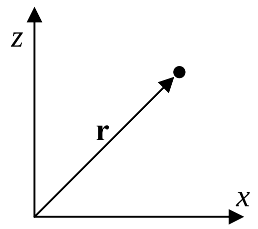
فصل ۱۱ دینامیک چرخش

۱-۱۱ دینامیک چرخشی ۱ ($\hat{\mathbf{L}}$ ثابت)

اینک در شرایطی قرار گرفته‌ایم که می‌توانیم دینامیک حرکت چرخشی را بررسی کنیم و نشان دهیم که آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای و گشتاورد با رابطه‌ی $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ به یکدیگر مربوط اند. این رابطه، مانسته‌ی چرخشی قانون نیوتون $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ است. ایده‌ی اصلی در اینجا سرراست است، با وجود این، دو نکته‌ی ظریف وجود دارد که باید آنها را فهمید. یکی به نیروهای درونی بین مجموعه‌ای از ذرات مربوط است. دیگری به مبداء هایی (نقاطی که نسبت به آنها تکانه‌ی زاویه‌ای محاسبه می‌شود) می‌پردازد که ثابت نیستند. برای ساده کردن و سرراست بودن بحث، سه وضعیت را، به ترتیب از ساده تا پیچیده، بررسی می‌کنیم و سپس قضیه‌ی عمومی را از آنها نتیجه می‌گیریم. اثباتی را که برای $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ در این فصل خواهیم آورد برای حالت عمومی هم برقرار است.

۱-۱-۱۱ جرم نقطه‌ای ، مبداء ثابت

شکل (۱-۱۱) یک جرم نقطه‌ای را در مکان $\mathbf{r}$ نسبت به مبداء ثابت نشان می‌دهد. مشتق نسبت به زمان تکانه‌ی زاویه‌ای $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ عبارت است از



شکل ۱-۱۱

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = (\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p}) + (\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}) \\ = \mathbf{v}\times(m\mathbf{v}) + \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \circ + \mathbf{r}\times\mathbf{F} \qquad (۱۱-۱)$$

$\mathbf{F}$ نیرویی است که به جرم وارد می‌شود. این همان اثباتی است که برای قضیه‌ی ۱-۷ آوردیم. در اینجا به جای نیروی مرکزی، نیروی را عمومی در نظر گرفتیم. در سطر دوم رابطه‌ی (۱-۱۱) جمله‌ی اول سمت راست صفر است (چون $d\mathbf{r}/dt\times\mathbf{p} = \mathbf{v}\times m\mathbf{v} = \circ$) و در جمله‌ی دوم $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ است. چون گشتاور با $\mathbf{G} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ تعریف می‌شود ، پس داریم

$$\mathbf{G} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (۱۱-۲)$$

این همان قانون پایستگی تکانه زاویه‌ای است که در فصل ۷ دیدیم. اگر گشتاور کل وارد به یک سامانه صفر باشد، $d\mathbf{L}/dt = \circ$ و در نتیجه $\mathbf{L}$ ثابت است.

مثال ۱-۱۱ (آونگ مخروطی): برابر شکل (۲-۱۱) جرم M از میله‌ی بدون جرم به طول ℓ آویزان است. میله با خط عمود زاویه‌ی α می‌سازد و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد ؛ در نتیجه، جرم M روی دایره‌ای افقی با شعاع ثابت می گردد .

(الف): زاویه α را حساب کنید. درستی پاسخ را برای $\omega\to\infty$ و $\omega\to\circ$ بیازمائید.

(ب): تکانه‌ی زاویه‌ای جرم M را نسبت به مرکز دایره به دست آورید.

(پ): تکانه‌ی زاویه‌ای جرم M را نسبت به نقطه‌ی آویز B به دست آورید.

(ت): نشان دهید که برای (ب) $d\mathbf{L}/dt = \circ$ برقرار است.

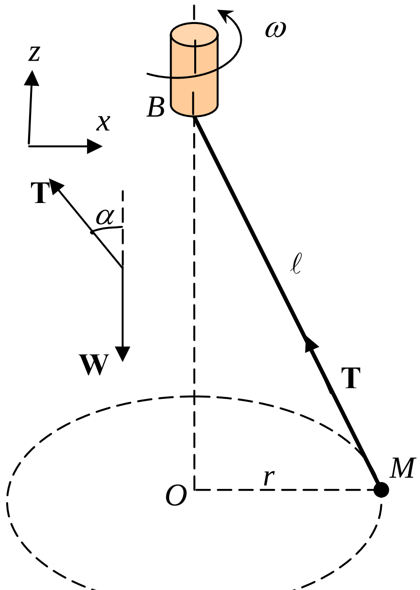
(ج): آهنگ تغییر تکانه زاویه‌ای، $d\mathbf{L}/dt$ ، را برای حالت (پ) به دست آورید.

حل: (**الف**) نمودار آزاد نیروها را بکشید: T کشش در ریسمان و W وزن جرم M اند. معادله‌ی حرکت در راستای عمودی

عبارت است از

$$F_z = ma_z = m\ddot{y} \quad \Rightarrow \quad T\cos\alpha - W = 0 \qquad (۱۱-۳)$$

چون z ثابت است بنابراین ، $\ddot{z}=0$ است.



شکل ۲-۱۱

معادله‌ی حرکت افقی: چون جرم M حرکت دایره‌ای دارد از فصل ۱ می‌دانیم که شتاب‌دار است و شتاب مرکزگرای آن $a_r = -r\omega^2$ و به سوی مرکز دایره است. (علامت منفی به خاطر جهتی است که برای x برگزیدیم؛ شکل (۲-۱۱) را ببینید. پس، با این انتخاب دستگاه مختصات داریم:

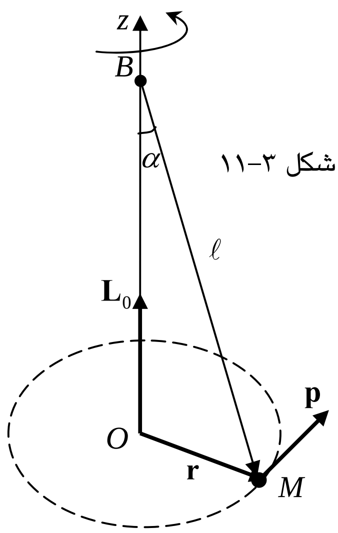
$$-T\sin\alpha = -Mr\,\omega^2 \qquad (۱۱-٤)$$

چون $r = \ell\sin\alpha$ است، پس با ترکیب رابطه‌های (۳-۱۱) و (٤-۱۱) خواهیم داشت

$$T\sin\alpha = M\,\ell\omega^2\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad T = M\,\ell\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad M\,\ell\omega^2\cos\alpha = W = mg \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2} \qquad (۱۱-٥)$$

به نظر می‌رسد که این پاسخ دلخواه است؛ چون برای $\omega\to\infty$ داریم: $\cos\alpha\to 0$ و $\alpha\to\pi/2$ یعنی در سرعت‌های زیاد میله می‌کوشد در حالت افقی قرار بگیرد. اما این پاسخ برای سرعت‌های کم بی معنی است ؛ چون بازای $\omega\to 0$ پیش‌بینی پاسخ این است که $\cos\alpha\to\infty$ و این بی‌معنی است؛ چون همواره $\cos\alpha\le 1$ است. دشواری در کجاست؟ برای $\omega<\sqrt{g/\ell}$ پاسخ ما به نتیجه‌ی $\cos\alpha>1$ می‌انجامد. اگر $\omega=\sqrt{g/\ell}$ باشد، $\cos\alpha=1$ و $\sin\alpha=0$ می شوند؛ یعنی جرم M به طور قائم آویزان است. در واقع، هنگام به دست آوردن $T = M\,\ell\omega^2$ ما دو طرف رابطه‌ی بالا را به $\sin\alpha=0$ تقسیم کردیم که کار نادرستی بود. ما همچنین پاسخ دیگری را نادیده گرفتیم، یعنی $\sin\alpha=0$ و $T = W = Mg$ که برای هر مقدار ω درست است ـ پاسخ برای آونگی که به طور قائم آویزان است. از نظر فیزیکی؛ برای $\omega\le\sqrt{g/\ell}$ تنها پاسخ پذیرفتنی $\alpha=0$ یا $\cos\alpha=1$ است. برای $\omega>\sqrt{g/\ell}$ دو پاسخ پذیرفتنی وجود دارد: (۱) $\cos\alpha=1$ و (۲) $\cos\alpha=g/\omega^2\ell$. پاسخ (۱) به آونگی مربوط است که به طور قائم آویخته است و با سرعت زیاد می‌چرخد. پاسخ (۲) مربوط به حالتی است که جرم با راستای عمودی زاویه می‌سازد. برای $\omega>\sqrt{g/\ell}$ پاسخ (۱) ناپایدار است ـ یعنی اگر سامانه در این حالت باشد با کمترین اختلال به سوی بیرون فرار خواهد کرد. چرا؟



شکل ۳-۱۱

(ب): از شکل (۳-۱۱) می بینیم که $\mathbf{L}_O$ در جهت مثبت محور z هاست و اندازه‌ی آن برابر است با

$$|\mathbf{L}_O| = |\mathbf{r}_1||\mathbf{p}| = |\mathbf{r}||\mathbf{p}| = rp \qquad (۱۱-٦)$$

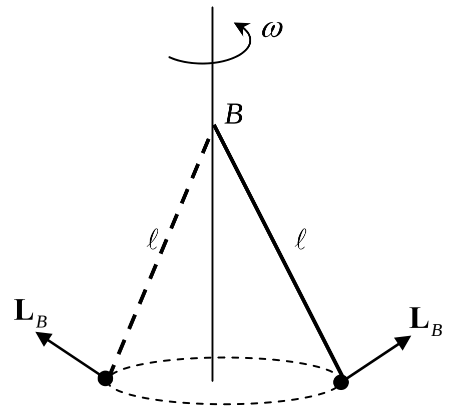
که در آن r شعاع دایره‌ی حرکت است. چون $p = Mv$ و $v = r\omega$ اند، پس $\mathbf{L}_O = Mr^2\omega\hat{\mathbf{z}}$ است. توجه کنید که جهت و اندازه‌ی $\mathbf{L}_0$ ثابت اند.

(پ): اندازه‌ی $\mathbf{L}_B$ عبارت است از:

$$|\mathbf{L}_B| = |\mathbf{l}\times\mathbf{p}| = \ell p = \ell Mv = \ell M(r\omega) \quad \Rightarrow \quad L_B = M\,\ell r\omega \qquad (۱۱-۷)$$

بنابراین، دیده می‌شود که اندازه‌ی $\mathbf{L}$ بستگی به نقطه‌ای دارد که $\mathbf{L}$ را نسبت به آن نقطه حساب می‌کنیم. برعکس $\mathbf{L}_O$، جهت $\mathbf{L}_B$ ثابت نیست اما اندازه‌ی آن ثابت است. $\mathbf{L}_B$ به ℓ و

$\mathbf{p}$ عمود است. در شکل (۴–۱۱) این نکته نشان داده شده است.



شکل ۴–۱۱

(ت): نیروهای وارد به گلوله آونگ در شکل (۲–۱۱) نشان داده شده اند. $\mathbf{T}$ کشش ریسمان است. در حرکت دایره‌ای یکنواخت در راستای عمودی شتاب وجود ندارد. بنابراین $T\ \cos\alpha - Mg = ۰$ است. نیروی کل $\mathbf{F}$ وارد به جرم M شعاعی و به سوی مرکز دایره است

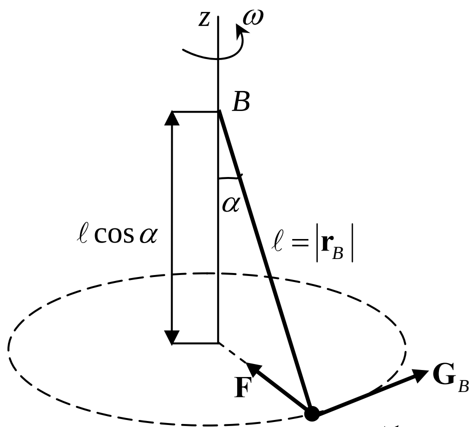
$$\mathbf{F} = -T\ \sin\alpha\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (۸–۱۱)$$

گشتاور وارد به جرم M نسبت به نقطه‌ی O عبارت است از $\mathbf{G}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = ۰$؛ چون $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ هر دو در راستای $\hat{\mathbf{r}}$ اند. بنابراین

$$\frac{d\mathbf{L}_{\circ}}{dt} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{\circ} = \text{ثابت} \qquad (۹–۱۱)$$

(ج): اگر مبداء را نقطه‌ی B برگزینیم، مسئله کاملاً متفاوت است. گشتاور، $\mathbf{G}_B$، نسبت به نقطه‌ی B برابر است با $\mathbf{G}_B = \mathbf{r}_B\times\mathbf{F}$. بنابراین داریم

$$\left|\mathbf{G}_B\right| = \ell\cos\alpha\, F = (\ell\cos\alpha)(T\ \sin\alpha) = Mg\,\ell\sin\alpha \qquad (۱۰–۱۱)$$

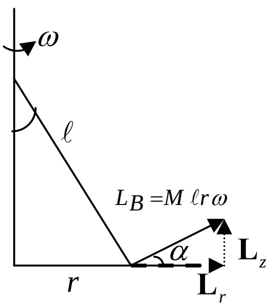


شکل ۵–۱۱

جهت $\mathbf{G}_B$ بر مسیر حرکت M مماس است و در شکل (۵–۱۱) دیده می‌شود.

$$\mathbf{G}_B = Mg\,\ell\sin\alpha\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۱۱–۱۱)$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بردار یکه‌ی مماسی در صفحه‌ی حرکت است. می‌خواهیم نشان دهیم که $G_B = d\mathbf{L}_B/dt$ برقرار است. از قسمت (پ) می‌دانیم که اندازه‌ی $\mathbf{L}_B$ برابر است با $M\ \ell r\omega$. از شکل (۶–۱۱) می‌توان دید که $\mathbf{L}_B$ یک مؤلفه‌ی قائم، $L_z = M\ \ell r\omega\sin\alpha$، در راستای محور zها دارد و مولفه‌ای افقی هم ، $L_r = M\ \ell r\omega\cos\alpha$، در راستای شعاع r دارد. اگر $\mathbf{L}_B$ را به صورت $\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_r$ بنویسیم آنگاه می بینیم که همان‌گونه که انتظار داریم L_z ثابت است؛ چون $\mathbf{G}_B$ در راستای عمودی مؤلفه‌ای ندارد. $\mathbf{L}_r$ ثابت نیست بلکه با جابه‌جایی جرم M روی دایره، جهت آن تغییر می کند. اما اندازه‌ی $\mathbf{L}_r$ ثابت است.



شکل ۶–۱۱

وضعیت مشابهی را در فصل ۱ هم دیدیم: تنها راهی که بردار $\mathbf{A}$ با اندازه‌ی ثابت می‌تواند تغییر کند این است که بچرخد؛ یعنی جهت آن تغییر کند. اگر آهنگ چرخش لحظه‌ای آن $d\theta/dt$ باشد، داریم $\left|d\mathbf{A}/dt\right| = A\,(d\theta/dt)$. از این رابطه درمی‌یابیم که

$$\left|\frac{d\mathbf{L}_r}{dt}\right| = L_r\ \omega \qquad (۱۲–۱۱)$$

چون $L_r = M\ \ell r\ \omega\cos\alpha$ است، پس داریم: $dL_r/dt = M\ \ell r\omega^{۲}\cos\alpha$. اما $Mr\omega^2$ نیروی شعاعی $T\ \sin\alpha$ است و چون $T\ \cos\alpha = Mg$ است، بنابراین، $dL_r/dt = Mg\,\ell\sin\alpha$ که همان اندازه‌ی G_B در قسمت (ج) است. روش دیگر محاسبه‌ی $d\mathbf{L}_B/dt$ این است که L_B را برداری بنویسیم و از آن مشتق بگیریم:

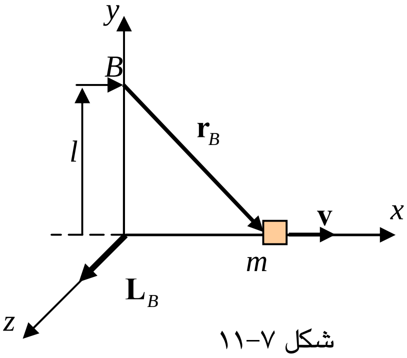
$$\mathbf{L}_B = (M\,\ell r\omega\sin\alpha)\,\hat{\mathbf{z}} + (M\,\ell r\omega\cos\alpha)\,\hat{\mathbf{r}}$$
$$\frac{d\mathbf{L}_B}{dt} = M\,\ell r\omega\cos\alpha\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = M\,\ell r\omega^{۲}\cos\alpha\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۱۱-۱۳)$$

در اینجا از $d\hat{\mathbf{r}}/dt = \omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$ استفاده کردیم.

رابطه‌ی $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ را می‌توان به سادگی نمایش داد. در شکل (۱۱-۷) جسمی به جرم m نشان داده شده است که با سرعت $\mathbf{v} = v\,\hat{\mathbf{i}}$ روی محور x ها می‌لغزد. تکانه‌ی زاویه‌ای جسم نسبت به نقطه‌ی B عبارت است از

$$\mathbf{L}_B = m\mathbf{r}_B \times \mathbf{v} = m\ell v\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۱-۱۴)$$

اگر بین سطح و جسم اصطکاک نباشد، جسم با سرعت ثابت $\mathbf{v}$ حرکت خواهد کرد و در نتیجه $\mathbf{L}_B$ هم تغییر نمی کند؛ چون به جسم گشتاور وارد نمی شود. حالا، فرض کنید نیروی اصطکاک $\mathbf{f} = -f\,\hat{\mathbf{i}}$ به جسم وارد می شود وحرکت آن را کند می‌کند. گشتاور نیروی اصطکاک نسبت به نقطه‌ی B عبارت است از

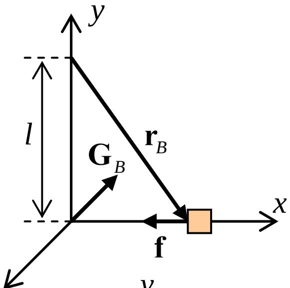


شکل ۱۱-۷

$$\mathbf{G}_B = \mathbf{r}_B \times \mathbf{f} = -\ell f\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۱-۱۵)$$

و در شکل (۱۱-۸) نشان داده شده است. از رابطه‌ی (۱۱-۱۵) می بینیم که با آهسته شدن جسم (کاهش v) اندازه‌ی $\mathbf{L}_B$ تغییر می‌کند اما جهت آن همواره در راستای مثبت محور zها باقی می‌ماند. بنابراین، تغییر $\Delta\mathbf{L}_B$ تکانه‌ی زاویه‌ای $\mathbf{L}_B$ در جهت منفی محور z هاست و در شکل (۱۱-۹) نشان داده شده است.

جهت $\Delta\mathbf{L}_B$ و جهت G_B یکسان اند. به طور کلی، چون $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ است، بردارهای $\Delta\mathbf{L}$ و $\mathbf{G}$ همواره موازی اند. از رابطه‌ی (۱۰-۱۴) داریم



شکل ۱۱-۸

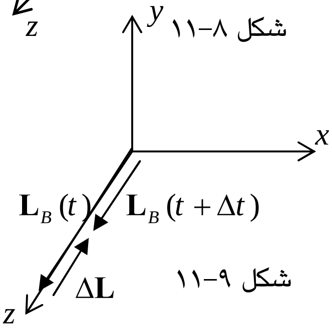
$$\Delta\mathbf{L}_B = m\ell\Delta v\,\hat{\mathbf{z}} \quad , \quad (\Delta v < ۰) \qquad (۱۱-۱۶)$$

که اگر به Δt تقسیم و حدش را به ازای $\Delta t \to ۰$ حساب کنیم خواهیم داشت

$$\frac{d\mathbf{L}_B}{dt} = m\ell\frac{dv}{dt}\,\hat{\mathbf{z}} \qquad (۱۱-۱۷)$$

قانون دوم نیوتن می‌گوید: $m\,dv/dt = -f$ و بنابراین رابطه‌ی (۱۰-۱۷) به صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{d\mathbf{L}_B}{dt} = -\ell f\,\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{G}_B \qquad (۱۱-۱۸)$$



شکل ۱۱-۹

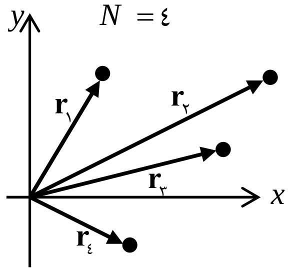
چیزی که در پی اثبات آن بودیم. در این مثال، فقط اندازه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای جرم تغییر می‌کند و جهت آن بدون تغییر می‌ماند، چون $\mathbf{G}$ و $\mathbf{L}$ هر دو در یک راستا اند.

