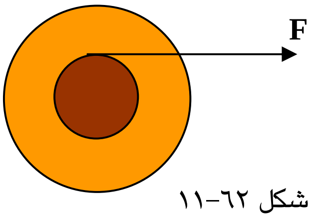
مسئله ها:

۱۱-۱ چرخی بر روی محور ثابتی سوار است و مجموعه‌ی چرخ و محور می‌تواند آزادانه و بدون اصطکاک بچرخد. برای اینکه گشتاور لختی چرخ + محور را اندازه بگیریم برابر شکل (۱۱-۶۲۳) ریسمان بدون جرمی را دور محور می‌پیچیم وبا نیروی افقی ثابت و معلوم F می کشیم. هنگامی‌که ریسمان به اندازه‌ی طول L کشیده شده باشد؛ مجموعه با سرعت زاویه‌ای ω_0 می‌چرخد. گشتاور لختی سامانه را حول مرکز حساب کنید



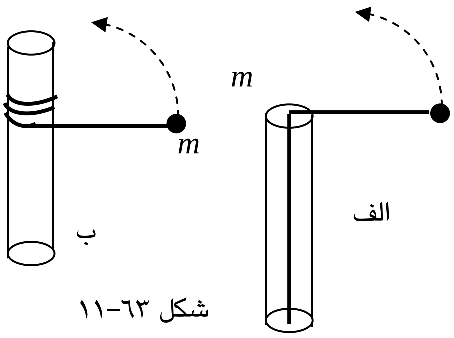
شکل ۱۱-۶۲

۱۱-۲ جرم m باریسمانی به میله‌ای به شعاع R وصل شده است در آغاز، فاصله‌ی جرم m از مرکز میله r است و جرم با سرعت V_0 به طور مماسی می‌چرخد. دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

(الف): ریسمان در بالای میله از سوراخی در وسط آن می‌گذرد. با کشیدن ریسمان از درون سوراخ، (شکل۱۱-۶۳ الف) طول آن را به تدریج کوتاه می‌کنیم.

(ب): ریسمان مانند (شکل۱۱-۶۳ ب) به دور میله می‌پیچد. در هر یک از این حالت ها چه کمیت هایی پایسته است؟

در هر یک از این حالت ها سرعت نهایی جرم را در هنگام برخورد با میله حساب کنید.



شکل ۱۱-۶۳

۱۱-۳ میله‌ی یکنواختی به وزن W به طور افقی بر روی دو پایه قرار دارد. در زمان $t=0$ یکی از پایه‌ها را برابر شکل (۱۱-۶۴) به طور سریع از زیر میله خارج می‌کنیم. درست پس از این کار چه نیرویی به پایه‌ی دیگر وارد می‌شود؟


شکل ۱۱-۶۴

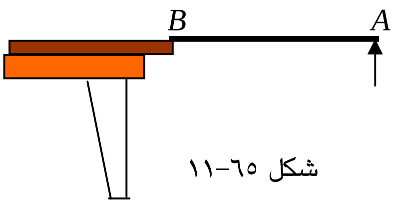
۱۱-۴ یک سر میله‌ی همگنی به جرم M و طول ℓ در نقطه‌ی B بر لبه‌ی میزی قرار دارد و انتهای دیگر آن را برابر شکل (۱۱-۶۵) با دست گرفته‌ایم (نقطه‌ی A) تا میله افقی قرار گیرد. نقطه‌ی A را ناگهان رها می‌کنیم.

(الف): گشتاور را نسبت به نقطه‌ی B حساب کنید.

(ب): شتاب زاویه‌ای حول نقطه‌ی B چقدر است؟

(پ): شتاب خطی مرکزجرم میله چقدر است؟

(ت): نیروی عمودی وارد به میله رادر نقطه‌ی B به دست آورید.



شکل ۱۱-۶۵

۱۱-۵ قرصی به جرم M و شعاع R را در نظر بگیرید. دور این قرص نواری پیچیده شده است. برابر شکل (۱۱-۶۶) نوار از روی قرقره‌ی بدون اصطکاک می‌گذرد. از انتهای دیگر نوار وزنه‌ی m آویزان است. قرص را رها می‌کنیم تا سقوط کند. فرض کنید که قرص به طور عمودی سقوط می‌کند

(الف): شتاب a_1 جرم m و شتاب a_2 قرص M چه رابطه‌هایی با شتاب زاویه‌ای قرص دارند؟

(ب): شتاب های a_1 و a_2 و شتاب زاویه‌ای قرص را به دست آورید.

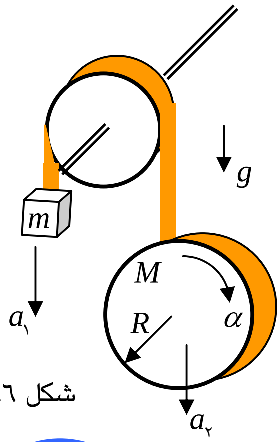
۱۱-۶ ماهواره‌ای به جرم m در مداری بیضی شکل دور زمین می‌چرخد. زمین در یکی از کانون‌های بیضی قرار دارد. سرعت ماهواره در نقطه‌ی اوج بیشتر است یا در نزدیک‌ترین نقطه به زمین ؟

۱۱-۷ حلقه‌ای به جرم M و شعاع R روی سطح میز بدون اصطکاک خوابیده است و نقطه‌ای در روی لبه‌ی آن به میز وصل

است. حلقه می‌تواند حول محور گذرنده از این نقطه‌ی لبه بچرخد. حشره‌ای به جرم m با سرعت V روی حلقه راه می‌رود. اگر حشره از نقطه‌ی اتصال آغاز به حرکت کند، سرعت زاویه‌ای حلقه را وقتی که

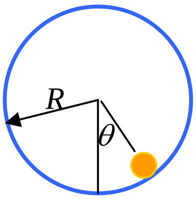
(الف) حشره نیمی از پیرامون حلقه را پیموده باشد.

(ب) به نقطه‌ی اتصال رسیده باشد، به دست آورید.



شکل ۱۱-۶۶

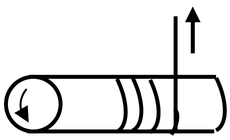
۱۱-۸ توپ کوچک همگنی به شعاع r در درون استوانه‌ی ثابتی به شعاع R ($r \ll R$) برابر شکل (۱۱-۶۷) بدون لغزیدن، می‌غلتد. بسامد نوسان‌های کوچک را بیابید.



شکل ۱۱-۶۷

۱۱-۹ استوانه‌ی توخالی به جرم M_1 و شعاع R_1 در درون استوانه‌ی توخالی دیگری به جرم M_2 و به شعاع R_2 بدون لغزش، می‌غلتد. محور هر دو استوانه افقی و $R_1 \ll R_2$ است. استوانه‌ی بزرگ آزاد است تا حول محورش بچرخد. بسامد نوسان‌های کوچک را حساب کنید.

۱۱-۱۰ ریسمانی روی استوانه‌ی توپری به جرم M و شعاع R پیچیده شده است. ریسمان از انتهای آزاد به طور عمودی به بالا کشیده می‌شود (شکل ۱۱-۶۸) تا با واپیچیده شدن ریسمان از سقوط مرکزجرم استوانه جلوگیری شود.

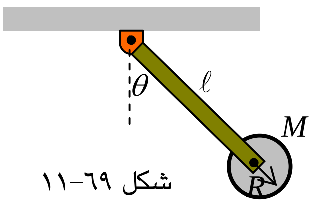

شکل ۱۱-۶۸

(الف): کشش ریسان چقدر است.

(ب): برای اینکه سرعت زاویه‌ای استوانه به مقدار ω برسد چقدر کار انجام گرفته است؟

(پ): در این هنگام چه طولی از ریسمان باز شده است.

۱۱-۱۱ آونگی برابر شکل (۱۱-۶۹) از یک قرص به جرم M و شعاع R و میله‌ای به طول ℓ و جرم m تشکیل شده است. قرص با بلبرینگ به میله وصل است.

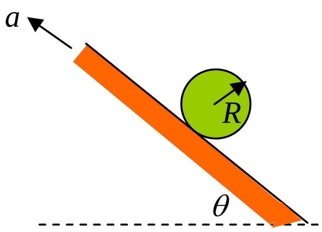


شکل ۱۱-۶۹

(الف) : دوره‌ی آونگ را برای نوسان‌های کوچک حساب کنید.

