})\sin\theta-۲\omega(۲\omega x\,\cos\theta-\dot{y}_{۰})\cos\theta+\dot{x}_{۰} \qquad (۱۲-۴۰)$$

با چشم پوشی از جمله‌های مرتبه‌های $\omega^{۲}$ به دست می آید

$$\ddot{x}=۲\omega gt\,\sin\theta-۲\omega(\dot{z}_{۰}\sin\theta-\dot{y}_{۰}\cos\theta)+\dot{x}_{۰} \qquad (۱۲-۴۱)$$

اگر یکبار دیگر نسبت به t انتگرال بگیریم آنگاه خواهیم داشت

$$\dot{x}=\omega gt^{۲}\sin\theta-۲\omega t\,(\dot{z}_{۰}\sin\theta-\dot{y}_{۰}\cos\theta)+\dot{x}_{۰} \qquad (۱۲-۴۲)$$

و بنابراین

$$x=\frac{1}{3}\omega gt^{3}\sin\theta-\omega t^{2}(\dot{z}_{0}\sin\theta-\dot{y}_{0}\cos\theta)+\dot{x}_{0}t+\dot{x}_{0} \qquad (۱۲-۴۳)$$

اگر این مقدار x را در معادله‌های دوم و سوم رابطه‌ی (۱۲۰-۳۹) قرار دهیم و نسبت به t انتگرال بگیریم و دوباره از جمله‌های $\omega^{۲}$ چشم پوشی کنیم به دست می آید

$$\begin{aligned} y &= \dot{y}_{\circ} t - \omega \dot{x} t^{2} \cos\theta + y_{\circ} \\ z &= -\frac{1}{2} g t^{2} + \dot{z}_{\circ} t + \omega \dot{x}_{\circ} t^{2} \sin\theta + z_{\circ} \end{aligned} \qquad (۱۲-۴۴)$$

اینک دو حالت خاص را بررسی می‌کنیم.

حالت نخست: ذره از حالت سکون و از ارتفاع h رها شده است یعنی $\dot{x}_{\circ} = \dot{y}_{\circ} = \dot{z}_{\circ} = 0$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} \omega g t^{3} \sin\theta \\ z &= -\frac{1}{2} g t^{2} + z_{\circ} = -\frac{1}{2} g t^{2} + h \end{aligned} \qquad (۱۲-۴۵)$$

پس، ذره به سمت *شرق* سوق پیدا می‌کند وتا رسیدن به زمین $(z = 0)$ زمان $t^{2} \approx 2h/g$ را در هوا سپری می کند. بنابراین، در هنگام رسیدن به زمین، فاصله‌ی ذره از فاصله‌ی عمودی، عبارتست از

$$x = \frac{1}{3} \omega g (\frac{2h}{g}) \sin\theta = \frac{\omega}{3} g (\frac{2h}{g})^{\frac{3}{2}} \sin\theta = \frac{\omega}{3} (\frac{8h^{3}}{g})^{\frac{1}{2}} \sin\theta \qquad (۱۲-۴۶)$$

برای مثال، اگر ذره از بلندی $100\ m$ در عرض جغرافیایی $\theta = 45^{\circ}$ رها شود هنگام رسیدن به زمین به اندازه‌ی $16\ \mathrm{mm}$ انحراف پیدا می‌کند.

حالت دوم : پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که با سرعت بسیار زیاد تقریبا بطور افقی پرتاب می شود. جهت پرتاب را در راستای شرق در نظر بگیرید یعنی $\dot{x}_{\circ} = v_{\circ}$ ، $\dot{y}_{\circ} = \dot{z}_{\circ} = 0$. ازرابطه‌ی (۴۴-۱۲) داریم

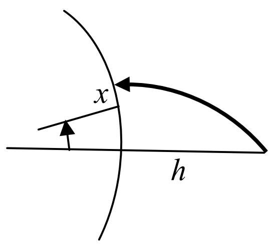
$$y = -\omega v_{\circ} t^{2} \cos\theta \qquad (۱۲-۴۷)$$