نکته: چون $\mathbf{G}$ و $\mathbf{L}$ به انتخاب مبدا بستگی دارند، وقتی از رابطه‌ی $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ استفاده می‌شود باید هر دو را نسبت به یک مبدا حساب کرد. ♣

۱۱-۱-۲ جسم با بعد، مبداء ثابت

در بخش ۱۱-۱-۱ رابطه‌ی $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ را در مورد جرم نقطه‌ای و مبداء ثابت بررسی کردیم. در این بخش به جسم با بُعد

می‌پردازیم. هنوز هم مبدا (نقطه‌ای که $\mathbf{G}$ و $\mathbf{L}$ نسبت به آن حساب می‌شوند) را ثابت می‌پنداریم.
اگر جسم بُعد داشته باشد، افزون بر نیروهای خارجی که به آن وارد می‌شوند، نیروهای داخلی هم وجود دارند که به بخش‌های مختلف جسم وارد می‌شوند. برای مثال، نیروی خارجی که به اتمی در جسم وارد می شود ممکن است نیروی گرانش باشد، در صورتی که نیروهای داخلی را اتمهای همسایه به آن وارد می‌کنند. با این نیروهای متفاوت چگونه می‌توان کنار آمد؟
در این جا تنها به آن دسته از نیروهای داخلی می‌پردازیم که مرکزی‌اند. بنابراین، نیروی بین دو جسم یا دو نقطه‌ی جسم در راستای خطی است که آن دو را به هم وصل می‌کند. این فرض برای نیروهای رانش و ربایش بین مولکول‌های جسم جامد درست و پذیرفتنی است (اما برای نیروهای الکترو مغناطیسی نادرست است. ما به این نیروها نمی پردازیم). با این فرض، می‌توان قانون سوم نیوتون را به کار برد. برای این که روشن‌تر سخن بگوییم، مجموعه‌ی N ذره‌ی گسسته را در شکل (۱۰-۱۱) در نظر بگیرید. برای حالت پیوسته، فقط علامت جمع در رابطه‌های زیر به علامت انتگرال تبدیل می‌شوند. تکانه‌ی زاویه‌ای کل سامانه



شکل ۱۰-۱۱

$$\mathbf{L}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i \qquad (۱۱-۱۹)$$

است. نیروهایی که به هر یک از ذره ها وارد می‌شوند $\mathbf{F}_i^{ext}+\mathbf{F}_i^{\text{int}}=d\mathbf{p}_i/dt$ است. پس داریم

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}}{dt}&=\frac{d}{dt}\sum_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i\\
&=\sum_i\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\times\mathbf{p}_i+\sum_i\mathbf{r}_i\times\frac{d\mathbf{p}_i}{dt}\\
&=\sum_i\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\times(m_i\mathbf{v}_i)+\sum_i\mathbf{r}_i\times(\mathbf{F}_i^{ext}+\mathbf{F}_i^{\text{int}})\\
&=0+\sum_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i^{ext}\\
&=\sum_i\mathbf{G}_i
\end{aligned}\qquad (۱۱-۲۰)$$

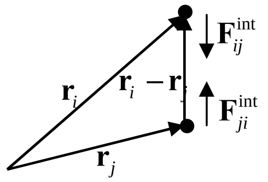
برای رسیدن از سطر دوم به سطر آخر رابطه‌ی (۲۰-۱۱) از $\mathbf{v}_i\times\mathbf{v}_i=0$ و $\sum_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i^{\text{int}}=0$ استفاده کردیم. نخستین این‌ها روشن است و دومی را در مثال زیر اثبات می‌کنیم. به بیان دیگر، نیروهای داخلی گشتاور تولید نمی‌کنند. این کاملا پذیرفتنی است و می‌گوید که اگر به جسم سخت نیروی خارجی وارد نشود، خود به خود نمی‌چرخد. توجه کنید که سمت راست رابطه‌ی (۲۰-۱۱) شامل گشتاور **کل** نیروهای وارد به جسم است. این گشتاور ممکن است حاصل نیروهایی باشد که به نقاط مختلف جسم وارد می‌شوند. همچنین توجه کنید که در هیچ جا نگفتیم فاصله‌ی ذره‌ها از یکدیگر ثابت است. رابطه‌ی (۲۰-۱۱) برای حالتی هم که ذره‌ها حرکت نسبی دارند، درست است.

مثال ۲-۱۱ نشان دهید که گشتاور کل نیروهای داخلی صفر است.

حل: نیرویی را که ذره‌ی j -ام به ذره‌ی i -ام وارد می‌کند $\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}}$ بنامید. پس

$$\mathbf{F}_i^{\text{int}}=\sum_j\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} \qquad (۱۱-۲۱)$$

گشتاور کل نیروهای داخلی نسبت به مبدا انتخابی در شکل (۱۱-۱۱) عبارت است از



شکل ۱۱-۱۱

$$\mathbf{G}^{\text{int}}=\sum_i \mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i^{\text{int}}=\sum_i\sum_j \mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} \qquad (۱۱-۲۲)$$

اگر اندیس‌ها را که دلخواه اند عوض کنیم و از قانون سون نیوتون، $\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}}=-\mathbf{F}_{ji}^{\text{int}}$، استفاده کنیم به دست می‌آید

$$\mathbf{G}^{\text{int}}=\sum_j\sum_i \mathbf{r}_j\times\mathbf{F}_{ji}^{\text{int}}=-\sum_j\sum_i \mathbf{r}_j\times\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} \qquad (۱۱-۲۳$$

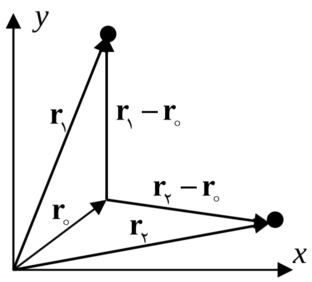
اگر دو رابطه‌ی (۲۲-۱۱) و(۲۳-۱۱) را باهم جمع کنیم خواهیم داشت

$$2\mathbf{G}^{\text{int}}=\sum_i\sum_j (\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\times\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}} \qquad (۱۱-۲٤)$$

چون فرض کردیم که نیروهای داخلی مرکزی‌اند، $\mathbf{F}_{ij}^{\text{int}}$ و $(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)$ موازی و ضرب خارجی‌شان صفر است. بنابراین هر جمله‌ای در جمع بالا صفر است.

این اثبات شاید اندکی پیچیده به نظر بیاید. نکته این است که گشتاورها دو به دو یکدیگر را حذف می‌کنند؛ چون نیروها مساوی و خالف جهت یکدیگراند و بازوی هر دو نسبت به مبداء مساوی است.

۳-۱-۱۱ جسم با بعد، مبداء متحرک



شکل ۱۲-۱۱

اینک آخرین و پیچیده‌ترین وضعیت را برای $\mathbf{G}=d\mathbf{L}/dt$ بررسی می‌کنیم که ممکن است مبداء (نقطه‌ای که نسبت به آن $\mathbf{L}$ و $\mathbf{G}$ حساب می‌شوند) حرکت کند. .نسبت به چارچوب ثابتی، مکان مبداء را با $\mathbf{r}_0$ و مکان ذره‌ها را با $\mathbf{r}_i$ نشان دهید. این بردارها در شکل (۱۲-۱۱) نشان داده شده‌اند. تکانه‌ی کل سامانه نسبت به مبداء $\mathbf{r}_0$ (که ممکن است حرکت کند) عبارت است از

$$\mathbf{L}=\sum_i(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)\times m_i(\dot{\mathbf{r}}_i-\dot{\mathbf{r}}_0) \qquad (۱۱-۲۵)$$

بنابراین، اگر از این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt}&=\frac{d}{dt}\left(\sum_i(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)\times m_i(\dot{\mathbf{r}}_i-\dot{\mathbf{r}}_0)\right)\\&=\sum_i(\dot{\mathbf{r}}_i-\dot{\mathbf{r}}_0)\times m_i(\dot{\mathbf{r}}_i-\dot{\mathbf{r}}_0)+\sum_i(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)\times m_i(\ddot{\mathbf{r}}_i-\ddot{\mathbf{r}}_0)\\&=0+\sum_i(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)\times\left(\mathbf{F}_i^{ext}+\mathbf{F}_i^{\text{int}}-m_i\ddot{\mathbf{r}}_0\right)\end{aligned} \qquad (۱۱-۲٦)$$

چون $\mathbf{F}_i^{ext}+\mathbf{F}_i^{\text{int}}$ نیرویی است که به ذره‌ی i-ام وارد می‌شود. یک نتیجه‌ی آنی مثال ۲-۱۱ این است که جمله‌های شامل $\mathbf{F}_i^{\text{int}}$ حذف می‌شوند (بکوشید آن را اثبات کنید). چون $\sum m_i\mathbf{r}_i=M\mathbf{R}$ است ($M=\sum m_i$ و $\mathbf{R}$ مکان مرکزجرم است) پس داریم

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\sum_i(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{F}_i^{ext}-M(\mathbf{R}-\mathbf{r}_0)\times\ddot{\mathbf{r}}_0 \qquad (۱۱-۲۷)$$

جمله‌ی اول گشتاور خارجی نسبت به $\mathbf{r}_0$ است. جمله‌ی دوم چیزی است که کاش وجود نمی‌داشت. اگر هر یک از سه شرط زیر برقرار باشد، این جمله صفر می شود.

۱- $\mathbf{R}=\mathbf{r}_0$. یعنی مبداء در مرکزجرم باشد.

۲- $\ddot{\mathbf{r}}_\circ = \circ$. یعنی مبداء شتاب نداشته باشد.

۳- $(\mathbf{R}-\mathbf{r}_\circ)$ موازی $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$ باشد.

اگر هر یک از این سه شرط برقرار باشد، می‌توان نوشت

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\circ)\times \mathbf{F}_i^{ext} \equiv \sum_i \mathbf{G}_i^{ext} \qquad (۱۱-۲۸)$$

به بیان دیگر، گشتاور کل با آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای برابر است. یک نتیجه‌ی آنی این است:

نتیجه: *اگر گشتاور کل وارد به یک سامانه صفر باشد، تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه پایسته است. به ویژه، تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه‌ی منزوی (سامانه‌ای که به آن نیروی خارجی وارد نمی‌شود) پایسته است.*

گفتار ما تا این لحظه در باره‌ی هر حرکت دلخواه درست است. ذره‌ها می‌توانند نسبت به هم حرکت کنند و $\mathbf{L}_i$ ها ممکن است در هر جهتی باشند. در این فصل ما با حالتی سروکار داریم که $\hat{\mathbf{L}}$ تغییر نمی‌کند (و آن را در جهت محور z فرض می‌کنیم). بنابراین، در این حالت تا حدودی خاص $d\mathbf{L}/dt = d(L\hat{\mathbf{L}})/dt = (dL/dt)\hat{\mathbf{L}}$ است. افزون براین، اگر سامانه جسم سختی باشد (یعنی فاصله‌ی نسبی ذره‌ها ثابت باشد) که حرکتش فقط چرخش حول محور ثابتی است، همچنین داریم $L = I\omega$ (این رابطه فقط برای مولفه‌ی $\mathbf{L}$ موازی با $\boldsymbol{\omega}$ درست است) و بنابراین، $dL/dt = d(I\omega)/dt = I(d\omega/dt) = I\dot{\omega} = I\alpha$. اگر اندازه‌های دو طرف رابطه‌ی (۲۸-۱۱) را در نظر بگیریم خواهیم داشت

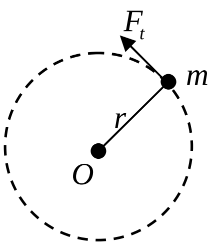
$$G = I\alpha \qquad (۱۱-۲۹)$$

تقریبا همیشه گشتاور و تکانه‌ی زاویه‌ای را نسبت به نقطه‌ی ثابت یا مرکزجرم حساب خواهیم کرد. برای برقراری رابطه‌ی (۲۸-۱۱) این‌ها نقاط امنی‌اند. تا وقتی که از این نقاط استفاده کنید می‌توانید از رابطه‌ی (۲۸-۱۱) استفاده کنید و چندان نگران اثباتش هم نباشید. البته روشن است که امن بودن این نقاط یعنی این که شرط‌های ۱ و ۲ پس از رابطه‌ی (۲۷-۱۱) دراین نقاط برقراراند. به احتما ل زیاد، با وضعیتی روبرو نخواید شد که ناگزیر از اعمال شرط ۳ باشید. این شرط را در چارچوب‌های شتاب‌دار (فصل ۱۲) می‌توان آسان‌تر فهمید. با این وجود، دلیل آن را می‌توان به صورت زیر فهمید. فرض کنید $\mathbf{r}_\circ$ مبداء مختصات مرجع است که با شتاب $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$ حرکت می‌کند. در این چارچوب همه‌ی اجسام وجود یک نیروی "پنداری" را حس می‌کنند. برای مثال، فرض کنید در قطاری ایستاده‌اید و قطار با شتاب a به راست حرکت می‌کند. شما احساس می‌کنید که نیرویی به اندازه‌ی ma و به سوی چپ به شما وارد می‌شود. اگر این نیرو را با نیروی دیگری حذف نکنید (مثلا دسته‌ی صندلی را نگیرید یا به میله‌ای در قطار نچسبید) خواهید افتاد. نیروی پنداری درست مانند نیروی گرانش عمل می‌کند. بنابراین، اساسا به مرکز جرم وارد می‌شود و گشتاور $(\mathbf{R}-\mathbf{r}_\circ)\times(M\ddot{\mathbf{r}}_\circ)$ تولید می‌کند که جمله‌ی دوم در رابطه‌ی (۲۷-۱۱) است. وقتی این جمله صفر است که مرکزجرم درست در "بالای" مبداء باشد. به بیان دیگر، $(\mathbf{R}-\mathbf{r}_\circ)$ با $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$ موازی باشد.

نکته : یک وضعیت عمومی که شرط ۳ برقرار باشد، غلتش بدون لغزش است. جسمی مانند چرخ، کره یا استوانه را در نظر بگیرید که بدون سُر خوردن بر روی زمین می‌غلتد. نقطه‌ای را در لبه‌ی چرخ نشان کنید. در لحظه‌ای که آن نقطه با زمین در تماس است، می‌توان آن را مبداء در نظر گرفت و فرض کرد که جسم حول محور گذرنده از این نقطه می‌چرخد (این محور را محور لحظه‌ای چرخش می‌گویند). ما در جای خود در همین فصل به حرکت غلتشی خواهیم پرداخت. مسیر نقطه‌ی روی لبه‌ی چرخ یک سیکلویید است. تاجایی که به شرط ۳ مربوط می‌شود، در لحظه‌ای که نقطه با زمین تماس پیدا می‌کند $(\mathbf{R}-\mathbf{r}_\circ)$ در راستای عمودی است. $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$ هم عمودی است (چون درست پیش از رسیدن نقطه به زمین در راستای قائم و رو به پایین حرکت می‌کرد و درست پس از ترک کردن زمین در راستای قائم و رو به بالا حرکت می‌کند). پس، $(\mathbf{R}-\mathbf{r}_\circ)$ و $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$ موازی اند.

۱۱-۲ رابطه‌ی بین گشتاور و شتاب زاویه‌ای

رابطه‌ی (۱۱-۲۹) همارز قانون دوم نیوتون در حرکت چرخشی است. این رابطه می‌گوید که شتاب زاویه‌ای جسم سختی که حول محور ثابتی می‌چرخد با برآیند گشتاورهای وارد به جسم (نسبت به محور چرخش) متناسب است. ضریب تناسب، گشتاور لختی جسم است. مثال‌های این بخش برای فهمیدن این رابطه و استفاده کردن از آن طراحی شده‌اند. پیش از پرداختن به چرخش جسم سخت، به حرکت یک جرم نقطه‌ای توجه کنید. فرض کنید جرم نقطه‌ای m روی دایره‌ای به شعاع r می‌چرخد و برابر شکل (۱۱-۱۳) به آن نیروی مماسی F_t وارد می‌شود. نیروی مماسی، به جرم m شتاب مماسی a_t می‌دهد: $F_t = ma_t$. گشتاور نیروی F_t نسبت به مرکز دایره $G_o = F_t r = (ma_t)r$ است. از فصل ۱ می‌دانیم که شتاب مماسی و شتاب زاویه‌ای با رابطه‌ی $a_t = r\alpha$ به یکدیگر مربوط اند. پس، گشتاور G_o را می‌توان به صورت زیر نوشت

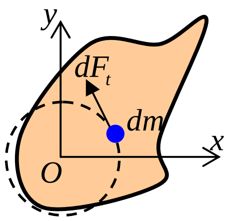


شکل ۱۱-۱۳

$$G_o = (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha = I\alpha \qquad (۱۱-۳۰)$$

یعنی **گشتاور وارد به ذره با شتاب زاویه‌ای متناسب است**. ضریب تناسب **گشتاور لختی** است.

رابطه (۱۱-۳۰) قانون دوم نیوتون برای حرکت چرخشی است. این آموزه را می توان به جسم سخت با شکل دلخواه تعمیم داد که حول محور ثابتی می چرخد. جسم سخت را می توان همانند شکل (۱۱-۱٤) مجموعه‌ی بزرگی از جزء جرم‌های dm در نظر گرفت. هر جزء جرم حول محوری که از O می‌گذرد، در مسیر دایره می‌چرخد. شتاب مماسی هر جزء جرم $\mathbf{a}_t$ است که نیروی مماسی $d\mathbf{F}_t$ ایجاد می‌کند. برای هر جزء dm از قانون دوم نیوتون داریم $dF_t = (dm)a_t$. گشتاور نیروی $d\mathbf{F}_t$ نسبت به نقطه‌ی O عبارت است از $dG = rdF_t = (rdm)a_t$. و چون $a_t = r\alpha$ است پس



شکل ۱۱-۱٤

$$dG = (rdm)r\alpha = (r^2dm)\alpha \qquad (۱۱-۳۱)$$

توجه کنید که اگرچه شتاب مماسی a_t در هر نقطه‌ی جسم سخت ممکن است فرق داشته باشد اما شتاب زاویه‌ای α همه‌ی اجزاء جرمی برابراند. با این یادآوری می‌توان از رابطه‌ی (۱۱-۳۱) انتگرال گرفت و گشتاور کل را به دست آورد.

$$G_{tot} = \int (r^2dm)\alpha = \alpha\int r^2dm \quad \Rightarrow \quad G_{tot} = I\alpha \qquad (۱۱-۳۲)$$

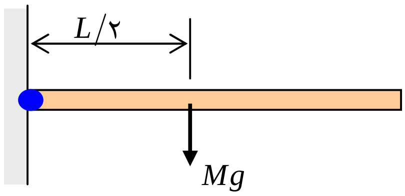
اگر نیرهای وارد به جزء جرم، علاوه بر مؤلفه‌ی مماسی، مؤلفه‌ی شعاعی هم داشته باشد، هنوز هم رابطه‌ی (۱۱-۳۲) درست است؛ چون راستای مؤلفه‌ی شعاعی نیرو از نقطه‌ی O می‌گذرد و در نتیجه، گشتاورش حول نقطه‌ی O صفر است. به نقاط مختلف جسم سختی که حول محوری ثابت می‌چرخد ممکن است نیروی یکسان وارد نشود و این نقاط شتاب و یا سرعت خطی متفاوت داشته باشند؛ اما شتاب و سرعت زاویه‌ای همه‌ی نقاط جسم سخت در هر لحظه یکسان‌اند. بنابراین، حالت جسم سخت چرخنده در هرلحظه، با مقادیر معین شتاب زاویه‌ای، سرعت زاویه‌ای و گشتاور خالص وارد بر آن مشخص می شود.

مثال ۱۱-۳ طول میله‌ی همگن شکل (۱۱-۱۵) L و جرم آن M است. یک انتهای میله به دیوار عمودی لولا شده است. لولا اصطکاک ندارد. میله می‌تواند حول این انتهای خود بچرخد. وقتی میله افقی است، آن را از حالت سکون رها می‌کنیم .

(الف): شتاب زاویه‌ای انتهای سمت راست میله را درست پس از رها شدن حساب کنید.

(ب): شتاب خطی انتهای سمت راست میله را درست پس از رها شدن حساب کنید.

حل: **(الف)** نیروی Mg به مرکز هندسی میله وارد می‌شود. گشتاور این نیرو حول محوری که از پیوند گاه می‌گذرد $G=MgL/۲$ است. نیروی دیگری هم در پیوندگاه به میله وارد می‌شود اما گشتاورش نسبت به پیوندگاه صفر است، چون طول بازوی آن صفر است. گشتاور لختی میله‌ی همگن حول انتها $ML^۲/۳$ است. پس، $G=I\alpha=\left(ML^۲/۳\right)\alpha$ و در نتیجه



شکل ۱۱-۱۵

$$\frac{MgL}{۲}=\frac{۱}{۳}ML^۲\alpha \;\Rightarrow\; \alpha=\frac{۳g}{۲L} \qquad (۱۱-۳۳)$$

همه‌ی نقاط میله با این شتاب زاویه‌ای حرکت می‌کنند.

(ب): برای یافتن شتاب خطی انتهای سمت راست میله از رابطه‌ی میان شتاب مماسی و شتاب زاویه‌ای استفاده می‌کنیم. داریم $a_t=L\alpha=۳g/۲$. این نتیجه چشمگیر است زیرا $a_t>g$! یعنی شتاب انتهای سمت راست میله **بزرگتر** از شتاب گرانش بنابراین اگر سکه‌ای را در انتهای میله قرار دهیم، انتهای میله تند از سکه سقوط می‌کند.