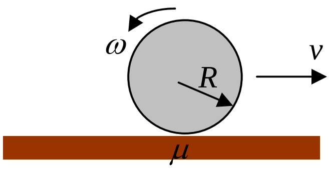
(ب): اگر قرص با بلبرینگ بدون اصطکاک به میله وصل شود، دوره‌ی آونگ چیست؟

۱۱-۱۲ گلوله‌ای با $I = (2/5)MR^2$ روی سطح شیب‌داری به شیب θ قرار دارد. سطح برابر شکل (۱۱-۷۰) با شتاب a رو به بالا (در امتداد سطح) حرکت می‌کند. به ازای چه مقدار a، گلوله نسبت به چارچوب آزمایشگاه بی حرکت می‌ماند. (فرض می‌کنیم اصطکاک بین سطح و گلوله به اندازه‌ی کافی بزرگ است که از لغزش گلوله نسبت به سطح جلوگیری کند.)



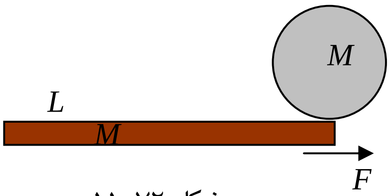
شکل ۱۱-۷۰

۱۱-۱۳ سکه‌ای به شعاع R ($I = (1/2)MR^2$) را برابر شکل (۱۱-۷۱) از لبه‌اش بر روی میز قرار داده‌ایم. سکه را با سرعت خطی v و سرعت زاویه‌ای (واگرد) ω به جلو می‌رانیم. ضریب اصطکاک بین سکه و میز μ است. به ازای چه مقدارهای v و ω سکه پس از پیمودن مسافت d از جایگاه اولیه‌اش هم از نطر انتقالی و هم از نظر چرخشی به حال سکون در می‌آید؟



شکل ۱۱-۷۱

۱۱-۱۴ سکه‌ای به جرم M و شعاع R و $I = (1/2)MR^2$) برابر شکل (۱۱-۷۲) در انتهای سمت راست تخته‌ای به جرم M



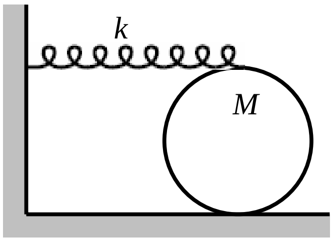
شکل ۱۱-۷۲

و طول L بر روی لبه‌اش ایستاده است. با نیروی ثابت F تخته را به سمت راست می‌کشیم. فرض کنید سکه نسبت به تخته نمی لغزد. یعنی بین تخته و سکه اصطکاک کافی وجود دارد که از لغزش جلو گیری کند.

(الف): شتاب های تخته و سکه را بیابید.

(ب): در زمانی که انتهای سمت چپ تخته به سکه می‌رسد، سکه چه مقدار جابه‌جا شده است؟

۱۱-۱۵ استوانه‌ی توپری به جرم M و شعاع R و $I = MR^2/2$ برابر شکل (۱۱-۷۳) به فنری با ثابت k وصل است. اگر استوانه بدون لغزش بغلتد، بسامد نوسان‌های کوچک را بیابید. (توجه: قسمت بالای استوانه بیش از مرکز آن جابه جا می‌شود.

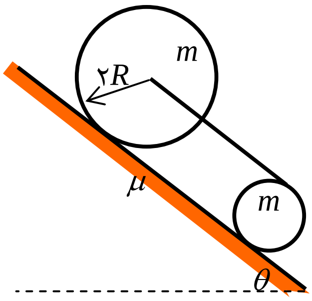


شکل ۱۱-۷۳

۱۱-۱۶ دو استوانه‌ی توپر هر یک به جرم m برابر شکل (۱۱-۷٤) روی سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب θ قرار دارند. شعاع یکی از استوانه‌ها R و شعاع دیگری $۲R$ است. محور استوانه‌ی بزرگ با ریسمانی به بدنه‌ی استوانه‌ی کوچک وصل است. استوانه‌ها را از حالت سکون رها می‌کنیم تا بدون لغزش در روی سطح به پایین بغلتند.

(الف) : شتاب استوانه ها را بیابید.

(ب): اگر ضریب اصطکاک بین سطح و استوانه‌ها $\mu = 1$ باشد، بیشینه مقداری را که θ می‌تواند داشته باشد و هنوز هم هیچ یک از استوانه‌ها در روی سطح نلغزد، چقدر است؟



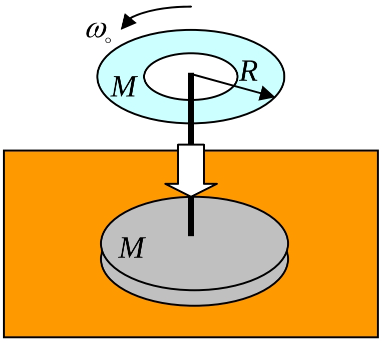
شکل ۱۱-۷٤

۱۱-۱۷ کره‌ای به شعاع r حول محور خود با سرعت زاویه‌ای ω_0 می‌چرخد. محور چرخش افقی است. کره را روی سطحی قرار می‌دهیم که ضریب اصطکاک آن μ است. کره نخست می‌لغزد و سپس بدون لغزش می‌غلتد.

(الف): سرعت خطی نهایی مرکزجرم کره را بیابید.

(ب): چه مسافتی را کره می‌پیماید تا به این سرعت نهایی برسد؟

(پ): برای وضعیتی که μ به اندازه‌ی کافی بزرگ است و لغزش روی نمی‌دهد، قسمت (الف) را دوباره حل کنید.



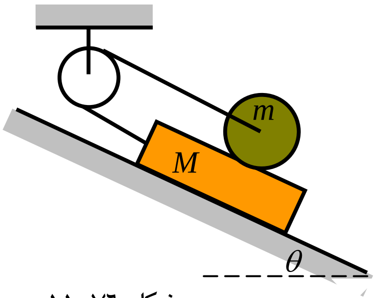
شکل ۱۱-۷۵

۱۱-۱۸ حلقه‌ای به جرم M، شعاع بیرونی R و شعاع درونی $R/۲$ با سرعت زاویه‌ای ω_0 خول محورش می‌چرخد. برابر شکل (۱۱-۷۵) این حلقه را روی قرصی به جرم M و شعاع R که در روی میز بدون اصطکاک ساکن است، قرار می دهیم. مرکزجرم حلقه و قرص بر هم منطبق اند. ضریب اصطکاک بین سطح حلقه و قرص μ است و شتاب گرانش به پایین است.

(الف): گشتاور اولیه که به قرص وارد می‌شود نسبت به مرکز جرم آن چقدر است؟ گشتاور اولیه‌ی وارد به حلقه نسبت به مرکز جرم آن چقدر است؟

(ب) : به خاطر وجود اصطکاک بین حلقه و قرص، سرانجام هر دو با یک سرعت زاویه‌ای خواهند چرخید. این سرعت زاویه‌ای مشترک را بیابید

(پ): چه مدت طول می‌کشد تا حلقه و قرص به این سرعت زاویه‌ای مشترک دست پیدا کنند؟



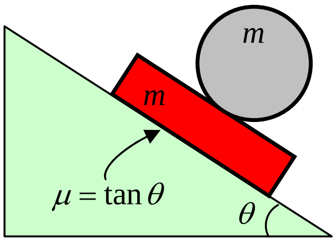
شکل ۷۶-۱۱

۱۱-۱۹ چرخی به جرم m (و $I = mR^2/2$) برابر شکل (۷۶-۱۱) روی تخته‌ای به جرم M قرار دارد (می‌توانید فرض کنید: $M > m$). تخته بر روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک با شیب θ قرار دارد. یک انتهای ریسمان بدون جرمی به محور چرخ گره خورده است و پس از گذشتن از روی قرقره‌ی بدون جرمی به تخته وصل شده است. فرض کنید که چرخ بدون لغزیدن بر روی تخته می‌غلتد. دو بخش ریسمان همواره با سطح موازی قرار دارد.

(الف): نمودار آزاد نیروهای وارد به تخته و چرخ را بکشید

(ب): شتاب تخته را حساب کنید.

۱۱-۲۰ استوانه‌ی توپری به جرم m (و $I = mR^۲/۲$) روی تخته ای به جرم m قرار دارد. تخته برابر شکل (۷۷-۱۱) روی گوه‌ی ثابتی با زاویه‌ی شیب θ قرار دارد. ضریب اصطکاک بین تخته و گوه $\mu = \tan\theta$ است. فرض کنید بین تخته و استوانه نیروی اصطکاک به اندازه‌ای بزرگ است که از لغزیدن استوانه نسبت به تخته جلوگیری می‌کند.