یعنی پرتابه به سمت راست منحرف می‌شود. اگر H برد افقی باشد، آنگاه $H \approx v_{\circ} t_{1}$ که t_{1} زمان پرواز است. انحراف پرتابه به سمت راست (عمود بر مسافت شرقی H) به تقریب برابر است با:

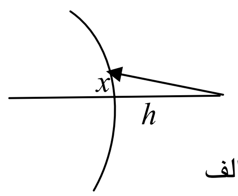
$$\frac{\omega H^{2}}{v_{\circ}} \cos\theta \qquad (۱۲-۴۸)$$

و می‌توان نشان داد که اگر مسیر افقی باشد ، این مقدار انحراف ،مستقل از جهت اولیه‌ی پرتاب است.

بررسی سقوط جسم از دیدگاه ناظر لخت آموزنده است. چون ذره نسبت به زمین از حالت سکون رها شده است و چون چرخش زمین به سمت شرق است، ذره درچارچوب لخت دارای مؤلفه‌ی سرعت در سوی شرق خواهد بود. با سقوط ذره، تکانه‌ی زاویه‌ای آن ثابت می‌ماند و بنابراین سرعت زاویه‌ای آن افزایش پیدا می کند و از سرعت زاویه‌ای زمین زیر پایش



شکل ۱۱-۱۰ ب

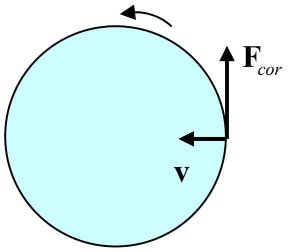


شکل ۱۱-۱۰ الف

جلوتر می‌افتد. شکل های (۱۱-۱۲ الف) و (۱۱- ۱۲ ب) به ترتیب وضعیت را از دید ناظر نشسته روی زمین (چرخان) و ناظر لختی نشان می‌دهند.

در حالیکه نیروی مرکزگریز مفهومی بسیار شهودی است (هر کسی که در درون اتوموبیل از پیچ جاده گذشته است آن را می شناسد) ، اما چنین چیزی را نمی توان در باره ی نیروی کوریولیس گفت. این نیرو به سرعتی، $\mathbf{v}$، غیر صفر نسبت به چارچوب شتاب دار نیاز دارد و معمولا مردم هنگام پیمودن پیچ جاده با سرعت چشم گیری (در مقایسه با اتوموبیل) حرکت نمی کنند. برای این که احساسی نسبت به این نیرو پیدا بکنید، دو حالت خاص را بررسی می کنیم.

حالت ۱ (حرکت شعاعی روی صفحه ی چرخان): شکل (۱۱-۱۲) صفحه ی چرخانی را نشان می دهد که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می چرخد . شخصی را در نظر بگیرید که در امتداد شعاع با سرعت ثابت v (نسبت به صفحه ی چرخان) در فاصله‌ی r از مرکز به سوی مرکز حرکت می کند. ωبه سمت بیرون از صفحه است. بنابراین، نیروی کوریولیس، $-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ ، در راستای مماسی و در جهت چرخش صفحه است (در شکل ما، در جهت سمت راست شخص). اندازه ی آن $F_{cor}=2m\omega v$ است. فرض کنید که شخص این نیرو را با یک نیروی اصطکاک به اندازه ی $2mv\omega$(در جهت سمت چپ او) که به پاهایش وارد می شود خنثی می کند و بنابراین به حرکت شعاعی خود ادامه می دهد. (البته نیروی مرکزگریز ی هم وجود دارد که با نیروی اصطکاک شعاعی وارد به کف پاهای شخص خنثی می شود، اما این اثر در اینجا اهمیت ندارد.) چرا نیروی کوریولیس (و در نتیجه نیروی اصطکاک مماسی) وجود دارد؟ برای این که نیروی اصطکاک حاصل (از دید چارچوب آزمایشگاهی) تکانه‌ی زاویه‌ای شخص را تغییر می دهد. برای دیدن این، آهنگ تغییر $L=mr\omega^2$ را حساب کنید که در آن ω سرعت زاویه ای شخص نسبت به چارچوب آزمایشگاه یا همان سرعت زاویه ای صفحه ی چرخان است. با استفاده از $dr/dt=-v$ داریم