مثال ۴-۱۱ صفحه‌ی دایره‌ای شکل با سرعت ۱۲۰۰ دور در دقیقه می‌چرخد. برای اینکه صفحه را در ۳ دقیقه از حرکت باز بداریم چه گشتاوری باید به آن وارد شود؟

حل: اگر کند شدن حرکت صفحه یکنواخت باشد شتاب زاویه‌ای آن مقدار ثابتی است: ثابت $=\alpha$ و داریم

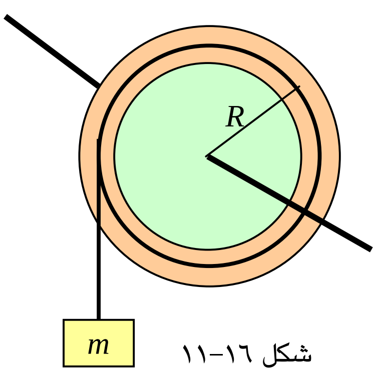
$$\alpha=d\omega/dt \;\Rightarrow\; d\omega=\alpha dt\int_{\omega_۰}^{\omega}d\omega=\int_{t=۰}^{t=t}\alpha dt \;\Rightarrow\; \omega-\omega_۰=at$$

سرعت زاویه‌ای اولیه $\omega_۰=(۱۲۰۰\,rev/\min)(۱\min/۶۰s)=۲۰\,rev/s$ است. چون یک دور ۲π رادیان است. پس، $\omega_۰=۴۰\pi\,rad/s$است. همچنین $t=۳\min=۱۸۰s$ است . در نتیجه، برای این‌که صفحه بایستد یعنی $\omega=۰$ باشد داریم:

$$\omega-\omega_۰=\alpha t\Rightarrow ۰-۴۰\pi\,rad/s=\alpha(۱۸۰s) \;\Rightarrow\; \alpha=-\frac{۴۰\pi}{۱۸۰}\frac{rad}{s^۲}$$

$$\Rightarrow G=I\alpha=\left(\frac{۱}{۲}MR\right)^۲\left(-\frac{۴۰\pi}{۱۸۰}\right)=-\frac{\pi MR^۲}{۹}$$

مثال ۵-۱۱ چرخ چاهی به شعاع R و جرم M و گشتاور لختی I روی محور افقی بدون اصطکاک سوار است. برابر شکل (۱۱-۱۶) از ریسمان بدون جرم چرخ جسمی به جرم m آویزان است. شتاب خطی جرم m، شتاب زاویه‌ای چرخ و کشش ریسمان را حساب کنید



شکل ۱۱-۱۶

حل: گشتاور وارد به چرخ نسبت به محور چرخش آن $G=TR$ است. وزن چرخ و نیروی عمودی که محور به آن وارد می‌کند هر دو از محور چرخش می‌گذرند و گشتاور تولید نمی‌کنند. پس داریم $G=I\alpha=TR\Rightarrow\alpha=TR/I$. از $F=ma$ برای جرم m استفاده کنید. نیروهای عمودی وارد به جرم m عبارتاند از کشش T ریسمان که رو به بالا است و نیروی وزن، mg ، که به سوی پائین است. پس

$$T-mg=-ma \;\Rightarrow\; a=\frac{mg-T}{m} \qquad (۱۱-۳۴)$$

این شتاب خطی جرم آویزان، با شتاب مماسی نقطه‌ای در لبه‌ی چرخ برابر است. پس شتاب زاویه‌ای چرخ و شتاب خطی لبه‌ی آن با رابطه‌ی $a=R\alpha$ به یکدیگر مربوط اند

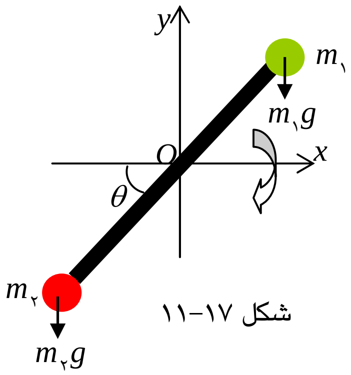
$$a = R\alpha \Rightarrow \frac{mg - T}{m} = R(TR/I) \Rightarrow T = \frac{mg}{1 + mR^2/I}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{g}{1 + \dfrac{I}{mR^2}} \quad , \quad \alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + \dfrac{I}{mR}} \qquad (۱۱-۳۵)$$

مثال ۶-۱۱ میله‌ی همگنی به جرم M و طول ℓ در صفحه‌ی عمودی حول محوری می‌چرخد که از مرکز جرم آن می‌گذرد. جرم‌های m_1 و m_2 برابر شکل (۱۱-۱۷) به دو انتهای میله وصل‌اند.

(الف): هنگامی که سرعت زاویه‌ای سامانه ω است تکانه‌ی زاویه‌ای آن را حساب کنید.

(ب): شتاب زاویه‌ای سامانه را هنگامی که میله با افق زاویه‌ی θ می‌سازد، بیابید.



شکل ۱۱-۱۷

حل: **(الف)** گشتاور لختی مجموع گشتاورهای لختی میله، جرم m_1 و جرم m_2 است. گشتاور لختی میله حول محوری که از مرکزجرمش می‌گذرد $M\ell^2/12$ است. بنابراین

$$I_{tot} = \frac{1}{12}M\ell^2 + m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m^2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right) \qquad (۱۱-۳۶)$$

پس، وقتی سرعت زاویه‌ای ω است، تکانه‌ی زاویه‌ای $L = I\omega = \left(\ell^2/4\right)(m_1 + m_2 + M/3)\omega$ است.

(ب) گشتاور نیروی $m_1 g$ نسبت به محور چرخش $G_1 = m_1 g\,(\ell/2)\cos\theta$ و به سوی درون صفحه است. گشتاور نیروی $m_2 g$ نسبت به محور چرخش $G_2 = m_2 g\,(\ell/2)\cos\theta$ و به سوی بیرون از صفحه است. پس، گشتاور برآیند برابر است با $G = G_1 + G_2 = (1/2)(m_1 - m_2)g\,\ell\cos\theta$. توجه کنید که اگر $m_1 > m_2$ باشد جهت G به سوی درون صفحه است و اگر $m_1 < m_2$ باشد به سوی بیرون از صفحه است برای یافتن α از رابطه‌ی $G = I\alpha$ استفاده کنید.

$$\alpha = \frac{G}{I} = \frac{2(m_1 - m_2)g\cos\theta}{\ell\left(\dfrac{M}{3} + m_1 + m_2\right)} \qquad (۱۱-۳۷)$$

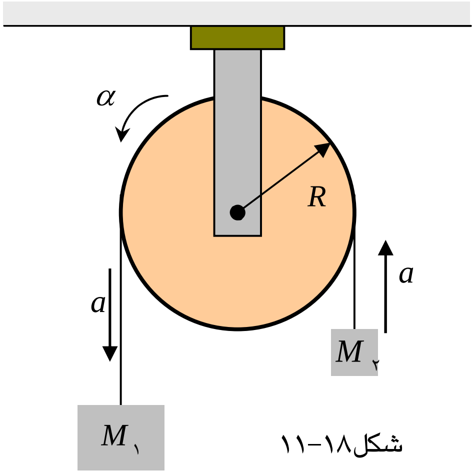
توجه: به ازای $\theta = \pi/2$ و $\theta = -\pi/2$ (وضعیت عمودی میله) α صفر است. بیشینه مقدار α به ازای $\theta = 0, \pi$ (وضعیت افقی) است. سرعت زاویه‌ای سامانه هم تغییر می‌کند، چون α با زمان تغییر می‌کند.

مثال ۱۱-۷ ماشین آتوود قرقره‌ای برابر شکل (۱۱-۱۸) حول محوری که از مرکزش می‌گذرد می‌تواند بچرخد. وزنه‌های M_1 و M_2 با ریسمانی که به دور قرقره پیچیده است به هم وصل اند. اگر گشتاور لختی قرقره I باشد، شتاب این آرایه را بیابید.

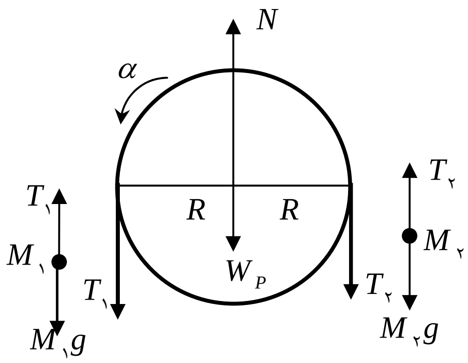
حل: برای هر سه جسم نمودار نیروها در شکل (۱۱-۱۹) نشان داده شده است. نقطه‌های اثر نیروها هم نشان داده شده‌اند که برای محاسبه‌ی گشتاور لازم است. محور چرخش، محور قرقره است. معادله‌های حرکت عبارتند از:

برای M_1: $\quad M_1 g - T_1 = M_1 a$

برای M_2: $\quad T_2 - M_2 g = M_2 a$



شکل ۱۸-۱۱



شکل ۱۹-۱۱

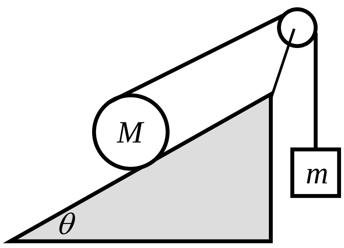
برای قرقره :
$$G = T_۱R - T_۲R = I\alpha$$
$$N - T_۱ - T_۲ - W_P = ۰$$

N نیروی محور و W_P وزن قرقره است. رابطه‌ی آخری بدین معنی است که قرقره سقوط نمی کند. با فرض اینکه ریسمان سُر نمی خورد، رابطه‌ی $a = R\alpha$ بین شتاب a و شتاب زاویه ای α برقرار است، یعنی سرعت ریسمان با سرعت یک نقطه در لبه‌ی قرقره برابر است : $v = R\omega$. از رابطه های بالا می‌توان $T_۱$، $T_۲$ و α را حذف کرد.

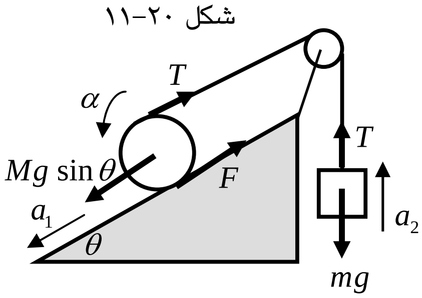
$$M_1g - M_2g - (T_1 - T_2) = (M_1 + M_2)a$$
$$T_1 - T_2 = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Ia}{R^2}$$
$$M_1g - M_2g - \frac{Ia}{R^2} = (M_1 + M_2)\,a$$
$$a = \frac{(M_1 - M_2)\,g}{M_1 + M_2 + \frac{I}{R^2}}$$

اگر قرقره، یک قرص ساده به جرم M باشد، داریم $I = MR^۲/۲$ و

$$a = \frac{(M_۱ - M_۲)\,g}{(M_۱ + M_۲ + M/۲)} \qquad (۱۱-۳۸)$$



شکل ۲۰-۱۱



شکل ۲۱-۱۱

مثال ۸-۱۱ ریسمانی به دور استوانه‌ی همگنی به جرم M پیچیده است. استوانه بر روی سطح شیب‌دار ثابتی قرار دارد. برابر شکل (۲۰-۱۱) ریسمان از روی قرقره‌ی بدون جرم می‌گذرد و از انتهای دیگرش جرم m آویزان است. فرض کنید استوانه بدون لغزش روی سطح می‌غلتد و ریسمان هم همواره با سطح موازی می‌ماند. شتاب جرم m را به دست آورید. کمینه مقدار M/m برای این که استوانه روی سطح به سوی پایین شتاب پیدا کند، چیست ؟

حل: نیروهای اصطکاک، کشش و گرانش در شکل (۲۱-۱۱) نشان داده شده‌اند. $a_۱$، $a_۲$ و α را برابر شکل تعریف کنید. این سه شتاب و کشش T و نیروی اصطکاک F پنج مجهول مسئله‌اند. بنابراین، به پنج معادله نیاز داریم که عبارت اند از

(۱) از $F = ma$ برای m $\Leftarrow$ $T - mg = ma_۲$

(۲) از $F = ma$ برای M $\Leftarrow$ $Mg\sin\theta - T - F = Ma_۱$

(۳) از $G = I\alpha$ برای M حول مرکزجرم $\Leftarrow$ $FR - TR = \left(MR^{۲}/۲\right)\alpha$

(٤) شرط نلغزیدن $\Leftarrow$ $\alpha = a_{۱}/R$

(٥) پایستگی طول ریسمان $\Leftarrow$ $a_{۲} = ۲a_{۱}$

به روش‌های مختلف می‌توان این معادله‌ها را حل کرد و مجهول‌ها را به دست آورد. از (۳) و (٤) داریم $F - T = Ma_{۱}/۲$ که اگر با (۲) جمع کنیم خواهیم داشت $Mg\sin\theta - ۲T = ۳Ma_{۱}/۲$. از (۱) برای حذف T و از (٥) برای نوشتن $a_{۱}$ برحسب $a_{۲}$ استفاده کنید. نتیجه :

$$Mg\sin\theta - ۲(mg + ma_{۲}) = \frac{۳Ma_{۲}}{٤} \quad\Rightarrow\quad a_{۲} = \frac{(M\sin\theta - ۲m)g}{\frac{۳}{٤}M + ۲m} \qquad (۱۱\text{-}۳۹)$$

البته $a_{۱} = a_{۲}/۲$ است. پس، اگر $M/m > ۲/\sin\theta$ باشد، $a_{۱}$ مثبت می‌شود و استوانه در روی سطح بالا می‌رود.

نکته: در استفاده از $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ می‌توانستیم به جای مرکزجرم، نقطه‌ی ثابتی را برای مبداء برگزینیم. پذیرفتنی‌ترین نقطه، جایی در روی سطح است. در این صورت، نیروی $Mg\sin\theta$ گشتاور تولید می‌کند، اما گشتاور نیروی اصطکاک صفر می‌شود. تکانه‌ی زاویه‌ای استوانه نسبت به نقطه‌ای در روی سطح $I\omega + MvR$ است. بنابراین، $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ به $(Mg\sin\theta)R - T(۲R) = I\omega + Ma_{۱}R$ تبدیل می‌شود که جمع رابطه‌ی (۳) و R برابر رابطه‌ی (۲) است. پس، باز هم به همان نتیجه می‌رسیم.♣

مثال ۹-۱۱ آونگ فیزیکی

جسم سختی را در نظر بگیرید که شکلش دلخواه است و حول محوری می‌چرخد. یک چنین جسمی در شکل (۲۲-۱۱) نشان داده شده است. جرم جسم M و فاصله‌ی مرکزجرم از محور چرخش ℓ است. محور چرخش را در راستای محور x ها فرض کنید. گشتاور لختی جسم نسبت به محورچرخش I_x است. بسامد زاویه‌ای این سامانه نوسان را حساب کنید.

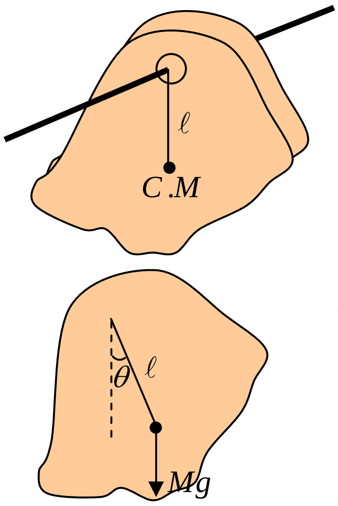
حل: حرکت جسم فقط حرکت چرخشی است. نیروی گرانش تنها نیرویی است که گشتاورش نسبت به محور چرخش غیر صفر است. پس داریم: $-\ell Mg\sin\theta = I_x\alpha = I_x\ddot{\theta}$.

اگر θ کوچک باشد $\sin\theta \approx \theta$ است و در نتیجه $I_x\ddot{\theta} + Mg\ell\theta = ۰$ است که همان معادله‌ی حرکت آونگ ساده است و پاسخ آن را می‌شناسیم :

$$\theta = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (۱۱\text{-}٤۰)$$

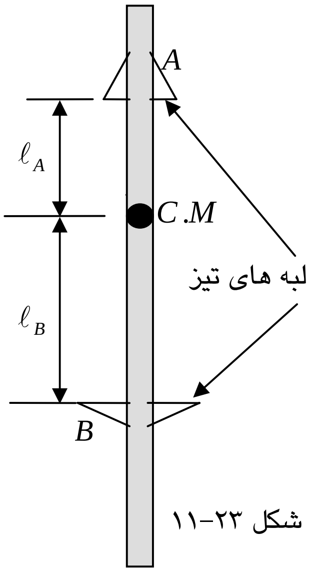
و $\omega = \sqrt{Mg\ell/I_x}$. اگر **شعاع چرخش** را به صورت زیر تعریف کنیم، این نتیجه را ساده تر هم می توان نوشت.

اگر گشتاور لختی یک جسم را نسبت به مرکز جرمش $I_{۰}$ بنامیم، **شعاع چرخش** k عبارت است از $I_{۰} = Mk^{۲}$ یا $k \equiv \sqrt{I_{۰}/M}$. برای نمونه، شعاع چرخش حلقه $k = R$ و یک قرص $k = \sqrt{۱/۲}\,R$ و برای کره‌ی توپر $k = \sqrt{۲/٥}\,R$ اند. با استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی می‌توان نوشت $I_x = I_{۰} + M\ell^{۲} = M(k^{۲} + \ell^{۲})$. بنابراین $\omega = \sqrt{g\ell/(k^{۲} + \ell^{۲})}$.



شکل ۲۲-۱۱

مثال ۱۰-۱۱ آونگ کاتر در فاصله‌ی سده‌های شانزده و هفده، دقیق‌ترین اندازه‌گیری‌های g با آونگ انجام می‌گرفت. این شیوه جالب است زیرا تنها کمیت‌های لازم دوره‌ی و ابعاد آونگ است. دقت اندازه‌گیری به دقت در یافتن مرکزجرم و شعاع چرخش بستگی دارد. هنری کاتر، مهندس فیزیک پیشه‌ی انگلیسی با اختراع آونگ کاتر دشواری اندازه‌گیری مرکز جرم و شعاع چرخش را از میان برداشت. آونگ کاتر دو لبه‌ی تیزدارد که درشکل (۲۳-۱۱) دیده می‌شود. آونگ را می‌توان از هر یک از این لبه‌ها آویخت. فرض کنید فاصله‌ی لبه‌های تیز از مرکزجرم به ترتیب ℓ_A و ℓ_B اند. در مثال ۹-۱۱ دیدیم که بسامد زاویه‌ای برای هریک از لبه‌های تیز $\omega=\sqrt{g\ell/(k^2+\ell^2)}$ است. در نتیجه؛ دوره‌ی آونگ کاتر برای نوسان حول نقطه‌ی A و نقطه‌ی B عبارت ست از:



شکل ۲۳-۱۱

$$T_A=2\pi\left(\frac{k^2+\ell_A^2}{g\ell_A}\right)^{1/2},\quad T_B=2\pi\left(\frac{k^2+\ell_B^2}{g\ell_B}\right)^{1/2} \qquad (۱۱-۴۱)$$

با تغییر دادن ℓ_A و ℓ_B می‌توان وضعیتی را فراهم کرد که این دو دوره یکسان بشوند: $T_A=T_B=T$ و با حذف T از رابطه‌ی(۴۱-۱۱) آنگاه k^2 را به دست آورد.

$$k^2=\frac{\ell_A\ell_B^2-\ell_B\ell_A^2}{\ell_B-\ell_A}=\ell_A\ell_B \qquad (۱۱-۴۲)$$

و داریم

$$T=2\pi\left(\frac{\ell_A\ell_B+\ell_A^2}{g\ell_A}\right)^{1/2}=2\pi\left(\frac{\ell_A+\ell_B}{g}\right)^{1/2}\Rightarrow g=4\pi^2\left(\frac{\ell_A+\ell_B}{T^2}\right) \qquad (۱۱-۴۳)$$

زیبایی این ابزار در این است که فقط به اندازه‌گیری فاصله‌ی بین دو لبه نیاز است. می‌توان آن را با دقت اندازه گرفت و نیازی به یافتن مکان مرکزجرم نیست.

