فصل ۱۰

حرکت جسم سخت : گشتاور لختی و تکانه‌ی زاویه‌ای

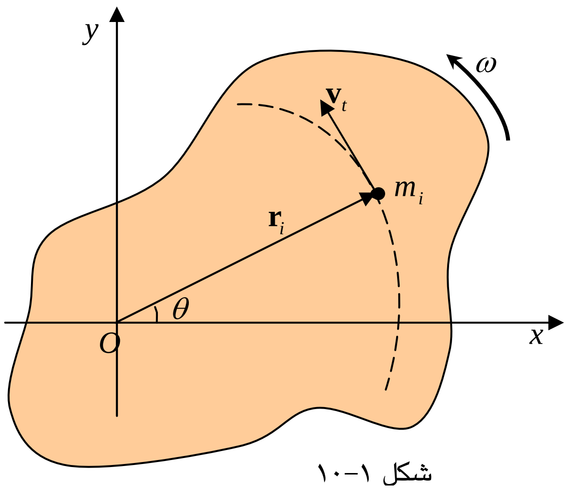
ویژگی اصلی جسم سخت این است که در شرایط معمولی، شکل و اندازه‌ی آن در اثر تنش، کشش و یا تغییر دما و عوامل دیگر بسیار کم تغییر می‌کند. در مورد جسم سخت آرمانی فرض می‌شود که اندازه و شکل آن همواره ثابت می‌ماند. بنابراین، جسم سخت را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

جسم سخت جسمی است که فاصله‌ی میان هر جفت نقطه‌ی آن همواره ثابت می‌ماند.

در این فصل به مکانیک اجسام سخت خواهیم پرداخت. جسم سخت دارای بعد است و حرکتش در اثر نیرو پیچیده‌تر از حرکت جسم نقطه‌ای است. جسم نقطه‌ای در اثر نیرو تنها حرکت انتقالی پیدا می‌کند. اما جسم دارای بعد به غیر از حرکت انتقالی مرکزجرمش، ممکن است حرکت چرخشی حول یک نقطه یا محور داشته باشد. آموزه‌های ما تا کنون به حرکت جرم نقطه‌ای محدود بود. با این آموزه‌ها نمی‌توان حرکت چرخشی یک جسم دارای بعد را بررسی کرد. برای نمونه، یویو را در نظر بگیرید که در راستای ریسمان خود بالا و پائین می‌رود. در اساس می‌دانیم که هر ذره‌ی یویو بر اساس قانون دوم نیوتن حرکت می‌کند، اما بررسی حرکت چرخشی یویو بر اساس حرکت چرخشی کل جسم است. در بررسی حرکت انتقالی به مفاهیم نیرو، تکانه و مرکزجرم نیاز بود. در این فصل از مفهوم‌های گشتاور، تکانه‌ی زاویه‌ای و گشتاور لختی استفاده خواهدشد. هدف ما یافتن شیوه‌ای برای بررسی حرکت عمومی یک جسم سخت تحت تأثیر هر مجموعه‌ی دلخواهی از نیروهاست. این مسئله‌ی عمومی را می توان به دو بخش تقسیم کرد. (۱) یافتن حرکت انتقالی مرکزجرم جسم که بیشتر به آن پرداخته‌ایم. (۲) یافتن حرکت چرخشی حول مرکزجرم که موضوع این فصل است.

۱۰-۱ انرژی جنبشی چرخشی :

در فصل ۱ رابطه‌ی میان کمیت‌های حرکت چرخشی و حرکت خطی یک نقطه را آموختیم. اینک جسمی را برابر شکل (۱-۱۰) در نظر بگیرید که دارای بعد است. فرض کنید این جسم از مجموعه‌ای نقاط کوچک تشکیل شده است. اگر این جسم حول محور ثابت z ها با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد، هر ذره‌ی آن مقداری انرژی جنبشی خواهد داشت و با جرم و سرعت آن ذره تعیین می‌شود. ذره i ام با جرم m_i و سرعت v_i در شکل (۱-۱۰) نشان داده شده است. انرژی جنبشی ذره i ام عبارت است از



شکل ۱-۱۰

$$T_i = \frac{۱}{۲} m_i v_i^{۲} \qquad (۱-۱۰)$$

سرعت v_i، سرعت مماسی ذره است که براثر حرکت چرخشی جسم به هر ذره‌ی i ام داده می‌شود و مقدار آن برای ذره های مختلف جسم می‌تواند متفاوت باشد. توجه کنید که اگر چه سرعت زاویه ای، ω، همه‌ی ذره‌های جسم سخت با هم برابرند اما سرعت خطی هر ذره به فاصله‌ی r_i آن ذره تا محور چرخش بستگی دارد؛ چون از فصل ۱ می دانیم که $v_i = r_i \omega$. بنابراین، انرژی جنبشی **کل** جسم چرخان باید با جمع انرژی‌های جنبشی تک ذره‌های تشکیل دهنده‌ی آن برابر باشد. پس می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$T=\sum T_i=\sum \frac{۱}{۲}m_i v_i^{۲}=\frac{۱}{۲}\sum m_i (r_i\omega)^{۲} \qquad \Rightarrow \qquad T=\frac{۱}{۲}(\sum m_i r_i^{۲})\,\omega^{۲} \tag{۱۰-۲}$$

بسامد $\omega^{۲}$ را از زیر علامت جمع بیرون می‌آوریم ، چون این مقدار برای همه‌ی ذره‌ها مشترک است. کمیت درون پرانتز **گشتاور لختی**، I، نام دارد و به صورت زیر تعریف می شود

$$I=\sum_i m_i r_i^{۲} \tag{۱۰-۳}$$

پس، می‌توان انرژی جنبشی کل جسم سختی را که با سرعت زاویه‌ای ω حول محور ثابت z می‌چرخد به صورت زیر نوشت:

$$T\equiv\frac{۱}{۲}I\,\omega^{۲} \tag{۱۰-٤}$$

از تعریف گشتاور لختی روشن است که بُعد آن $\left(\text{kg.m}^{۲}\right)$ $ML^{۲}$ است. نقش گشتاور لختی I در حرکت چرخشی شبیه نقشی است که جرم m در حرکت خطی به عهده دارد. روشی که در بالا برای به دست آوردن انرژی جنبشی به کار بردیم، چیز تازه‌ای نیست و نباید پنداشته شود که $(۱/۲)I\,\omega^{۲}$ نوع جدیدی از انرژی است. با این حال، نوشتن آن به صورت رابطه‌ی (٤-۱۱) در بررسی حرکت‌های چرخشی بسیار مناسب است. بنابراین، گام نخست برای بررسی حرکت چرخشی این است که شیوه‌ی محاسبه‌ی I یک جسم دارای بعد را بیاموزیم. بخش ۲-۱۰ به روش محاسبه‌ی گشتاور لختی جسم سخت با توزیع پیوسته‌ی جرم می‌پردازد. پیش از آن، در دو مثال زیر گشتاور لختی و انرژی جنبشی توزیع گسسته‌ای از ذره‌ها را حساب می‌کنیم.

مثال ۱-۱۰: مولکول دو اتمی اکسیژن، $O_{۲}$، را در نظر بگیرید که در صفحه‌ی xy حول محوری که از مرکز مولکول می‌گذرد و بر آن عمود است، می‌چرخد. فاصله‌ی بین دو اتم اکسیژن در دمای اتاق $۱{,}۲۱\times۱۰^{-۱۰}\,\text{m}$ است.

(الف): گشتاور لختی مولکول را حول محور z (محور چرخش) حساب کنید.

(ب): اگر سرعت زاویه‌ای مولکول حول محور z برابر $۲\times۱۰^{۱۲}\,\text{rad./sec}$ باشد انرژی جنبشی چرخشی مولکول را بیابید.

حل: **(الف)**: جرم هر اتم اکسیژن $۲{,}۷۷\times۱۰^{-۲٦}\,\text{kg}$ است و فاصله‌ی هر اتم تا محور z ها $d/۲$ است. پس، گشتاور لختی حول محور z ها عبارت است از

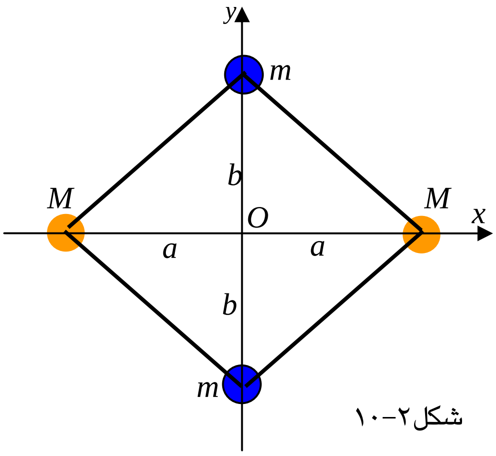
$$\begin{aligned} I&=\sum m_i r_i^{۲}=m\left(\frac{d}{۲}\right)^{۲}+m\left(\frac{d}{۲}\right)^{۲}=\frac{md^{۲}}{۲} \\ &=\left(\frac{۲.۷۷\times۱۰^{-۲٦}}{۲}\text{kg}\right)\left(۱.۲۱\times۱۰^{-۱۰}\text{m}\right)^{۲}=۲.۰۳\times۱۰^{-٤٦}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{۲}\end{aligned} \tag{۱۰-٥}$$

(ب):

$$T=\frac{۱}{۲}I\,\omega^{۲}=\frac{۱}{۲}\left(۲{,}۰۳\times۱۰^{-٤۸}\text{kg}\cdot\text{m}^{۲}\right)\left(۲\times۱۰^{۱۲}\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^{۲}=٤.۱\times۱۰^{-۲۲}\,\text{J} \tag{۱۰-٦}$$

مثال ۲-۱۰ شکل (۲-۱۰) چهار جرم نقطه‌ای را نشان می‌دهد که در چهار گوشه‌ی یک چارچوب بدون جرم قرار دارد. این مجموعه در صفحه‌ی xy قرار دارد.

(الف): اگر سامانه با سرعت زاویه‌ای ω حول محور y ها بچرخد گشتاور لختی آن را حول محور yها حساب کنید و انرژی جنبشی را به دست آورید .



شکل۲–۱۰

(ب): اینک فرض کنید سامانه در صفحه‌ی xy حول محور z ها که از مرکز O می گذرد می گردد. گشتاور لختی را حول محور z ها حساب کنید و انرژی جنبشی این چرخش را به دست آورید.

حل: **(الف)**: توجه کنید که جرم‌های m روی محور y قرار دارند و فاصله‌ی r_i آنها تا محور چرخش صفر است بنابراین سهمی در I_y ندارند. با استفاده از رابطه‌ی (۳–۱۰) داریم:

$$I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2 \qquad (۱۰–۷)$$

بنابراین، انرژی جنبشی چرخشی این حرکت عبارت است از

$$T = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2)\omega^2 = Ma^2\omega^2 \qquad (۱۰–۸)$$

(ب): چون r_i در رابطه‌ی (۳–۱۰) **فاصله ی عمودی** جرم تا محور چرخش است، بنابراین داریم:

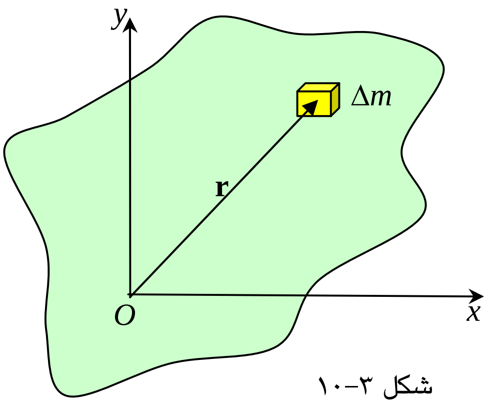
$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2 \qquad (۱۰–۹)$$

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2 + 2mb^2)\omega^2 = (Ma^2 + mb^2)\omega^2 \qquad (۱۰–۱۰)$$

از مقایسه‌ی قسمت (الف) و(ب) این مثال دیده می‌شود که برای سرعت زاویه‌ای معینی، گشتاور لختی و در نتیجه انرژی جنبشی چرخشی به محور چرخش بستگی دارند. در قسمت (ب) محاسبه، هر چهار جرم را شامل شد، چون هر چهار جرم نسبت به محور z حرکت می‌کردند. در قسمت (الف) دوجرم m نسبت به محور y حرکت نمی‌کردند و از این رو انرژی جنبشی در قسمت (الف) کوچکتر از قسمت (ب) بود. یعنی چرخاندن این سامانه حول محور y ها آسان‌تر از (به کار کمتری نیاز دارد) چرخاندن آن حول محور z هاست.