شکل ۱۲-۱۲

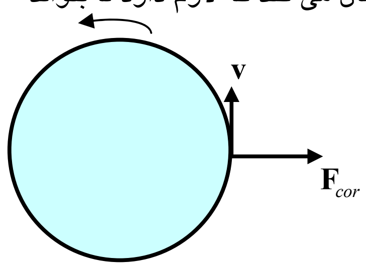
$$\frac{dL}{dt}=-2mr\omega v+mr^2(d\omega/dt) \qquad (۱۲-۴۹)$$

اما $d\omega/dt=0$ است؛ چون شخص درروی یک راستای شعاعی باقی می ماند و ما فرض کردیم که صفحه چنان ساخته شده است که سرعت زاویه ای ω خود را ثابت نگه دارد. پس ، از رابطه ی (۱۲-۴۹) خواهیم داشت $dL/dt=-2mr\omega v$. بنابراین ، L شخص با آهنگ $-(2m\omega v)r$ تغییر می کند که حاصل ضرب شعاع و نیروی اصطکاک مماسی است که صفحه به شخص وارد می کند. به بیان دیگر، این گشتاوری است که صفحه ی چرخان به شخص وارد می کند.

نکته: اگر شخص نیروی اصطکاک مماسی به کف پای خود وارد نکند چه پیش می آید؟ در این صورت نیروی کوریولیس، $2m\omega v$، شتاب مماسی $2\omega v$ را در چارچوب شخص ایجاد می کند و هم چنین است در چارچوب آزمایشگاهی. وجود این شتاب اساسا به این خاطر است که تکانه ی شخص را (نسبت به چارچوب آزمایشگاه) ثابت نگه دارد. در این سناریو تکانه ی زاویه ای شخص ثابت است زیرا در چارچوب آزمایشگاه نیروهای مماسی وجود ندارند). برای این که ببینید شتاب مماسی با پایستگی تکانه ی زاویه ای سازگار است،در رابطه ی (۱۲-۴۹) قرار دهید $dL/dt=0$ ، خواهیم داشت $2\omega v=r(d\omega/dt)$. بنا به تعریف، سمت راست شتاب مماسی است. پس ، گفتن این که L پایسته است با گفتن این که $2\omega v$ شتاب مماسی است (

برای این وضعیت که سرعت شعاعی درون سو است) یکی است. ♣

حالت ۲ (حرکت مماسی روی صفحه ی چرخان): حالا فرض کنید کسی در شعاع ثابت r روی صفحه‌ی چرخان شکل (۱۳-۱۲) با سرعت v (نسبت به صفحه) به طور مماسی و در جهت حرکت صفحه راه می رود. نیروی کوریولیس $-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ برون سوست و اندازه ی آن $2m\omega v$ است. فرض کنید این شخص نیروی اصطکاکی را اعمال می کند که لازم دارد تا بتواند در شعاع r به حرکت خود ادامه دهد. برای دیدن این که چرا این نیروی برون سوی $2m\omega v$ باید وجود داشته باشد، راه ساده ای وجود دارد: از دید ناظر بیرونی، سرعت نقطه‌ای در روی صفحه ی چرخان واقع در شعاع r برابر است با $V\equiv\omega r$. اگر شخص با سرعت v نسبت به صفحه، مماسی (در همان جهت چرخش) حرکت بکند، آنگاه سرعت او از دید ناظر بیرونی V+v است. پس، ناظر بیرونی شخصی را می بیند که در دایره‌ای به شعاع r با سرعت V+v حرکت می کند. بنابراین ، شتاب این شخص در چارچوب زمین $(V+v)^2/r$ است. این شتاب باید به وسیله ی نیروی اصطکاک درون سویی تولید شود که به کف پای شخص وارد می شود. پس



شکل ۱۳-۱۰

$$F_{friction}=\frac{m(V+v)^2}{r}=\frac{mV^2}{r}+\frac{2mVv}{r}+\frac{mv^2}{r} \qquad (۱۲-۵۰)$$