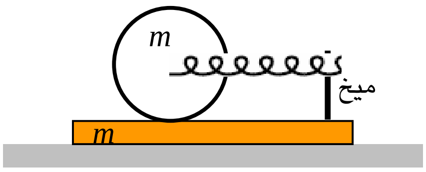


شکل ۷۷-۱۱

(الف): نمودار آزاد نیروهای وارد به تخته و استوانه را رسم کنید. مطمئن باشید که همه‌ی نیروها را بکشید.

(ب) : شتاب خطی استوانه را بیابید.

۱۱-۲۱ چرخی (با $I = mR^۲/۲$) برابر شکل (۷۸-۱۱) می‌تواند بدون لغزش روی یک تخته بغلتد. تخته روی سطح بدون اصطکاک می‌تواند بلغزد. محور چرخ با فنری با ثابت k به میخی در روی تخته وصل است. جرم چرخ و تخته، هر دو، m اند و میخ جرم ندارد. چرخ را از مکان ترازمندیش دور و سپس آن را از حالت سکون رها می‌کنیم.



شکل ۷۸-۱۱

(الف): نمودار آزاد نیروهای وارد به چرخ و تخته را بکشید (نگران نیروهای قائم نباشید و فرض کنید میخ بخشی از تخته است.)

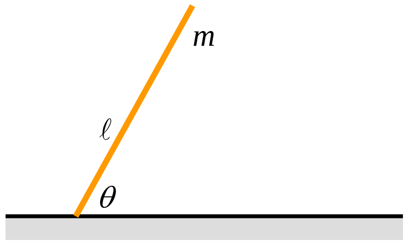
(ب): بسامد نوسان‌های سامانه را بیابید (فرض کنید که طول حالت ترازمندی فنر دراز است و بنابراین، چرخ با میخ برخورد نمی کند.)

۱۱-۲۲ میله‌ی همگنی به جرم m و طول ℓ (و $I = m\ell^۲/۱۲$ حول مرکز) را در نظر بگیرید.

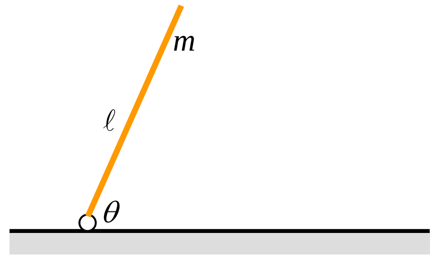
(الف): انتهای میله برابر شکل (۷۹-۱۱ الف) به روی میز افقی لولا شده است و میله می‌تواند حول آن بچرخد. میله را از وضعیتی که با افق زاویه‌ی θ می‌سازد، رها می‌کنیم. شتاب زاویه‌ای میله را درست پس از رها شدن حساب کنید.

(ب): مسئله را برای حالتی حل کنید که انتهای میله روی سطح افقی و بدون اصطکاک میز قرار دارد، اما به آن لولا **نشده** است (شکل ۷۹-۱۱ ب) و بنابراین، می‌تواند روی میز بلغزد.

۱۱-۲۳ میله‌ی همگنی به جرم m و طول ℓ (و $I = m\ell^۲/۱۲$ حول مرکز) روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد و حول

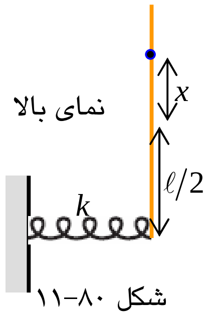


شکل ۱۱-۷۹ ب



شکل ۱۱-۷۹ الف

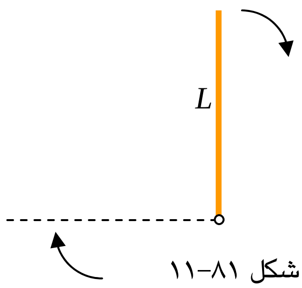
نقطه‌ای به فاصله‌ی x از مرکزش می‌چرخد. برابر شکل (۱۱-۸۰) فنری با ثابت k عمود بر انتهای میله به آن وصل است. به ازای چه مقدار x بسامد نوسان‌های کوچک میله بیشینه مقدار خود را دارد؟



شکل ۱۱-۸۰

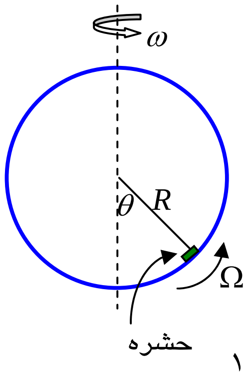
۱۱-۲۴ میله‌ی همگنی به طول L (و $I = mL^2/12$ حول مرکز) حول یک انتها می‌چرخد. میله را برابر شکل (۱۱-۸۱) در حالت عمودی نگه می‌داریم و سپس با تلنگر کوچکی رهایش می‌کنیم تا حول انتهایش تاب بخورد. وقتی میله سه چهارم یک دور چرخید و در وضعیت افقی قرار گرفت، محور چرخش را حذف می کنیم. میله در هوا معلق می‌شود و به سوی بالا حرکت می‌کند. بیشینه ارتفاعی را که مرکزجرم میله اوج می گیرد چقدر است؟ وقتی که مرکزجرم به این ارتفاع بیشینه می رسد، چه زاویه ای با افق می سازد؟

۱۱-۲۵ قرص کوچکی به جرم m و شعاع R (و $I = mR^2/2$) برابر شکل (۱۱-۸۲) روی سطح یخی بدون اصطکاک می لغزد. سرعت خطی قرص v و به سوی راست و سرعت زاویه‌ای آن ω و ساعتگرد است. قرص با انتهای میله‌ای به جرم m و به طول $2R$ (و $I = m(2R)^2/2$ نسبت به مرکزش) تماس پیدا می‌کند و به آن می‌چسبد و جسمی مثل آب نبات چوبی می‌سازد. سرعت زاویه‌ای آب نبات چوبی را حساب کنید و مقدار آن را برای حالت خاص $v = R\omega$ به دست آورید.

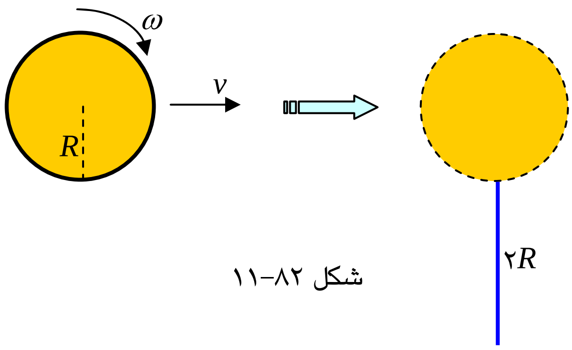


شکل ۱۱-۸۱

۱۱-۲۶ حلقه‌ی بدون جرم شکل (۱۱-۸۳) با سرعت زاویه‌ای *ثابت* ω حول قطرش می چرخد. حشره‌ای به جرم m با سرعت زاویه‌ای *ثابت* Ω در روی این حلقه راه می‌رود. وقتی حشره در زاویه‌ی θ است



شکل ۱۱-۸۳

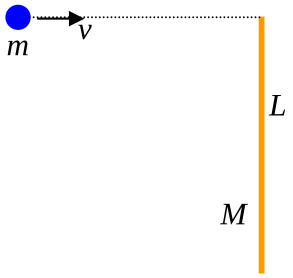


شکل ۱۱-۸۲

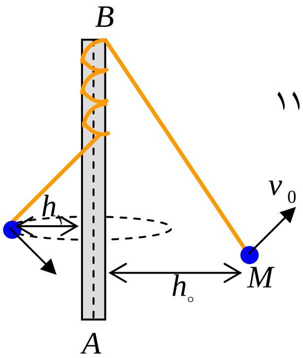
ازطرف حلقه به آن نیروی کل **N** وارد می‌شود. مولفه‌ی عمود بر صفحه‌ی حلقه‌ی **N** را $\mathbf{N}_\perp$ بنامید و آن را حساب کنید. (آهنگ تغییر **L** حشره را حول محور چرخش حساب کنید و از گشتاور وارد به حشره استفاده کنید.)

