فصل ۱

فرض‌های بنیادی فیزیک کلاسیک

فیزیک کلاسیک آشناترین نظریه‌ی علمی است. مفاهیم بنیادی آن مانند جرم، شتاب، نیرو و بقیه بخشی از اندیشه‌ی هر روزی ما شده‌اند. ازاین رو شاید به این مفهوم‌ها زیاد پرداخته نمی‌شود. بنابراین، نقد این مفهوم ها مهم‌اند و ما دراین بخش به بررسی آنها می پردازیم.

۱- ۱ فضا و زمان :

شاید بنیادی‌ترین فرض‌های فیزیک مفهوم فضا و زمان است. در فیزیک کلاسیک فرض می‌کنیم فضا و زمان پیوسته‌اند. به خاطر این فرض است که می‌توانیم بگوئیم رویدادی در یک نقطه‌ی معین و در لحظه زمانی مشخصی اتفاق افتاده است. چون معیارهای جهانی برای اندازه گیری طول و زمان وجود دارد ، مشاهده کننده‌های متفاوت در مکان های گوناگون و در زمان های مختلف می‌توانند مقایسه‌ی معنی‌داری از اندازه گیری های خود بکنند.

فراتر از این، در فیزیک کلاسیک فرض می‌کنیم که مقیاسی جهانی برای زمان وجود دارد (از این رو دو مشاهده‌گر که ساعت های خود را هم‌زمان کرده‌اند درباره‌ی زمان رویداد همواره با هم موافق خواهند بود). فرض بنیادی دیگر در باره‌ی فضا این است که هندسه‌ی فضا اقلیدسی است و در بنیاد حدی در دقت اندازه‌گیری مکان و سرعت وجود ندارد. در مکانیک کوانتومی و نسبیت این فرض‌ها تا حدودی دگرگون شده‌اند.

منظور از اقلیدسی بودن فضا چیست ؟ دو نقطه را در نظر بگیرید. مکان این نقطه‌ها را با مختصات $x_۱ , x_۲ , x_۳$ و $x'_۱ , x'_۲ , x'_۳$ نشان دهید. این دو نقطه یک بازه می‌سازند. این بازه در فضای مختصات (چارچوب مرجع) می‌تواند جهت‌گیری‌های گوناگون داشته باشد. اختلاف مختصات دو نقطه را با $\Delta x_۱ , \Delta x_۲ , \Delta x_۳$ نشان دهید. فضای اقلیدسی فضایی است که فاصله‌ی دو نقطه در آن به صورت $d = \sqrt{\Delta x_۱^۲ + \Delta x_۲^۲ + \Delta x_۳^۲}$ تعریف می‌شود.

۲-۱ اصل نسبیت و چارچوب لخت

در درک ارسطو از عالم، توصیف این واقعیت که اجسام سنگین به پائین فرو می‌افتند این گونه بود: هر عنصر (زمین، هوا، آتش و آب) دارای نقطه بازگشت مخصوص به خود است و به این نقطه باز می‌گردند مگر آنکه به گونه‌ای از بازگشت آنها جلوگیری کنیم. عنصر خاک، به ویژه، می‌خواهد به مرکز عالم برگردد (در جهان ارسطو زمین مرکز عالم است). در چنین توصیفی، نقطه‌ی بازگشت نقش متمایز و مرکزی دارد و در فضا، مکان دارای مفهوم مطلق است.

ارسطو همچنین پنداشت که زمین ثابت و ساکن است و برای اثبات درستی نظر خود گفت: زمین ثابت است چون هر چه را که به بالا پرتاب کنیم به نقطه‌ی پرتاب خود فرو می‌افتد. چنانچه زمین ثابت نباشد آنگاه توپی که به بالا پرتاب می شود، باید در جایگاه دیگری فرود آید.

گالیله در رد این اثبات گفت: اگر زمین به سویی حرکت کند، توپ که نخست بر روی زمین قرار دارد در همان سوی، همراه زمین حرکت خواهد کرد. هنگامی که آن را به هوا پرتاب کنیم، علاوه بر حرکت عمودی خود، همزمان به حرکت اصلی و اولیه همراه زمین خود نیز ادامه خواهد داد. بنابراین، اگرچه در فاصله‌ای که توپ به بالا می رود و پائین می‌آید، زمین در حقیقت به

حرکت خود در سویی ادامه می‌دهد، توپ نیز در همان سوی و به همان اندازه حرکت می‌کند و در نتیجه، در همان نقطه‌ی پرتاب (در همان قسمت زمین) فرود می‌آید.