این نیروی اصطکاک البته در هر چارچوبی همان است. در این صورت، فرد روی صفحه ی چرخان چگونه این سه جزء نیروی اصطکاک درون سو را در رابطه ی (۵۰-۱۲) باید تفسیر کند؟ جمله ی نخست نیروی برون سوی مرکزگریز را که شخص همواره حس می کند و نتیجه ی چرخش چارچوب است، خنثی می کند. جمله ی سوم نیروی درون سویی است که پاهای شخص اعمال می کند تا بتواند روی دایره ای به شعاع r و سرعت v حرکت کند – کاری که او به آن مشغول است. جمله ی میانی نیروی اصطکاک درون سوی دیگری است که شخص باید وارد کند تا نیروی کوریولیس برون سوی $2m\omega v$ (با استفاده از $V\equiv\omega r$) را حذف کند.

در بیانی هم ارز، شخص روی صفحه‌ی چرخان معادله‌ی $F=ma$ را به صورت (راستای شعاعی درون سو را مثبت فرض کنید) زیر خواهد نوشت

$$\frac{mv^2}{r}=\frac{m(V+v)^2}{r}-\frac{mV^2}{r}-\frac{2mVv}{r}$$

یا

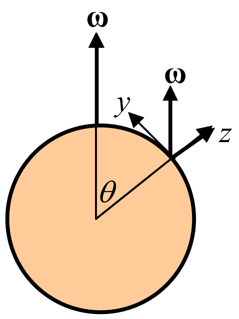
$$m\mathbf{a}=\mathbf{F}_{friction}+\mathbf{F}_{centrifugal}+\mathbf{F}_{coriolis} \qquad (۱۲-۵۱)$$

می بینیم که نیرویی را که شخص احساس می کند در حقیقت در چارچوب او با ma (که a در چارچوب او اندازه گیری می شود) برابر است.

برای حالت های بینابین این دو حالت خاص، وضعیت چندان روشن نیست، اما همین است که هست. توجه کنید که در هر جهتی که روی صفحه ی چرخان حرکت بکنید، نیروی کوریولیس همیشه در همان جهت و عمود برجهت حرکت شماست. به سمت راست یا به سمت چپ بودن آن بستگی به جهت چرخش دارد. برای ω داده شده ای جهت نسبی نیرو همیشه با شما همراه است.

بگذارید چند مثال دیگر هم حل بکنیم.

مثال ۶-۱۰ (آونگ فوکو) : این مثال کلاسیکی اثر نیروی کوریولیس است و نشان می دهد که بی شک زمین می چرخد.
آونگ فوکو یک آونگ معمولی است که در هر جهتی می تواند تاب بخورد و با دقت زیادی ساخته شده است تا از تقارن کامل برخوردار باشد. به این ترتیب دوره‌ی نوسان آن در هر جهتی دقیقاً یکسان است. (این آونگ باید دراز و بسیار سنگین باشد تا با وجود مقاومت هوا بتواند بطور آزادانه برای چندین ساعت تاب بخورد.)
در حالت خاصی که آونگ در یکی از قطب ها ی زمین قرار دارد، فهمیدن این چرخش آسان است. قطب شمال را در نظر بگیرید. ناظر بیرونی که در بالای قطب شمال معلق است و چرخش زمین را تماشا می کند، صفحه ی آونگ را (نسبت به ستاره های دوردست) ثابت می بیند، اما زمین زیر پای آن، پادساعتگرد می چرخد (فرض می کنیم که نقطه ی آویز آونگ بدون اصطکاک است و بنابراین نمی تواند گشتاوری ایجاد کند که سبب پیچاندن صفحه ی آونگ بشود.) پس، برای ناظری در روی زمین ، صفحه ی آونگ ساعتگرد می چرخد (اگر به آن از بالا نگاه کند). بسامد این چرخش البته همان بسامد چرخش زمین است. بنابراین ، ناظر زمینی می بیند که صفحه ی آونگ در هر روز یک دور می چرخد.
اگر آونگ در قطب نباشد چه؟ بسامد حرکت تقدیمی چیست؟ فرض کنید آونگ در زاویه ی قطبی θ باشد. این محاسبه را ما در تقریبی انجام می دهیم که سرعت وزنه ی آونگ افقی است. اگر ریسمان آونگ بسیار دراز باشد این تقریب اساسا درست است و تصحیح هایی که به خاطر بالا رفتن و پایین آمدن وزنه لازم اند، قابل چشم پوشی است. جهت نیروی کوریولیس، $-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ ، اینک پیچیده است. مولفه عمودی آن نیروی ظاهری گرانش را تغییر می دهد و بنابراین ، قابل چشم پوشی است (اگر چه بسامد آونگ به g بستگی دارد، اما تغییر حاصل در آن بسیار کوچک است.)