۱۰–۲ محاسبه‌ی گشتاور لختی جسم سخت

فرض کنید جرم جسم سخت شکل (۳–۱۰) در حجم آن توزیع شده است. اگر Δm جرم موجود در جزء حجم باشد، می‌توان برای یافتن گشتاور لختی از رابطه‌ی (۳–۱۱) استفاده کرد. در این صورت خواهیم داشت $I = \sum r^2 \Delta m$. چون توزیع جرم پیوسته است، می‌توان Δm را به سمت صفر میل داد. در حد $\Delta m \to 0$ علامت جمع به علامت انتگرال تبدیل می‌شود. چون جرم در تمام حجم جسم توزیع شده است، بنابراین انتگرال‌گیری هم بر روی تمام جسم باید انجام گیرد. توجه کنید که r فاصله عمودی جزء جرم Δm تا محورچرخش است. فرض کنید جسم شکل (۳–۱۰) حول محور z می‌چرخد. پس، خواهیم داشت



شکل ۳–۱۰

$$I = \ell im_{\Delta m \to 0} \sum r^2 \Delta m = \int r^2 dm \qquad (۱۰–۱۱)$$

برای این که بتوان از رابطه‌ی (۱۱–۱۰) استفاده و گشتاور لختی را حساب کرد، لازم است که dm بر حسب مختصات بیان شود. برای این کار **چگالی جرمی** یا **جرم در واحد حجم** یک جسم سه بعدی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho=\ell im_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta v}=\frac{dm}{dv}\qquad\Rightarrow\qquad dm=\rho dv \tag{۱۰-۱۲}$$

که در آن dv جزء حجم است. اگر جرم در دو بعد توزیع شود، جزء جرم $dm=\sigma\, da$ است که در آن σ چگالی سطحی جرم یا جرم در واحد سطح و da جزء سطح است. جزء جرم برای توزیع خطی جرم $dm=\lambda\, dl$ است و λ چگالی خطی جرم یا جرم در واحد طول و dl جزء طول است. پس، گشتاور لختی یک جسم سه بعدی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$I=\int\rho r^2 dv \tag{۱۰-۱۳}$$

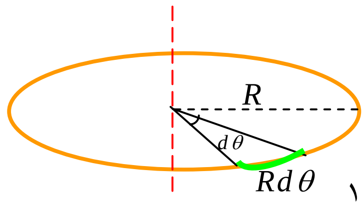
و برای جسم دو بعدی و یک بعدی خواهیم داشت:

$$I=\int\sigma r^2 da\quad,\quad I=\int\lambda r^2 dl \tag{۱۰-۱٤}$$

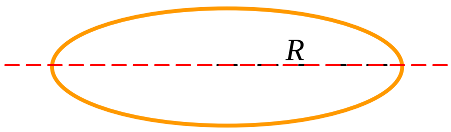
توجه کنید که انتگرال‌گیری روی تمام جسم (یعنی همه جا که جرم توزیع شده است) است.

نکته: وقتی از گشتاور لختی سخن گفته می‌شود، باید روشن شود که گشتاور لختی نسبت به چه نقطه یا محوری است. ♣ اینک می‌توان گشتاور لختی اجسام گوناگون را حول محور معینی حساب کرد. در مثال‌هایی که برای نشان دادن روش محاسبه برگزیده‌ایم (و تعداد زیادی از آن ها) فرض خواهیم کرد که چگالی جرم در همه جای جسم یکنواخت است. این فرض از عمومیت روش محاسبه نمی‌کاهد. اگر چگالی جرم یکنواخت نباشد، تابعی از مختصات خواهد شد. در این صورت هنوز هم روش محاسبه همان است، فقط انتگرال‌ها پیچیده‌تر خواهند شد. اگر شکل جسمی را که می‌خواهیم گشتاورلختی‌اش را حساب کنیم پیچیده باشد، همواره خوب است که آن را به قطعه‌هایی بُرش دهیم که I آن قطعه‌ها را می‌دانیم. در این صورت مسئله به انتگرال‌گیری روی I ها کاهش می‌یابد. معمولا بیش از یک راه برای برش دادن جسم وجود دارد. برای مثال، کره را می‌توان به صورت پوسته‌های تودرتوی متمرکز پنداشت یا آن را مجموعه‌ای از قرص‌هایی فرض کرد که بر روی هم چیده شده‌اند.

مثال ۳-۱۰ محاسبه‌ی گشتاور لختی حلقه‌ای به جرم M و شعاع R با محور چرخشی که از مرکز آن می‌گذرد و بر صفحه‌ی حلقه عمود است (شکل ٤-۱۰):



شکل ٤-۱۰



شکل ٥-۱۰

حل: جزء جرم روی پیرامون حلقه عبارت است از $dm=\lambda Rd\theta$. بنابراین:

$$I=\int r^2 dm=\int_0^{2\pi}R^2(\lambda Rd\theta)=(2\pi R\lambda)R^2=\boxed{MR^2} \tag{۱۰-۱٥}$$

توجه کنید که گشتاور لختی استوانه‌ی همگن تو خالی هم حول محورش همین مقدار خواهد بود.

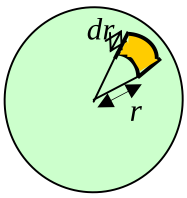
مثال ۴-۱۰: محاسبه‌ی گشتاور لختی حلقه‌ای به جرم M و شعاع R با محور چرخشی که از مرکز آن می‌گذرد و در صفحه‌ی حلقه قرار دارد (شکل ٥-۱۰)

حل: جزء جرم مانند مثال ۳-۱۰ است. اما حالا فاصله‌ی جزء جرم تا محور چرخش $R\sin\theta$ است. پس

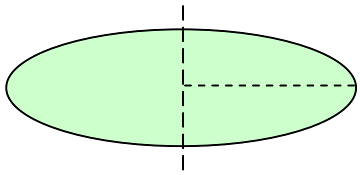
$$I=\int r^{2}dm=\int_{0}^{2\pi}(R\sin\theta)^{2}(\lambda R d\theta)=\frac{1}{2}(2\pi R\lambda)R^{2}=\boxed{\frac{1}{2}MR^{2}} \qquad (۱۰-۱۶)$$

در این جا از $\sin^2\theta=(1-\cos 2\theta)/2$ استفاده کردیم.

مثال ۵-۱۰: محاسبه‌ی گشتاور لختی قرصی به جرم M و شعاع R با محور چرخشی که از مرکز آن می‌گذرد و بر صفحه‌ی قرص عمود است (شکل ٦-۱۰)



شکل ۷-۱۰

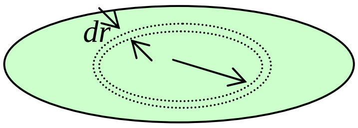


شکل ٦-۱۰

حل ۱: جزء دلخواه سطح را برابر شکل (۷-۱۰) انتخاب کنید. مساحت این جزء سطح $dA=rdr\,d\theta$ است. بنابراین، جرم آن $dm=\sigma dA=\sigma rdr\,d\theta$ است. در نتیجه

$$I=\int r^{2}dm=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R}r^{2}(\sigma rdrd\theta)=\left(R^{4}/4\right)2\pi\sigma=\frac{1}{2}(\sigma\pi R^{2})R^{2}=\boxed{\frac{1}{2}MR^{2}} \qquad (۱۰-۱۷)$$

حل ۲: اگر قرص را مانند شکل (۸-۱۰) مجموعه‌ای از حلقه‌های تودرتو به شعاع r و با ضخامت dr در نظر بگیرید، می‌توانید از نتیجه‌ی مثال ۳-۱۰ استفاده کنید و در یک انتگرال‌گیری (بدیهی) صرفه جویی کنید. جرم هر حلقه $dm=\sigma 2\pi rdr$ است. حال اگر روی حلقه ها انتگرال بگیرید به دست می‌آید



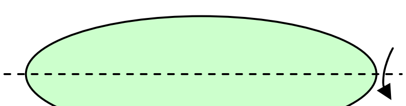
شکل ۸-۱۰

$$I=\int r^{2}dm=\int_{0}^{R}(\sigma 2\pi r\,dr)r^{2}=\pi\sigma R^{4}/2=\boxed{MR^{2}/2}$$

که همان نتیجه‌ی حل ۱ است. در این مثال برش دادن جسم چندان اهمیتی ندارد اما برای اجسام پیچیده می‌تواند از دردسرها بکاهد.

مثال ۶-۱۰ : محاسبه‌ی گشتاور لختی قرصی به جرم M و شعاع R با محور چرخشی که از مرکز آن می‌گذرد و در صفحه‌ی قرص قرار دارد (شکل ۹-۱۰).

حل: قرص را به حلقه‌های با شعاع r و ضخامت dr برش دهید و از پاسخ مثال ۵-۱۰ استفاده کنید:



شکل ۹-۱۰

$$I=\int_{0}^{R}(1/2)(\sigma 2\pi r\,dr)r^{2}=\left(R^{4}/4\right)\sigma\pi$$

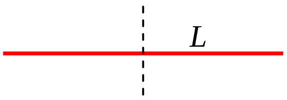
$$=\frac{1}{4}(\sigma\pi R^{2})R^{2}=\boxed{\frac{1}{4}MR^{2}} \qquad (۱۰-۱۸)$$

مثال ۷-۱۰ محاسبه‌ی گشتاور لختی میله‌ی نازک همگن به جرم M و طول L. محور چرخش عمود بر میله است و از وسط

آن می‌گذرد (شکل ۱۰-۱۰).

حل: جزء جرم dm را روی میله همانند شکل (۱۰-۱۱) انتخاب کنید.

داریم $dm = \lambda\, dx$ و $\lambda = M/L$.

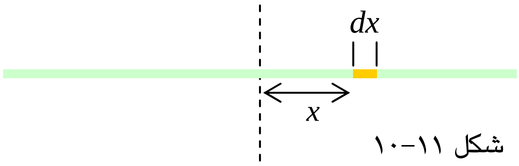


شکل ۱۰-۱۰

$$I = \int_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}} r^{۲}\, dm = \int_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}} x^{۲} \left(M/L\right) dx$$

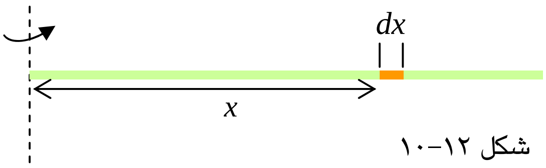
$$= \left(M/L\right) \int_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}} x^{۲}\, dx = \left(M/L\right)\left(x^{۳}/۳\right)\Big|_{-\frac{L}{۲}}^{\frac{L}{۲}} \qquad (۱۰-۱۹)$$

$$= \boxed{\frac{۱}{۱۲} ML^{۲}}$$



شکل ۱۰-۱۱

مثال ۸-۱۰: محاسبه‌ی گشتاور لختی میله‌ی نازک همگن به جرم M و طول L. محور چرخش عمود بر میله است و از انتهای میله می‌گذرد (شکل ۱۰-۱۲):



شکل ۱۰-۱۲

حل: این مثال مانند مثال ۷-۱۰ است. فقط حدود انتگرال‌گیری فرق دارد.

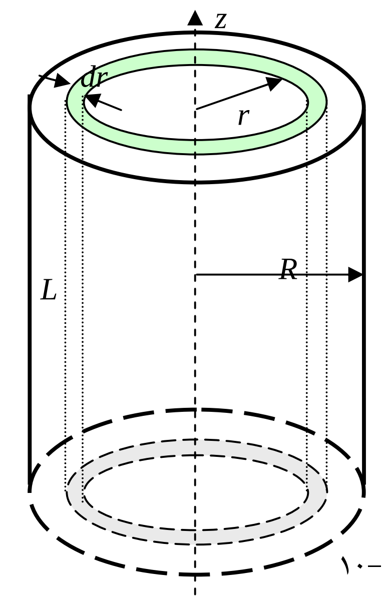
با توجه به شکل (۱۰-۱۲) داریم

$$I = \int r^{۲} dm = \int_{\circ}^{L} x^{۲} \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L}\left(\frac{۱}{۳} x^{۳}\right)\Big|_{\circ}^{L} = \boxed{\frac{۱}{۳} ML^{۲}} \qquad (۱۰-۲۰)$$

مثال ۹-۱۰: محاسبه‌ی گشتاور لختی استوانه‌ی توپر و همگن به جرم m، شعاع R و طول L. محور چرخش، محور استوانه است (شکل ۱۰-۱۳).