۳-۱۱ پایستگی تکانه زاویه ای

در بخش ۱-۲-۱۱ نشان دادیم که اگر گشتاور خالص وارد به یک سامانه‌ی ذرات صفر باشد، تکانه‌ی زاویه‌ای کل سامانه ثابت است. این را به صورت نتیجه‌ی رابطه‌ی (۲۸-۱۱) بیان کردیم. در فصل ۷ هم گفتیم که ثابت بودن تکانه‌ی زاویه‌ای یعنی هم اندازه و هم جهت بردار تکانه‌ی زاویه‌ای بدون تغییر می‌مانند. اگر گشتاور کل وارد به سامانه صفر باشد، آنگاه رابطه (۲۸-۱۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$\sum\mathbf{G}_i^{ext}=\frac{d\mathbf{L}}{dt}=0 \qquad\Rightarrow\qquad \mathbf{L}=\text{ثابت} \qquad (۱۱-۴۴)$$

برای مجموعه‌ای از ذرات، این قانون پایستگی را به صورت ثابت $=\sum\mathbf{L}_i$ می‌نویسیم. اگر توزیع جرم سامانه تغییر کند، گشتاور لختی آن هم تغییر خواهد کرد. می‌توان قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای را به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{L}_i=\mathbf{L}_f=\text{ثابت} \qquad (۱۱-۴۵)$$

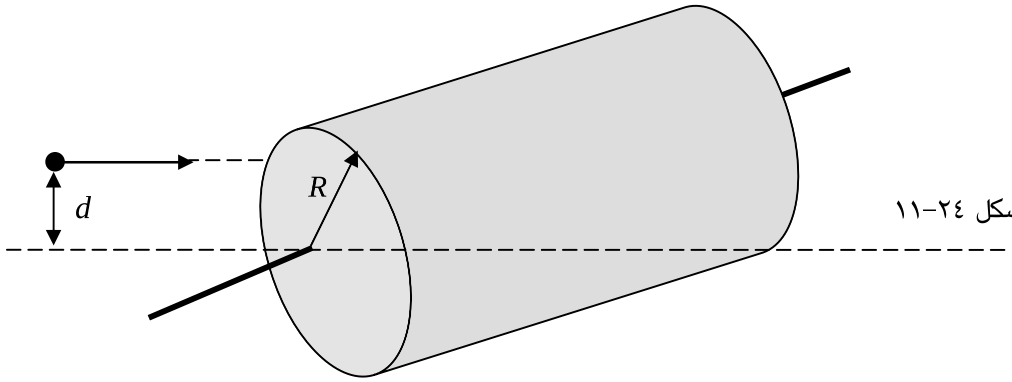
که در آن $\mathbf{L}_i$ تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه پیش از تغییر توزیع جرم و، $\mathbf{L}_f$ تکانه‌ی زاویه‌ای پس از تغییر توزیع جرم است. تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه‌ای که حول **محور ثابتی** مانند محور z می‌چرخد، $L_z=I\omega$ است. L_z مؤلفه‌ی $\mathbf{L}$ در راستای محور چرخش و I گشتاور لختی جسم نسبت به این محور است. تحت این شرایط رابطه‌ی (۴۵-۱۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$I_i\,\omega_i = I_f\,\omega_f = \text{ثابت} \qquad (۱۱-۴۶)$$

رابطه‌ی (۱۱-۴۶) هنگامی درست است که چرخش حول محور ثابتی باشد و یا حول محوری باشد که از مرکزجرم سامانه می‌گذرد و همواره موازی خود باقی می‌ماند. در هر دو حالت، لازم است که گشتاور کل وارد به سامانه صفر باشد. در بخش ۱۱-۱ قضیه‌ی مهمی را در باره‌ی پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به مرکزجرم ثابت کردیم که می‌گوید **بدون اینکه نگران حرکت مرکزجرم باشیم؛ گشتاور کل وارد به یک جسم نسبت به مرکز جرم جسم همواره با آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای برابر است.**

و گفتیم که حتی اگر مرکزجرم سامانه شتاب هم داشته باشد این قضیه درست است به شرطی که $\mathbf{G}$ و $\mathbf{L}$ هر دو نسبت به مرکزجرم حساب شوند. مثال‌های زیادی برای نمایش پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای وجود دارد که با برخی از آنها آشنا هستید. بازوهایتان را از هم باز کنید و بر دو پاشنه‌ی پای خود بچرخید. در حالی که می‌چرخید بازوهایتان را جمع کنید؛ خواهید دید که سرعت چرخش شما افزایش می‌یابد. اگر این کار را روی یخ انجام دهید؛ اثر چشمگیرتر خواهد بود. در وضعیت نخست اگر سرعت زاویه‌ای شما ω_i باشد، با جمع کردن بازوهایتان؛ توزیع جرم را تغییر می‌دهید و در نتیجه گشتاور لختی کاهش پیدا می‌کند، برای اینکه تکانه‌ی زاویه‌ای پایسته بماند؛ سرعت چرخش شما افزایش پیدا می‌کند و به ω_f می‌رسد. با این کار، می‌کوشید رابطه‌ی $I_i\,\omega_i = I_f\,\omega_f$ را برقرار نگه دارید. شناگرهایی که از سکوی پرش به استخر می‌پرند؛ برای این که بتوانند در هوا دور خود بچرخند بدن خود را جمع می‌کنند، با این کار آنها می‌کوشند از گشتاور لختی خود کاسته و به سرعت زاویه‌ای شان بیفزایند. این کار شدنی است زیرا تکانه‌ی زاویه‌ای آنان پایسته است (شناگر را یک سامانه‌ی منزوی می‌پنداریم.)

مثال ۱۱-۱۱ گلوله‌ای به جرم m را با سرعت $v_\circ$ به سوی استوانه‌ی توپری با جرم M و شعاع R شلیک می‌کنیم. استوانه برابر شکل (۱۱-۲۴) روی محور افقی بدون اصطکاک سوار است که از مرکز جرم آن می‌گذرد. راستای حرکت گلوله به محور استوانه عمود است و فاصله‌ی عمودی آن با محور $d < R$ است. گلوله با استوانه برخورد می‌کند و به سطح آن می‌چسبد. سرعت زاویه‌ای سامانه (گلوله + استوانه) را پس از برخورد به دست آورید.



شکل ۱۱-۲۴

حل: تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه (استوانه + گلوله) را حول محور استوانه حساب کنید. اگر از نیروی گرانش وارد به گلوله چشم پوشی کنیم، برآیند گشتاور نیروهای خارجی نسبت به این نقطه در روی محور صفر است. در نتیجه، تکانه‌ی زاویه‌ای پیش از برخورد و پس از آن برابر است. پیش از برخورد فقط گلوله نسبت به محور استوانه تکانه‌ی زاویه‌ای دارد. اندازه‌ی این تکانه‌ی زاویه‌ای $mv_\circ d$ و جهت آن در راستای محور و به سوی صفحه کاغذ است. پس از برخورد، تکانه‌ی زاویه‌ای کل سامانه $I\omega$ است. I گشتاور لختی کل سامانه (استوانه + گلوله) است و برابر $I = (۱/۲)MR^۲ + mR^۲$ است. چون تکانه‌ی زاویه‌ای پایسته

است، پس، داریم

$$mv_\circ d = I\omega = (\frac{1}{2}MR^2 + mR^2)\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{mv_\circ d}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2} \tag{11-47}$$

که روشی برای اندازه‌گیری سرعت گلوله است!

مثال ۱۲-۱۱ صفحه‌ی گرامافونی به جرم M و شعاع R با سرعت زاویه‌ای ω_a حول محور بدون اصطکاک خود می‌چرخد. عنکبوتی به جرم m از سقف جدا شده و به طور قائم بر لبه‌ی صفحه می‌افتد. سرعت زاویه‌ای جدید ω_b صفحه چقدر است؟ عنکبوت سپس آهسته به سوی مرکز صفحه حرکت می‌کند. هنگامی که عنکبوت به فاصله‌ی r از مرکز صفحه می‌رسد، سرعت زاویه‌ای ω_c چقدر است.

حل: سامانه را مجموعه‌ی صفحه و عنکبوت در نظر بگیرید. چون محور بدون اصطکاک است و از نیروی پسار هوا چشم‌پوشی شده است، پس گشتاور خارجی وارد به سامانه صفر و در نتیجه تکانه‌ی زاویه‌ای همواره یکسان و پایسته است. درست پیش از آنکه عنکبوت بر لبه‌ی صفحه سقوط کند، نسبت به محور چرخش (محورصفحه) تکانه‌ی زاویه‌ای ندارد و تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه فقط مربوط به تکانه‌ی زاویه‌ای صفحه است. صفحه قرصی است که گشتاور لختی آن نسبت به محور گذرنده از مرکز $I_t = MR^2/2$ است. بنابراین، تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه برابر است با: $L = I_t\omega_a = (MR^2/2)\omega_a$. وقتی عنکبوت در لبه‌ی صفحه قرار گرفت، همراه صفحه وبا سرعت زاویه‌ای ω_b می‌چرخند. گشتاور لختی سامانه این بار $I_b = (MR^2/2) + mR^2$ است . پس، تکانه‌ی زاویه‌ای عبارت ست از $L = I_b\omega_b = (1/2)(M + 2m)R^2\omega_b$. حال با استفاده از قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای داریم

$$\begin{aligned} L_i &= L_f = I_t\omega_a = I_b\omega_b \\ &= \frac{1}{2}MR^2\omega_a = \frac{1}{2}(M + 2m)R^2\omega_b \quad \Rightarrow \quad \omega_b = \frac{M}{M + 2m}\omega_a \end{aligned} \tag{11-48}$$

وقتی عنکبوت در فاصله‌ی r از مرکز قرار دارد، گشتاور لختی سامانه $I_C = (1/2)MR^2 + mr^2$ و تکانه‌ی زاویه‌ای $L = I_C\omega_C = (\frac{1}{2}MR^2 + mr^2)\omega_C$ اند. پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای می‌گوید

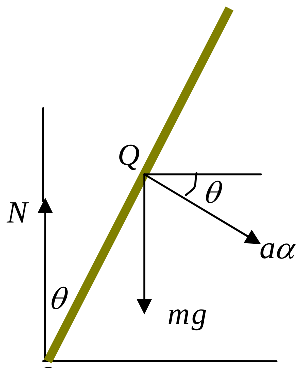
$$\frac{1}{2}(MR^2 + mr^2)\omega_c = \frac{1}{2}MR^2\omega_a \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{MR^2/2}{(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2)}\omega_a = \frac{\omega_a}{1 + \frac{2mr^2}{MR^2}} \tag{11-49}$$

مثال ۱۳-۱۱ (**الف**) میله‌ی یکنواخت نازکی به جرم m و طول $2a$ برابر شکل (۲۵-۱۱) به طور عمودی روی سطح ناهموار ایستاده است. میله می‌تواند، بدون این که انتهای آن در روی زمین بلغزد، سقوط کند. هنگامی که میله با خط قائم زاویه‌ی θ می‌-سازد، نشان دهید که سرعت زاویه‌ای آن عبارت است از:

$$\omega^2 = \frac{3g}{2a}(1 - \cos\theta) \tag{11-50}$$

(**ب**) نیروی عمودی که سطح در این وضعیت به میله وارد می‌کند چقدر است؟

(**پ**) اگر در $\theta = 30^\circ$ انتهای میله در روی زمین شروع به لغزیدن کند؛ ضریب اصطکاک را بیابید.



شکل ۱۱-۲۵

حل: (**الف**) نیروهای وارد به میله عبارتند از وزن mg ، نیروی عمودی N و نیروی اصطکاک $f = \mu N$. نیروهای N و f در نقطه‌ی O به انتهای میله وارد می‌شوند. برای یافتن ω، گشتاور وارد به میله، G، و شتاب زاویه‌ای را در نظر بگیرید که به هم مربوط اند: $G = I\alpha$. اگر گشتاور را نسبت به نقطه‌ی O حساب کنیم، فقط نیروی mg گشتاور ایجاد می‌کند که برابر است با $G_o = mga\sin\theta = I_o\alpha = (4/3)ma^2\alpha$. گشتاور لختی میله نسبت به نقطه‌ی O عبارت است از $I_o = m\ell^2/3 = m(2a)^2/3 = 4ma^2/3$. داریم

$$\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \omega\frac{d\omega}{d\theta} = \alpha = \frac{3}{4}\frac{g}{a}\sin\theta \qquad (۱۱-۵۱)$$

در نتیجه داریم

$$\int_0^{\omega}\omega\, d\omega = \int_0^{\theta}\frac{3}{4}\frac{g}{a}\sin\theta\, d\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\omega^2\Big|_0^{\omega} = \left[-\frac{3}{4}\frac{g}{a}\cos\theta\right]_0^{\theta} \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{2a}(1-\cos\theta). \qquad (۱۱-۵۲)$$

(**ب**): مرکزجرم میله، نقطه‌ی Q ، نسبت به نقطه‌ی O دارای شتاب زاویه‌ای α است و بنابراین، شتاب خطی آن $a\alpha$ است. این شتاب به میله عمود است. آن را به دو مؤلفه‌ی افقی $a\alpha\cos\theta$ ، و عمودی $a\alpha\sin\alpha$ می‌توان تجزیه کرد. مؤلفه‌ی عمودی رو به پائین و مؤلفه افقی به سوی راست است. شتاب افقی مرکزجرم را نیروی μN به وجود می‌آورد و شتاب عمودی آن بر اثر برآیند نیروهای mg و N است. پس با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم

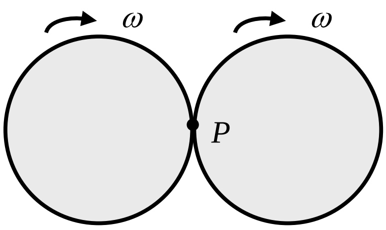
$$\begin{aligned} mg - N &= ma\alpha\sin\theta = \frac{3}{4}mg\sin^2\theta \\ f = \mu N &= ma\alpha\cos\theta = \frac{3}{4}mg\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \qquad (۱۱-۵۳)$$

از این دو رابطه خواهیم داشت

$$N = mg - \frac{3}{4}mg\sin^2\theta = \frac{mg}{4}(4 - 3\sin^2\theta) \qquad (۱۱-۵٤)$$

(**پ**): در $\theta = 30^\circ$، لغزش آغاز می‌شود. در این زاویه f مقدار حدی یا بیشینه مقدار خود را دارد. پس

$$\mu_s = \frac{f}{N} = \frac{\frac{3}{4}mg\sin\theta\cos\theta}{\frac{mg}{4}(4-3\sin^2\theta)} = \frac{3\sin\theta\cos\theta}{(4-3\sin^2\theta)} = \frac{3(1/2)(\sqrt{3}/2)}{4-3/4} = \frac{3\sqrt{3}}{13} = 0{,}4 \qquad (۱۱-۵۵)$$



شکل ۱۱-۲٦

مثال ۱۱-۱۴ دو سکه با فاصله‌ی بسیار اندکی از هم قرار دارند وبا سرعت زاویه‌ای ω برابر شکل (۱۱-۲٦) می‌چرخند. سکه‌ها را به هم می‌چسبانیم، حرکت آنها را پس از به هم چسبیدن توصیف کنید.

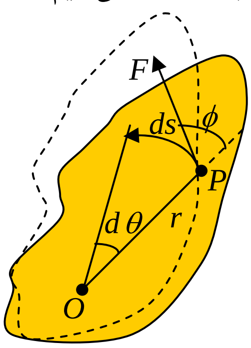
حل: پیش از به هم چسبیدن سکه‌ها مرکزجرم در حال سکون است. بنابراین، همواره در حال سکون باقی خواهد ماند؛ چون سامانه را منزوی پنداشته‌ایم ، فقط (حداکثر) حرکت چرخشی حول نقطه‌ی P می‌تواند وجود داشته باشد. از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای

استفاده کنید. $\mathbf{L}$ هر یک از سکه‌ها نسبت به نقطه‌ی P بنا به رابطه‌ی (۱۰-۴۲) عبارت است از $\mathbf{L}_P=\mathbf{L}'+M\mathbf{R}_{CM}\times\mathbf{V}_{CM}$ (قضیه‌ی (۱۰-۱). جمله‌ی دوم صفر است، چون $\mathbf{V}_{CM}=0$ است. پس، $\mathbf{L}_P=\mathbf{L}'=I\omega=(mR^2/2)\omega$. بنابراین، تکانه‌ی زاویه‌ای کل حول نقطه‌ی P دو برابر این مقدار و برابر $mR^2\omega$ است. پس از به هم چسبیدن سکه‌ها باید داشته باشیم $mR^2\omega=I'\omega'$. در اینجا I' گشتاور لختی سامانه حول نقطه‌ی P است. هر یک از سکه‌ها حول P می‌چرخد. بنا به قضیه‌ی محورهای موازی $I'=2(mR^2+mR^2/2)=3mR^2$ است. پس: $mR^2\omega=(3mR^2)\omega'\Rightarrow\omega'=\omega/3$. سامانه با ۱/۳ سرعت زاویه‌ای اولیه حول نقطه‌ی P ساعتگرد می‌چرخد.

۱۱-۴ کار و انرژی در حرکت چرخشی

۱۱-۴-۱ کار در حرکت چرخشی

در این بخش به انرژی جنبشی چرخشی جسم سخت می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که چگونه تغییر این انرژی به کار نیروهای خارجی وارد به جسم سخت مربوط است. در اینجا هم خود را به چرخش جسم سخت حول محور ثابت محدود می‌کنیم.



شکل ۱۱-۲۷

همچنین نشان خواهیم داد که رابطه‌ی $G=I\alpha$ را می‌توان از آهنگ تغییر انرژی هم به دست آورد. در شکل (۱۱-۲۷) جسم سختی نشان داده شده است که حول محور ثابتی می‌چرخد که از نقطه‌ی O می‌گذرد. فرض کنید نیروی خارجی $\mathbf{F}$ در نقطه‌ی P به جسم وارد می‌شود. کار این نیرو برای جابه‌جایی $ds=r\,d\theta$ برابر است با:

$$dW=\mathbf{F}.d\mathbf{s}=(F\sin\phi)r\,d\theta \qquad (۱۱-۵۶)$$

$F\sin\phi$ مؤلفه‌ی نیروی F در امتداد جابه‌جایی است. توجه کنید که مؤلفه‌ی شعاعی F کار انجام نمی‌دهد؛ چون این مولفه بر جابه‌جایی عمود است. اندازه‌ی گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ حول محوری که از O می‌گذرد $rF\sin\phi$ است. پس، می‌توان رابطه‌ی (۱۱-۵۶) را به صورت زیر نوشت

$$dW=G\,d\theta \qquad (۱۱-۵۷)$$

آهنگ انجام کار نیروی $\mathbf{F}$ برای چرخاندن جسم حول محور ثابت برابر است

$$\frac{dW}{dt}=G\frac{d\theta}{dt} \qquad (۱۱-۵۸)$$

کمیت dW/dt بنا به تعریف، توان لحظه‌ای، P، است که نیروی $\mathbf{F}$ به جسم منتقل می‌کند. چون $d\theta/dt=\omega$ است پس، رابطه (۱۱-۵۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$P\equiv\frac{dW}{dt}=G\omega \qquad (۱۱-۵۹)$$

که همانند رابطه‌ی $P=Fv$ در حرکت خطی است. $dW=G\,d\theta$ همانند چرخشی $dW=F_x dx$ است.

۱۱-۴-۲ قضیه ی کار ـ انرژی در حرکت چرخشی:

در حرکت خطی، دیدیم که مفهوم انرژی و به ویژه قضیه‌ی کار ـ انرژی تا چه اندازه برای توصیف حرکت یک سامانه سودمند بود. در بررسی حرکت چرخشی هم مفهوم انرژی به همان اندازه سودمند است. از آموخته‌هایمان در حرکت خطی انتظار داریم که برای حرکت چرخشی جسم متقارن (مانند یک چرخ) حول محور ثابت، کار نیروهای خارجی با تغییر در انرژی جنبشی حرکت چرخشی برابر باشد. اینک می‌خواهیم این قضیه را ثابت کنیم. برای این کار از رابطه‌ی $G=I\alpha$ آغاز می کنیم.

$$G = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\omega \qquad (۱۱-۶۰)$$

اگر رابطه‌ی بالا را بازنویسی کنیم و توجه داشته باشیم که $G\,d\theta = dW$ خواهیم داشت

$$G\,d\theta = dW = I\,\omega d\omega \qquad (۱۱-۶۱)$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه و با توجه به این که I مقدار ثابتی است، داریم

$$W = \int_{\theta_۰}^{\theta} G\,d\theta = \int_{\omega_۰}^{\omega} I\,\omega d\omega = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ - \frac{۱}{۲}I\omega_۰^۲ \qquad (۱۱-۶۲)$$

رابطه‌ی (۶۲ -۱۱) بیان قضیه‌ی کار- انرژی در حرکت چرخشی جسم سخت است. در جابه‌جایی زاویه‌ای از $\theta_۰$ تا θ، سرعت زاویه‌ای از $\omega_۰$ به ω تغییر می‌کند. این رابطه همانند رابطه‌ی قضیه‌ی کار- انرژی در حرکت خطی است که به‌جای m اینک I و به جای سرعت خطی v، اینک سرعت زاویه‌ای ω قرار دارند. پس

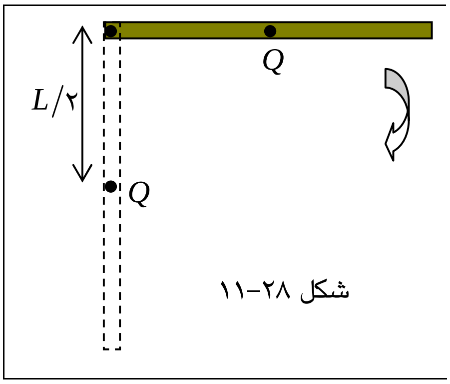
کار کل نیروهای خارجی در چرخش جسم سخت متقارن حول محور ثابت با تغییر انرژی جنبشی چرخشی جسم برابر است.

مثال ۱۴-۱۱ میله‌ی همگن شکل (۲۸-۱۱) با طول L و جرم M می‌تواند حول محوری که از یک انتهایش می‌گذرد بچرخد. پیوندگاه اصطکاک ندارد. میله را در وضعیت افقی از حالت سکون رها می کنیم.

(الف): سرعت زاویه‌ای میله را هنگامی که در وضعیت عمودی قرار می‌گیرد به دست آورید.

ب. سرعت خطی مرکز جرم و سرعت خطی پائین ترین نقطه‌ی میله را در وضعیت عمودی حساب کنید.

حل: (**الف**) انرژی مکانیکی سامانه را در نظر بگیرید. وقتی میله در وضعیت افقی قرار دارد انرژی جنبشی آن صفر و انرژی پتانسیل مرکزجرم آن (نقطه‌ی Q) $MgL/۲$ است. وقتی میله به وضعیت عمودی می‌رسد همه‌ی انرژی آن جنبشی و برابر $(۱/۲)I\omega^۲$ می‌شود. میله حول انتهایش می‌چرخد و گشتاور لختی آن نسبت به این نقطه $I = ML^۲/۳$ است. چون انرژی مکانیکی پایسته است، پس داریم



شکل ۱۱-۲۸

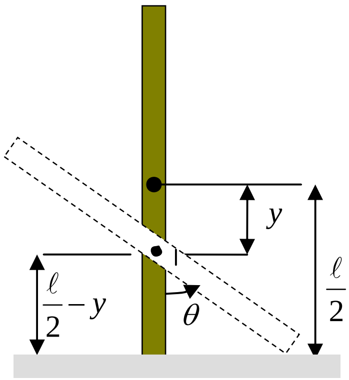
$$\frac{۱}{۲}MgL = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}ML^۲\right)\omega^۲ \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{۳g/L} \qquad (۱۱-۶۳)$$

(ب) : سرعت خطی مرکزجرم $V_Q = r\omega = (L/2)\omega = (1/2)\sqrt{3gL}$ است و

سرعت خطی پائین‌ترین نقطه‌ی میله $۲V_Q = \sqrt{۳gL}$ است

مثال ۱۵-۱۱ میله‌ی شکل (۲۹-۱۱) به طول ℓ و جرم M به طور قائم روی سطح بدون اصطکاک میزی قرار دارد. میله سقوط می‌کند. سرعت مرکزجرم میله را به صورت تابعی از مکان به دست آورید.