۱۱-۲۷ جرم M در شکل (۱۱-۸٤) به ریسمان MB وصل است. به جرم M سرعت اولیه‌ی مماسی v_0 (v_0 به صفحه‌ی ABM عمود است) داده می‌شود. در اثر حرکت جرم، ریسمان به دور میله‌ی نازک AB می‌پیچد. اگر فاصله‌ی اولیه‌ی جرم تا میله h_0 باشد، وقتی جرم در فاصله‌ی h_1 از میله است، سرعت جرم چقدر است؟

۱۱-۸ در شکل (۱۱-۸۵) میله‌ای به جرم M و به طول L روی میز بدون اصطکاک قرار دارد. گلوله‌ای به جرم m با سرعت v در راستای عمود بر میله حرکت و با یک انتهای میله برخورد کشسان می‌کند. برای این که پس از برخورد، گلوله ساکن بماند



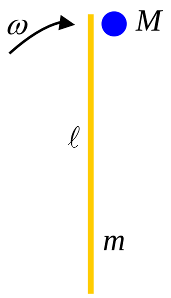
شکل ۱۱-۸۵



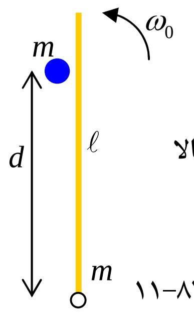
شکل ۱۱-۸٤

مقدار m برحسب M چقدر باید باشد؟

۱۱-۲۹ میله‌ی همگنی به جرم m و طول ℓ ($I = m\ell^2/12$ نسبت به مرکز) روی میز افقی بدون اصطکاک قرار دارد و برابر شکل (۱۱-۸٦) با سرعت زاویه‌ای ω حول مرکزش می‌چرخد. مرکز میله ساکن است (اما با میخ یا لولا به میز وصل نیست). ذره‌ای به جرم M روی میز قرار دارد و انتهای میله با آن برخورد کشسان می‌کند. برای این که میله پس از برخورد حرکت چرخشی نداشته باشد و فقط حرکت انتقالی داشته باشد، مقدار M چقدر باید باشد؟



شکل ۱۱-۸٦

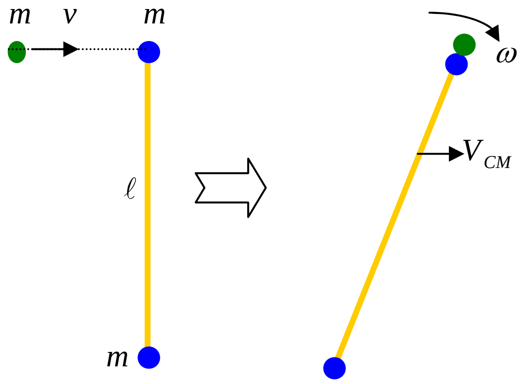


شکل ۱۱-۸۷

۱۱-۳۰ یک انتهای میله‌ی همگنی به جرم m و طول ℓ (با $I = m\ell^2/3$ نسبت به یک انتها) برابر شکل (۱۱-۸۷) به میزی لولا شده است. میله در روی سطح بدون اصطکاک میز با سرعت زاویه‌ای ω_0 می‌چرخد. توپی به جرم m در فاصله‌ی d از لولا قرار دارد و میله با آن برخورد کشسان می‌کند.

(الف): سرعت توپ را پس از برخورد به دست آورید.

(ب): به ازای چه مقدار d این سرعت بیشینه می‌شود؟



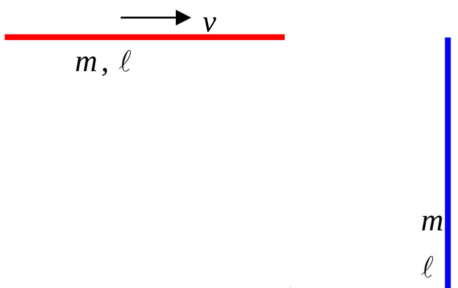
شکل ۱۱-۸۸

۱۱-۳۱ دمبلی از دو جرم m و میله‌ی بدون جرم به طول ℓ تشکیل شده است و روی میز افقی بدون اصطکاک قرار دارد. جرم m برابر شکل (۱۱-۸۸) با سرعت v و عمود بر دمبل حرکت می‌کند و با جرم بالایی دمبل برخورد می کند و به آن می‌چسبد.

(الف): سرعت زاویه ای ω سامانه ی پس از برخورد را به دست آورید.

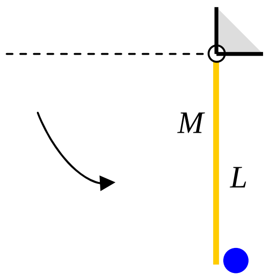
(ب): سرعت انتهای دوجرمی را پس از آنکه میله نیم دور چرخید، حساب کنید.

۱۱-۳۲ میله‌ای به جرم m و طول ℓ برابر شکل (۸۹-۱۱) در امتداد محور y روی سطح افقی میز بدون اصطکاک قرار دارد. میله‌ی یکسان دیگری با سرعت v در امتداد محور x حرکت می‌کند و با میله‌ی اولی برخورد می‌کند و به یک انتهای آن می‌چسبد و جسم سختی با زاویه‌ی 90° می‌سازد. سرعت زاویه‌ای جسم حاصل را پس از برخورد به دست آورید. در این برخورد چه مقدار انرژی به صورت گرما تلف می‌شود؟



شکل ۸۹-۱۱

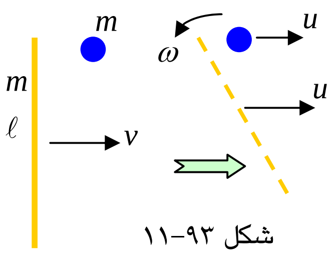
۱۱-۳۳ میله‌ای به جرم M و طول L (با $I = ML^2/2$ نسبت به مرکز و $I = ML^2/3$ نسبت به یک انتها) برابر شکل (۹۰-۱۱) از یک انتها آویزان است و می‌تواند حول این انتها تاب بخورد. میله را از حالت افقی رها می‌کنیم. میله تاب می‌خورد و وقتی به وضعیت قائم می‌رسد، انتهای آزادش با توپی برخورد کشسان می کند. اگر در اثر برخورد، میله نصف سرعت زاویه‌ای خود را از دست بدهد، جرم توپ چقدر است؟ سرعت توپ درست پس از برخورد چیست؟



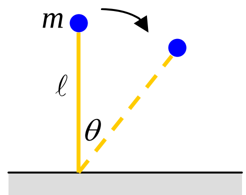
شکل ۹۰-۱۱

۱۱-۳۴ میله‌ای به جرم m وطول ℓ برابر شکل (۹۱-۱۱) به طور قائم قرار دارد و انتهای پایین آن به تکیه گاهی لولا شده است. به میله تلنگر کوچکی وارد می‌کنیم تا حول لولا بچرخد. در لحظه‌ای که میله افقی قرار می‌گیرد (پس از یک چهارم دور چرخیدن) مولفه‌های افقی وعمودی نیرویی را که لولا به میله وارد می‌کند به دست آورید.

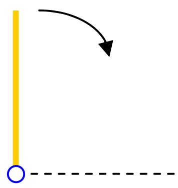
۱۱-۳۵ برابر شکل (۹۲-۱۱) میله‌ی بدون جرمی به طول ℓ روی میزی به طور قائم ایستاده است و جرم m به انتهای آن وصل



شکل ۹۳-۱۱



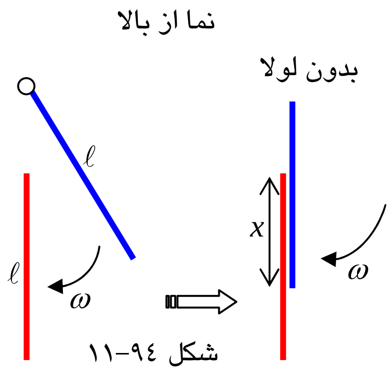
شکل ۹۲-۱۱


شکل ۹۱-۱۱

است. ضریب اصطکاک ایستایی بین میله و سطح میز μ است. به جرم m تلنگرکوچکی می زنیم و سامانه‌ی میله بعلاوه‌ی جرم شروع به افتادن می‌کند. در چه زاویه‌ی θ نسبت به خط قائم، میله در روی میز شروع به لغزیدن می‌کند؟

۱۱-۳۶ میله‌ای برابر شکل (۹۳-۱۱) روی میز بدون اصطکاک سُر می‌خورد و یک انتهایش با توپی برخورد کشسان می‌کند. جرم‌های میله و توپ هر دو m اند؛ اما جرم میله چنان توزیع شده است که گشتاور لختی آن نسبت به مرکزجرمش که در وسط میله قرار دارد $I = Am\ell^2$ است. A یک ضریب عددی است. برای این که سرعت توپ با سرعت میله پس از برخورد برابر باشد، A چقدر باید باشد؟