حل: در این مسئله بهتر است که استوانه را به پوسته‌های استوانه‌ای به شعاع r و به ضخامت dr و طول L برش داد. یک نمونه را در شکل (۱۰-۱۳) به صورت هاشور خورده می‌بینید. با این برش دادن تمامی جزء جرم dm روی هر استوانه‌ی باریک، فاصله‌ی یکسانی از محور چرخش، r، دارند. این کار محاسبه را آسان می کند. حجم هر استوانه باریک عبارت است از $dv = da.L = (2\pi r\, dr)L$. اگر چگالی حجمی جرم را ρ بنامیم آنگاه، جرم dm پوسته برابر است با $dm = \rho\, dv = \rho\, 2\pi r\, L dr$. بنابراین

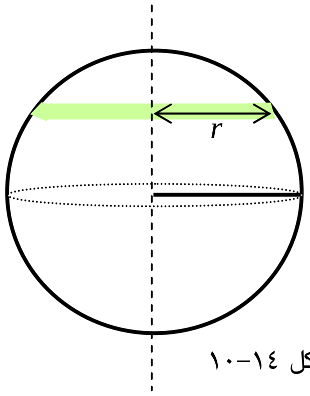
$$I_z = \int r^{۲} dm = ۲\pi\rho L \int_{\circ}^{R} r^{۳} dr = \frac{\pi\rho L R^{۴}}{۲} \qquad (۱۰-۲۱)$$



شکل ۱۰-۱۳

چون $\rho = M/V = M/\pi R^{۲} L$ پس

$$I = \pi\left(\frac{M}{\pi R^{۲} L}\right)\frac{LR^{۴}}{۲} = \boxed{\frac{۱}{۲} MR^{۲}} \qquad (۱۰-۲۲)$$



شکل ۱۰-۱٤

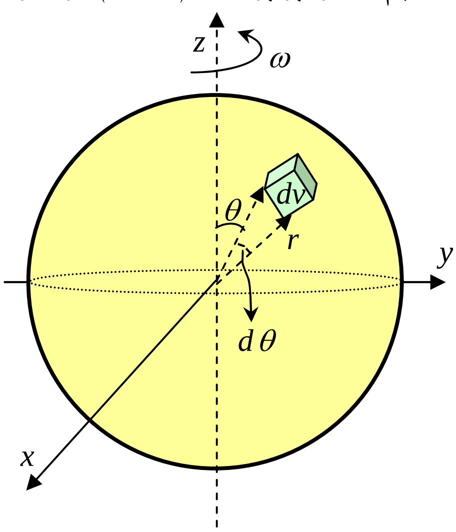
مثال ۱۰-۱۰: محاسبه‌ی گشتاور لختی پوسته‌ی کروی (کره‌ی تو خالی) شکل (۱۰-۱٤) با جرم M و شعاع R. محور چرخش قطر کره است.

حل: کره را به باریکه‌های حلقه‌مانند افقی برش بدهید، مانند یک روبان باریک. شعاع هر حلقه در مختصات کروی $r = R\sin\theta$ است. زاویه‌ی θ از قطب شمال کره به قطب جنوب افزایش می‌یابد. پهنای هر حلقه $Rd\theta$ و مساحت آن $2\pi(R\sin\theta)Rd\theta$ است. از قاعده‌ی $\int\sin^3\theta d\theta = \int\sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta = -\cos\theta + \cos^3\theta/3$ استفاده کنید. خواهیم داشت

$$I = \int r^2 dm = \int_0^\pi (R\sin\theta)^2 2\pi\sigma(R\sin\theta)Rd\theta = 2\pi\sigma R^4\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$
$$= 2\pi\sigma R^4(4/3) = \frac{2}{3}(4\pi R^2\sigma)R^2 = \boxed{\frac{2}{3}MR^2} \qquad (۱۰-۲۳)$$

مثال ۱۰-۱۱ محاسبه‌ی گشتاور لختی کره‌ی توپرهمگن با جرم M و شعاع R. محور چرخش قطر کره است.

حل ۱: این مسئله را نخست با روش عمومی حل می‌کنیم. در مختصات کروی جزء حجم dv را برابر شکل (۱۰-۱۵) در نظر بگیرید. داریم $dv = r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr$. جزء جرم مربوط به این حجم جزیی $dm = \rho dv = \rho r^2\sin\theta dr\, d\theta d\varphi$ است. و فاصله عمودی آن از محور چرخش برابر است با $r\sin\theta$. بنابراین،



شکل ۱۰-۱۵

$$I = \int (r\sin\theta)^2 dm$$
$$= \int (r^2\sin^2\theta)(\rho r^2\sin\theta d\theta d\phi dr) \qquad (۱۰-۲٤)$$

انتگرال گیری روی $d\phi$ برابر است با 2π. با استفاده از دستور

$$\int\sin^n x\, dx = -\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\, dx \qquad (۱۰-۲۵)$$

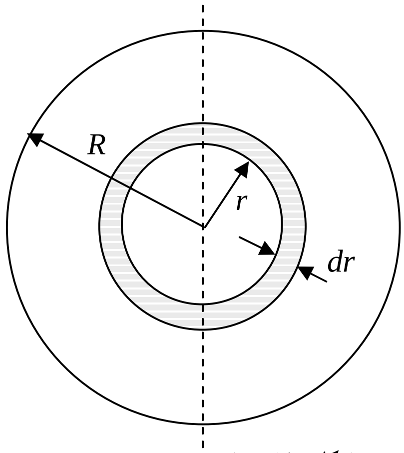
می توان انتگرال $\sin^3\theta d\theta$ را ازصفر تا π حساب کرد.

$$\int\sin^3\theta d\theta = -\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{3}\bigg|_0^\pi + \frac{2}{3}\int_0^\pi \sin\theta d\theta$$
$$= 0 + \frac{2}{3}(-\cos\theta)\big|_0^\pi = \frac{4}{3} \qquad (۱۰-۲٦)$$

و سرانجام این که

$$I_z = (2\pi)\rho(4/3)\int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho}{3}\frac{2}{5}R^5 = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)\frac{2}{5}R^2 = \boxed{\frac{2}{5}MR^2} \qquad (۱۰-۲۷)$$

حل ۲: کره‌ی تو پر را می‌توان مجموعه‌ای از پوسته‌های کروی نازک هم‌مرکز با ضخامت dr در نظر گرفت. یکی از این



شکل ۱۶-۱۰

پوسته‌های کروی در شکل (۱۶-۱۰) دیده می‌شود. چگالی جرم سطحی متناظر آن است $\sigma = \rho dr$ (چرا؟). از مثال ۱۰-۱۰ می‌دانیم که گشتاور لختی، dI ، پوسته‌ی نازک کروی به جرم dm حول قطر آن عبارت است از

$$dI = (2/3) r^2 dM = (2/3) r^2 (4\pi r^2 \rho dr)$$

$$\Rightarrow dI = (8/3)\pi r^4 \rho dr \qquad (۱۰-۲۸)$$

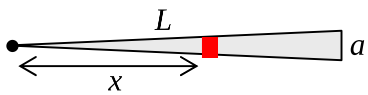
پس گشتاور کل کره‌ی توپر را می توان با انتگرال گرفتن از گشتاور لختی پوسته‌ی کروی به صورت زیر به دست آورد

$$I = \int dI = \frac{8}{3}\pi\rho\int_0^R r^4 dr = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5}(\frac{4}{3}\pi\rho R^3)R^2$$

$$\Rightarrow I = \boxed{\frac{2}{5}MR^2} \qquad (۱۰-۲۹)$$

که همان پاسخ قبلی است.

مثال ۱۲-۱۰ محاسبه‌ی گشتاور لختی مثلث بسیار باریک شکل (۱۷-۱۰) به جرم M و طول L. محور چرخش از راس می‌گذرد و بر صفحه‌ی مثلث عمود است.



شکل ۱۷-۱۰

حل: قاعده‌ی مثلث را a بنامید وفرض کنید که a بسیار کوچک است. طول برشی در فاصله‌ی x از راس مثلث برابر $a(x/L)$ است. اگر پهنای این برش dx باشد، می‌توان آن را همانند جرم نقطه‌ای با جزء جرم $dm = \sigma ax\, dx/L$ پنداشت. بنابراین،

$$I = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \sigma a (x/L) dx = \frac{1}{2}(\sigma aL/2)L^2 = \boxed{\frac{1}{2}ML^2} \qquad (۱۰-۳۰)$$

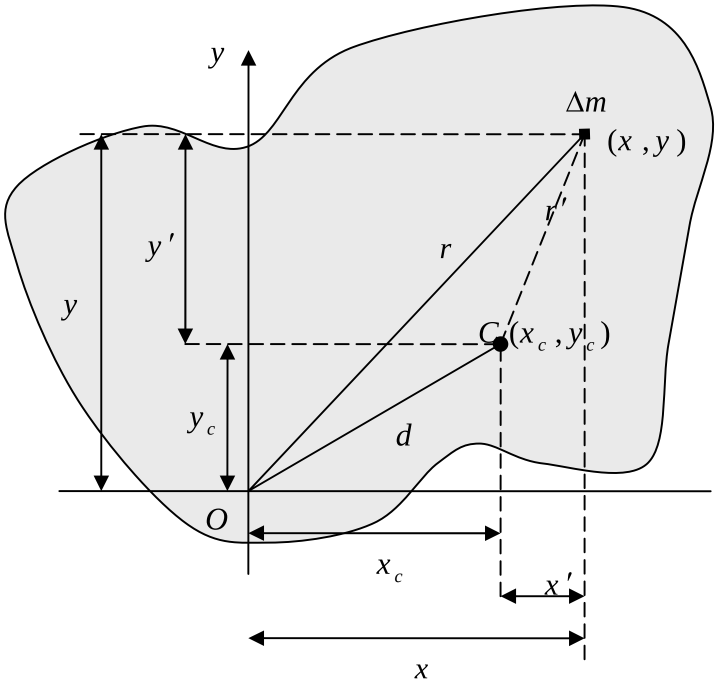
چون مساحت مثلث $aL/2$ است. گشتاور لختی این باریکه مثلث همانند گشتاور لختی قرص مثال ۵-۱۰ است؛ چون قرص از همین باریکه‌های مثلثی شکل ساخته می‌شود.

۳-۱۰ قضیه‌ی محورهای موازی

در مثال‌های بالا توانستیم گشتاور لختی اجسام با هندسه‌ی ساده (دارای تقارن) را به آسانی حساب کنیم. در این مثال‌ها محور تقارن و محور چرخش بر هم منطبق بودند. اگر محور تقارن جسم و محور چرخش یکی نباشند، محاسبه‌ی گشتاور لختی می‌تواند بسیار دشوار باشد. در مثال‌های بالا، به جز مثال ۱۲-۱۰، محور چرخش از مرکز جرم می‌گذشت. در مثال کره اگر محور چرخش از مرکز جرم آن نمی‌گذشت، با وجود تقارن کره، این محاسبه پیچیده می‌شد. خوشبختانه، قضیه‌ی مهمی وجود دارد که اجازه می‌دهد با دانستن گشتاور لختی حول محور گذرنده از مرکزجرم، بتوان گشتاور لختی حول هر محور دیگر موازی با محور گذرنده از مرکزجرم را هم حساب کنیم. این قضیه با نام **قضیه محورهای موازی** شناخته می‌شود. فرض کنید گشتاور لختی جسمی حول محوری که از مرکزجرم آن می‌گذرد I_C باشد؛ قضیه‌ی محورهای موازی می‌گوید گشتاور لختی جسم حول محوری که با محور گذرنده از مرکزجرم موازی و به فاصله‌ی d از آن است، برابر است با

$$I = I_C + Md^2 \qquad (۱۰-۳۱)$$

اثبات: فرض کنید جسم شکل (۱۸-۱۰) در صفحه‌ی xy قرار دارد و حول محوری می‌چرخد که از O می‌گذرد. مختصات مرکز جرم C را با x_c و y_c نشان بدهید. جزء جرم Δm را در مکان $(x\ ,y\ )$ نسبت به O در نظر بگیرید. این جزء جرم در فاصله‌ی $r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ از محور چرخش (z) قرار دارد. محور z بر صفحه‌ی جسم عمود است و از O می‌گذرد. گشتاور لختی حول محور چرخش z عبارت است از: $I=\int r^{۲}dm=\int(x^{۲}+y^{۲})dm$. اما می‌توان مختصات $(x\ ,y\ )$ جزء جرم را به مختصات $(x_c\ ,y_c)$ مرکزجرم و مختصات (x',y') جزء جرم Δm نسبت به مرکزجرم مربوط کرد. در واقع داریم $x=x'+x_c$ و $y=y'+y_c$. بنابراین.