شکل ۱۴-۱۲

با این یادآوری، بگذارید $\boldsymbol{\omega}$ را در چارچوب مختصاتی که روی آونگ است به مولفه های افقی و عمودی تجزیه کنیم. از شکل ۱۴-۱۲ می بینیم که

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} + \omega\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} \qquad (۱۲\text{-}۵۲)$$

ما از مولفه‌ی y چشم پوشی خواهیم کرد، چون این مولفه در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ نیروی کوریولیس ایجاد می کند (چون $\mathbf{v}$ در صفحه‌ی $x-y$ است) . بنابراین ، برای منظور ما ، ω اساسا برابر $\omega\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$ است. از این نقطه به بعد مسئله ی یافتن بسامد تقدیمی به چند روش امکان پذیر است. ما دو شیوه ی حل ارائه خواهیم کرد.

حل نخست (راه میان بر) : اندازه ی مولفه ی افقی نیروی کوریولیس عبارت است از

$$F_{cor}^{horiz} = \left|-2m\,(\omega\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{v}\right| = 2m\,(\omega\cos\theta)v \qquad (۱۲\text{-}۵۳)$$

و بر $\mathbf{v}(t)$ عمود است. پس تا جایی که به آونگ مربوط می شود، انگار آونگ در قطب شمال ستاره ای فرضی قرار دارد که با بسامد $\omega\cos\theta$ می چرخد. اما همان گونه که در بالا دیدیم ، بسامد تقدیمی آونگ فوکو در قطب شمال یک چنین ستاره‌ای

$$\omega_F = \omega\cos\theta \qquad (۱۲\text{-}۵٤)$$

و ساعتگرد است. پس این پاسخ ماست.

حل دوم (در چارچوب آونگ): بگذارید درچارچوب صفحه ی عمودی نوسان آونگ فوکو کار بکنیم. هدف ما یافتن آهنگ حرکت تقدیمی این چارچوب است. نسبت به چارچوب ثابتی در روی زمین (با محورهای $\hat{\mathbf{x}}$ ، $\hat{\mathbf{y}}$ و $\hat{\mathbf{z}}$) می دانیم که اگر در قطب شمال باشیم $(\theta=0)$ این صفحه با بسامد $\omega_F=-\omega\hat{\mathbf{z}}$ می چرخد و اگر در استوا باشیم $(\theta=\pi/2)$ بسامد صفحه $\omega_F=0$ است.

بنابراین اگر واقعیتی در جهان باشد، پاسخ باید به صورت $\omega_F = -\omega\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}$ باشد. این چیزی است که حالا می خواهیم نشان بدهیم.

کار کردن در چارچوب صفحه سودمند است زیرا می توان از این واقعیت استفاده کرد که *آونگ نیروهایی را که در بیرون از صفحه باشند احساس نمی کند*، اگر احساس می کرد می بایست حرکت آونگ در بیرون از صفحه قرار می داشت (که بنابه تعریف این چنین نیست)

نسبت به چارچوب لخت، چارچوب ثابتی در روی زمین با بسامد $\boldsymbol{\omega} = \omega\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} + \omega\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}$ می چرخد. فرض کنید صفحه ی آونگ با بسامد $\boldsymbol{\omega}_F = \omega_F\,\hat{\mathbf{z}}$ نسبت به چارچوب زمین می چرخد. آنگاه سرعت زاویه ای چارچوب آونگ نسبت به چارچوب لخت عبارت است از

$$\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_F = (\omega\cos\theta + \omega_F)\,\hat{\mathbf{z}} + \omega\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} \qquad (۱۲-۵۵)$$