حل: نکته در این است که چون نیروی افقی وجود ندارد پس، مرکزجرم باید در امتداد عمودی سقوط کند. چون می‌خواهیم سرعت را به صورت تابعی از مکان به دست آوریم از روش انرژی برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم. شکل (۲۹-۱۱) وضعیت را در هنگامی نشان می‌دهد که میله به اندازه‌ی زاویه‌ی θ چرخیده است. در این وضعیت مرکزجرم به اندازه‌ی y فرو می‌افتد. انرژی اولیه $E = T_۰ + V_۰ = ۰ + mg\ell/۲$ است. در زمانی دیرتر که میله به اندازه‌ی θ سقوط می‌کند، انرژی جنبشی $T = (۱/۲)I_۰\dot{\theta}^۲ + (۱/۲)M\dot{y}^۲$ است.



شکل ۲۹-۱۱

در این وضعیت انرژی پتانسیل $V = Mg\left(\ell/۲ - y\right)$ است. چون اصطکاک وجود ندارد انرژی مکانیکی پایسته است و بنابراین، داریم

$$T + U = T_{۰} + V_{۰} = Mg\,\frac{\ell}{۲}$$

$$\Rightarrow\ \frac{۱}{۲}M\dot{y}^{۲} + \frac{۱}{۲}I_{۰}\dot{\theta}^{۲} + Mg\left(\frac{\ell}{۲} - y\right) = Mg\,\frac{\ell}{۲} \qquad (۱۱\text{-}٦٤)$$

از شکل (۲۹-۱۱) پیداست که $y = (۱-\cos\theta)\,\ell/۲$ و بنابراین،

$$\dot{y} = \frac{\ell}{۲}\sin\theta\,\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{۲}{\ell\sin\theta}\,\dot{y} \qquad (۱۱\text{-}٦٥)$$

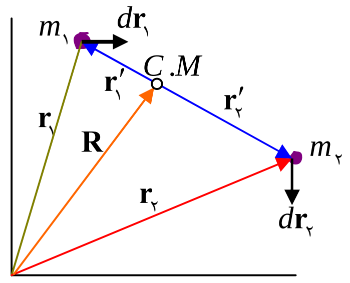
چون $I_{۰} = M\,\ell^{۲}/۱۲$ ، پس نتیجه می‌گیریم

$$\frac{۱}{۲}M\dot{y}^{۲} + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۱۲}Ml^{۲}\left(\frac{۲}{\ell\sin\theta}\right)^{۲}\dot{y}^{۲} + Mg\left(\frac{\ell}{۲} - y\right) = \frac{۱}{۲}Mg\,\ell$$

$$\Rightarrow\ \dot{y}^{۲} = \frac{۲gy}{۱ + \dfrac{۱}{۳\sin^{۲}\theta}} \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \left[\frac{٦gy\,\sin^{۲}\theta}{۳\sin^{۲}\theta + ۱}\right]^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۱۱\text{-}٦٦)$$

۵-۱۱ غلتش

وقتی جسمی مانند چرخ گاری در امتداد مسیر راست‌خط جابه‌جا می‌شود حرکت مرکزجرم آن یک حرکت انتقالی رو به جلو و راست‌خط است. مرکزجرم مثل یک جرم نقطه‌ای حرکت می‌کند که تحت تأثیر برآیند نیروهای خارجی است. اگر به جای مرکز جرم به نقطه‌ی دیگری در روی چرخ نگاه کنید و مسیر آن را پی گیری کنید خواهید دید که این مسیر پیچیده‌تر است: خمی سهمی‌گون که رو به پائین گشوده شده است و با جابه‌جایی گاری، خود را تکرار می‌کند. این مشاهده‌ی ساده نشان می‌دهد که غلتش یک جسم آمیزه‌ای از حرکت انتقالی و حرکت چرخشی است. مؤلفه‌ی انتقالی حرکت غلتشی به خاطر این است که محور چرخش ثابت نیست، بلکه جابه‌جا می‌شود. بررسی حرکت عمومی جسم سخت، هنگامی که محور چرخش ثابت نیست، کار پیچیده‌ای است. پیش‌تر دیدیم که حرکت عمومی سامانه‌ی ذرات را می‌توان ترکیبی از حرکت انتقالی مرکزجرم بعلاوه‌ی یک حرکت چرخشی حول مرکزجرم دانست. بار دیگر به چرخ گاری برگردیم. همان‌گونه که گفتیم، از دید ناظری در روی زمین مرکزجرم چرخ گاری با سرعت خطی V_{cm} رو به جلو حرکت می‌کند و هر نقطه‌ی دیگر حول مرکز چرخ می‌چرخد و به همراه مرکز جرم جابه‌جا می‌شود. ناظری که در گاری نشسته است اگر به چرخ نگاه کند خواهد گفت: همه‌ی نقاط چرخ، فقط حول محوری می‌چرخند که از مرکز چرخ می‌گذرد. یعنی، چرخ فقط با سرعت زاویه‌ای ω حول این محور می‌چرخد و حرکت انتقالی هم ندارد. این جاده است که با سرعت V_{cm} به سوی او حرکت می‌کند. از دید این ناظر نیز می‌توان حرکت را آمیزه‌ای از حرکت چرخشی و انتقالی دانست. قضیه شَلَه (ChaslesTheorem) نشان می‌دهد که همواره می‌توان حرکت عمومی جسم سخت را ترکیبی از حرکت انتقالی مرکزجرم بعلاوه چرخش حول مرکزجرم دانست. اثبات قضیه در حالت عمومی از پیچیدگی‌های ریاضی برخوردار است و فهمیدن جزئیات آن برای پیگیری موضوع ضروری نیست؛ اما نتیجه‌ی آن جالب است و اثبات آن تمرین زیبایی برای جبر بردارها است. برای دوری از پیچیدگی‌های جبری، جسم سخت ساده‌ی شکل (۳۰-۱۱) را در نظر می‌گیریم که از دو جرم $m_{۱}$ و $m_{۲}$ تشکیل شده است که با میله‌ای به هم وصل اند.



شکل ۳۰-۱۱

اثبات قضیه ی شلَه: بردارهای مکان جرم‌های m_1 و m_2 را به ترتیب $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ و مکان مرکز جرم را $\mathbf{R}$ بنامید. بردارهای $\mathbf{r}'_1$ و $\mathbf{r}'_2$ مکان جرم‌های m_1 و m_2 نسبت به مرکزجرم اند. در یک جابه‌جایی دلخواه سامانه، جرم m_1 به اندازه‌ی $d\mathbf{r}_1$ و جرم m_2 به اندازه‌ی $d\mathbf{r}_2$ جابه‌جا می‌شوند. چون جسم، سخت است $d\mathbf{r}_1$ و $d\mathbf{r}_2$ مستقل از یکدیگر نیستند. بررسی خود را با یافتن رابطه‌ی میان $d\mathbf{r}_1$ و $d\mathbf{r}_2$ آغاز می‌کنیم. فاصله‌ی میان m_1 و m_2 مقدار ثابت ℓ است. بنابراین: $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|=\ell$ یا

$$(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\ell^2 \qquad (۱۱-۶۷)$$

اگر از این رابطه مشتق بگیریم و به یاد داشته باشیم که $d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})=2\mathbf{A}\cdot d\mathbf{A}$ است ،خواهیم داشت

$$(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot(d\mathbf{r}_1-d\mathbf{r}_2)=0 \qquad (۱۱-۶۸)$$

این رابطه، شرط سخت بودن جسم است که در پی آن بودیم. رابطه‌ی بالا به دو شیوه می‌تواند برقرار باشد: (الف) $d\mathbf{r}_1=d\mathbf{r}_2$ باشد. (ب) $(d\mathbf{r}_1-d\mathbf{r}_2)$ به $(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ عمود باشد. اینک به حرکت انتقالی مرکزجرم توجه کنید. بنا به تعریف، رابطه (۲-۸)، داریم

$$\mathbf{R}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} \qquad (۱۱-۶۹)$$

بنابراین، جابه‌جایی جزیی مرکزجرم، $d\mathbf{R}$ ، عبارت است از

$$d\mathbf{R}=\frac{m_1 d\mathbf{r}_1+m_2 d\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} \qquad (۱۱-۷۰)$$

حال اگر این جابه‌جایی انتقالی مرکزجرم را از $d\mathbf{r}_1$ و $d\mathbf{r}_2$ کم کنیم، **جا به جایی‌های باقیمانده** $d\mathbf{r}_1-d\mathbf{R}$ و $d\mathbf{r}_2-d\mathbf{R}$ باید فقط به چرخش حول مرکزجرم حسم مربوط باشد. پیش از بررسی این نکته، توجه کنید که چون $\mathbf{r}_2-\mathbf{R}=\mathbf{r}'_2$ و $\mathbf{r}_1-\mathbf{R}=\mathbf{r}'_1$ اند، بنابراین، داریم

$$d\mathbf{r}_1-d\mathbf{R}=d\mathbf{r}'_1 \quad \text{و} \quad d\mathbf{r}_2-d\mathbf{R}=d\mathbf{r}'_2 \qquad (۱۱-۷۱)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۱-۷۰) و (۱۱-۷۱) خواهیم داشت

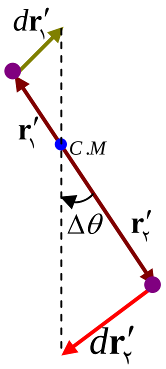
$$d\mathbf{r}'_1=d\mathbf{r}_1-d\mathbf{R}=\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)(d\mathbf{r}_1-d\mathbf{r}_2) \qquad (۱۱-۷۲)$$

$$d\mathbf{r}'_2=d\mathbf{r}_2-d\mathbf{R}=-\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)(d\mathbf{r}_1-d\mathbf{r}_2) \qquad (۱۱-۷۳)$$

توجه کنید که اگر $d\mathbf{r}_1=d\mathbf{r}_2$ باشد، یعنی شرط اول برای برقراری رابطه‌ی (۱۱-۶۸)، آنگاه جابه‌جایی‌های باقیمانده $d\mathbf{r}'_1$ و $d\mathbf{r}'_2$ صفر می‌شوند و حرکت جسم سخت، انتقالی بدون چرخش خواهد بود. ما باید نشان دهیم که جابه‌جایی‌های باقیمانده حرکت چرخشی خالص حول مرکز جرم است. شکل (۱۱-۳۱) نمایشی از چرخش خالص است. پس، باید نشان دهیم که شرط (ب) برقرار و نمایش حرکت چرخشی است. آیا $d\mathbf{r}'_1$ و $d\mathbf{r}'_2$ بر خط $\mathbf{r}'_1-\mathbf{r}'_2$ عمود است؟ با استفاده از رابطه های (۱۱-۷۲) و (۷۳-۱۱) داریم

$$d\mathbf{r}'_1\cdot(\mathbf{r}'_1-\mathbf{r}'_2)=d\mathbf{r}'_1\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)(d\mathbf{r}_1-d\mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=0 \qquad (۱۱-۷۴)$$

و به همین ترتیب می توان نشان داد $d\mathbf{r}'_2\cdot(\mathbf{r}'_1-r'_2)=0$ است. سرانجام، باید نشان دهیم جابه‌جایی‌های باقیمانده با چرخش‌های یکسان به اندازه‌ی $\Delta\theta$ متناظراند.



شکل ۳۱-۱۱

این شرط با رابطه‌ی برداری زیر هم‌ارز است

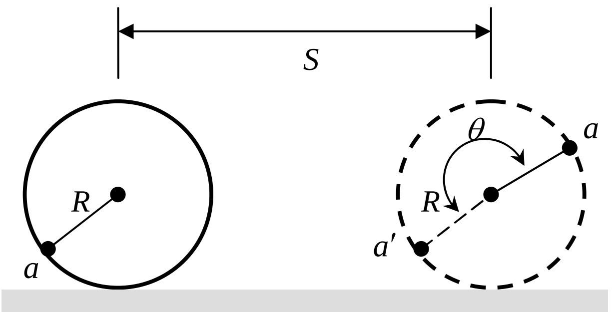
$$\frac{d\mathbf{r}_1'}{r_1'} = -\frac{d\mathbf{r}_2'}{r_2'} \qquad (۱۱-۷۵)$$

با استفاده از رابطه های (۱۱-۷۲) و (۱۱-۷۳) و با توجه به این که $r_1'/r_2' = m_2/m_1$ (بنا به تعریف مرکزجرم) داریم

$$\frac{d\mathbf{r}_1'}{r_1'} = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\left(\frac{d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2}{r_1'}\right) = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\left(\frac{d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2}{r_2'}\right) = -\frac{d\mathbf{r}_2'}{r_2'} \qquad (۱۱-۷۶)$$

که این اثبات قضیه را کامل می کند. ■

همان‌گونه که پیشتر گفتیم، بررسی حرکت عمومی جسم سخت دشوار است. در اینجا به حالت خاصی می‌پردازیم. فرض میکنیم که جسم سخت همگن و از تقارن بالایی برخوردار است؛ مانند استوانه، کره و یا حلقه. افزون بر این، فرض می‌کنیم که غلتش در صفحه انجام بگیرد و در هر لحظه محور چرخش با محور چرخش در لحظه‌ی پیشین موازی باشد. منظور از غلتش چیست؟ بهتر است آن را تعریف کنیم. استوانه همگنی را در نظر بگیرید که شعاع آن R است و بر روی سطح افقی هموار می‌غلتد. اگر نقطه‌ی تماس با زمین به طور لحظه‌ای نسبت به سطح ساکن باشد، آنگاه گوئیم استوانه حرکت غلتشی بدون لغزش دارد. برای این که نقطه‌ی تماس در لحظه‌ی تماس با زمین نلغزد (یعنی جابه‌جایی انتقالی نداشته باشد) باید نیروی اصطکاک میان سطح و استوانه به اندازه‌ی بسنده بزرگ باشد. البته جسم ممکن است غلتش همراه با لغزش داشته باشد. ما این حالت را در پایان این بخش بررسی خواهیم کرد. غلتش همراه با لغزش هنگامی روی می‌دهد که اصطکاک به اندازه‌ی کافی بزرگ نباشد و نتواند از لغزش جسم جلوگیری کند.



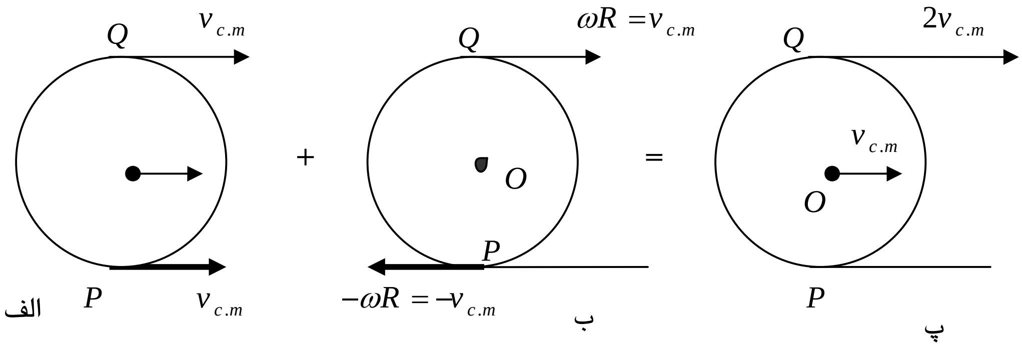
شکل ۳۲-۱۱

در شکل (۳۲-۱۱) استوانه‌ای نشان داده شده است که به اندازه‌ی زاویه‌ی θ چرخیده و مرکزجرم آن به اندازه‌ی S جابه‌جا شده است. اگر این حرکت بدون لغزش باشد آنگاه طول کمان $a'a$ باید با طول S برابر باشد. یعنی $S = R\theta$ باشد. از اینجا می‌توان سرعت و شتاب مرکزجرم را برای حرکت **غلتشی بدون لغزش** را حساب کرد.

$$\begin{aligned} v_{CM} &= \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta) = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \\ a_{CM} &= \frac{dv_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \end{aligned} \qquad (۱۱-۷۷)$$

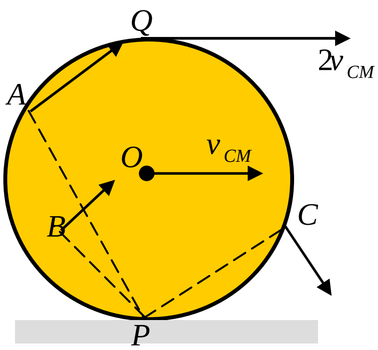
رابطه‌های بالا شرط غلتش بدون لغزش‌اند. اگر استوانه فقط بلغزید، ω صفر است اما اندازه‌ی v_{CM} غیر صفر است و رابطه‌ی (۱۱-۷۷) نمی تواند برقرار باشد.

شکل (۳۳-۱۱) نشان می‌دهد که چگونه می‌توان حرکت استوانه‌ی غلتنده را به دو مؤلفه‌ی انتقالی و چرخشی تقسیم کرد. در شکل (۳۳- ۱۱ الف) مؤلفه‌ی انتقالی نشان داده شده است. در این شکل همه‌ی نقاط استوانه با سرعت v_{CM} جابه‌جا می‌شوند. شکل (۳۳- ۱۱ب) مؤلفه‌ی چرخشی خالص را نشان می‌دهد که همه‌ی نقاط استوانه با سرعت زاویه‌ای یکسان ω حول محور استوانه می‌چرخند. سرعت خطی نقطه‌های روی سطح همگی یکسان وبرابر $v_{CM} = R\omega$ است. اگر شکل‌های (الف) و(ب) را جمع



شکل ۳۳-۱۱

کنیم شکل (۳۳- ۱۱پ) به دست می‌آید و حرکت برآیند را نشان می‌دهد. سرعت نقطه‌ی Q در شکل (۳۳- ۱۱پ) $2v_{C.M}$ است، در حالی که نقطه‌ی P، نقطه‌ی تماس با زمین، ساکن است. از نگاه ناظری که در P نشسته است، نقاط دیگر استوانه حول نقطه‌ی P می‌چرخند. محوری که از **P** می‌گذرد، **محور لحظه‌ای چرخش** است. در شکل (۳٤-۱۱) سرعت نقاط دیگر استوانه‌ی غلتان نشان داده شده است. توجه کنید که سرعت خطی هر نقطه‌ای بر خطی که آن را به نقطه‌ی تماس با زمین، P، وصل می‌کند، عمود است. در هر لحظه‌ای از زمان نقطه‌ی تماس با زمین، نسبت به سطح زمین در حالت سکون است؛ چون لغزش وجود ندارد. به این خاطر است که محور گذرنده از P و عمود بر صفحه‌ی شکل را **محور لحظه‌ای چرخش** می‌گویند.



شکل ۳٤-۱۱

سرعت نقطه‌ای مانند B یا A، هم مؤلفه‌ی افقی و هم مؤلفه‌ی عمودی دارد اما نقاط P و Q و O نقاط خاص و یگانه‌اند. مرکزجرم، O، با سرعت $v_{CM} = R\omega$ حرکت می‌کند. سرعت نقطه‌ی تماس P صفر است و سرعت نقطه‌ی Q برابر $۲v_{CM} = ۲R\omega$ است. چون سرعت زاویه‌ای همه‌ی نقاط استوانه یکسان و برابر ω است می‌توانیم انرژی جنبشی کل استوانه‌ی غلتان را با

$$T = \frac{۱}{۲} I_P \omega^۲ \qquad (۱۱-۷۸)$$

نشان دهیم که I_P گشتاور لختی استوانه نسبت به محور گذرنده از P است. با استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی، می‌دانیم $I_P = I_{CM} + MR^۲$ است و رابطه ی (۷۸-۱۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$T = \frac{۱}{۲} I_{CM}\omega^۲ + \frac{۱}{۲} MR^۲\omega^۲ \qquad (۱۱-۷۹)$$

و چون $v_{CM} = R\omega$ پس :

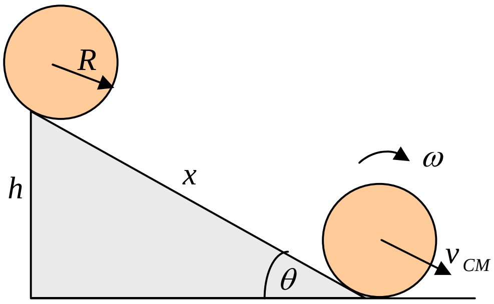
$$T = \frac{۱}{۲} I_{CM}\omega^۲ + \frac{۱}{۲} Mv_{CM}^۲ \qquad (۱۱-۸۰)$$

در رابطه‌ی (۸۰-۱۱) جمله‌ی نخست سمت راست، $(۱/۲) I_{CM}\omega^۲$، انرژی جنبشی چرخش حول مرکزجرم است و جمله‌ی دوم، $(۱/۲) Mv_{CM}^۲$ انرژی جنبشی انتقالی استوانه است. پس:

انرژی جنبشی کل جسمی که حرکت غلتش بدون لغزش دارد با جمع انرژی جنبشی چرخشی حول مرکزجرم و انرژی جنبشی انتقالی مرکزجرم برابر است.

از انرژی برای حل گروهی از مسئله‌های حرکت غلتشی می‌توان استفاده کرد. مثال‌های زیر این روش را نشان می‌دهند. در بالا گفتیم حرکت غلتشی هنگامی شدنی است که نیروی اصطکاک وجود داشته باشد و نسبت به مرکزجرم گشتاور ایجاد کند. با وجود این، اگر حرکت غلتشی بدون لغزش باشد نیروی اصطکاک کار انجام نمی‌دهد و انرژی مکانیکی تلف نمی‌شود. چون در هر لحظه، نقطه‌ی تماس جسم و سطح، نسبت به سطح در حال سکون است. اگر جسم می‌لغزید، انرژی مکانیکی جسم هم تلف می‌شد.