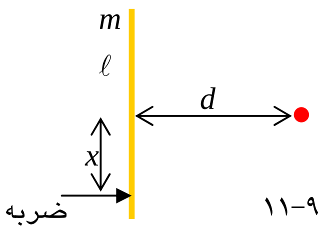
۱۱-۳۷ میله‌ای به جرم m و طول ℓ (و $I = m\ell^2/12$) روی میز بدون اصطکاک با سرعت زاویه‌ای ω حول یک انتها می‌چرخد. این انتها با لولا به میز وصل است. این میله با میله‌ی مشابهی برابر شکل (۹۴-۱۱) برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. طول هم پوشانی دو میله x است. درست پیش از برخورد میله‌ها، لولا را حذف می‌کنیم. برای این که سامانه‌ی"دومیله‌ای" حرکت چرخشی نداشته باشد و فقط حرکت انتقالی داشته باشد، مقدار x چقدر باید باشد؟



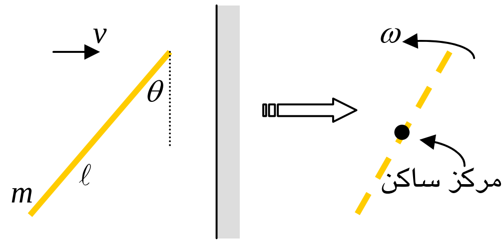
شکل ۱۱-۹٤

۱۱-۳۸ میله‌ی همگنی به جرم m و طول ℓ روی سطح بدون اصطکاک حرکت می‌کند. بردار سرعت $\mathbf{v}$ میله به دیواری عمود است. میله نمی‌چرخد و با جهت دیوار برابر شکل (۹۵-۱۱) زاویه‌ی θ می‌سازد. اگر میله به طور کشسان با دیوار برخورد کند، برای این که پس از برخورد سرعت مرکزجرم میله صفر شود، θ باید چقدر باشد؟

۱۱-۳۹ میله‌ای به طول ℓ (و $I = m\ell^2/12$) روی میز بدون اصطکاک قرار دارد. در فاصله‌ی x از مرکز میله و عمود بر آن، به میله ضربه‌ای سریع وارد می‌کنیم (شکل ۹٦-۱۱ را ببینید). نقطه‌ای به فاصله‌ی d از مکان اولیه‌ی مرکزجرم میله در روی آن با رنگ سرخ مشخص شده است. برای این که در موقع رسیدن مرکز میله به این نقطه، میله یک دور کامل بچرخد،

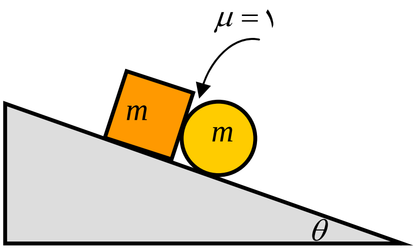


شکل ۱۱-۹٦



شکل ۱۱-۹۵

مقدار x (برحسب ℓ و d) چقدر باید باشد؟ برای این که چنین مقداری برای x وجود داشته باشد، کمینه مقدار d (برحسب ℓ) چقدر باید باشد؟



شکل ۱۱-۹۷

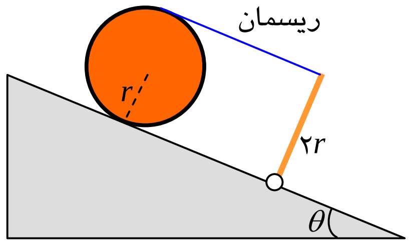
۱۱-۴۰ یک استوانه‌ی توپر (با $I = mR^2/2$) و یک قطعه‌ی مکعبی، هر دو با جرم m ، روی سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب θ قرار دارند و برابر شکل (۹۷-۱۱) با هم درتماس اند. بین استوانه و سطح اصطکاک به اندازه‌ای است که از لغزش استوانه جلوگیری می کند؛ اما کف قطعه روغن کاری شده است و بین آن و سطح شیب‌دار اصطکاک وجود ندارد. بین سطح سمت راست قطعه و استوانه ضریب اصطکاک جنبشی $\mu = 1$ است.

(الف): نمودار آزاد نیروهای وارد به قطعه و استوانه را رسم کنید. همه‌ی نیروها را نشان دهید.

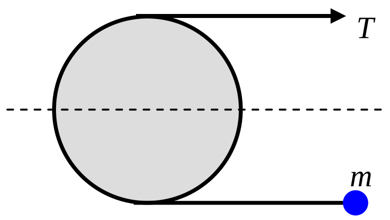
(ب): شتاب قطعه را بیابید (فرض کنید θ به اندازه‌ی کافی کوچک است و سطح قطعه همواره با سطح شیب‌دار در تماس باقی می‌ماند. چه شرطی برای θ باید وجود داشته باشد تا این وضعیت برقرار باشد؟)

۱۱-۴۱ استوانه‌ی توپری به جرم m و شعاع r (و با گشتاور لختی $I = mr^2/2$ نسبت به محورش) و میله‌ی همگنی به جرم m و طول $2r$ (و $I = m(2r)^2/12$ نسبت به مرکزش) روی سطح شیب‌دار ثابتی با زاویه‌ی شیب θ قرار دارند. میله برابر شکل (۹۸-۱۱) بر سطح شیب‌دار عمود است. استوانه بدون لغزیدن روی سطح می‌غلتد و میله با لولایی به سطح وصل است. ریسمان بدون جرمی انتهای بالایی میله را به "بالای" استوانه وصل می‌کند. اگر سامانه را از این وضعیت رها کنیم، درست پس از رها شدن، شتاب مرکز استوانه را به دست آورید.

۱۱-۴۲ استوانه‌ی توپری به شعاع R و به جرم m (و با $I = mR^2/2$) از قاعده روی میز افقی بدون اصطکاک قرار دارد.



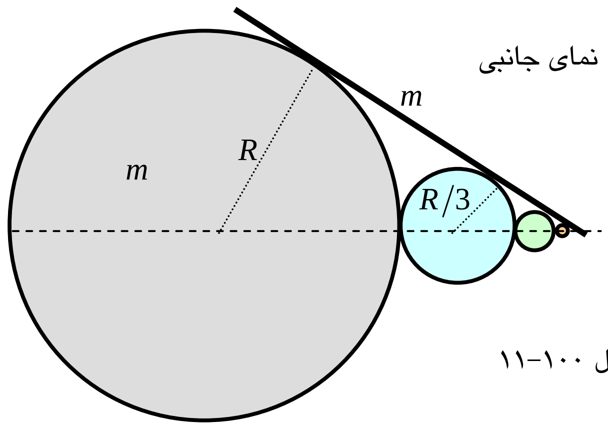
شکل ۹۸-۱۱



شکل ۹۹-۱۱

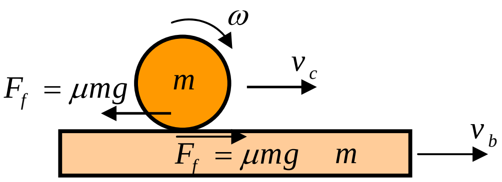
ریسمان بدون جرمی برابر شکل (۹۹-۱۱) از پشت استوانه می‌گذرد و نیم دور با بدنه‌ی استوانه در تماس است. جرم m به یک انتهای ریسمان وصل است. انتهای دیگر ریسمان با نیروی T کشیده می‌شود. سطح استوانه به اندازه‌ی کافی نا هموار است که از لغزش ریسمان نسبت به استوانه جلوگیری کند. فرض کنید مرکز استوانه مقید است روی خط راست حرکت کند (خط بریده در شکل). شتاب جرم m متصل به ریسمان را بیابید. (توجه: برای ساده‌تر شدن معادله‌ها $a_\circ \equiv T/m$ را تعریف کنید. با این کار m ها از رابطه‌ها حذف می‌شوند . پاسخ را بر حسب $a_\circ$ به دست آورید.)

۱۱-۴۳ از یک صفحه‌ی تخت فلزی بینهایت قرص می‌بریم (بنابراین، چگالی سطحی جرم همه‌ی قرص‌ها یکسان و برابر σ است). قرص‌ها را روی خط افقی می‌چینیم به طوری که مرکزشان روی خط راستی قرار گیرند (شکل ۱۰۰-۱۱ را ببینید.) قرص‌ها می‌توانند حول مرکز ثابتشان بچرخند. بین قرص‌ها اصطکاک وجود ندارد (می‌توانید فرض کنید که قرص‌ها با فاصله های بینهایت کوچک از هم قرار دارند.) شعاع بزرگ-ترین قرص R (و $I = mR^۲/۲$) است و شعاع هر قرص بعدی ۱/۳ شعاع قرص سمت چپ‌اش است. میله‌ای را که جرم m آن با جرم بزرگ‌ترین قرص برابر است مطابق شکل روی قرص‌ها قرار می‌دهیم تا با همه‌ی قرص‌ها در تماس باشد. سامانه را از این وضعیت رها می‌کنیم. می‌توان نشان داد (شما این را بپذیرید) که ضریب ۱/۳ بالا به این معنی است که میله با خط افق زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد. با فرض این که میله نسبت به هیچ یک از قرص‌ها نمی‌لغزد، شتاب میله را در امتداد خودش به دست آورید.