شکل ۱۸-۱۰

$$\begin{aligned}I&=\int\left[(x'+x_c)^{۲}+(y'+y_c)^{۲}\right]dm\\&=\int\left[(x')^{۲}+(y')^{۲}\right]dm+۲x_c\int x'dm+۲y_c\int y'dm+\int(x_c^{۲}+y_c^{۲})dm\\&\int r'^{۲}dm+۲x_c\int x'dm+۲y_c\int y'dm+\int(x_c^{۲}+y_c^{۲})dm\end{aligned}\tag{۱۰-۳۲}$$

جمله‌ی نخست، بنا به تعریف، گشتاور لختی حول محوری است که از مرکزجرم می‌گذرد و با z موازی است. جمله‌های دوم و سوم صفر اند، چون، بنا به تعریف مرکز جرم، $\int x'dm=\int y'dm=۰$ (یعنی y',x' مختصات جزء جرم نسبت به مرکزجرم اند. رابطه‌ی (۵-۹) را ببینید). سرانجام، جمله‌ی چهارم که همان $Md^{۲}$ است؛ چون $\int dm\equiv M$ و $d^{۲}\equiv x_c^{۲}+y_c^{۲}$ است. پس نتیجه می‌گیریم:

$$I_z=I_C+Md^{۲}\tag{۱۰-۳۳}$$

این قضیه می‌گوید، اگر گشتاور لختی را حول محوری که از مرکزجرم جسم می‌گذرد،(I_C) ، بدانیم آنگاه اگر بخواهیم گشتاور لختی جسم را حول هر محور موازی با این محور حساب کنیم کافی است مقدار $Md^{۲}$ را با I_C جمع کنیم.

اگرچه این قضیه برای جسم تخت اثبات شد، اما برای هر جسمسه بعدی هم درست است.

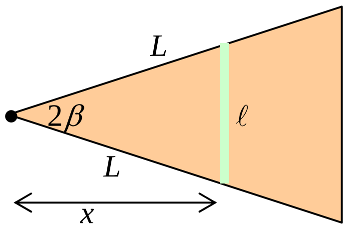
مثال ۱۳-۱۰ درستی قضیه‌ی محورهای موازی را در باره‌ی میله‌ی یکنواخت به جرم M و طول L مثال‌های ۷-۱۰ و ۸-۱۰ بیازمایید.

حل: در مثال ۷-۱۰ دیدیم که گشتاور لختی میله نسبت به محوری که از مرکزجرم آن می گذرد $I_C = ML^2/12$ است. همین میله در مثال ۸-۱۰ وقتی حول محور گذرنده از یک انتهایش می‌چرخید، گشتاور لختی آن $I_{end} = ML^2/3$ بود. محور گذرنده از انتهای میله در فاصله‌ی $L/2$ از محور گذرنده از مرکزجرم میله است، یعنی $d = L/2$. بنابه قضیه‌ی محورهای موازی داریم

$$I_{end} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(L/2\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2 \qquad (۳۴-۱۰)$$

که همان پاسخ مثال ۸-۱۰ است.

مثال ۱۴-۱۰ گشتاور لختی مثلث متساوی الساقین شکل (۱۹-۱۰) با جرم M و طول ساق L و زاویه‌ی راس 2β را نسبت به محوری که از راس مثلث می گذرد و بر صفحه‌ی آن عمود است، بیابید.



شکل ۱۹-۱۰

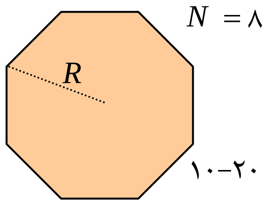
حل: ارتفاع مثلث را h بنامید: $h = L\cos\beta$. مثلث را به نوارهای باریک موازی قاعده برش دهید. فاصله‌ی نوار باریک تا راس را x بنامید. بنابراین، طول نوار باریک برابر $\ell = 2x\tan\beta$ و جرمش $dm = \sigma(2x\tan\beta\, dx)$ می شود. dx پهنای نوار باریک است. این نوار همانند میله‌ی همگن مثال ۷-۱۰ است و گشتاور لختی آن نسبت به محوری که از مرکزش می‌گذرد $\left(\ell^2/12\right)dm$ است. با استفاده از این مثال و قضیه‌ی محورهای موازی می توان نوشت

$$I = \int_0^h dm\left(\frac{\ell^2}{12} + x^2\right) = \int_0^h (\sigma 2x\tan\beta\, dx)\left(\frac{(2x\tan\beta)^2}{12} + x^2\right)$$
$$= \int_0^h 2\sigma\tan\beta\left(1 + \frac{\tan^2\beta}{3}\right)x^3 dx = 2\sigma\tan\beta\left(1 + \frac{\tan^2\beta}{3}\right)\frac{h^4}{4} \qquad (۳۵-۱۰)$$

چون مساحت کل مثلث $h^2\tan\beta$ است، پس

$$I = \left(\frac{Mh^2}{2}\right)\left(1 + \frac{\tan^2\beta}{3}\right) = \left(\frac{ML^2}{2}\right)\left(\cos^2\beta + \frac{\sin^2\beta}{3}\right) = \boxed{\frac{ML^2}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\beta\right)} \qquad (۳۶-۱۰)$$

مثال ۱۵-۱۰ گشتاور لختی N ضلعی منتظمی را بیابید که جرمش M و فاصله‌ی مرکز تا راس آن R است. N ضلعی حول محوری که از مرکز می‌گذرد و بر صفحه‌ی آن عمود است، می‌چرخد. در شکل (۲۰-۱۰) یک هشت ضلعی نشان داده شده است.



شکل ۲۰-۱۰

حل: N ضلعی منتظم از N مثلث متساوی الساقین تشکیل شده است. پس می‌توان از مثال ۱۴-۱۰ با $\beta = \pi/N$ استفاده کرد. جرم مثلث‌ها با هم جمع می‌شوند و جرم کل M چند ضلعی را می‌سازند. بنابراین داریم

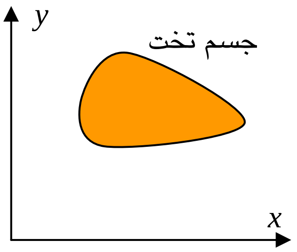
$$I = \frac{1}{2}MR^2\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\pi/N\right) \qquad (۳۷-۱۰)$$

برای چند مقدار N مقدارهای I با کوتاه نوشت $(N\,,\,I/MR^{۲})$ به قرار زیر اند

$$(۳,\ ۱/۴)\ ,\ (۴,\ ۱/۳)\ ,\ (۶,\ ۵/۱۲)\ ,\ (\infty,\ ۱/۲)$$

۱۰-۴ قضیه ی محورهای متعامد

این قضیه **فقط** برای اجسام تخت درست است. جسم تخت شکل (۲۱-۱۰) را در نظر بگیرید که در صفحه‌ی $x-y$ قرار دارد. اگر I_x و I_y به ترتیب گشتاورهای لختی جسم حول محورهای x و y باشند، آنگاه، بنا به قضیه‌ی محورهای متعامد داریم



شکل ۲۱-۱۰

$$I_z = I_x + I_y \qquad (۱۰-۳۸)$$

اثبات: اثبات این قضیه ساده است. نخست به تعریف‌های I_x و I_y و I_z توجه کنید :

$$I_x \equiv \int (y^{۲}+z^{۲})dm \ \ ,\ \ I_y \equiv \int (x^{۲}+z^{۲})dm \ \ ,\ \ I_z \equiv \int (x^{۲}+y^{۲})dm \qquad (۱۰-۳۹)$$

برای اثبات قضیه از این واقعیت استفاده می‌کنیم که برای جسم تخت $z=۰$ است. پس، اگر در رابطه‌های (۳۹-۱۰) قرار دهیم $z=۰$ ، دیده می‌شود که $I_z = I_x + I_y$.

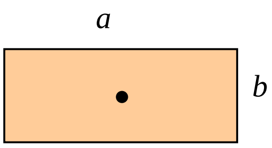
مثال ۱۶-۱۰ **(الف)**: مثال ۴-۱۰ را با استفاده از قضیه‌ی محورهای متعامد حل کنید.

(ب) : مثال ۶-۱۰ را با استفاده از قضیه‌ی محورهای متعامد حل کنید.

حل: **(الف)**: حلقه جسمی متقارن است و بنا به تقارن $I_x = I_y$. پس، براساس رابطه‌ی (۳۸-۱۰) داریم $I_z = ۲I_x \Rightarrow I_x = I_z/۲$. اما از مثال ۳-۱۰ می‌دانیم که $I_z = MR^{۲}$. بنابراین $I_x = MR^{۲}/۲$.

(ب): در اینجا هم قرص تقارن دارد و در نتیجه $I_x = I_y$ است. بنا به قضیه‌ی محورهای متعامد داریم $I_z = ۲I_x \Rightarrow I_x = I_z/۲$. اما از مثال ۵-۱۰ می‌دانیم $I_z = MR^{۲}/۲$ است. پس $I_x = MR^{۲}/۴$.

مثال ۱۷-۱۰ گشتاور لختی مستطیل به جرم M، طول a وپهنای b شکل (۲۲-۱۰) را حول محوری بیابید که از مرکزش می گذرد و بر صفحه‌ی مستطیل عمود است.



شکل ۲۲-۱۰

حل: فرض کنید محور z به صفحه‌ی مستطیل عمود است. می‌دانیم که $I_x = Mb^{۲}/۱۲$ و $I_y = Ma^{۲}/۱۲$ اند (چرا ؟). پس، بنا به قضیه‌ی محورهای متعامد داریم

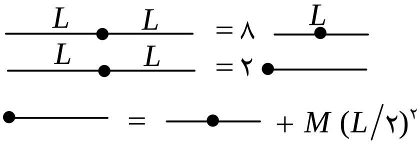
$$I_z = I_x + I_y = \frac{۱}{۱۲}M\,(a^{۲}+b^{۲}) \qquad (۱۰-۴۰)$$

۱۰-۵ شگردی زیبا- روش میان‌بُر

محاسبه‌ی گشتاور لختی برخی اجسام با تقارن را می‌توان بدون هیچ انتگرال‌گیری به دست آورد. کافی است از قضیه‌ی محورهای موازی و تحلیل مقیاس‌بندی استفاده کرد. این روش را با مثال میله (مثال ۷-۱۰) توضیح می‌دهیم و با مثالی دیگر کاربردش را در اجسام برخالی خواهیم دید. در بخش مسئله‌ها کاربردهای دیگرش را خواهید یافت. برای مثال میله، شگرد از این قرار است: گشتاور لختی میله‌ای به طول L را با گشتاور لختی میله‌ی به طول $۲L$ مقایسه کنید. تحلیل مقیاس‌بندی نشان می‌دهد که گشتاور میله‌ی به طول $۲L$ هشت برابر میله‌ی با طول L است. چون در انتگرال $\int x^{۲}dm = \int x^{۲}\lambda dx$ سه توان x

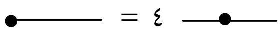
وجود دارد. بنابراین، تغییر متغیر $y=۲x$ به ضریب $۸=۲^۳$ می‌انجامد. همچنین، تجسم کنید که میله‌ی کوتاه را به میله‌ی بلند تبدیل کنید. در این صورت، فاصله‌ی هر جزء میله‌ی بلند در مقایسه با جزء متناظر میله‌ی کوتاه از محور چرخش دو برابر می‌شود. جرم نیز دو برابر می‌شود. بنابراین، انتگرال $\int x^۲ dm$ با ضریب $۸=۲\times۲^۲$ بزرگ می‌شود.