مثال ۱۶-۱۱ جسم سختی، کره، استوانه، حلقه ... به جرم M از بالای سطح شیب‌داری با شیب θ و ارتفاع h از حالت سکون رها می شود و برابر شکل (۳۵-۱۱) بدون لغزش به سوی پائین سطح می‌غلتد. سرعت مرکزجرم را در انتهای سطح شیب‌دار به دست آورید



شکل ۳۵-۱۱

حل ۱ روش انرژی: حرکت غلتشی بدون لغزش است. شرط چنین حرکتی با $v_{CM}=R\omega$ بیان می‌شود. می‌توان رابطه‌ی (۸۰-۱۱) را به صورت زیر نوشت:

$$T=\frac{۱}{۲}I_{CM}\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^{۲}+\frac{۱}{۲}Mv_{CM}^{۲}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{I_{CM}}{R^{۲}}+M\right)v_{CM}^{۲} \qquad (۱۱-۶۱)$$

وقتی جسم به پائین‌ترین نقطه‌ی سطح شیب‌دار می‌رسد، انرژی پتانسیل Mgh را از دست داده است، h ارتفاع سطح شیب‌دار است. چون در بالای سطح شیب‌دار جسم از حالت سکون حرکت خود را آغاز می‌کند، پس انرژی جنبشی جسم در پائین سطح، رابطه‌ی (۸۰-۱۱)، باید با انرژی پتانسیل در بالای سطح برابر باشد. پس، ، سرعت مرکزجرم در انتهای سطح شیب‌دار

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{I_{CM}}{R^{۲}}+M\right)v_{CM}^{۲}=Mgh \quad\Rightarrow\quad v_{CM}=\left(\frac{۲gh}{۱+I_{CM}/MR^{۲}}\right)^{۱/۲} \qquad (۱۱-۸۲)$$

است. اگر جسم سخت شکل (۳۵-۱۱) کره‌ی توپری باشد، سرعت مرکزجرم در انتهای سطح شیب‌دار وشتاب خطی مرکزجرم را به دست آورید. برای کره‌ی توپر $I_{CM}=(۲/۵)MR^{۲}$. بنابراین از رابطه‌ی (۸۲-۱۱) خواهیم داشت:

$$v_{cm}=\left(\frac{۲gh}{۱+۲MR^{۲}/۵MR^{۲}}\right)^{۱/۲}=\left(\frac{۱۰}{۷}gh\right)^{۱/۲} \qquad (۱۱-۸۳)$$

جابه‌جایی عمودی h و جابه‌جایی روی سطح، x ، با $h=x\sin\theta$ به یکدیگر مربوط اند. پس اگر دو طرف رابطه‌ی بالا را به توان دو برسانیم و به جای h مقدارش را برحسب x و θ قرار دهیم، خواهیم داشت $v_{CM}^{۲}=(۱۰/۷)gx\sin\theta$. شتاب مرکز جرم را با مشتق گرفتن از این رابطه می‌توان حساب کرد.

$$۲v_{CM}\dot{v}_{CM}=(۱۰/۷)gv_{CM}\sin\theta \quad\Rightarrow\quad a_{CM}=(۵/۷)g\sin\theta \qquad (۱۱-۸۴)$$

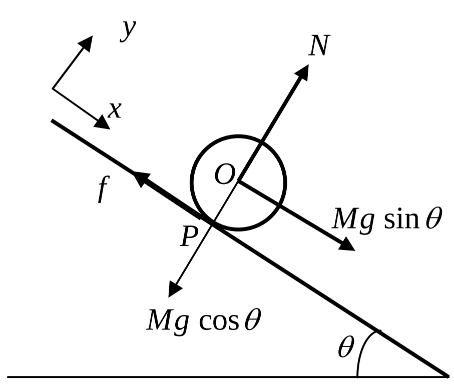
این نتیجه چشمگیر است! سرعت و شتاب مرکزجرم به شعاع و جرم کره وابسته نیستند! در روی سطح شیب‌دار سرعت و شتاب مرکزجرم همه‌ی کره‌های همگن توپر برابرند. در مورد کره‌ی توخالی، استوانه و یا حلقه هم همین طور است. ضریب‌های ثابت ۱۰/۷ و ۵/۷ که در سرعت و شتاب مرکزجرم نمایان می‌شوند به گشتاور لختی جسم نسبت به مرکز جرم آن بستگی دارند و برای اجسام مختلف فرق دارند. اما در همه‌ی حالت‌ها، شتاب مرکزجرم **کمتر** از $g\sin\theta$ است. $g\sin\theta$ شتاب مرکز

جرم روی سطح شیب‌دار است. اگر سطح هموار بود و اصطکاک وجود نداشت ، غلتش هم در کار نبود.

حل ۲: بگذارید این مثال را دوباره و با استفاده از روش دینامیکی حل کنیم و قانون‌های نیوتون را به کار ببریم. نمودار آزاد نیروها در شکل (۳۶-۱۱) نشان داده شده اند. محور مختصات را در امتداد سطح و عمود برآن انتخاب کنید و قانون دوم نیوتون را برای حرکت مرکزجرم بنوسید

$$\sum F_x = Mg\sin\theta - f = Ma_{CM} \qquad (۱۱-۸۵)$$

$$\sum F_y = N - Mg\cos\theta = ۰ \qquad (۱۱-۸۶)$$



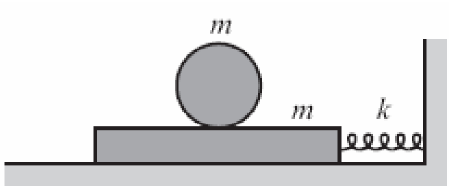
شکل ۳۶-۱۱

x در امتداد سطح شیب‌دار و رو به پائین است. حال گشتاور وارد به کره را حساب کنید. بهتر است گشتاورها را نسبت به محوری که از مرکز کره می‌گذرد و بر صفحه شکل عمود است حساب کنیم. چون در این صورت نیروهای N و $Mg\sin\theta$ نسبت به آن گشتاور ندارند. فقط گشتاور نیروی اصطکاک f نسبت به این محور غیر صفر وبرابر $G_{CM} = fR = I_{CM}\alpha$ است. چون $a_{CM} = R\alpha$ و $I_{CM} = (۲/۵)MR^۲$اند، پس داریم

$$f = \frac{I_{CM}\alpha}{R} = \left(\frac{(۲/۵)MR^۲}{R}\right)\frac{a_{CM}}{R} = \frac{۲}{۵}Ma_{CM} \qquad (۱۱-۸۷)$$

اگر این مقدار را در (۸۶-۱۱) قرار دهیم خواهیم داشت $a_{CM} = (۵/۷)g\sin\theta$ که همان نتیجه‌ی قبلی است .

مثال۱۷-۱۱ برابر شکل (۳۷-۱۱) یک قطعه تخته به جرم m در روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد و آزادانه می‌تواند بر روی آن بلغزد. تخته با فنری با ثابت k به دیوار عمودی وصل است. بر روی تخته استوانه‌ای به جرم m (و گشتاور لختی $I = mR^۲/۲$) ساکن قرار دارد و می‌تواند بدون لغزش، برروی تخته بغلتد. اگر تخته واستوانه را به سمت چپ بکشیم و سپس آنها رااز حالت سکون رها کنیم، بسامد حرکت سامانه را به دست آورید.



شکل ۳۷-۱۱

حل: جهت مثبت x را برای تخته به سوی راست و زاویه‌ی مثبت چرخش را برای استوانه ساعتگرد فرض کنید. شتاب تخته را a_b ، شتاب استوانه را a_c و شتاب زاویه‌ای آن را α بنامید. جهت‌های مثبت این سه در شکل (۳۸-۱۱) نشان داده شده‌اند. نیروی اصطکاک بین تخته و استوانه را F بنامید. از $F = ma$ برای تخته داریم

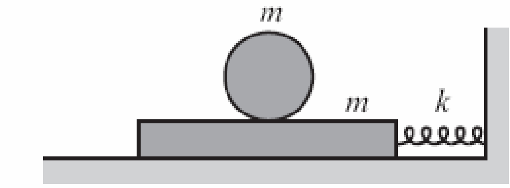
$$F - kx = ma_b \qquad (۱۱-۸۸)$$

از $F = ma$ برای استوانه داریم

$$-F = ma_c \qquad (۱۱-۸۹)$$

از گشتاور وارد به استوانه ($G = I\alpha$) داریم

$$FR = \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\alpha \qquad (۱۱-۹۰)$$



شکل ۳۸-۱۱

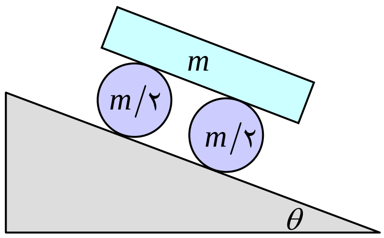
شرط نلغزیدن استوانه (شرط غلتش خالص) می‌گوید:

$$a_c = R\alpha + a_b \qquad (۱۱-۹۱)$$

چون، اگر بر روی تخته بایستید می‌بینید که استوانه با شتاب $a = R\alpha$ به جلو می‌رود. به این باید a_b را هم اضافه کنید که شتاب خود تخته است. F را از رابطه‌ی (۸۹-۱۱) به دست آورید و در (۹۰-۱۱) قرار دهید. خواهیم داشت $(-ma_c)R = (۱/۲)mR^۲\alpha \;\Rightarrow\; -۲a_c = R\alpha$ که اگر در رابطه‌ی (۹۱-۱۱) جایگزین کنید به دست می‌آید: $a_c = a_b - ۲a_c \Rightarrow a_c = a_b/۳$. با جا گذاری این مقدار a_c در (۸۹-۱۱) خواهیم داشت $F = -ma_b/۳$ که اگر در رابطه‌ی (۸۸-۱۱) به کارش ببریم داریم، به دست می‌آید: $-kx = (4/3)ma_b$. چون $a_b \equiv \ddot{x}$ است، پس می‌بینیم که

$$-kx = \frac{۴}{۳}m\ddot{x} \;\;\Rightarrow\;\; \ddot{x} = -(\frac{۳}{۴}\frac{k}{m})x \qquad (۱۱-۹۲)$$

و این معادله‌ی آشنای نوسانگر هماهنگ است و بسامد آن $\sqrt{۳k/۴m}$ است .



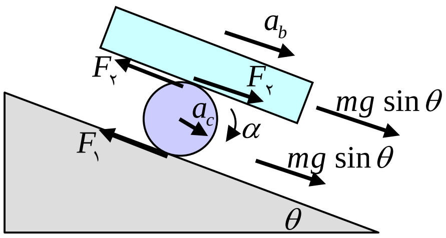
شکل ۳۹-۱۱

مثال ۱۸-۱۱ دو استوانه‌ی توپر ($I = MR^۲/۲$) یکسان به جرم‌های $m/۲$ برابر شکل (۳۹-۱۱) بر روی سطح شیب‌داری با شیب θ قرار دارند. قطعه تخته‌ای به جرم m روی استوانه‌ها قرار دارد. هیچ یک از سطح‌ها نسبت به دیگری نمی لغزد. شتاب تخته را به دو روش حساب کنید

(الف): با استفاده از نیرو و گشتاور.

(ب): با استفاده از پایستگی انرژی.

حل ۱: هر دو استوانه به یک صورت حرکت می‌کنند. پس، می‌توان آن‌ها را یک استوانه با جرم m به حساب آورد. در شکل (۴۰-۱۱) نیروها نشان داده شده اند. فرض کنید نیروی اصطکاک بین استوانه و تخته چنان است که استوانه تخته را به پایین هل می‌دهد و تخته استوانه را به بالا می‌راند. یعنی جهت نیروی $F_۲$ برابر شکل(۴۰-۱۱) است. اگر پس از محاسبه دیدیم که $F_۲$ منفی شد، مهم نیست. رابطه های $F = ma$ و $G = I\alpha$ عبارتند از:



شکل ۴۰-۱۱

- استوانه: $F_c = ma_c \Rightarrow mg\sin\theta - F_۱ - F_۲ = ma_c$
- تخته: $F_b = ma_b \Rightarrow mg\sin\theta + F_۲ = ma_b$
- استوانه:

$$G_c = I\alpha_c \;\Rightarrow F_۱R - F_۲R = (mR^۲/۲)\alpha$$

$$\Rightarrow (F_۱ - F_۲)R = (mR^۲/۲)(a_c/R) \qquad (\text{شرط نلغزیدن: } \alpha = a_c/R)$$

$$\Rightarrow F_۱ - F_۲ = (ma_c/۲)$$

چهار مجهول ($F_۱, F_۲, a_c, a_b$) داریم با سه معادله. به یک معادله‌ی دیگر هم نیاز داریم. این رابطه عبارت است از $a_b = ۲a_c$.

این شرط را در شکل (۳۳-۱۱) توضیح دادیم. با این وجود، به یادآوریش می‌ارزد: سرعت بالاترین نقطه‌ی استوانه دو برابر سرعت مرکز آن است؛ چون شتاب نقطه‌ای در لبه‌ی استوانه نسبت به مرکز αR است. بنابراین، داریم $a_b = a_c + \alpha R = a_c + a_c = 2a_c$. سه معادله‌ی نخست به صورت زیر درمی‌آیند

$$\begin{aligned}
(۱)&: \quad mg\sin\theta - F_۱ - F_۲ = ma_c \\
(۲)&: \quad mg\sin\theta + F_۲ = ۲ma_c \\
(۳)&: \quad F_۱ - F_۲ = \frac{۱}{۲}ma_c
\end{aligned} \tag{۱۱-۹۳}$$

و از این رابطه‌ها به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
(۱)+(۲) \quad &\Rightarrow \quad ۲mg\sin\theta - F_۱ = ۳ma_c \\
(۲)+(۳) \quad &\Rightarrow \quad mg\sin\theta + F_۱ = \frac{۵}{۲}ma_c
\end{aligned} \tag{۱۱-۹۴}$$

از جمع دو رابطه‌ی بالا خواهیم داشت

$$۳mg\sin\theta = \frac{۱۱}{۲}ma_c \;\Rightarrow a_c = \frac{۶}{۱۱}g\sin\theta \quad \Rightarrow \quad a_b = ۲a_c = \frac{۱۲}{۱۱}g\sin\theta \tag{۱۱-۹۵}$$

شتاب تخته، a_b ، بزرگ‌تر از $g\sin\theta$ است. یعنی استوانه، شتاب تخته را در سراشیبی افزایش می‌دهد و این یعنی $F_۲ > ۰$ است.

حل ۲ : این مسئله را با استفاده از پایستگی انرژی هم می‌توان حل کرد. مانند بالا، داریم $a_b = ۲a_c$. بنابراین، اگر سرعت تخته را v و مسافتی را که تخته در سراشیبی سطح می‌پیماید x بنامیم، آنگاه $v/۲$ و $x/۲$ به ترتیب سرعت و مسافت استوانه اند. بنابراین، از پایستگی انرژی می‌توان نوشت

$$mg\left(\frac{x}{۲}\sin\theta\right) + mg\left(x\sin\theta\right) = \left[\frac{۱}{۲}m\left(v/۲\right)^۲ + \frac{۱}{۲}I\omega^۲\right] + \frac{۱}{۲}mv^۲ \tag{۱۱-۹۶}$$

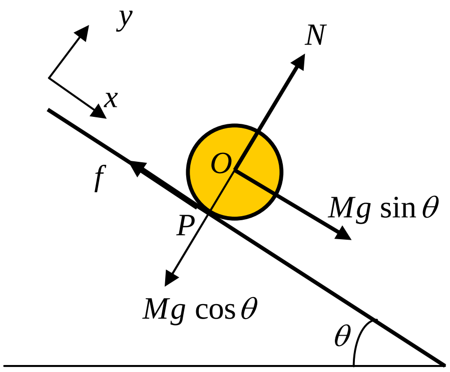
جمله‌ی اول سمت چپ انرژی پتانسیل استوانه و جمله‌ی دوم سمت چپ انرژی پتانسیل تخته اند. جمله‌ی اول سمت راست انرژی جنبشی استوانه است که شامل انرژی‌های جنبشی انتقالی و چرخشی است. جمله‌ی دوم سمت راست، انرژی جنبشی تخته است. از شرط نلغزیدن استفاده کنید و به جای ω قرار دهید $\omega = v/۲R$. برای گشتاور لختی استوانه هم داریم $I = mR^۲/۲$. با این جاگذاری‌ها از رابطه‌ی (۹۰-۱۱) به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
&\frac{۳}{۲}mgx\sin\theta = mv^۲\left(\frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۲}\right) = mv^۲\left(\frac{۱۱}{۱۶}\right) \\
&\Rightarrow v = \sqrt{\frac{۲۴}{۱۱}gx\sin\theta} = \sqrt{۲\left(\frac{۱۲}{۱۱}g\sin\theta\right)x}
\end{aligned} \tag{۱۱-۹۷}$$

اما برای حرکت با شتاب ثابت، داریم $v = \sqrt{۲ax}$ که اکر در رابطه‌ی بالا قرار دهیم ، خواهیم داشت $a = (12/11)g\sin\theta$.

۶-۱۱ غلتش همراه با لغزش

اگر اصطکاک سطح تماس جسم سخت با زمین به اندازه‌ی کافی بزرگ نباشد، افزون بر غلتیدن، جسم در روی سطح خواهد لغزید. شکل (۴۱-۱۱) کره‌ای به جرم M را نشان می‌دهد که بر روی سطح شیب‌دار با شیب θ قرار دارد. ضریب اصطکاک سطح μ است و جسم علاوه بر غلتیدن، بر روی سطح سُر می‌خورد. یعنی هر دو حرکت را با هم انجام می‌دهد. به جسم نیروی اصطکاک $\mathbf{f}$ وارد می‌شود که اندازه‌اش $f = f_{max} = \mu Mg\cos\theta$ است. معادله‌ی حرکت انتقالی جسم در امتداد سطح به



شکل ۴۱-۱۱

صورت زیر است

$$Mg\sin\theta - Mg\,\mu\cos\theta = Ma_{CM} \qquad (۱۱-۹۸)$$

چون جسم حرکت چرخشی هم دارد، معادله‌ی حرکت چرخشی را حالا می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I_{CM}\,\alpha = \mu MgR\cos\theta \qquad (۱۱-۹۹)$$

شتاب مرکز جرم از رابطه‌ی (۹۸-۱۱) به دست می‌آید و دیده می‌شود که مقدارش ثابت است

$$a_{CM} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) \qquad (۱۱-۱۰۰)$$

شتاب زاویه‌ای نیز مقدار ثابتی است و از رابطه‌ی (۹۹-۱۱) داریم

$$\dot{\omega} \equiv \alpha = \frac{\mu MgR\cos\theta}{I_{CM}} \qquad (۱۱-۱۰۱)$$

فرض کنید جسم در زمان $t=0$ از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، یعنی در زمان $t=0$ داریم $v_{CM}=0$ و $\omega=\dot{\phi}=0$. ϕ زاویه‌ای است که کره حول محوری که از مرکزش می‌گذرد، چرخیده است. اگر از رابطه‌های (۱۰۰-۱۱) و (۱۰۱-۱۱) نسبت به زمان انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$v_{CM} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t$$
$$\omega = \dot{\phi} = \frac{g\;\mu RM\;\cos\theta}{I_{CM}}t \qquad (۱۱-۱۰۲)$$

بنابراین، نسبت سرعت خطی مرکزجرم و سرعت زاویه‌ای مقدار ثابتی است. آن را γ بنامید.

$$\frac{v_{CM}}{\omega} = \frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\dfrac{\mu MR\cos\theta}{I_{CM}}} \equiv \gamma = \frac{I_{CM}}{MR}\left(\frac{\tan\theta}{\mu} - 1\right) \qquad (۱۱-۱۰۳)$$

اگر کمیت β را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\beta \equiv \frac{I_{CM}}{MR^{۲}}\left(\frac{\tan\theta}{\mu} - ۱\right) \quad \Rightarrow \quad \gamma = \beta R \qquad (۱۱-۱۰۴)$$

رابطه‌ی (۱۰۴-۱۱) را می‌توان به صورت

$$v_{cm} = \beta R\,\omega \qquad (۱۱-۱۰۵)$$

نوشت. چون $R\omega$ نمی تواند از v_{cm} بزرگتر باشد (چرا؟) بنابراین β نمی تواند کمتر از یک باشد.
در حالت حدی که حرکت، غلتش خالص ـ بدون لغزش ـ است، داریم $v_{cm} = R\omega$ و $\beta = ۱$. اگر معادله‌ی (۱۰۴-۱۱) را برای $\beta = ۱$ حل کنیم، دیده می‌شود که مقدار بحرانی μ عبارت است از

$$\mu_C \equiv \frac{\tan\theta}{۱ + \dfrac{MR_{۲}}{I_{CM}}} \qquad (۱۱-۱۰۶)$$

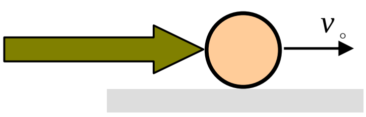
هرگاه μ از این مقدار حدی، μ_C، بزرگتر باشد، اصطکاک به اندازه‌ی کافی بزرگ است که از لغزش جلوگیری کند و حرکت، غلتشی بدون لغزش باشد. برای نمونه فرض کنید زاویه‌ی شیب ۴۵ درجه است. برای این که کره در روی سطح نلغزد باید ضریب اصطکاک سطح بیش از ۲/۷ باشد:

$$\mu \geq \frac{\tan ۴۵^\circ}{۱+\frac{MR^۲}{۲MR^۲/۵}} = \frac{۱}{۱+۰/۲} = \frac{۲}{۷} \qquad (۱۱-۱۰۷)$$

مثال ۱۹-۱۱ گلوله‌ی همگن شکل (۴۲-۱۱) به جرم M و به شعاع R (یک تیله‌ی بزرگ) روی سطح افقی با ضریب اصطکاک μ قرار دارد. ضربه‌ای افقی در راستایی که از مرکز گلوله می‌گذرد، به گلوله وارد می‌شود و گلوله با سرعت $v_۰$ شروع به حرکت می‌کند. روشن است که این حرکت در آغاز فقط انتقالی است؛ چون راستای ضربه از مرکز آن می‌گذرد که مرکزجرمش است وگشتاور نیروی ضربه نسبت به آن صفر است.