شکل ۱۰۰-۱۱

حل مثال‌های تکمیلی



شکل ۱۰۱-۱۱

ت-۱ در زمانی پس از آغاز حرکت استوانه وهنگامی که هنوز استوانه روی تخته می‌لغزد، نیروهای وارد به تخته و استوانه در شکل (۱۰۱-۱۱) نشان داده شده‌اند. نیروی اصطکاک $F_f=\mu mg$ است. بنابراین، شتاب تخته $a_b=\mu g$ و شتاب استوانه $a_c=-\mu g$ اند. بنابراین،

$$v_c=v_\circ-\mu gt \quad , \quad v_b=\mu gt$$ (۱۱-۱۳۷

گشتاور وارد به استوانه $F_f r$است . پس:

$$F_f r=I\alpha \Rightarrow \mu mgr=\left(mr^2/2\right)\alpha \Rightarrow \alpha=2\mu g/r$$ (۱۱-۱۳۸)

و در نتیجه

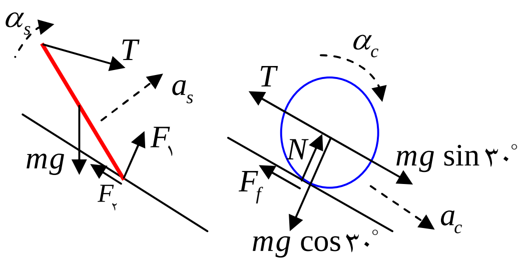
$$\omega=\alpha t=\frac{2\mu gt}{r}$$ (۱۱-۱۳۹)

هنگامی که سرانجام استوانه بدون لغزیدن بر روی تخته می‌لغزد، شرط غلتش بدون لغزش لازم می‌دارد که سرعت استوانه نسبت به زمین برابر $v_c=v_b+r\omega$ باشد. توجه کنید که سرعت استوانه نسبت به تخته $r\omega$ است که نتیجه‌ی چرخش رو به جلو استوانه است که با افزودن سرعت تخته، v_b ، به آن سرعت استوانه نسبت به زمین به دست می‌آید. حال اگر در $v_c=v_b+r\omega$ کمیت‌های بالا را جاگذاری کنیم ، به دست می‌آید

$$v_c=v_b+r\omega \Rightarrow v_\circ-\mu gt=\left(\mu gt\right)+r\left(\frac{2\mu gt}{r}\right) \Rightarrow v_\circ=4\mu gt \Rightarrow t=\frac{v_\circ}{4\mu g}$$ (۱۱-۱۴۰)

این زمانی است که استوانه شروع به غلتش خالص می‌کند. سرعت استوانه نسبت به زمین در این لحظه برابر است با

$$v_c=v_\circ-\mu gt=v_\circ-\mu g\left(\frac{v_\circ}{4\mu g}\right)=\frac{3}{4}v_\circ$$ (۱۱-۱۴۱)



شکل ۱۰۲-۱۱

ت-۲ : (**الف**) شکل‌های (۱۰۲-۱۱). برای حل مسئله یافتن F_1 ، F_2 و a_s لازم نیست (یعنی نیازی به دو معادله‌ی $F=ma$ برای میله یا معادله‌ی $a=r\alpha$ میله یا $F=ma$ در راستای عمودی برای استوانه لازم نیست).

(**ب**): از معادله‌ی $F=ma$ برای استوانه در امتداد سطح داریم

$$mg\sin 30^\circ-T-F_f=ma_c$$

$$\Rightarrow \frac{mg}{2}-T-F=ma_c$$ (۱۱-۱۴۲)

از $G=I\alpha$ برای استوانه نسبت به مرکز آن به دست می‌آید

$$F_f R=\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\alpha_c \Rightarrow F_f=\frac{1}{2}mR\alpha_c$$ (۱۱-۱۴۳)

از $G=I\alpha$ برای میله حول پیوندگاه آن داریم

$$T\left(۲R\sin ۳۰^\circ\right)-mg\left(R\sin ۳۰^\circ\right)=\left[\left(\frac{۱}{۳}\right)m\left(۲R\right)^۲\right]\alpha_s \quad\Rightarrow\quad T-\frac{mg}{۲}=\frac{٤}{۳}mR\alpha_s \tag{۱۱-۱٤٤}$$

شرط نلغزیدن استوانه :

$$a_c=R\alpha_c \tag{۱۱-۱٤٥}$$

رابطه‌ی بین a_c و a_s (این بخش پیچیده است) از پایستگی طول ریسمان داریم: اگر میله به اندازه‌ی زاویه‌ی کوچک θ_s بچرخد، انتهای بالایی آن به اندازه‌ی $\left(۲R\right)\theta_s$ حرکت می‌کند. مولفه‌ی این طول در امتداد ریسمان $\left(۲R\theta_s\right)\cos ٦۰^\circ=R\theta_s$ است. بنابراین، ریسمان و در نتیجه استوانه مسافت $x_c=R\theta_s$ را در امتداد سطح شیب‌دار می‌پیماید. اگر از این رابطه دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم به دست می‌آید

$$a_c=R\alpha_s \tag{۱۱-۱٤٦}$$

(پ): نیروهای مجهول عبارتند از T و F_f و شتاب‌های مجهول α_c، α_s و a_c اند.

(ت): با استفاده از معادله‌های (۱۱-۱٤٥) و (۱۱-۱٤٦) می‌توان $R\alpha_c$ و $R\alpha_s$ را از رابطه‌های (۱۱-۱٤۳) و (۱۱-۱٤٤) حذف کرد. این دو معادله به صورت زیر درمی‌آیند.

$$F_f=\frac{۱}{۲}ma_c \quad;\quad T-\frac{mg}{۲}=\frac{٤}{۳}ma_c \tag{۱۱-۱٤۷}$$

حالا از این رابطه، T و F_f را در معادله‌ی (۱۱-۱٤۲) قرار دهید. به دست می‌آید

$$\frac{mg}{۲}-\left(\frac{mg}{۲}+\frac{٤}{۳}ma_c\right)-\left(\frac{۱}{۲}ma_c\right)=ma_c \quad\Rightarrow\quad ۰=\left(\frac{٤}{۳}+\frac{۱}{۲}+۱\right)ma_c \quad\Rightarrow\quad a_c=۰ \tag{۱۱-۱٤۸}$$

بنابراین، سامانه اصلا حرکت نمی‌کند. این وضعیت را می‌توان به صورت زیر فهمید: گشتاور وارد به کل سامانه (توجه کنید که حالا کشش ریسمان نیروی داخلی است) نسبت به پیوندگاه میله را فقط نیروی گرانش mg میله و نیروی $mg\sin ۳۰^\circ$ استوانه فراهم می‌کنند (N با $mg\cos 30^\circ$ حذف می‌شود). پس داریم

$$G_c+G_s=\left(mg\sin ۳۰^\circ\right)R-mg\left(R\sin ۳۰^\circ\right)=۰$$

ت-۳ (الف) : با استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی، نخست گشتاور لختی قطعه را نسبت به لولا حساب کنید. داریم

$$I=I_{CM}+md^۲=\frac{۱}{٦}m\ell^۲+m\left(\ell/\sqrt{۲}\right)^۲=\frac{۲}{۳}m\ell^۲ \tag{۱۱-۱٤۹}$$

وقتی توپ در گوشه‌ی مکعب قرار می‌گیرد، گشتاور لختی‌اش نسبت به لولا $m\left(\sqrt{۲}\ell\right)^۲=۲m\ell^۲$ است. بنابراین، گشتاور لختی کل سامانه نسبت به لولا عبارت است از

$$\frac{۲}{۳}m\ell^۲+۲m\ell^۲=\frac{۸}{۳}m\ell^۲ \tag{۱۱-۱٥۰}$$

از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به لولا به دست می‌آید

$$mv\ell=\left(\frac{۸}{۳}m\ell^۲\right)\omega \quad\Rightarrow\quad \omega=\frac{۳v}{۸\ell} \tag{۱۱-۱٥۱}$$

(ب): پس از برخورد انرژی کل سامانه تغییر نمی‌کند . پایسته باقی می‌ماند. از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم تا ببینیم آیا مرکزجرم سامانه می‌تواند به اندازه‌ای بلند شود که درست در بالای نقطه‌ی تعلیق (بالای لولا) قرار گیرد؟ این وضعیت، مقدار حدی سرعت v را به دست می‌دهد. اگر سرعت گلوله بیش‌تر از این مقدار حدی باشد، قطعه بر روی سطح سمت راست خود

روی میز واژگون می‌شود.