با شکل می‌توان این روش را ساده‌تر نشان داد. گشتاور لختی جسم را با شکل جسم نشان دهید و نقطه‌ی سیاهی را نماینده‌ی محور چرخش بنامید:



(۱۰-۴۱)

سطر اول نتیجه‌ی تحلیل مقیاس‌بندی است. سطر دوم از این واقعیت ریشه می‌گیرد که گشتاورهای لختی با هم جمع می‌شوند (سمت چپ، دو نسخه‌ی سمت راست است که در جایگاه محور چرخش به هم چسبیده اند) و سطر سوم نتیجه‌ی قضیه‌ی محورهای موازی است. از برابری سمت راست سطرهای اول و دوم داریم



(۱۰-٤۲)

اگر این رابطه را برای در سطر سوم رابطه‌ی (۱۰-۲٦) قرار دهیم نتیجه‌ی دلخواه به دست می‌آید

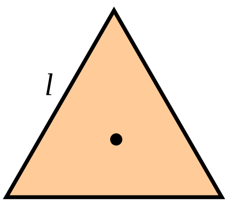
(۱-٤۳)
 $=\frac{۱}{۱۲}ML^۲$

در دو مثال زیر با این روش بیشتر آشنا می‌شوید. در مثال ۱۹-۱۰ آن را در مورد جسم برخال به کار می‌بریم که در نگاه نخست یافتن گشتاور لختی آن دشوار می‌نماید.

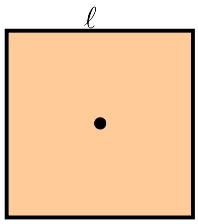
مثال ۱۸-۱۰ با استفاده از راه میان‌بُر گشتاورهای لختی زیر را حساب کنید

(الف): مربع همگن شکل (۲۳-۱۰) به جرم m و به ضلع ℓ. محور چرخش از مرکز مربع می‌گذرد و بر صفحه‌ی آن عمود است.

(ب): مثلث متساوی الاضلاع شکل (۲٤-۱۰) به جرم m و به ضلع ℓ. محور چرخش از مرکز مثلث می‌گذرد و به صفحه‌ی آن عمود است

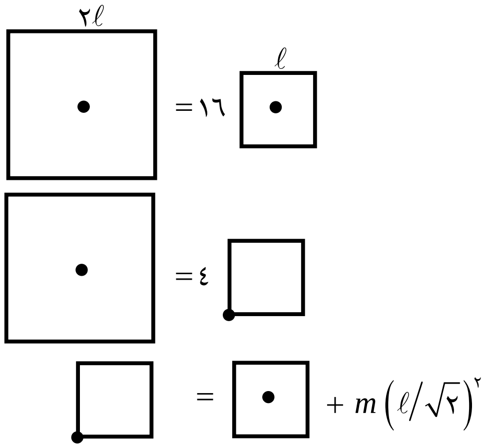


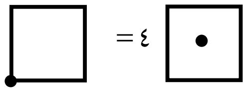
شکل ۲٤-۱۰

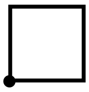


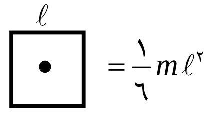
شکل ۲۳-۱۰

حل: **(الف)**: گشتاور لختی مربعی به ضلع ۲ℓ شانزده برابر گشتاور لختی مربعی با ضلع ℓ است. چون dm با سطح متناب است و سطح نیز با مربع طول ضلع متناسب است. بنابراین، dm های متناظر دو مربع با ضریب ٤ با هم فرق دارند. همچنین در انتگرال گشتاور لختی r با توان دو ظاهر می‌شود. پس، وقتی متغیرها را از یک مربع به مربع دیگری تغییر می‌دهیم درانتگرال $\int r^2 dm=\int r^2\sigma dx\, dy$ چهار توان ۲ ظاهر می شود. اینک **حل تصویری**:

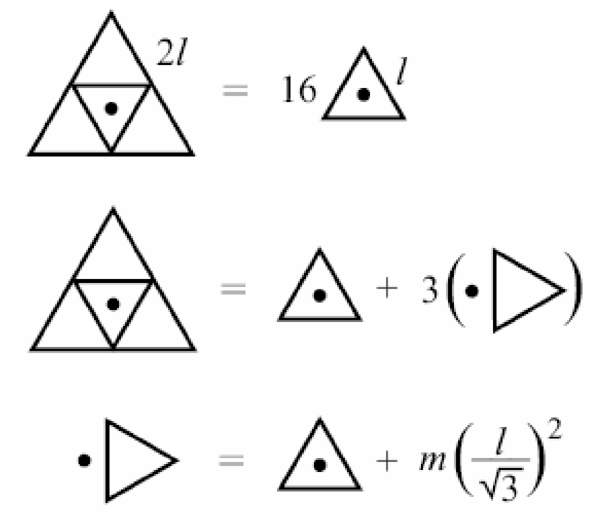


سطر اول از تحلیل مقیاس‌بندی به دست می آید. سطر دوم از این واقعیت ریشه می‌گیرد که گشتاور های لختی باهم جمع می‌شوند. سطر سوم نتیجه‌ی قضیه‌ی محورهای موازی است. از برابری سمت راست سطر اول و دوم داریم 

که با قرار دادن آن در سطر سوم وحذف  خواهیم داشت:

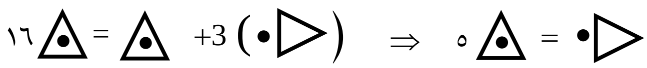


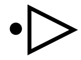
این نتیجه با پاسخ مثال ۱۷-۱۰ به ازای $a=b=\ell$ سازگار است.

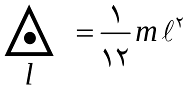


(ب): جسم باز هم دو بعدی است. بنابراین، I مثلثی با ضلع ۲ℓ شانزده برابر I مثلثی به ضلع ℓ است

حل تصویری: سطر اول از تحلیل مقیاس بندی به دست می‌آید. سطر دوم از این واقعیت ریشه می‌گیرد که گشتاورهای لختی باهم جمع می‌شوند. سطر سوم نتیجه‌ی قضیه‌ی محورهای موازی است. از برابری سمت راست سطر اول و دوم داریم



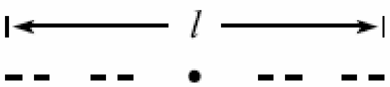
اینک می‌توان  را از سطر سوم حذف کرد. خواهیم داشت



(۱۰-۴۴)

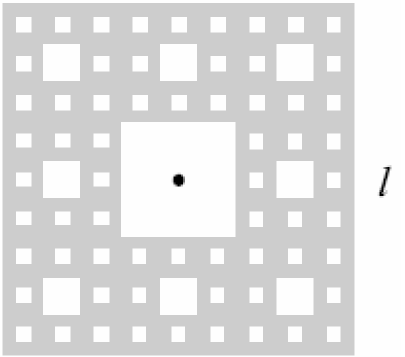
این پاسخ با نتیجه‌ی مثال ۱۵-۱۰ به ازای $N=۳$ و $"R"=\ell/\sqrt{۳}$ سازگار است.

مثال ۱۹-۱۰ گشتاور لختی اجسام برخال زیر را بیابید



شکل۲۵-۱۰

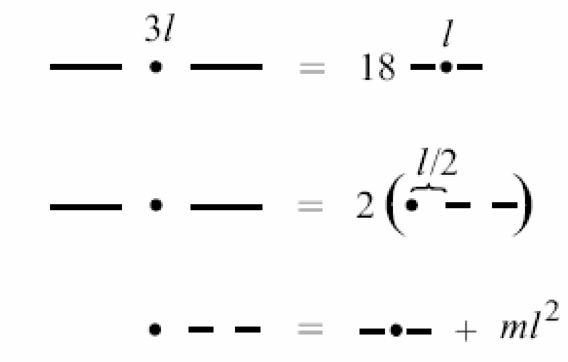
(الف): برابر شکل (۲۵-۱۰) میله‌ای به طول ℓ را در نظر بگیرید و ۱/۳ میانی آن را حذف کنید. با دو قسمت باقی مانده هم همین کار را بکنید و هریک را سه قسمت بکنید و قسمت میانی را بردارید. این کار را بینهایت بار انجام دهید. فرض کنید جرم جسم باقی مانده‌ی نهایی m است. گشتاور لختی این جسم را حول محوری که از وسط میله‌ی اولیه می‌گذرد و بر آن عمود است، بیابید. (توجه کنید که این جسم باقی‌مانده طول ندارد و بنابراین، چگالی جرم آن بینهایت است. اما این جسم یک جرم نقطه‌ای با چگالی بینهایت نیست. اگر چنین تصوری پیدا کردید، به جای بینهایت، برخال کردن را یک میلیون بار انجام دهید.)



شکل ۲۶–۱۰

(**ب**): مربعی به ضلع ℓ شکل (۲۶–۱۰)را در نظر بگیرید. آن را به ۹ مربع کوچک تر یکسان تقسیم کنید و مربع میانی را حذف کنید. همین کار را با ۸ مربع دیگر انجام دهید و این کار را بینهایت بار تکرار کنید. فرض کنید جرم جسم باقی مانده نهایی m است. گشتاور لختی آن را نسبت به محوری که از مرکز مربع اصلی می‌گذرد و بر سطخ آن عمود است، حساب کنید

حل: (**الف**) تحلیل مقیاس‌بندی در این مثال کمی پیچیده‌تر از پیش است. جسم نهایی با جسمی که سه برابر بزرگ‌تر است، خودگون است. بنابراین، اگر جسم را سه برابر کنیم I چگونه تغییر خواهد کرد؟ در I دو عامل وجود دارد: x^2 و dm . اگر طول جسم را سه برابر کنیم، x سه برابر می‌شود و در نتیجه انتگرال $\int x^2 dm$ با یک ضریب ۹ بزرگ می‌شود. dm چگونه تغییر می‌کند؟ با سه برابر کردن جسم، جرم آن دو برابر می‌شود؛ چون جسم جدید عبارت است از دو جسم کوچک‌تر بعلاوه‌ی فضای خالی بین آن‌ها. پس، dm جسم جدید دو برابر dm جسم کوچک تر است. بنابراین، انتگرال I یک ضریب ۲ هم به این خاطر به دست می‌آورد. نتیجه این که I جسمی به طول 3ℓ هیجده برابر I جسمی با طول ℓ می‌شود. اینک **حل تصویری**:



سطر اول از تحلیل مقیاس‌بندی به دست می‌آید . سطر دوم از این واقعیت ریشه می‌گیرد که گشتاور های لختی باهم جمع می‌شوند. سطر سوم نتیجه‌ی قضیه‌ی محورهای موازی است. از برابری سمت راست سطرهای اول و دوم داریم $— \bullet — = 9\ \overset{l}{-\bullet-}$ که اگر در سطر سوم قرار دهیم و $\bullet — —$ را حذف کنیم به دست می‌آید

$$\overset{l}{-\bullet-} = \frac{1}{8} m\ell^2$$

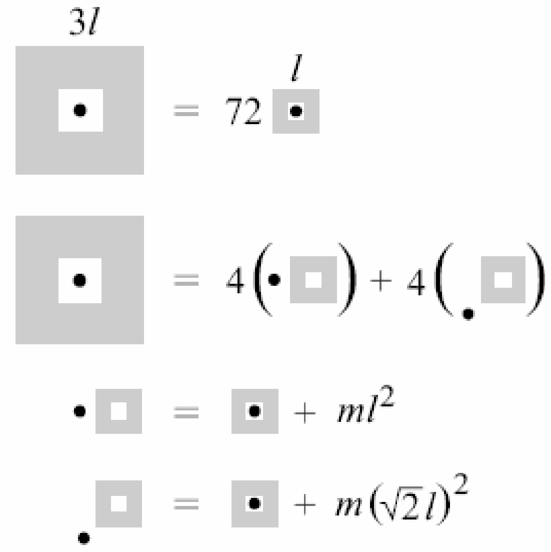
این مقدار بزرگ‌تر از گشتاور میله‌ی همگن ($m\ell^2/12$) است چون حالا جرم در فاصله‌ی دورتری از مرگز قرار دارد.