در این چارچوب چرخان ، برای یافتن مولفه ی افقی نیروی کوریولیس تنها مولفه ی $\hat{\mathbf{z}}$ این بسامد برای ما مهم است. بنابراین اندازه ی نیروی کوریولیس افقی عبارت است از $2m(\omega\cos\theta + \omega_F)v$. اما در چارچوب آونگ، نیروی افقی وجود ندارد. پس این مقدار باید برابر صفر باشد. در نتیجه داریم:

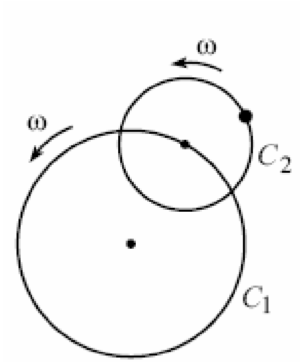
$$\omega_F = -\omega\cos\theta \qquad (۱۲-۵٦)$$

که با رابطه ی (۵٤-۱۲) سازگار است.

مسئله ها

۱-۱۲ ($\mathbf{g}_{eff}$ **در مقابل** $\mathbf{g}$): برای چه مقدار θ ، زاویه ی میان $\mathbf{g}_{eff}$ و $\mathbf{g}$ بیشینه است؟

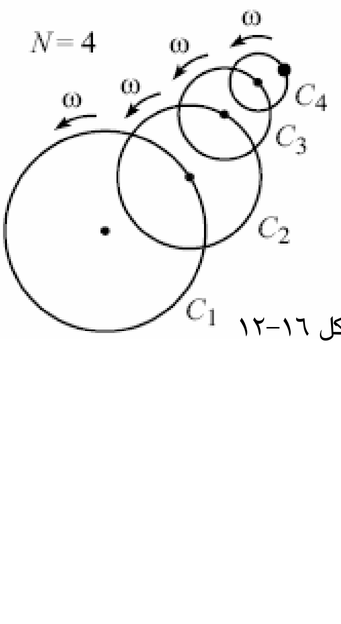
۲-۱۲ (**پرش طول در** $\mathbf{g}_{\rm eff}$) : اگر شخصی در قطب شمال می تواند ۸ متر پرش طول انجام دهد در استوا چه طولی را می تواند بپرد؟ (از اثر های مقاومت باد، دما واینکه در قطب زمین یخی است چشم پوشی کنید و فرض کنید که پرش در استوا در راستای شمال- جنوب انجام می گیرد و در نتیجه نیروی کوریولیس وجود ندارد.)



شکل ۱۵-۱۲

۳-۱۲ (**دایره های زیاد**): (**الف**) دو دایره ی C_1 و C_2 در یک صفحه هر کدام با سرعت زاویه ای ω نسبت به یک چارچوب لخت می چرخند (شکل ۱۵-۱۰ را ببینید.) مرکز C_1 در یک چارچوب لخت ثابت شده است و مرکز C_2 در دایره ی C_1 ثابت است . جرمی روی دایره ی C_2 ثابت شده است. مکان این جرم نسبت به مرکز C_1 عبارت است از $\mathbf{R}(t)$. چه نیروهای پنداری را این جرم احساس می کند؟

(**ب**) Nدایره ی C_i در یک صفحه، هر کدام با سرعت زاویه ای ω نسبت به یک چارچوب لخت می چرخند (شکل ١٦-١٠) مرکز C_1 در یک چارچوب لخت ثابت شده است. مرکز دایره ی C_i (برای $i = 2,\ldots,N$) روی دایره ی C_{i-1} قرار دارد. جرمی روی دایره ی C_N است و مکان آن نسبت به مرکز C_1 عبارت است از $\mathbf{R}(t)$. نیروهای پنداری را که جرم احساس می کند بیابید.