(الف): گلوله پیش از آنکه از لغزش بماند و شروع به غلتیدن بدون لغزش کند، چه مسافتی را می‌پیماید؟

(ب): در لحظه‌ای که حرکت به غلتش بدون لغزش تبدیل می‌شود، سرعت زاویه‌ای گلوله چقدر است؟



شکل ۴۲-۱۱

حل: **(الف)** در فاصله‌ی زمانی بین ضربه و آغاز حرکت غلتشی خالص، اصطکاک دو پدیده به وجود می‌آورد : (۱) گلوله را به طور خطی واشتابیده می‌کند. (۲) هم‌زمان به گلوله گشتاوری نسبت به مرکزجرم وارد می‌کند. گشتاور سبب می‌شود که گلوله شتاب زاویه‌ای پیدا کند. سرعت خطی گلوله کاهش و سرعت زاویه‌ای آن افزایش پیدا می‌کند تا این که شرط حرکت غلتش خالص، $v = R\omega$ ، برقرار شود. نیروی اصطکاک وارد به گلوله، بنا به تعریف، $f = \mu N = \mu Mg$ است. این نیرو در خلاف جهت $v_۰$ است. شتاب خطی مرکزجرم گلوله از $F = ma$ به دست می‌آید:

$$F = Ma_{CM} \;\Rightarrow\; a_{CM} = \frac{f}{M} = -\mu g \qquad (۱۱-۱۰۸)$$

بنابراین، در زمان t سرعت خطی گلوله عبارت است از:

$$v = \int a dt = \int (-\mu g) dt = v_0 - \mu g t \qquad (۱۱-۱۰۹)$$

گشتاور وارد به گلوله

$$G = fR = \mu Mg R \qquad (۱۱-۱۱۰)$$

است و نیز داریم $G = I\alpha$. برای گلوله‌ی توپر $I = ۲MR^۲/۵$ است. پس می‌توان شتاب زاویه‌ای حرکت چرخشی را حساب کرد

$$G = \mu MgR = I\alpha \;\Rightarrow\; \mu MgR = \frac{۲}{۵}MR^۲\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{۵}{۲}\frac{\mu g}{R} \qquad (۱۱-۱۱۱)$$

سرعت زاویه‌ای گلوله در زمان t عبارت است از:

$$\omega = \int \alpha dt = \alpha t + \omega_0 \qquad (۱۱-۱۱۲)$$

چون گلوله در آغاز چرخش نداشت پس $\omega_۰ = ۰$ و

$$\omega(t) = \alpha t = \frac{۵}{۲}\frac{\mu g}{R} t \qquad (۱۱-۱۱۳)$$

برای این که مسافت پیموده شده‌ی پیش از آغاز حرکت غلتشی خالص را حساب کنیم؛ نخست باید زمان این پیمایش را حساب کنیم. این کار ساده‌ای است. کافی است ببینیم در چه زمانی شرط غلتش برقرار می‌شود. یعنی به ازای چه زمان t رابطه‌ی $V(t) = R\omega(t)$ برقرار است. از رابطه‌های (۱۰۹-۱۱) و(۱۱۳-۱۱) داریم

$$V(t)=R\omega(t) \;\Rightarrow\; v_0-\mu gt=R\left[\frac{5}{2}\,\frac{\mu g}{R}\right]t=\frac{5}{2}\mu gt \;\Rightarrow\; \frac{7}{2}\mu gt=v_0 \;\Rightarrow\; t=\frac{2}{7}\,\frac{v_0}{\mu g} \qquad (۱۱-۱۱۴)$$

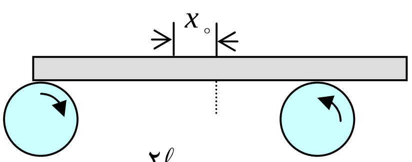
بنابراین، ،فاصله‌ای که در زمان $t=2v_0/7\mu g$ پیموده شده است ، عبارت است از

$$S=v_0t+\frac{1}{2}at^2=v_0t-\frac{1}{2}\mu gt^2 \;\Rightarrow\; S=v_0\left(\frac{2}{7}\,\frac{v_0}{\mu g}\right)-\frac{1}{2}\mu g\left(\frac{2}{7}\,\frac{v_0}{\mu g}\right)^2=\frac{12}{49}\,\frac{v_0^2}{\mu g} \qquad (۱۱-۱۱۵)$$

(ب): سرعت زاویه‌ای گلوله در این زمان برابر است با

$$\begin{aligned}\omega(t)&=\omega_0+\alpha t\\ &=0+\alpha t=\left(\frac{5}{2}\,\frac{\mu g}{R}\right)\left(\frac{2}{7}\,\frac{v_0}{\mu g}\right)=\frac{5}{7}\,\frac{v_0}{R}\end{aligned} \qquad (۱۱-۱۱۶)$$

مثال ۲۰-۱۱ دو غلتک یکسان شکل (۴۳-۱۱) با سرعت زاویه‌ای زیاد در خلاف جهت هم حول مرکزشان می‌چرخند. غلتک‌ها بر روی محورهای ثابت سوارند. فاصله‌ی مرکز غلتک‌ها از یکدیگر 2ℓ است. تخته‌ی سنگینی به جرم M را روی غلتک ها طوری قرار می‌دهیم که وسط آن در فاصله‌ی x_0 از وسط غلتک‌ها قرار گیرد. ضریب اصطکاک بین تخته و غلتک‌ها مقدار ثابت μ و مستقل از سرعت نسبی بین سطح‌هاست. تخته را با دست در این وضعیت ساکن نگاه می‌داریم و در زمان $t=0$ آن را رها می‌کنیم. تخته چه حرکتی انجام می‌دهد ؟



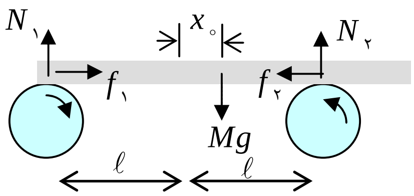
شکل ۴۳-۱۱

حل: نیروهای وارد به تخته در شکل (۴۴-۱۱) نشان داده شده اند. مجموع نیروهای عمودی وارد به آن باید با وزن تخته برابر باشد. بنابراین $N_1+N_2=Mg$ است. گشتاور این نیروها نسبت به مرکزجرم تخته باید یکدیگر را حذف کنند. در غیر این صورت، تخته می چرخد.

$$G_1+G_2=N_1(\ell+x_0)-N_2(\ell-x_0)=0 \qquad (۱۱-۱۱۷)$$

از حل هم زمان این دو معادله خواهیم داشت

از حل هم زمان این دو معادله خواهیم داشت



شکل ۴۵-۱۱

$$N_1=\frac{Mg}{2}\left(1-\frac{x_0}{\ell}\right) \quad , \quad N_2=\frac{Mg}{2}\left(1+\frac{x_0}{\ell}\right) \qquad (۱۱-۱۱۸)$$

نیروی افقی کل وارد به تخته $F=f_1-f_2$است. $f_1=\mu N_1$ و $f_2=\mu N_2$ نیروهای اصطکاک اند. پس داریم

$$F=\mu(N_1-N_2)=-\frac{\mu Mg}{\ell}x_0 \qquad (۱۱-۱۱۹)$$

این نیروی نوسانگر هماهنگ $F=-kx$ است که در آن $k\equiv \mu Mg/\ell$ است. بنابراین، تخته حرکت نوسانی خواهد داشت.

$$x(t)=x_0\cos\omega t \quad , \quad \omega=\sqrt{\mu g/\ell} \qquad (۱۱-۱۲۰)$$

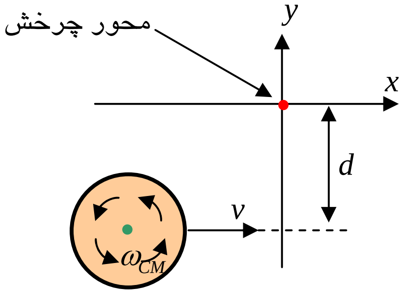
۷-۱۱ برخورد و ضربه

۱-۷-۱۱ برخورد

در فصل ۸ برخورد بین دو جسم نقطه‌ای (به بیان دیگر دو جسمی که نمی‌چرخند) را بررسی کردیم. برای حل مسئله‌های برخورد از پایستگی تکانه و پایستگی انرژی (اگر برخورد کشسان باشد) استفاده کردیم. اینک پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای را هم می‌شناسیم که اجازه می‌دهد تا مسئله‌های برخورد را به اجسام چرخنده تعمیم داد. پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای درجه‌ی آزادی اضافی حاصل از چرخش را جبران می‌کند و تعداد مجهول‌ها با تعداد معادله‌ها برابر می‌شود.

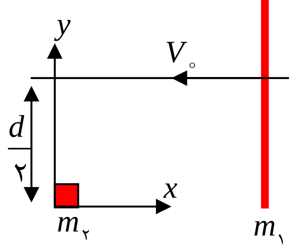
در یک سامانه‌ی منزوی وقتی می‌توان از پایستگی انرژی استفاده کرد که برخورد کشسان باشد. اما از پایستگی تکانه و پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای همیشه می‌توان استفاده کرد. با وجود این، پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای اندکی با پایستگی تکانه فرق دارد؛ چون نخست باید مبدائی را برای محاسبه‌ی L انتخاب کنیم. با توجه به سه شرطی که برای برقراری نتیجه‌ی بعد از رابطه‌ی (۲۸-۱۱) لازم است، مبداء انتخابی باید یک نقطه‌ی ثابت یا مرکزجرم باشد (شرط سوم را در نظر نمی‌گیریم، چون به ندرت از آن استفاده می‌شود). اگر نقطه‌ی دیگری غیر از این دو را انتخاب کنیم، $\mathbf{G}=d\mathbf{L}/dt$ برقرار نیست و نمی‌توان گفت که چون گشتاور و در نتیجه، $d\mathbf{L}/dt$ هم صفر است. البته، از میان نقاط ثابت مجاز و مرکزجرم، یکی را برمی‌گزینیم. معمولا برخی از این گزینه‌ها بهتر از دیگری است و محاسبه را آسان‌تر می‌کند. باید آموخت که از این آزادی سود برد.

در فصل ۱۰ قضیه‌ی مهمی را اثبات کردیم، قضیه‌ی ۱-۱۰، که عمومی‌ترین توصیف برای تکانه‌ی زاویه‌ای کل یک سامانه بود. این قضیه می‌گوید تکانه‌ی زاویه‌ای کل سامانه حول محور داده شده‌ای برابر است با جمع تکانه‌ی زاویه‌ای جرم نقطه‌های جایگزیده در مرکزجرم نسبت به این محور و تکانه‌ی زاویه‌ای جسم حول محوری که از مرکزجرم می‌گذرد. می‌توان آن را به صورت $\mathbf{L}=\mathbf{L}_{CM}+\mathbf{L}'$ نوشت و با شکل (۴۵-۱۱) تجسم کرد. $\mathbf{L}'=I\,\omega_{CM}\,\hat{\mathbf{z}}$ (به سبب چرخش حول مرکزجرم) و $\mathbf{L}_{CM}=mvd\,\hat{\mathbf{z}}$ (به سبب چرخش مرکزجرم حول محور چرخش اصلی). این قضیه برای حل برخی مسئله‌های برخورد سودمند است.

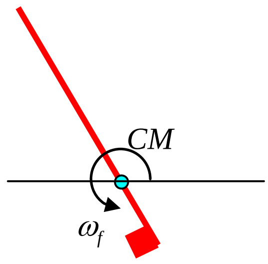


شکل ۱۱-۴۵

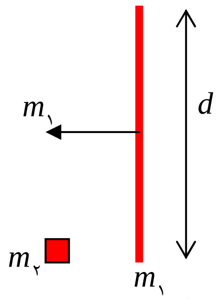
مثال ۲۱-۱۱ میله‌ای به طول d و جرم m_1 در روی سطح افقی میز بدون اصطکاک برابر شکل (۴۷-۱۱) با سرعت $V_\circ$ حرکت می‌کند و با جرم ساکن m_2 برخورد می‌کند. جرم m_2 به انتهای میله می‌چسبد و با آن حرکت می‌کند. سرعت زاویه‌ای نهایی



شکل ۴۶-۱۱ پ: پیش از برخورد



پس از برخورد
شکل ۴۶-۱۱ ب



پیش از برخورد
شکل ۴۶-۱۱ الف

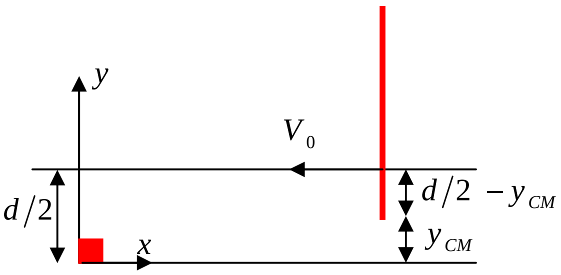
سامانه‌ی میله + جرم را بیابید.

حل: وضعیت پیش از برخورد و پس از آن در شکل (۴۶- ۱۱ الف و ۴۶-۱۱ ب) نشان داده شده اند. مبداء مختصات را مکان جرم m_2 پیش از برخورد آن فرض کنید. (شکل ۴۶-۱۱ پ را ببینید.) می‌توانیم y_{CM} را حساب کنیم.

$$y_{CM} = \frac{d}{2}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) \tag{۱۱-۱۲۱}$$

پیش از برخورد، میله هنوز نمی‌چرخد و بنابراین، تکانه‌ی زاویه‌ای سامانه در اثر حرکت مرکزجرم میله به وجود می‌آید. همان طور که از شکل (۱۱-۴۷) پیداست، داریم

$$L_i = m_1\left(\frac{d}{2} - y_{CM}\right)V_0 \tag{۱۱-۱۲۲}$$

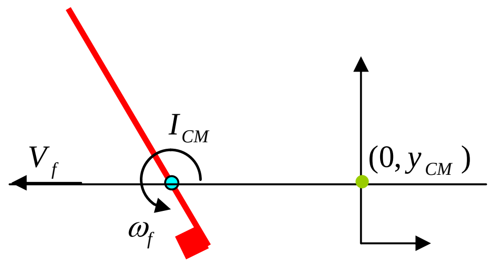


شکل ۱۱-۴۷

پس از برخورد و چسبیدن جرم m_2 به میله، تکانه‌ی زاویه‌ای میله + جرم نسبت به مرکزجرم (نقطه‌ی $(0, y_{CM})$) در اثر چرخش میله+ جرم به وجود می‌آید و با توجه به شکل (۱۱-۴۸) برابر است با

$$L_f = L_f' + \cancel{L_f^{CM}} = I_{CM}\,\omega_f \tag{۱۱-۱۲۳}$$

حال باید گشتاور لختی سامانه را نسبت به مرکز، I_{CM} ، به دست بیاوریم که مجموع گشتاورهای لختی میله و جرم است. گشتاور لختی میله نسبت به مرکزجرم با استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی به دست می آید و برابر است با



شکل ۱۱-۴۸ (پس از برخورد)

$$I_{m_1} = \frac{1}{12}m_1 d^2 + m_1\left(\frac{d}{2} - y_{CM}\right)^2 \tag{۱۱-۱۲۴}$$

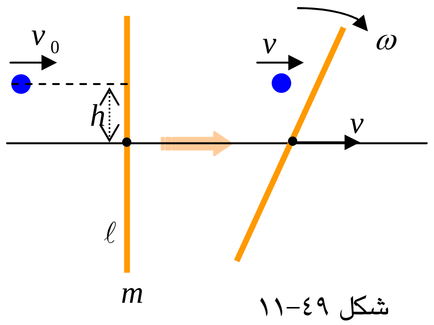
گشتاور لختی جرم m_2 نسبت به مکان مرکز جرم $m_2 y_{CM}^2$ است. پس،

$$I_{CM} = I_{m_1} + I_{m_2} = \frac{1}{12}m_1 d^2 + m_1\left(\frac{d}{2} - y_{CM}\right)^2 + m_2 y_{CM}^2 \tag{۱۱-۱۲۵}$$

با استفاده از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای داریم

$$L_f = L_i \;\Rightarrow\; I_{CM}\,\omega_f = m_1 V_0\left(\frac{d}{2} - y_{CM}\right) \;\Rightarrow\; \omega_f = \frac{m_1 V_0 d}{2 I_{CM}}\left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right) \tag{۱۱-۱۲۶}$$

مثال ۲۲-۱۱ (برخورد کشسان): جرم m با سرعت v_0 در راستای عمود بر میله‌ی ساکنی به جرم m و طول ℓ حرکت می‌کند و برابر شکل (۱۱-۴۹) با آن به طور کشسان برخورد می‌کند. جرم m در چه فاصله‌ی h از وسط میله با آن برخورد کند تا پس از برخورد مرکزجرم میله و جرم m با سرعت‌های مساوی حرکت کنند؟



شکل ۱۱-۴۹

حل: در این مسئله سه مجهول وجود دارد: فاصله‌ی h نقطه‌ی برخورد از وسط میله، سرعت‌های نهایی و مساوی v ، میله و جرم و سرانجام سرعت زاویه‌ای نهایی، ω، میله. این سه مجهول را از سه قانون پایستگی می‌توان به دست آورد.

- پایستگی تکانه ی p: $\quad mv_0 = mv + mv \;\Rightarrow v = v_0/2$
- پایستگی انرژی E: $\quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \left[\frac{m}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{12}\right)\omega^2\right] \;\Rightarrow\; \omega = \frac{\sqrt{6}\,v_0}{\ell}$ (۱۱-۱۲۷)

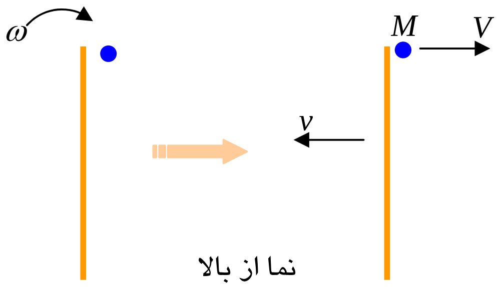
- پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای L: حالا باید مبدایی هم انتخاب و L را نسبت به آن حساب کنیم . مبداء را نقطه‌ی ثابتی در نظر بگیرید که مرکز میله پیش از برخورد در آن جا بود. از پایستگی L داریم

$$mv_\circ h = m\left(\frac{v_\circ}{۲}\right)h + \left[\left(\frac{m\ell^۲}{۱۲}\right)\omega + \circ\right] \qquad (۱۱\text{–}۱۲۸)$$

صفر در درون کروشه از آنجا ناشی می‌شود که پس از برخورد، مرکز جرم میله در امتداد خطی که از مبدا می‌گذرد، از آن دور می‌شود و در نتیجه، جمله‌ی اول قضیه‌ی ۱۰-۱ سهمی در L ندارد. اگر ω را از رابطه‌ی (۱۱-۱۲۷) در رابطه‌ی (۱۱-۱۲۸) قرار دهیم ، خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۲}mv_\circ h = \left(\frac{m\ell^۲}{۱۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۶}v_\circ}{\ell}\right) \quad\Rightarrow\quad h = \frac{\ell}{\sqrt{۶}} \qquad (۱۱\text{–}۱۲۹)$$

مثال ۱۱-۲۳ میله‌ی همگنی به جرم m و طول ℓ بدون این که مرکزش جابه‌جا شود، در روی میز بدون اصطکاک می‌چرخد و انتهای آن با جرم M که در روی میز ساکن است، برخورد می‌کند (شکل ۱۱-۵۰). جرم M چه قدر باید باشد تا پس از برخورد، میله نچرخد و فقط حرکت انتقالی داشته باشد؟



شکل ۱۱-۵۰

حل: در اینجا هم سه مجهول داریم که عبارتند از سرعت v میله ، سرعت گلوله V، و جرم M گلوله. سه معادله‌ی پایستگی هم داریم که با استفاده از آنها می‌توان سه مجهول را به دست آورد.