نکته: با سه برابر کردن طول جسم، dm با ضریب ۲ بزرگ شد که بیشتر از ضریب ۱ برای جسم با بعد صفر و کم‌تر از ضریب ۳ برای جسم یک بعدی است. به حسابی، بُعد جسم ما چیزی بین صفر و یک است. می‌توان بعد، d ، یک جسم را به این صورت تعریف کرد که در اثر r برابر شدن طول، عدد r^d رشد "حجم" جسم را نشان دهد. در این مثال $r = 3$ است و حجم به ۲ برابر افزایش یافته است. پس $3^d = 2 \Rightarrow d = \ell og_3 2 \simeq 0.63$. ♣

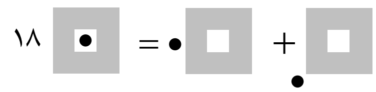
(**ب**): نخست به مقیاس‌بندی جرم توجه کنید. ابعاد جسم نهایی را سه برابر کنید. در این صورت I چگونه تغییر خواهد کرد؟ x ها در انتگرال $\int x^2 dm$ سه برابر شده اند. پس یک ضریب ۹ خواهیم داشت. از سوی دیگر، با سه برابر کردن ابعاد جسم، جرم آن ۸ برابر می‌شود؛ چون جسم جدید (جسم سه برابر شده) از هشت جسم کوچک بعلاوه‌ی مربع خالی در میان آن‌ها تشکیل می‌شود. بنابراین، dm جسم جدید ۸ برابر می‌شود. در نتیجه، I جسم با طول 3ℓ هفتادودو برابر I جسم با طول ℓ است.

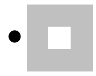
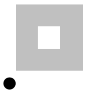
حل تصویری:

سطر اول از تحلیل مقیاس بندی به دست می‌آید. سطر دوم از این واقعیت ریشه می‌گیرد که گشتاورهای لختی باهم جمع



می‌شوند. سطرهای سوم و چهارم نتیجه‌ی قضیه‌ی محورهای موازی است. از برابری سمت راست سطرهای اول و دوم داریم



از این تساوی در سطرهای سوم و چهارم استفاده کنید و  و  را حذف کنید. خواهیم داشت

$$\text{▣}_{l} = \frac{۳}{۱۶} m\ell^{۲} \qquad (۱۰-۴۵)$$

این مقدار بزرگ‌تر از گشتاور لختی مربع همگن ($m\ell^{۲}/۶$) است.

چون جرم اینک در فاصله‌ی دورتری از مرکز قرار دارد. با سه برابر کردن طول جسم، حجم آن ۸ برابر شد. پس، بعد جسم $۳^{d} = ۸ \Rightarrow d = \ell og_{۳} ۸ \simeq ۱٫۸۹$.

۱۰-۶ گشتاور و تکانه‌ی زاویه‌ای

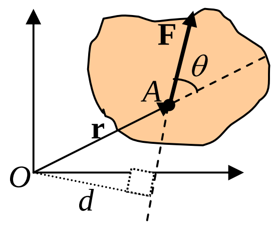
۱۰-۶-۱ گشتاور

در فصل ۷ گشتاور و تکانه‌ی زاویه‌ای را تعریف کردیم. در آنجا گفتیم که این دو کمیت در بررسی حرکت جسم سخت نقش مهمی دارند. اینک با جزییات بیشتری به آن می‌پردازیم.

جسمی را در نظر بگیرید که از یک نقطه آویزان است. اگر نیروی $\mathbf{F}$ در مکان مناسبی به این جسم وارد شود، جسم می‌کوشد حول محوری که از نقطه‌ی آویز می‌گذرد بچرخد. توانایی نیرو در چرخاندن جسم حول یک محور با کمیت گشتاور $(\mathbf{G})$ اندازه گیری می‌شود. در فصل ۷ گشتاور نیرو را با رابطه‌ی (۲۲-۷) تعریف کردیم و بر این نکته پا فشردیم که **گشتاور همواره نسبت به یک محور یا نقطه‌ی معینی تعریف می‌شود**. بگذارید یک بار دیگر هم گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ را نسبت به مبداء معینی تعریف کنیم.

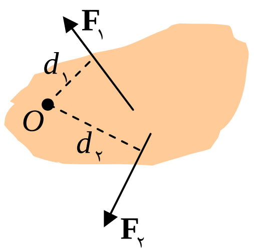
$$\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{G}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \sin\alpha = Fr\sin\theta \qquad (۱۰-۴۶)$$

θ زاویه‌ای است که راستای F با راستای r می‌سازد. در شکل (۲۷-۱۰) نیروی $\mathbf{F}$ در نقطه‌ی A به جسم اثر کرده است. زاویه‌ی θ نشان داده شده است و اندازه‌ی گشتاور این نیرو نسبت به مبداء O برابر است با $Fr\sin\theta$. کمیت $d \equiv r\sin\theta$ *بازوی گشتاور* نامیده می‌شود وفاصله‌ی عمودی محور چرخش تا راستای اثر نیروی $\mathbf{F}$ است. توجه کنید که فقط مؤلفه‌ی $F\sin\theta$ گشتاورمی‌کوشد جسم را بچرخاند. این مؤلفه‌ی گشتاور به r عمود است. اگر مانند شکل (۲۸-۱۰) بیش از یک نیرو به جسم اثر کند، آنگاه هر یک از نیروها می کوشد جسم را حول نقطه‌ی آویز O بچرخاند. برای مثال، در شکل (۲۸-۱۰) نیروی $\mathbf{F}_1$ می‌خواهد جسم را حول نقطه‌ی O پادساعتگرد بچرخاند، در حالیکه نیروی $\mathbf{F}_2$ می‌کوشد آن را ساعتگرد بچرخاند.از این پس قرارداد می کنیم که اگر نیرو بخواهد جسم را پاد ساعتگرد



شکل ۲۷-۱۰

بچرخاند، گشتاور مربوط به آن نیرو مثبت است. اگر نیرو بخواهد جسم را ساعتگرد بچرخاند، گشتاورش را منفی فرض خواهیم کرد. این همان قاعده‌ی انگشت‌های دست راست است . به هر حال، بنا به تعریف گشتاور یک کمیت برداری است و باید جهتش معین باشد. بردار گشتاور نیرو، برداری است که بر صفحه- ای که نیرو و بردار مکان می‌سازند عمود است. یعنی گشتاور هم بر $\mathbf{F}$ و هم بر $\mathbf{r}$ عمود است. بنابراین، گشتاور نیروی $\mathbf{F}_۱$ با بازوی $d_۱$ در شکل (۲۸-۱۰) **مثبت** و مقدار آن $+F_۱d_۱$ است؛ گشتاور نیروی $F_۲$ با بازوی d_2 منفی است و اندازه‌اش $-F_۲d_۲$ است. بنابراین، اندازه‌ی گشتاور برآیند وارد به جسم سخت نسبت به نقطه‌ی O عبارت است از:

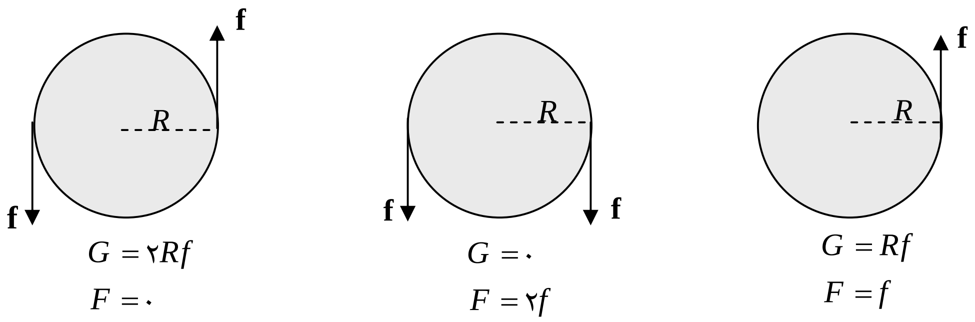


شکل ۲۸-۱۰

$$G_{net} = G_۱ + G_۲ = F_۱d_۱ - F_۲d_۲ \qquad (۱۰-۴۷)$$

روشن است که اگر $F_۱d_۱$ بزرگ‌تر از F_2d_2 باشد، جسم پادساعتگرد خواهد چرخید. اگر F_2d_2 بزرگ‌تر از F_1d_1 باشد جسم ساعتگرد می‌چرخد.

توجه کنید که گشتاور و نیرو دو مفهوم کاملاً جدا از هم اند: گشتاور بستگی به این دارد که نسبت به چه نقطه‌ای حساب شود اما نیرو اینگونه نیست. از تعریف گشتاور $\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ می‌بینیم که گشتاور $\mathbf{G}$ و نیروی $\mathbf{F}$ همواره بر هم عمودند. گشتاور وارد به یک جسم می‌تواند غیر صفر باشد، حال آن که



شکل ۲۹-۱۰

نیروی خالص وارد به آن جسم می‌تواند صفر باشد. ممکن است به جسم نیرو وارد شود اما گشتاور کل وارد به آن صفر باشد. در عمومی‌ترین حالت هم گشتاور و هم نیرو می‌توانند غیر صفر باشند. این سه وضعیت در شکل (۲۹-۱۰) نشان داده شده اند.

۱۰-۶-۲ تکانه‌ی زاویه‌ای

تکانه‌ی زاویه‌ای یک جرم نقطه‌ای نسبت به مبداء معینی با رابطه‌ی

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad (۱۰-۴۸)$$

تعریف می‌شود. اگر مجموعه‌ای از جرم‌های نقطه‌ای داشته باشیم، تکانه‌ی زاویه‌ای کل، $\mathbf{L}$، جمع تکانه‌های زاویه‌ای جرم‌هاست. کمیت $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ویژگی‌های مهم و سودمندی دارد. یکی از این ویژگی‌ها را در بخش۵-۷ دیدیم که قانون پایستگی $\mathbf{L}$ بود و در قضیه‌ی ۱-۷ بیان شد و به شناساندن "پتانسیل موثر" انجامید. ویژگی مهم دیگر این است که گشتاور در رابطه‌ی $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ (این رابطه، مانسته‌ی چرخشی قانون نیوتون $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ است) ظاهر می‌شود. بررسی رابطه‌ی $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ موضوع فصل ۱۲ است.

مسئله‌های تکانه‌ی زاویه‌ای دنیا دو نوع‌اند. حل هر مسئله‌ی چرخش سرانجام با $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ سروکار پیدا می‌کند. بنابراین، نخست باید تغییر $\mathbf{L}$ را نسبت به زمان به دست آوریم. چون $\mathbf{L}$ بردار است، تغییر آن ممکن است بر اثر تغییر طول یا بر اثر تغییر جهت آن و یا ترکیبی از هر دو باشد. به بیان دیگر، اگر $\mathbf{L}$ را به صورت $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{L}}$ بنویسیم که در آن $\hat{\mathbf{L}}$ بردار یکه در امتداد $\mathbf{L}$ است، آنگاه تغییر $\mathbf{L}$ می‌تواند براثر تغییر L یا $\hat{\mathbf{L}}$ و یا هردو روی دهد.

فهمیدن حالت اول، یعنی $\hat{\mathbf{L}}$ ثابت، آسان است. صفحه‌ی گرام را در نظر بگیرید. بردار $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ به صفحه‌ی گرام عمود است. اگر به صفحه نیروی مماسی مناسبی وارد کنیم، صفحه تندتر می‌چرخد. این چرخش تند، قانونمند است و ما به آن خواهیم پرداخت. اما هنوز هم $\mathbf{L}$ به صفحه عمود است و تنها اندازه‌اش بزرگ‌تر شده است. در این گونه مسئله‌ها می‌توان کاملا فراموش کرد که $\mathbf{L}$ بردار است و فقط اندازه‌ی آن را در نظر گرفت. در این فصل و اساسا در این کتاب، فقط این حالت را پی-گیرانه دنبال خواهیم کرد. حالت دوم وضعیتی است که جهت $\mathbf{L}$ تعییر کند. این حالت پیچیده‌تر است و به تجسم کردن مسئله نیاز دارد. حرکت فرفره، توپ بسکتبالی که روی حلقه می‌چرخد و دوچرخه سواری که روی پیرامون دایره‌ای دور می‌زند یا خم جاده‌ای را می‌پیماید و سایر وضعیت‌های پیچیده‌تر نمونه‌هایی از این نوع مسئله‌هاست. ما نگاهی گذرا به این حالت‌ها خواهیم انداخت.