مرکزجرم مجموعه‌ی قطعه و توپ (پس از برخورد توپ به قطعه و چسبیدن به آن) در نیم‌راه بین مرکز قطعه و توپ (گوشه‌ی سمت چپ بالایی قطعه) قرار دارد. یعنی در فاصله‌ی $\left(\sqrt{۲}\ell\right)\left(۳/٤\right)$ از لولا. انرژی جنبشی اولیه $I\omega^{۲}/۲$ است. می‌خواهیم همه‌ی این انرژی به انرژی پتانسیل تبدیل شود. یعنی داشته باشیم

$$\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}=\left(۲m\right)g\left(\Delta h\right) \qquad (۱۱-۱۵۲)$$

که در آن Δh مقدار جابه‌جایی عمودی مرکزجرم سامانه از مکان $\left(\sqrt{۲}\ell\right)\left(۳/٤\right)$ به بالای لولا است ، یعنی $۳\ell/٤$ است. پس، می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}=\left(۲m\right)g\left(\Delta h\right) \Rightarrow \frac{۱}{۲}\left(\frac{۸}{۳}m\ell^{۲}\right)\left(\frac{۳v}{۸\ell}\right)^{۲}=\left(۲m\right)g\left(\frac{۳}{٤}\sqrt{۲}\ell-\frac{۳}{٤}\ell\right)$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۱٦}mv^{۲}=\frac{۳\left(\sqrt{۲}-۱\right)}{۲}mg\ell \Rightarrow v=\sqrt{۸\left(\sqrt{۲}-۱\right)g\ell} \qquad (۱۱-۱۵۳)$$

ت-۴ سرعت خطی نهایی را v و سرعت زاویه‌ای نهایی را ω بنامید (چرخش پادساعتگرد را جهت مثبت فرض کنید. از پایستگی انرژی داریم

$$\frac{۱}{۲}mv_{\circ}^{۲}=\frac{۱}{۲}mv^{۲}+\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}=\frac{۱}{۲}mv^{۲}+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱۲}m\ell^{۲}\right)\omega^{۲} \qquad (۱۱-۱۵٤)$$

جمله‌ی اول سمت راست انرژی مرکزجرم میله و جمله‌ی دوم انرژی حول مرکزجرم است. از این رابطه داریم

$$v_{\circ}^{۲}=v^{۲}+\frac{۱}{۱۲}\ell^{۲}\omega^{۲} \qquad (۱۱-۱۵۵)$$

از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به گوشه‌ی مانع به دست می‌آید

$$mv_{\circ}\left(\frac{\ell}{۲}\right)=mv\frac{\ell}{۲}+\frac{۱}{۱۲}m\ell^{۲}\omega \Rightarrow v_{\circ}=v+\frac{۱}{٦}\ell\omega \qquad (۱۱-۱۵٦)$$

بازهم جمله‌ی اول تکانه‌ی زاویه‌ای مرکزجرم و جمله‌ی دوم L نسبت به مرکزجرم است. اگر v را از رابطه‌ی (۱۵٦-۱۱) به دست بیاوریم و در رابطه‌ی (۱۵۵-۱۱) جاگذاری کنیم، خواهیم داشت

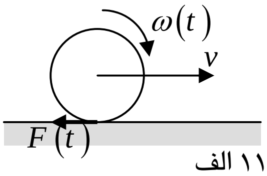
$$v_{\circ}^{۲}=\left(v_{\circ}-\frac{۱}{٦}\ell\omega\right)^{۲}+\frac{۱}{۱۲}\ell^{۲}\omega^{۲} \Rightarrow v_{\circ}^{۲}=v_{\circ}^{۲}-\frac{۱}{۳}v_{\circ}\ell\omega+\frac{۱}{۳٦}\ell^{۲}\omega^{۲}+\frac{۱}{۱۲}\ell^{۲}\omega^{۲}$$

$$\Rightarrow \omega=\frac{۳v_{\circ}}{\ell} \Rightarrow v=v_{\circ}-\frac{۱}{٦}\ell\omega=\frac{v_{\circ}}{۲} \qquad (۱۱-۱۵۷)$$

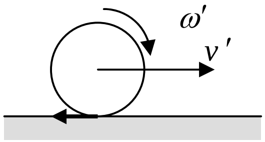
سرعت انتهای پایین میله، v'، جمع سرعت انتقالی مرکزجرم و سرعت چرخشی حول مرکزجرم (مربوط به دایره‌ای به شعاع $\ell/۲$) است:

$$v'=v+\omega\left(\ell/۲\right)=\frac{v_{\circ}}{۲}+\left(\frac{۳v_{\circ}}{\ell}\right)\left(\frac{\ell}{۲}\right)=۲v_{\circ} \qquad (۱۱-۱۵۸)$$

سرعت انتهای بالای میله (انتهایی که با مانع برخورد می‌کند) برابر است با $v-\omega\left(\ell/۲\right)=-v_{\circ}$.



شکل ۱۰۳-۱۱ الف



شکل ۱۰۳-۱۱ ب

ت-۵ در این مسئله هیچ یک از کمیت‌های انرژی، تکانه‌ی خطی و تکانه‌ی زاویه‌ای پایسته نیستند. بنابراین، برای حل آن باید از قانون‌های بنیادی به طور مستقیم استفاده کنیم. به سامانه نیروی خارجی اصطکاک وارد می‌شود و بنابراین $dp/dt \neq 0$ و تکانه‌ی خطی پایسته نیست. در فاصله‌ی بین آغاز حرکت و رسیدن سکه به حالت غلتش خالص، نیروی اصطکاک سبب هدر رفتن انرژی به صورت گرما می‌شود و انرژی پایسته نمی‌ماند. هم‌چنین، نیروی اصطکاک نسبت به مرکز سکه گشتاور خارجی تولید می‌کند و در نتیجه، تکانه‌ی زاویه‌ای پایسته نیست. در شکل (۱۰۳-۱۱ الف) وضعیت در فاصله‌ی بین آغاز حرکت و رسیدن به حالت غلتش بدون لغزش نشان داده شده است. در شکل (۱۰۳-۱۱ ب) حرکت غلتشی خالص دیده می‌شود. جهت‌های مثبت در این شکل‌ها نشان داده شده اند. سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای را وقتی سکه به حالت غلتش می‌رسد، به ترتیب، v' و ω' بنامید.

حل۱- نیروی اصطکاک $F(t)$ از سرعت خطی سکه می‌کاهد و سرعت زاویه‌ای را افزایش می‌دهد. تغییر سرعت زاویه‌ای به شتاب زاویه‌ای می‌انجامد: $\alpha = d\omega/dt$. عامل به وجود آمدن شتاب زاویه‌ای گشتاوری است که نیروی اصطکاک نسبت به مرکز سکه ایجاد می‌کند بنابراین، می‌توان نوشت

$$G = I\alpha \;\Rightarrow\; RF(t) = \frac{1}{2}MR^2\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{2F(t)}{MR} = \frac{d\omega}{dt} \qquad (۱۱\text{-}۱۵۹)$$

اگر از این رابطه انتگرال بگیریم و توجه کنیم که $\omega(t=0) \equiv \omega_0 = 0$ است، خواهیم داشت

$$\int_{\omega_0}^{\omega'} d\omega = \int_0^t \frac{2F(t')}{MR}dt' \;\Rightarrow\; \omega' - \cancel{\omega_0} = \frac{2}{MR}\int_0^t F(t')\,dt' \;\Rightarrow\; \omega' = \frac{2}{MR}\int_0^t F(t')\,dt' \qquad (۱۱\text{-}۱۶۰)$$

هم‌چنین داریم

$$F = ma \Rightarrow\; -F(t) = Ma \;\Rightarrow\; -F(t) = M\,\frac{dv}{dt}$$
$$\Rightarrow \int_v^{v'} dv = \int_0^t -\frac{F(t')}{M}dt' \;\Rightarrow\; v' = v - \frac{1}{M}\int_0^t F(t')dt' \qquad (۱۱\text{-}۱۶۱)$$