پایستگی E:
$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱۲}m\ell^۲\right)\omega^۲ = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}MV^۲$$

پایستگی p:
$$\circ = MV - mv \qquad (۱۱\text{–}۱۳۰)$$

پایستگی L: نسبت به مکان پیش از برخورد وسط میله
$$\left(\frac{۱}{۱۲}m\ell^۲\right)\omega = \circ + MV\,\frac{\ell}{۲}$$

شاید بهترین راه برای حل همزمان این سه معادله استفاده از $p = mv = MV$ باشد. داریم

از پایستگی E:
$$\frac{۱}{۲}I\omega^۲ = \frac{p^۲}{۲m} + \frac{p^۲}{۲M} \qquad (۱۱\text{–}۱۳۱)$$

از پایستگی L:
$$I\omega = p\left(\frac{\ell}{۲}\right) \Rightarrow p = \frac{۲I\omega}{\ell}$$

بنابراین، اگر به جای p در معادله‌ی اول رابطه‌ی (۱۱-۱۳۱) مقدارش را از معادله‌ی دوم قرار دهیم خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۲}I\omega^۲ = \left(\frac{۲I\omega}{\ell}\right)^۲\left(\frac{۱}{۲m} + \frac{۱}{۲M}\right) \quad\Rightarrow\quad ۱ = \frac{۴I}{\ell^۲}\left(\frac{۱}{m} + \frac{۱}{M}\right)$$
$$\Rightarrow ۱ = \frac{۴\left(m\ell^۲/۱۲\right)}{\ell^۲}\left(\frac{۱}{m} + \frac{۱}{M}\right) \quad\Rightarrow\quad ۳ = ۱ + \frac{m}{M} \qquad (۱۱\text{–}۱۳۲)$$
$$\Rightarrow \quad M = m/۲$$

۲-۷-۱۱ ضربه چرخشی

در فصل ۱-٤-٥ ضربه $\mathcal{I}$ را انتگرال زمانی نیروی وارد به جسم تعریف کردیم که با تغییر کل در تکانه جسم برابر است. به بیان دیگر

$$\mathcal{I} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,dt = \Delta\mathbf{P} \qquad (۱۱-۱۳۳)$$

حالا ضربه‌ی چرخشی، $\mathcal{I}_\theta$، را انتگرال زمانی گشتاور وارد به جسم تعریف می‌کنیم که با تغییر کل در تکانه‌ی زاویه‌ای جسم برابر است:

$$\mathcal{I}_\theta \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{G}(t)\,dt = \Delta\mathbf{L} \qquad (۱۱-۱۳٤)$$

این‌ها تعریف اند و هیچ اندرونه‌ی فیزیکی ندارند. فیزیک به صورت زیر وارد داستان می‌شود. وضعیتی را تجسم کنید که به نقطه‌ای از جسم همیشه نیروی $\mathbf{F}(t)$ وارد می‌شود. فاصله‌ی این نقطه از مبدایی که می‌خواهیم $\mathbf{G}(t)$ را نسبت به آن حساب کنیم ثابت است است. این فاصله را $\mathbf{R}$ بنامید. در این صورت داریم $\mathbf{G}(t)=\mathbf{R}\times\mathbf{F}(t)$ است. آن را در رابطه‌ی (۱۳٤-۱۱) قرار دهید و ثابت $\mathbf{R}$ را بیرون انتکرال نگه دارید. خواهیم داشت $\mathcal{I}_\theta=\mathbf{R}\times\mathbf{I}$. یعنی وقتی $\mathbf{F}(t)$ به یک نقطه اثر کند، داریم

$$\Delta\mathbf{L}=\mathbf{R}\times(\Delta\mathbf{P}) \qquad (۱۱-۱۳٥)$$

این رابطه نتیجه‌ی سودمندی است و به تغییر کل در $\mathbf{L}$ و $\mathbf{P}$مربوط است و نه به تغییر آنها در لحظه‌ی معینی از زمان. حتی اگر $\mathbf{F}$ با زمان تغییر کند و ندانیم این تغییر چگونه است (و بنابراین، هیچ آگاهی از این که $\Delta\mathbf{L}$ و $\Delta\mathbf{P}$ چیستند نداشته باشیم)، هنوز هم می‌دانیم که $\Delta\mathbf{L}$ و $\Delta\mathbf{P}$ با رابطه‌ی (۱۳٥-۱۱) به هم مربوط اند. خیلی وقت ها لازم نیست که نگران ضرب خارجی در رابطه‌ی (۱۳٥-۱۱) باشیم، چون بازوی $\mathbf{R}$ بر تغییر تکانه‌ی $\Delta\mathbf{P}$ عمود است. در چنین وضعیت‌ها $|\Delta L|=R\,|\Delta p|$ است. همچنین در خیلی حالت‌ها جسم از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و نیازی به استفاده از Δ ها هم نیست. مثال زیر، نمونه‌ی کلاسیک ضربه‌ی چرخشی و کاربرد رابطه‌ی (۱۳٥-۱۱) است.

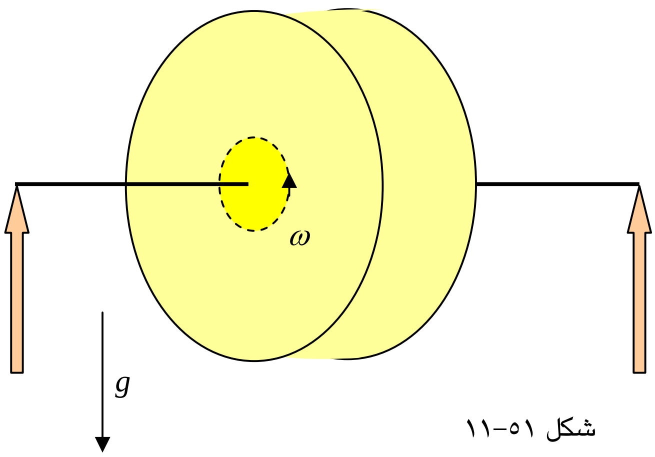
مثال ۲۴-۱۱ میله‌ای به طول ℓ و به جرم m روی زمین در حال سکون است. با پتکی به یک انتهای آن ضربه‌ای عمودی وارد می‌کنیم. فرض کنید ضربه سریع است و میله در طول تماس پتک تکان نمی‌خورد. اگر مرکزجرم میله با سرعت v حرکت کند، پس از ضربه، سرعت‌های دو انتهای میله چقدر است؟

حل: ما نمی‌دانیم نیروی $F(t)$ چگونه است و یا به چه مدت به میله اثر می‌کند. اما از رابطه‌ی (۱۳٥-۱۱) می‌دانیم که $\Delta L=(\ell/2)\Delta p$ است. L را نسبت به مرکزجرم میله حساب کردیم و بنابراین، بازوی نیرو $(\ell/2)$ است. پس داریم $(m\ell^2/12)\omega=(\ell/2)mv$. در نتیجه، سرعت‌های نهایی v و ω با رابطه‌ی $\omega=6v/\ell$ به هم مربوط اند.

سرعت‌های دو انتها از جمع (یا تفریق) حرکت چرخشی و حرکت انتقالی مرکزجرم به دست می‌آیند. سرعت‌های زاویه‌ای دو انتها (سرعت‌های دو نقطه در دو انتهای میله) عبارتند از $\pm\omega(\ell/2)=\pm(6v/\ell)(\ell/2)=\pm 3v$. پس، انتهایی که ضربه به آن وارد می‌شود با سرعت $v+3v=4v$ حرکت می‌کند و انتهای دیگر با سرعت $v-3v=-2v$ حرکت می‌کند (به عقب می‌رود).

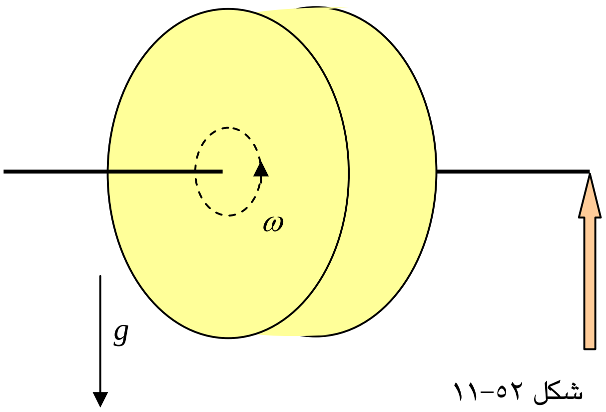
۸-۱۱ ژیروسکوپ

در این بخش به رفتار چرخی می‌پردازیم که حول محورش می‌چرخد. محور چرخ بر روی تکیه گاهی قرار دارد که اجازه می‌دهد جهت محور چرخش تغییر کند. در شکل (۵۱-۱۱) چرخی نشان داده شده است که محورش بر روی دو پایه قرار دارد و

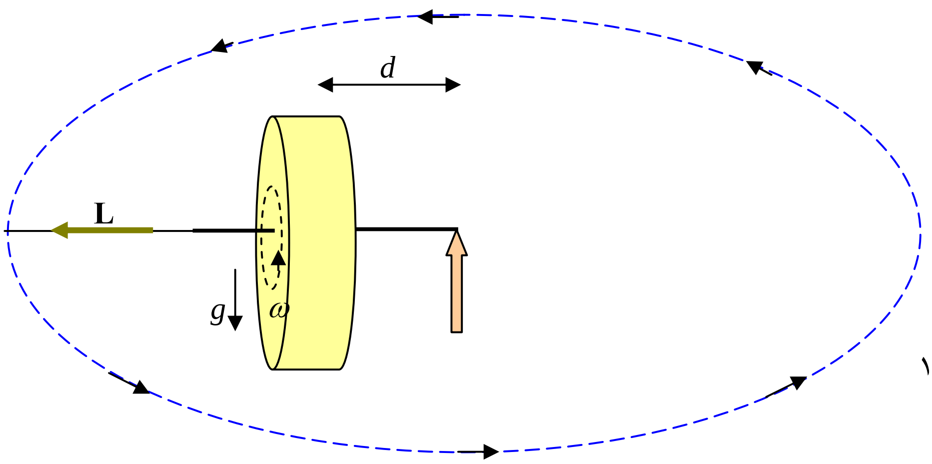


شکل ۵۱-۱۱

با سرعت زاویه‌ای ω حول محور می‌چرخد. اگر یکی از پایه‌ها را برداریم چه پیش می‌آید؟ در شکل (۵۲-۱۱) ساده‌ترین ژیروسکوپ نشان داده شده است و برای منظور ما کفایت می‌کند. بررسی عمومی حرکت یک چنین سامانه‌ای در چارچوب این کتاب نمی‌گنجد. اگر ژیروسکوپ در حالی که یک انتهای محورش روی پایه قرار دارد از حالت افقی رها شود، **سقوط نمی کند**؛ بلکه، نخست اندکی لرزش افقی می‌کند و سپس به طور یکنواخت حول پایه می‌گردد. این چرخش در شکل (۵۳-۱۱) نشان داده شده است. این رفتار شگفت انگیز را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی $\mathbf{G}=d\mathbf{L}/dt$ فهمید. اندازه‌ی گشتاور حول پایه mgd است. و جهت آن برای لحظه‌ای که در شکل (۵٤-۱۱) نشان داده شده است، به سمت بیرون از صفحه است (با استفاده از قاعده‌ی دست راست). بنابراین، تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای هم برای لحظه‌ای که نشان داده شده است، باید بیرون



شکل ۵۲-۱۱



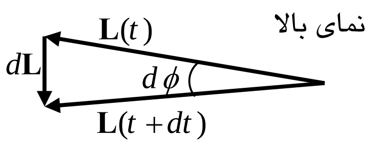
شکل ۵۳-۱۱

از صفحه باشد. فرض کنید از بالا به سامانه نگاه می‌کنید. تغییر در اندازه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای در زمان dt برابر $L\,d\phi$ است. این را می‌توان با نگاه کردن به شکل (۵۴-۱۱) فهمید. $d\phi$ زاویه‌ای است که محور ژیروسکوپ در زمان dt چرخیده است. بنابراین داریم

$$\frac{dL}{dt} = L\frac{d\phi}{dt} \equiv L\Omega \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{G}{L} \qquad (۱۱-۱۳۶)$$

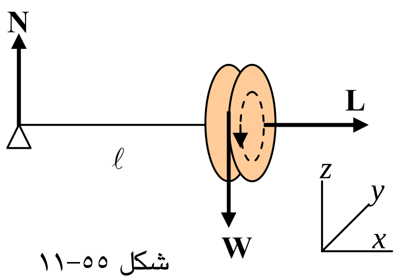
Ω بسامد حرکت **تقدیمی** نامیده می شود.

نخستین پرسشی که به ذهن می‌رسد این است که چرا ژیروسکوپ نمی‌افتد؟ یک پاسخ ممکن به این پرسش این است که نمودار آزاد نیروها را در شکل (۵۵-۱۱) وارسی کنیم. نیروهایی که به سامانه وارد می‌شوند، وزن ژیروسکوپ W و نیروی عمودی N است که پایه به محور وارد می‌کند. برآیند این دو نیروی عمودی $N-W$ است. اگر $N=W$ باشد، مرکزجرم نمی‌تواند سقوط کند. گرچه این توصیف درست است اما راضی کننده نیست. پرسش درست این است: چرا ژیروسگوپ مانند آونگ حول پایه تاب نمی‌خورد. واقع، اگر چرخ ژیروسکوپ نچرخد و آن را از حالت افقی رها کنیم، درست همانند آونگ رفتار می‌کند و به جای این که حرکت تقدیمی افقی انجام دهد،در صفحه‌ی عمودی تاب می‌خورد. فقط وقتی که چرخ ژیروسکوپ به سرعت بچرخد، حرکت تقدیمی افقی خواهد داشت. در این حالت تکانه‌ی زاویه‌ای آن دینامیک سامانه را اداره می‌کند.



شکل ۵۴-۱۱

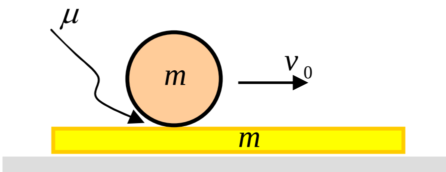
تکانه‌ی زاویه‌ای ژیروسکوپ در راستای محورش است (با حرکت تقدیمی حول محور z یک تکانه‌ی زاویه‌ای در جهت محور z هم به وجود می‌آید. اما برای حرکت تقدیمی یکنواخت، اندازه‌ی این تکانه‌ی زاویه‌ای ثابت و در مقایسه با تکانه‌ی زاویه‌ای حاصل از چرخش کوچک است و در دینامیک مسئله نقشی ندارد.) با حرکت تقدیمی ، جهت تکانه‌ی زاویه‌ای حاصل از چرخش ژیروسکوپ هم تغییر می‌کند. پس باید گشتاوری وجود داشته باشد که سبب این تغییر در تکانه‌ی زاویه‌ای می‌شود. منشاء این گشتاور را از نمودار آزاد نیروها می‌توان دریافت. اگر تکیه گاه را مبداء انتخاب کنیم، نیروی وزن چرخ نسبت به آن گشتاوری تولید می‌کند که اندازه‌اش $G=\ell W$ است. $\mathbf{G}$ در جهت y و موازی $d\mathbf{L}/dt$ است. از رابطه‌ی $|d\mathbf{L}/dt| = G = \ell W$ و از رابطه‌ی (۱۳۶-۱۱) دیده می‌شود که $\Omega = \ell W / I_o \omega$ است. از این نتیجه دیده می شود که با آهسته شدن چرخش چرخ، Ω افزایش پیدا می‌کند. روشن است که این افزایش برای همیشه نمی‌تواند ادامه یابد و سرانجام حرکت تقدیمی یکنواخت به حرکتی نامنظم تبدیل می‌شود.



شکل ۵۵-۱۱

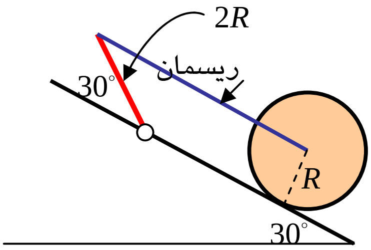
مثال‌های تکمیلی

ت-۱ استوانه‌ای به جرم m و شعاع r (و $I = mr^{۲}/۲$) برابر شکل (۱۱-۵٦) روی تخته‌ی درازی به جرم m قرار دارد. تخته در روی میز افقی بدون اصطکاک قرار دارد و می‌تواند بر روی آن آزادانه بلغزد، اما بین تخته و استوانه اصطکاک وجود دارد و ضریب اصطکاک جنبشی μ است . اگر تخته در آغاز در حال سکون باشد و استوانه با سرعت اولیه‌ی $v_{\circ}$ (اما **بدون** حرکت چرخشی اولیه) شروع به حرکت به سوی راست کند، سرعت استوانه (نسبت به زمین) در هنگامی که سرانجام حرکتش غلتشی بدون لغزش می‌شود، چقدر است؟



شکل ۱۱-۵٦

ت-۲ استوانه‌ای به جرم m و به شعاع R (و $I = mR^{۲}/۲$ نسبت به مرکزش) روی سطح شیب‌داری با شیب ۳۰° درجه قرار دارد. میله‌ی همگنی به جرم m و طول $۲R$ (و $I = (۱/۳)m(۲R)^{۲}$ نسبت به یک انتها) از یک سر برابر شکل (۱۱-۵۷) به سطح شیب‌دار لولا شده است و با سطح زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد. ریسمانی بدون جرم انتهای بالایی میله را به مرکز استوانه وصل می‌کند و ریسمان با سطح شیب‌دار موازی است (فرض کنید ریسمان به اندازه‌ی کافی دراز است که حتی اگر سامانه حرکت کند، ریسمان همواره موازی سطح باقی می‌ماند). سامانه از حالت سکون رها می‌شود و استوانه نسبت به سطح شیب‌دار **نمی‌لغزد**. هدف مسئله یافتن شتاب خطی استوانه، a_c، بر روی سطح شیب‌دار است. با برداشتن گام‌های زیر شتاب خطی استوانه را بیابید



شکل ۱۱-۵۷

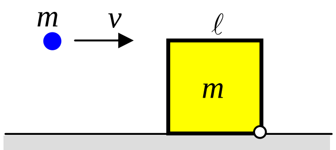
(الف) نمودار آزاد نیروهای وارد به استوانه و میله را رسم کنید.

(ب) مجموعه‌ی معادله‌هایی را که برای یافتن a_c لازم دارید بنویسید، به هر کدام شماره‌ای نسبت دهید ودور هر یک کادری بکشید. (توجه کنید که به دست آوردن رابطه‌ی بین دوتا از شتاب‌ها اندکی پیچیده است اگر نتوانستید آن را به دست آورید. فرض کنید $a_c = R\alpha_s$ است که در آن α_s شتاب زاویه‌ای میله است)

(پ) همه‌ی نیروها و شتاب‌های مجهول معادله‌هایتان را نام ببرید.

(ت) a_c را درست پس از رها شدن سامانه حساب کنید (لازم نیست همه‌ی مجهول‌ها را حساب کنید.

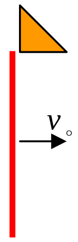
ت-۳ قطعه‌ای به شکل مکعب با جرم m و طول ضلع ℓ برابر شکل (۱۱-۵۸) روی میزی قرار دارد و گوشه‌ی پایین سمت راست آن به میز لولا شده است. توپی با سرعت v به سوی راست حرکت می‌کند و پس از برخورد با قطعه به گوشه‌ی بالایی سمت چپ قطعه می‌چسبد. گشتاور لختی قطعه نسبت به مرکز آن $m\ell^{۲}/٦$ است.



شکل ۱۱-۵۸

(الف): سرعت زاویه‌ای مجموعه‌ی قطعه + توپ را درست پس از برخورد حساب کنید.

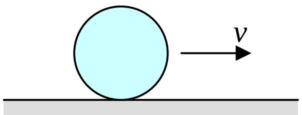
(ب): بیشینه مقدار v که هنوز قطعه واژگون نشود چیست؟ (یعنی اگر سرعت بیش از این مقدار باشد، قطعه با سطح سمت راست بر روی میز واژگون می‌شود.)



شکل ۱۱-۵۹

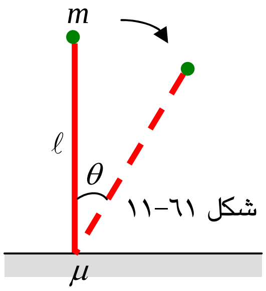
ت-۴ میله‌ای به طول ℓ، جرم m (با $I = m\ell^{۲}/۱۲$ نسبت به مرکز آن) روی میز افقی بدون اسطکاک سُر می‌خورد. سرعت زاویه‌ای میله صفر و سرعت خطی آن در راستای عمود بر میله و برابر $v_\circ$ است. در روی میز جسم ثابت مثلث شکلی برابر شکل (۱۱-۵۹) قرار دارد و میله با گوشه‌ی آن به طور کشسان برخورد می‌کند. سرعت انتهای دیگر میله درست پس از برخورد چقدر است؟ سرعت انتهایی که با مانع برخورد می‌کند، درست پس از برخورد چیست؟

ت-۵ سکه‌ای برای شکل (۱۱-۶۱) در روی میز ناهمواری بر روی لبه‌اش به طور قائم قرار ایستاده است. جرم سکه M و شعاع آن R است. به سکه ضربه‌ای وارد می‌کنیم و آن را با سرعت v و سرعت زاویه‌ای صفر به جلو می‌رانیم. هنگام که سرانجام حرکت سکه به غلتش بدون لغزش تبدیل می‌شود، سرعت افقی سکه را بیابید.



شکل ۱۱-۶۰

ت-۶ میله‌ای بدون جرم به طول ℓ برابر شکل (۱۱-۶۱) روی میزی به طور قائم استاده است. بر بالای میله ذره‌ای به جرم m وصل است. ضریب اصطکاک ایستایی بین میله و سطح میز μ است. به جرم m تلنگر کوچکی می‌زنیم و سامانه‌ی میله و جرم از حالت قائم منحرف و سقوط می‌کند. در چه زاویه‌ای از خط قائم، میله در روی میز شروع به لغزیدن می‌کند؟



شکل ۱۱-۶۱

ت-۷ کره‌ی توپری به جرم M و شعاع R (و $I = (۲/۵)MR^{۲}$) روی یک صفحه‌ی کاغذ بر روی میز زمین قرار دارد. صفحه‌ی کاغذ را با شتاب a موازی سطح زمین به سمت راست می‌کشیم. شتاب مرکز کره را به دست آورید. فرض کنید کره نسبت به صفه‌ی کاغذ نمی‌لغزد.