تفاوت این دو حالت درست مانند وضعیت‌های مربوط به $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ است. تغییربردار $\mathbf{p}$ می‌تواند فقط به خاطر تغییر اندازه‌ی آن باشد که به $F = ma$ می‌انجامد؛ یا این که بر اثر تغییر جهت $\mathbf{p}$ باشد که در این صورت نیروی مرکزگرای $F = mv^{۲}/r$ را خواهیم داشت. و یا این که ترکیبی از هر دو باشد.

تکانه‌ی زاویه‌ای یک جرم نقطه‌ای با رابطه‌ی (۱۰-٤۸) داده شد. مسئله‌های دنیای واقعی به ناگزیر شامل ذرات بسیار است. بنابراین، باید محاسبه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای جسم دارای بعد را یاد بگیریم. اگر جسم از ذراتی با جرم m_i تشکیل شده باشد و هر ذره با سرعت $\mathbf{v}_i$ در جهتی حرکت کند و بنابراین، تکانه‌اش $\mathbf{p}_i$ باشد، آنگاه تکانه‌ی زاویه‌ای هر ذره $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ است. تکانه‌ی زاویه‌ای کل جسم برابر است با جمع تکانه‌ی زاویه‌ای همه‌ی جرم‌های m_i

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad (۱۰-٤۹)$$

اگر توزیع جرم پیوسته باشد، در رابطه‌ی بالا علامت جمع به علامت انتگرال تبدیل می‌شود.

تکانه‌ی زاویه‌ای $\mathbf{L}$ به مکان $\mathbf{r}_i$ و تکانه‌های $\mathbf{p}_i$ جرم‌ها بستگی دارد. تکانه‌ها هم به نوبه‌ی خود بستگی به این دارد که جرم با چه سرعتی می‌چرخد و با چه سرعتی جابه‌جا می‌شود. هدف ما در یافتن وابستگی $\mathbf{L}$ به توزیع جرم جسم مورد نظرمان است.

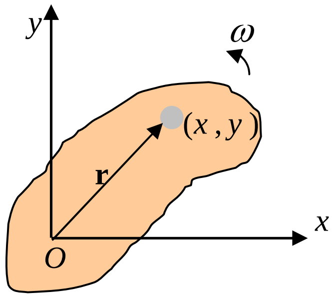
فرض کنید جسم مورد نطر دو بعدی است و در صفحه‌ی $x-y$ قرار دارد (به زودی در همین بخش وضعیتی را که جسم دو بعدی نیست بررسی خواهد شد و شرط دو بعدی بودن جسم را حذف خواهیم کرد). نخست $\mathbf{L}$ را نسبت به مبداء مختصات حساب می‌کنیم.

توجه کنید که برای جسم دو بعدی، هر دوی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ در صفحه‌ی $x-y$ قرار دارند و بردار $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ همواره در راستای $\hat{\mathbf{z}}$ است. این واقعیت بررسی جسم دو بعدی را آسان می‌کند؛ چون تغییر $\mathbf{L}$ فقط براثر اندازه‌ی آن است و نه بر اثر تغییر جهت. بنابراین، وقتی به رابطه‌ی $\mathbf{G} = d\mathbf{L}/dt$ می‌رسیم این رابطه شکل ساده‌ای پیدا می‌کند.

۱۰-۶-۳ چرخش حول محور z

جسم دو بعدی شکل (۱۰-۳۰) را در نظر بگیرید که با سرعت زاویه‌ای ω در جهت پادساعتگرد حول محور z می‌چرخد. بخش

کوچکی از آن را که در مکان (x,y) قرار دارد و جرمش dm است، در نظر بگیرید. پس، $r=\sqrt{x^2+y^2}$. این بخش کوچک روی دایره‌ای به مرکز O با سرعت $v=\omega r$ می‌گردد. بنابراین، تکانه‌ی زاویه‌ای آن نسبت به مبداء O عبارت است از $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}=r(v\,dm)\,\hat{\mathbf{z}}=dm\,r^2\omega\,\hat{\mathbf{z}}$. جهت $\hat{\mathbf{z}}$ در نتیجه‌ی ضرب برداری دو بردار متعامد $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ پدید می‌آید. بنابراین، تکانه‌ی زاویه‌ای کل جسم عبارت است از



شکل ۱۰-۳۰

$$L=\int r^2\omega\hat{\mathbf{z}}dm=\int(x^2+y^2)\omega\hat{\mathbf{z}}dm \qquad (۱۰-۵۰)$$

انتگرال برروی تمام سطح جسم که جرم در آن توزیع شده است، گرفته می‌شود. اگر توزیع جرم یکنواخت باشد، آنگاه داریم $dm=\sigma\,dx\,dy$. چون گشتاور لختی، بنا به تعریف، عبارت است از

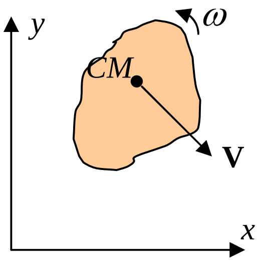
$$I_z\equiv\int r^2dm=\int(x^2+y^2)dm \qquad (۱۰-۵۱)$$

پس، مولفه‌ی z بردار $\mathbf{L}$ به قرار زیر خواهد بود

$$L_z=I_z\omega \qquad (۱۰-۵۲)$$

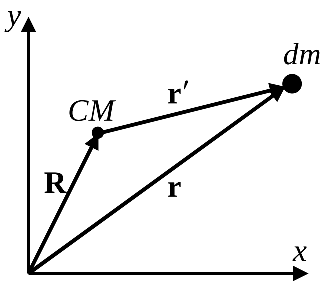
انرژی جنبشی این جسم $T=I_z\omega^2/2$ است که در آغاز این فصل حساب کردیم.

۱۰-۶-۴ حرکت عمومی در صفحه‌ی $x-y$



شکل ۱۰-۳۱

حال فرض کنید که جسم هم حرکت چرخشی و هم حرکت انتقالی دارد (شکل ۳۱-۱۰). در این صورت، بخش‌های مختلف جسم، برعکس حالت پیش، دیگر روی دایره‌هایی به مرکز مبداء نمی‌گردند و نمی‌توان از $v=\omega r$ استفاده کرد. اگر تکانه‌ی زاویه‌ای $\mathbf{L}$ و انرژی جنبشی T را برحسب مختصات مرکزجرم و مختصات نسبت به مرکزجرم بنویسیم، خواهیم دید که رابطه‌های این دو کمیت زیبا و ساده‌تر می‌شوند و روشنگری‌های بیشتری پیدا می‌کنند. نخست این کار را انجام می‌دهیم. مختصات مرکزجرم جسم را با $\mathbf{R}=(X,Y)$ نشان دهید و مختصات جزء جرم را نسبت به مرکزجرم با $\mathbf{r}'=(x',y')$ نشان دهید. در شکل (۳۲-۱۰) این بردارها نشان داده شده اند. روشن است که مکان جزء جرم dm را در چارچوب ثابت می‌توان به صورت $\mathbf{r}=\mathbf{R}+\mathbf{r}'$ نوشت. اگر سرعت مرکز جرم $\mathbf{V}$ و سرعت جزء جرم نسبت به مرکزجرم $\mathbf{v}'$ باشند، آنگاه داریم $\mathbf{v}=\mathbf{V}+\mathbf{v}'$. فرض کنید جسم با سرعت زاویه‌ای ω' حول مرکز جرم می‌چرخد (منظور این است: دستگاه مختصاتی را تجسم کنید که مبداء آن در مرکزجرم و محورهایش با محورهای ثابت x و y موازی است. در این چارچوب، جسم دو بعدی با سرعت زاویه‌ای ω' می چرخد.) حالا داریم $v'=r'\omega'$. نخست تکانه‌ی زاویه‌ای $\mathbf{L}$ را حساب می‌کنیم و سپس به انرژی جنبشی T می‌پردازیم.



شکل ۱۰-۳۲

$$\begin{aligned}\mathbf{L}&=\int\mathbf{r}\times\mathbf{v}dm=\int(\mathbf{R}+\mathbf{r}')\times(\mathbf{V}+\mathbf{v}')dm\\&=M\mathbf{R}\times\mathbf{V}+\int\mathbf{r}'\times\mathbf{v}'dm\\&=M\mathbf{R}\times\mathbf{V}+\left(\int r'^2\omega'dm\right)\hat{\mathbf{z}}\\&\equiv M\mathbf{R}\times\mathbf{V}+\left(I_z^{CM}\omega'\right)\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

(برخی جمله ها صفرند) (۱۰-۵۳)

M جرم کل جسم دو بعدی است. در گذار از سطر دوم به سطر سوم جمله‌های $\int \mathbf{r}'\times\mathbf{V}dm$ و $\int \mathbf{R}\times\mathbf{v}'dm$ صفر اند. چون، بنا به تعریف مرکزجرم، داریم $\int \mathbf{r}'dm = ۰$ و در نتیجه $\int \mathbf{v}'dm = d\left(\int \mathbf{r}'dm\right)/dt = ۰$ است. کمیت I_z^{CM} گشتاور لختی حول محوری است که از مرکزجرم می‌گذرد و با محور z موازی است. رابطه‌ی (۱۰−۵۳) نتیجه‌ی زیبا ومهمی است و می‌ارزد که به صورت قضیه بیان شود.

قضیه ی ۱−۱۰ *تکانه‌ی زاویه‌ای هر جسم نسبت به مبداء ثابت با جمع تکانه‌های زاویه‌ای جسمی نقطه‌ای به جرم M جایگزیده در مرکزجرم و تکانه‌ی زاویه‌ای جسم نسبت به مرکزجرم برابر است.*

نکته: قضیه‌ی بالا فقط هنگامی سودمند است که مکان جرم نقطه‌ای پنداری M در مرکزجرم باشد. البته در بررسی بالا می‌توانستیم نقطه‌ی دیگری، مانند نقطه‌ی P، غیر از مرکزجرم را انتخاب کنیم و همه چیز را برحسب مختصات نقطه‌ی P و مختصات نسبت به نقطه‌ی P بنویسیم (و هنوز هم چرخش را توصیف کند). اما در این صورت برخی جمله‌ها که در بررسی بالا صفر بودند، دیگر صفر نمی‌شوند و نتیجه به زیبایی و سودمندی رابطه‌ی (۱۰−۵۳) نمی شود. ♣

در حالت خاص که مرکزجرم در دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای Ω و شعاع R (و بنابراین $V = \Omega R$) حول مبداء ثابت بگردد، تکانه‌ی زاویه‌ای جسم $L = (MR^۲\Omega + I_z^{CM}\omega')\hat{\mathbf{z}}$ می شود. اینک محاسبه‌ی انرژی جنبشی T:

$$\begin{aligned} T &= \int \frac{1}{2}v^2 dm \\ &= \int \frac{1}{2}\left|\mathbf{V}+\mathbf{v}'\right|^2 dm \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \int \frac{1}{2}v'^2 dm \qquad \text{(برخی جمله ها صفر اند)} \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \int \frac{1}{2}r'^2\omega'^2 dm \\ &\equiv \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_z^{CM}\omega'^2 \end{aligned} \tag{۱۰−۵۴}$$

در گذار از سطر دوم به سطر سوم جمله‌ی $\int \mathbf{V}\cdot\mathbf{v}'dm$، بنا به تعریف مرکزجرم، صفر است. رابطه‌ی (۱۰−۵۴) مانند رابطه‌ی (۱۰−۵۳) سودمند و زیباست و می‌ارزد که به صورت قضیه بیان شود.

قضیه‌ی ۲−۱۰ *انرژی جنبشی هر جسم برابر است با جمع انرژی جنبشی یک جرم نقطه‌ای جایگزیده در مرکزجرم بعلاوه‌ی انرژی جنبشی جسم در اثر حرکتش نسبت به مرکزجرم آن.*

۱۰-۶-۵ اجسام غیرتخت

در بخش ۱۰−۶ بحث را به اجسام تخت دو بعدی در صفحه‌ی $x-y$ محدود کردیم. با وجود این، اگر محور چرخش با محور z موازی باشد و L_z مورد توجه باشد (و نه L_x و L_y) دستاوردهای بخش ۱۰−۶ را می‌توان به اجسام غیرتخت گسترش داد. بنابراین، شرط دو بعدی بودن جسم را رها و یک بار دیگر دستاوردهای بخش ۱۰−۶ را بررسی می‌کنیم.