وقتی سکه به حالت غلتش بدون لغزش می‌رسد، شرط غلتش لازم می‌دارد که $v' = R\omega'$ شود. بنابراین، با استفاده از این شرط و رابطه‌های (۱۶۰-۱۱) و (۱۶۱-۱۱) می‌توان نوشت:

$$v' = v - \frac{1}{M}\left(\frac{MR}{2}\right)\omega' \;\Rightarrow\; v' = v - \frac{1}{M}\left(\frac{MR}{2}\right)\left(\frac{v'}{R}\right) = v - \frac{1}{2}v'$$
$$\Rightarrow\quad v' = v - -\frac{1}{2}v' \;\Rightarrow\; v' = \frac{2}{3}v \qquad (۱۱\text{-}۱۶۲)$$

حل ۲ با استفاده از رابطه‌ی (۱۳۵-۱۱)، $\Delta\mathbf{L} = \mathbf{R}\times\Delta\mathbf{p}$. این رابطه وقتی برقرار است که بازوی L ثابت است. با توجه به قرارداد جهت‌ها در مسئله‌ی ما این رابطه به صورت $\Delta L = -R\,\Delta p$ در می‌آید. یعنی

$$\Delta L = \int G\,dt = \int RF\,dt = R\int F\,dt = -R\int(-F)dt = -r(\Delta p) \qquad (۱۱\text{-}۱۶۳)$$

بنابراین،

$$\Delta L = -R\,\Delta p \;\Rightarrow\; L_f - L_i = -R\left(p_f - p_i\right) \;\Rightarrow\; I\omega' - ۰ = -R\left(Mv' - Mv\right) \qquad (۱۱-۱۶۴)$$

با اعمال شرط غلتش بدون لغزش، $v' = R\omega'$، رابطه‌ی بالا به صورت زیر در می‌آید

$$I\left(\frac{v'}{R}\right) = -RMv' + RMv \;\Rightarrow\; \left(\frac{۱}{۲}MR^{۲}\right)\left(\frac{v'}{R}\right) = -RMv' + RMv$$

$$\Rightarrow\; \frac{۳}{۲}v' = v \;\Rightarrow\; v' = \frac{۲}{۳}v \qquad (۱۱-۱۶۵)$$

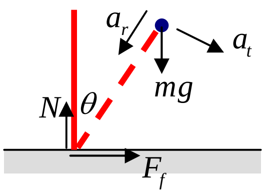
ت-۶ از پایستگی انرژی می‌توان سرعت v میله را وقتی که با خط قائم زاویه‌ی θ می‌سازد، به دست آورد. انرژی جنبشی اولیه‌ی میله صفر است. انرژی پتانسیل را هم در این حالت صفر در نظر بگیرید. داریم

$$E_۰ = E_۱ \;\Rightarrow\; ۰ + ۰ = (۱/۲)mv^{۲} - mg\ell(۱-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow\; (۱/۲)mv^{۲} = mg\ell(۱-\cos\theta) \;\Rightarrow\; v^{۲} = ۲g\ell(۱-\cos\theta) \qquad (۱۱-۱۶۶)$$

بنابراین، شتاب مرکزگرا (شکل ۱۰۴-۱۱ را ببینید) برابر است با

$$a_r = \frac{v^{۲}}{\ell} = ۲g(۱-\cos\theta) \qquad (۱۱-۱۶۷)$$



شکل ۱۰۴-۱۱

از گشتاور نسبت به نقطه‌ی تماس میله با زمین و $G = I\alpha$ داریم

$$mg\ell\sin\theta = \left(m\ell^{۲}\right)\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = g\sin\theta/\ell \qquad (۱۱-۱۶۸)$$

و بنابراین، شتاب مماسی a_t عبارت است از

$$a_t = \alpha\ell = g\sin\theta \qquad (۱۱-۱۶۹)$$

حال می‌توانیم معادله‌های $F = ma$ را در راستاهای افقی و عمودی بنویسیم (از رابطه‌ای مماسی و شعاعی $F = ma$ هم می‌توان استفاده کرد، اما این رابطه‌ها اندکی زشت و پیچیده می‌شوند). داریم

$$F_x = ma_x \;\Rightarrow\; F_f = ma_t\cos\theta - ma_r\sin\theta$$
$$\Rightarrow\; F_f = mg\left(\sin\theta\cos\theta - ۲(۱-\cos\theta)\sin\theta\right) \qquad (۱۱-۱۷۰)$$
$$= mg\sin\theta(۳\cos\theta - ۲)$$

$$F_y = ma_y \;\Rightarrow\; mg - N = ma_r\cos\theta + ma_t\sin\theta$$
$$\Rightarrow\; N = mg\left(۱ - ۲(۱-\cos\theta)\cos\theta - \sin^{۲}\theta\right)$$
$$= mg\left(۱ - ۲\cos\theta + ۲\cos^{۲}\theta - \left(۱-\cos^{۲}\theta\right)\right) = mg\cos\theta(۳\cos\theta - ۲) \qquad (۱۱-۱۷۱)$$

با توجه به شرط $F_f \le \mu N$ به دست می‌آید

$$mg\sin\theta(۳\cos\theta-۲) \le \mu mg\cos\theta(۳\cos\theta-۲) \;\Rightarrow\; \tan\theta \le \mu \qquad (۱۱-۱۷۲)$$

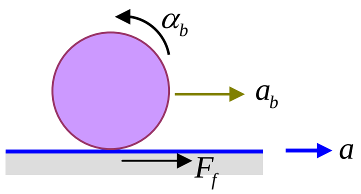
با وجود این، برقراری رابطه‌ی بالا براین پایه است که $(۳\cos\theta - ۲) > ۰$ باشد. اما $\cos\theta = ۲/۳$ یعنی $\tan\theta = \sqrt{۵}/۲$.

بنابراین، پاسخ مسئله عبارت است از این که در زاویه‌ی θ_s میله خواهد لغزید و θ_s برابر است با

$$\theta_s = \tan^{-۱}(\mu) \qquad ; \quad \mu \le \sqrt{۵}/۲$$
$$\theta_s = \tan^{-۱}\left(\sqrt{۵}/۲\right) \qquad ; \quad \mu \ge \sqrt{۵}/۲ \qquad (۱۱-۱۷۳)$$

نکته در این است که به ازای $\tan\theta=\sqrt{5}/2 \Leftrightarrow \cos\theta=2/3$ نیروی عمودی منفی می‌شود و بنابراین، اصطکاک وجود ندارد.

نکته: روشی که ما را به زودتر پاسخ بنیادی $\tan\theta\le\mu$ می‌رساند (هنوز هم باید شرط $\cos\theta\ge 2/3$ را دریابیم) این است که از $G=I\alpha$ نسبت به مکان جرم m استفاده کنیم. در این صورت $I=0$ و بنابراین $G=0$ می‌شود. این بدان معنی است که نیرویی که میز به میله وارد می‌کند در راستای میله است. از اینجا نتیجه می‌شود که $F_F=N\tan\theta$ و از شرط $F_f\le\mu N$ خواهیم داشت $N\tan\theta\le\mu N \Rightarrow \tan\theta\le\mu$. این پاسخ بنیادی است اما هنوز باید شرط $N>0$ را به آن اضافه کنیم.



شکل ۱۰۵-۱۱

ت-۷ شتاب مرکزکره را a_b و شتاب زاویه‌ای آن را α_b بنامید. نمودار نیروها و جهت‌های مثبت در شکل (۱۰۵-۱۱) نشان داده شده‌اند. از $F=ma$ برای کره داریم

$$F_f=Ma_b \qquad (11\text{-}174)$$

و از $G=I\alpha$ برای کره داریم

$$F_fR=(2/5)MR^2\alpha \qquad (11\text{-}175)$$

شرط نلغزیدن (نسبت به **صفحه‌ی کاغذ**) عبارت است از $a-R\alpha_b=a_b$؛ چون کره نسبت به صفحه‌ی کاغذ شتاب عقب‌گردی برابر $R\alpha_b$ دارد که بر اثر غلتش به وجود می‌آید و شتاب صفحه‌ی کاغذ هم a است و در نتیجه، شتاب کره نسبت به زمین (a_b) = شتاب گره نسبت به صفحه‌ی کاغذ + شتاب کاغذ نسبت به زمین :

$$a_b=-R\alpha_b+a \qquad (11\text{-}176)$$

اگر رابطه‌ی (۱۷۴-۱۱) را به (۱۷۵-۱۱) تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\frac{1}{R}=\frac{5}{2}\left(\frac{a_b}{R^2\alpha_b}\right) \Rightarrow R\alpha_b=\frac{5}{2}a_b \qquad (11\text{-}177)$$

که اگر در شرط نلغزیدن، رابطه‌ی (۱۷۶-۱۱) قرار دهیم به دست می‌آید

$$a-(5/2)a_b=a_b \quad\Rightarrow\quad a_b=2a/7 \qquad (11\text{-}178)$$