شکل ١٦-١٢

۱۲-۴ **(کدام سو به پایین؟)**: شما در بالونی در هوا غوطه ورید.بالون نسبت به زمین ساکن است. سه تعریف نیمه پـذیرفتنی برای اینکه کدام نقطه در روی زمین درست "زیر" شماست ارایه کنید.

۱۲-۵ **(جرمی روی صفحه ی چرخان)**: جرمی نسبت به چارچوب آزمایـشگاه بـدون حرکـت اسـت در حالیکـه در زیـر آن یـک صفحه ی چرخان بدون اصطکاک می چرخد. بسامد چرخش صفحه ω است و جرم در شعاع r قرار دارد. در چارچوب صفحه چه نیروهایی به جرم وارد می شوند؟

۱۲-۶ **(جرم آزاد شده)**: جرمی را به یک صفحه ی چرخان بدون اصطکاک پیچ کرده ایم. بسامد چرخش صفحه ω است و جرم در شعاع a از مرکز صفحه قراردارد. جرم را آزاد می کنیم (یعنی پیچ و مهره را باز می کنـیم). از دیـد چـارچوب لخـت ، جـرم روی یک خط راست حرکت می کند. مسیر جرم در چارچوب چرخان چگونه خواهد بـود؟ $r(t)$ و $\theta(t)$ را مـشخص کنیـد. θ زاویه نسبت به شعاع اولیه است.

۱۲-۷ **(دایره های کوریولیس)**: قطعه ی کوچک استوانه ای با ارتفاع کم با سرعت v روی یخ می لغزد. سطح افقی است یعنی در هر نقطه به g_{eff} عمود است. نشان دهید که در چارچوب چرخان زمین، قطعه روی یک دایره حرکت می کند. شعاع دایـره را بیابید. بسامد حرکت چیست؟ فرض کنید در مقایسه با شعاع زمین، شعاع دایره کوچک است.

۱۲-۸ **(شکل زمین)**: زمین در استوا به خاطرنیروی مرکزگریز در چارچوب چرخان زمین، اندکی پف کرده است (حالت کروی ندارد). نشان دهید که ارتفاع نقطه ای در روی زمین (نسبت به زمین کروی) عبارت است از

$$h = R\left(\frac{R\,\omega^{۲}}{۶g}\right)(۳\sin^{۲}\theta - ۲) \qquad (۱۲-۵۷)$$

که در آن θزاویه ی قطبی (از قطب شمال) و R شعاع زمین است.

۱۲-۹ **(تصحیح شتاب گرانش)**: جرمی از نقطه ای در بالای استوا رها می شود. فاصله ی اولیه ی آن را از مرکز زمین R و مسافتی را که فرو می افتد b بنامید. اگر تنها نیروی مرکزگریز را در نظر بگیریم انگاه تصحیح g برابر است با $\omega^2(R-b)$. اما نصحیح مرتبه دومی نیز وجود دارد که در اثر نیروی کوریولیس به وجود می آید. جمع این دو تصحیح چقدر است؟ (g با ارتفاع هم تغییر می کند اما در این جا به آن نمی پردازیم.)

۱۲-۱۰ **(انحراف به جنوب)**: توپی را در زاویه ی قطبی θ از ارتفاع h (کوچک در مقایسه با شعاع زمین) رها می کنیم. هنگام برخورد با زمین چقدر از جهت g_{eff} به سوی جنوب (در نیم کره ی شمالی) منحرف می شود؟ (این یک اثر مرتبه دو به خاطر نیروی کوریولیس است.)

۱۲-۱۱ **(نوسان در استوا)** : سیم بدون اصطکاکی به شکل کمانی از یک دایره در استوا از شمال به جنوب خوابانیده شده است و دانه ی تسبیحی روی آن قرار دارد. همه ی نقاط سیم از مرکز زمین به یک فاصله اند. دابه ی تسبیح را از فاصله ی کوتاهی تا استوا رها می کنیم. به خاطر این که g_{eff} درست به سوی مرکز زمین نیست، دانه ی تسبیح به سوی استوا حرکت خواهد کرد و یک حرکت نوسانی خواهد داشت. بسامد این نوسان را بیابید.