نخست جسمی را تجسم کنید که حول محور z می‌چرخد. این جسم در راستای محور z هم بُعد دارد.اگر تصور کنید که می‌توان این جسم را به لایه‌های تخت موازی صفحه‌ی $x-y$ برش داد، آنگاه رابطه های (۱۰−۵۱) و (۱۰−۵۲) به درستی L_z هر برش را توصیف می‌کند. چون L_z کل جسم جمع L_z های این برش‌های دو بعدی است، بنابراین I_z کل جسم هم جمع I_z

های برش‌های دو بعدی است. تفاوت در z این برش‌ها بی ربط اند. پس برای **هر** جسمی می‌توان نوشت

$$I_z = \int \left(x^{۲} + y^{۲}\right) dm \qquad , \qquad L_z = I_z \omega \qquad (۱۰-۵۵)$$

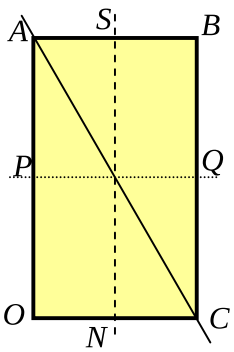
اگرچه رابطه‌ی (۵۵-۱۰) مقدار L_z را برای هر جسم دلخواه به دست می‌دهد، اما بحث این فصل هنوز از عمومیت کامل برخوردار نیست. چون (۱) چرخش به حول محور ثابت z محدود شده است و (۲) حتی با این محدودیت هم، جسمی که در خارج صفحه‌ی $x-y$ قرار دارد، می‌تواند مولفه‌های L_x و L_y غیر صفر داشته باشد. ما در رابطه‌ی (۵۵-۱۰) فقط L_z را حساب کردیم. این واقعیت دوم عجیب اما واقعی است.

انرژی جنبشی، T، جسم غیرتخت که حول محور z می‌چرخد، هنوز هم با رابطه‌ی (۵۲-۱۰) توصیف می‌شود. چون انرژی جنبشی کل جسم را می‌توان از جمع انرژی‌های جنبشی برش‌های دو بعدی به دست آورد.

برای جسمی که مرکزجرمش حرکت انتقالی دارد و خود جسم حول محوری می‌چرخد که از مرکزجرم می گذرد و با محور z موازی است، رابطه‌های (۵۳-۱۰) و (۵۴-۱۰) هنوز برقرار اند. جهت سرعت $\mathbf{V}$ مرکزجرم هر جهتی می‌تواند باشد، هنوز این دو رابطه برقرار اند.

سرانجام این که قضیه‌ی محورهای موازی هم برقرار است؛ اما قضیه‌ی محورهای متعامد برای جسم غیرتخت درست نیست. این تنها موقعی است که فرض تخت بودن لازم است.

مسئله ها



شکل ۳۳-۱۰

۱-۱۰ صفحه‌ی همگن مستطیل شکل به جرم M، به درازای a و پهنای b را در نظر بگیرید.

(الف): گشتاور لختی صفحه را حول لبه‌ی OA به دست آورید.

(ب): گشتاور لختی صفحه را حول لبه‌ی OC به دست آورید.

(پ): گشتاور لختی صفحه را حول خط SN حساب کنید.

(ت): گشتاور لختی صفحه را حول خط PQ حساب کنید.

(ج): گشتاور لختی صفحه را حول محوری که از مرکز صفحه می‌گذرد و بر صفحه عمود است به دست آورید.

(چ): گشتاور لختی صفحه را حول قطر AC حساب کنید.

۲-۱۰ گشتاور لختی صفحه‌ی نازکی به جرم m و به شکل مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ℓ را حول محوری که از یک راس می‌گذرد و به صفحه‌ی مثلث عمود است، بیابید.

۳-۱۰ گشتاور لختی مربع همگن به جرم m و طول ضلع ℓ را حول

(الف): محوری که وسط دو ضلع روبرو را به هم وصل می‌کند.

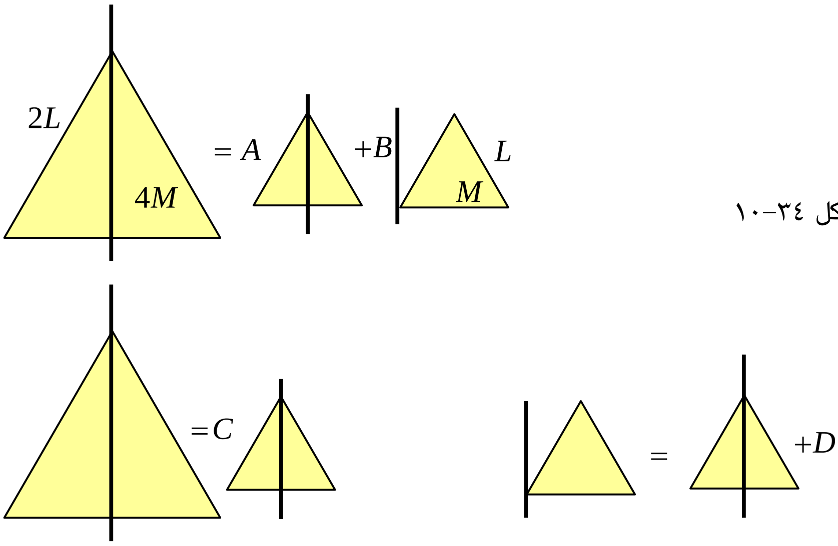
(ب): محوری که دو گوشه‌ی مقابل را به هم مصل می‌کند.

(پ): توضیح دهید که چرا پاسخ‌های (الف) و (ب) باید یکی باشند.

۴-۱۰ گشتاور لختی میله‌ای به جرم m و طول ℓ را نسبت به محوری که از فاصله‌ی $\ell/۴$ از یک انتها می‌گذرد به دست آورید (این یک انتگرال‌گیری ساده است) و نتیجه را با قضیه‌ی محورهای موازی بیازمایید.

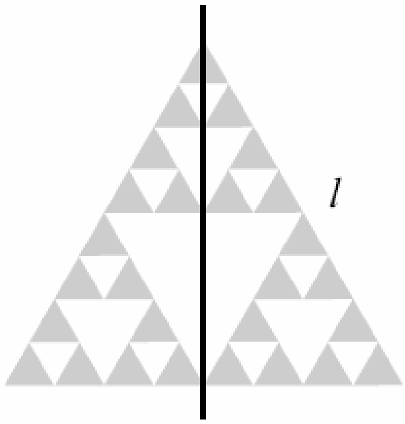
۵-۱۰ گشتاور لختی مخروط توپری با جرم M، شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع h را حول محور تفارن آن به دست آورید.

۶-۱۰ با استفاده از روش میان بر و قضیه‌ی محورهای موازی، گشتاور لختی مثلث متساوی‌الاضلاع به جرم M و طول ضلع L را بیابید. برای حل این مسئله باید ضرایب A، B، C و D را در شکل‌های (۳٤-۱۰) پیدا کنید.



شکل ۳٤-۱۰

۷-۱۰ مثلث متساوی‌الاضلاعی را در نظر بگیرید که طول ضلعش ℓ است. وسط ضلع‌ها را به هم وصل کنید. با این کار مثلث به چهار مثلث کوچک ترتقسیم می‌شود. مثلث میانی را بردارید. این کار را با سه مثلث دیگر انجام دهید و مثلث‌های میانی آنها را هم بردارید. این کار را با بقیه‌ی مثلث‌های هم انجام دهید و تا بینهایت تکرار کنید. فرض کنید که جرم جسم نهایی باقی‌مانده m باشد. گشتاور لختی آن را نسبت به محوری که از مرکز مثلث اصلی وعمود بر صفحه‌ی آن می‌گذرد، حساب کنید. شکل (۳۵-۱۰) را ببینید.

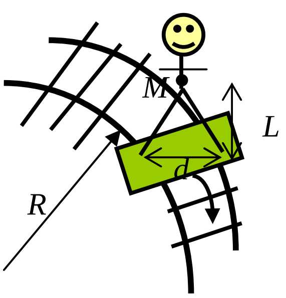


شکل ۳۵-۱۰

۸-۱۰ (**الف**): اگر تکانه‌ی خطی کل مجموعه‌ای از ذرات صفر باشد، نشان دهید که تکانه‌ی زاویه ای سامانه حول هر مرکزی یکسان است.

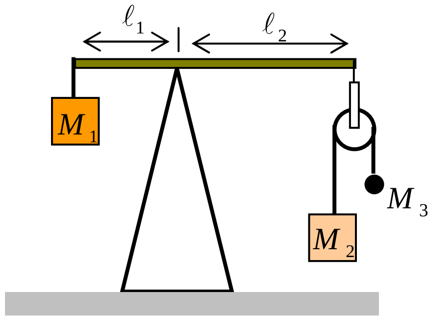
(**ب**): اگر نیروی کل وارد به سامانه‌ای از ذرات صفر باشد، نشان دهید که گشتاور وارد به سامانه نسبت به هر مبدائی یکسان است

۹-۱۰ شخصی به جرم M روی واگنی ایستاده است. واگن با سرعت v از پیچی به شعاع R می‌گذرد. مرکز جرم شخص برابر شکل (۳٦-۱۰) در ارتفاع L از سطح واگن قرار دارد. شخص رو به جهت حرکت واگن ایستاده است و پاهای خود را به فاصله‌ی d از هم قرار داده است. هر یک از پاهای شخص چه مقدار وزن تحمل می‌کند؟

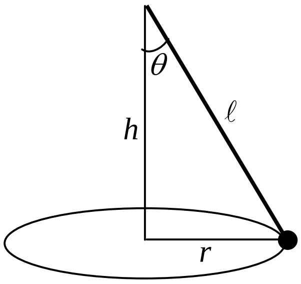


شکل ۳٦-۱۰

۱۰-۱۰ در شکل (۳۷-۱۰) جرم M_1 از یک انتهای میله‌ای آویزان است و به انتهای دیگر میله ماشین آتودی وصل است. قرقره‌ی بدون اصطکاک ماشین آتود جرم ندارد و از آن جرم-های M_2 و M_3 آویزانند. گرانش رو به پایین است و $M_2 > M_3$ است. میله بر روی تکیه‌گاهی قرار دارد. رابطه‌ای بین M_1، M_2، M_3 و ℓ_1 و ℓ_2 چنان پیدا کنید که درست پس از رها کردن جرم‌ها، میله نچرخد



شکل ۱۰-۳۷



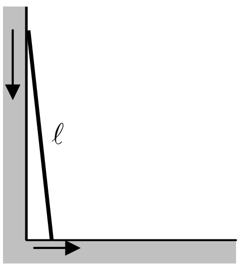
شکل ۱۰-۳۸

۱۰-۱۱ جرم m از ریسمان بدون جرم به طول ℓ آویزان است و برابر شکل (۱۰-۳۸) روی دایره‌ای افقی تاب می‌خورد. طول ریسمان را به آرامی افزایش (یا کاهش) می‌دهیم. کمیت های θ ، ℓ ، r و h برابر شکل تعریف شده اند.

(الف): با فرض این که θ بسیار کوچک است، وابستگی r به ℓ را بیابید.

(ب) : با فرض این که θ بسیار به $\pi/۲$ نزدیک است، وابستگی h به ℓ را بیابید.

۱۰-۱۲ تیله‌ای به جرم M و شعاع R با سرعت اولیه‌ی $V_\circ$ روی سطح شیب‌داری با شیب θ رو به بالا غلتانیده شده است. پیش از آنکه تیله رو به پائین بغلتد، چه مسافتی را روی سطح شیب‌دار پیموده است؟



شکل ۱۰-۳۹

۱۰-۱۳ یک انتهای میله‌ی همگنی به طول ℓ برابر شکل (۱۰-۳۹) روی سطح افقی هموار قرار دارد و سر دیگرش به دیوار بدون اصطکاک تکیه کرده است. فاصله‌ی اولیه‌ی انتهای میله از پای دیوار بسیار کم است. میله را از این وضعیت و از حالت سکون رها می‌کنیم. انتهای پایین میله روی سطح افقی می‌لغزد و از دیوار دور می‌شود. انتهای بالایی آن روی دیوار سُر می‌خورد. در لحظه‌ای که میله از دیوار جدا می‌شود، مولفه‌ی افقی سرعت مرکز جرم آن را بیابید.