نتیجه: از آزمایش ارسطو نمی‌توان چیزی آموخت: آیا زمین تند حرکت می‌کند یا کند و یا اصلاً حرکت می‌کند؟ با دلیل ارسطو نمی توان به این پرسش ها پاسخ داد؛ چون توپ در هر حال در همان نقطه‌ی پرتاب فرود خواهد آمد. این آزمایش نمونه‌ای از یک اصل عمومی است:

با هیچ آزمایشی نمی‌توان گفت که آیا کسی در حالت سکون است یا حرکت یکنواخت دارد. گالیله این اصل را با تصور آزمایشگاهی در یک کشتی نشان داد. تا زمانی که حرکت کشتی کاملاً هموار و یکنواخت باشد، آزمایش‌های زیست شناسی و فیزیکی در آزمایشگاه درون کشتی به هیچ وجه نشانی از سرعت کشتی از خود نشان نخواهند داد. ماهی قرمز در درون شیشه‌ی آب حرکت سرگردان خود را انجام خواهد داد. چکه‌های آب که از شیر فرو می‌چکد در همان مکان همیشگی فرود خواهد آمد. پشه‌ها از جهت‌های گوناگون حمله خواهند کرد و همه‌ی اینها مستقل از حرکت کشتی انجام خواهند گرفت. اگر حرکت واقعاً یکنواخت باشد و تکان پس و پیش نداشته باشد، همین را در قطار و یا هواپیما هم می‌توان دید. در هواپیما که با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند، می‌بینیم که قهوه‌ای که از یک قوری ریخته می‌شود درست در درون فنجان فرو می‌ریزد و جسمی که از بالا رها می‌شود درست در پائین بر کف فرو می‌نشیند. تنها هنگامی از حرکت هواپیما آگاه می‌شویم که از پنجره به ابرها و زمین بنگریم. هیچ چیزی در درون هواپیمای در حال پرواز رفتاری متفاوت از آنچه که اگر هواپیما در حالت سکون می‌بود یا با سرعت ثابت دیگری حرکت می‌کرد از خود نشان نمی‌دهد. به بیان دیگر؛ هیچ چیزی در درون هواپیمائی که در حال سکون یا حرکت یکنواخت است بر ساکن بودن یا حرکت یکنواخت آن ویا سرعت خاص هواپیما دلالت نمی‌کند. این نه واضح است و نه چیزی است که بتوان با منطق به آن رسید. فقط یک واقعیت تجربی است که بارها درستی آن آزموده شده است.

برای مثال می‌توان پنداشت که شیمیدانی مایعی تولید کرده باشد که در آزمایشگاه وی در ۱۵۰ درجه به جوش می‌آید. اما اگر این مایع در قطاری باشد که با سرعت ۳۰ km/h حرکت می‌کند در ۱۴۰ درجه به جوش می‌آید و اگر سرعت قطار ٤۰ km/h باشد در ۱۳۰ درجه و... به جوش می‌آید. می‌توانید وجود یک چنین مایعی را تصور کنید؛ هیچ چیزی از وجود چنین مایعی جلوگیری نمی‌کند؛ با این حال، یک چنین ماده‌ای هرگز یافت نشده است. با این فرض که فشار درون قطار با فشار آزمایشگاه یکسان است، اگر مایع در آزمایشگاه در ۱۵۰ درجه به جوش بیاید در درون قطار هم در ۱۵۰ درجه خواهد جوشید و مهم نیست که سرعت قطار چقدر باشد. هرگز ماده یا وسیله‌ای ساخته نشده است که رفتارش در آزمایشگاه ساکن از رفتار آن در آزمایشگاهی که با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند متفاوت باشد. رویدادها در آزمایشگاهی که حرکت یکنواخت دارد همانگونه است که در آزمایشگاه ساکن اند. اصل نسبیت بیان این ناتوانی در تمیز میان حالت سکون و حرکت یکنواخت است. می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد.

با هیچ آزمایشی نمی‌توان گفت که آیا یک فرد در حالت سکون است یا حرکت یکنواخت دارد.

بیان هم ارز دیگر به صورت زیر است:

اگر دو آزمایش در شرایط یکسان انجام گیرند، یکی در آزمایشگاه ساکن و دیگر در آزمایشگاهی با سرعت یکنواخت، هر دو آزمایش به نتایج یکسان خواهند انجامید.

اگر مجموعه‌ی نتایج همه‌ی آزمایش‌ها را قانون طبیعت بنامیم، بیان سومی از اصل نسبیت عبارت است از:

قانون‌های طبیعت در آزمایشگاه ساکن و در آزمایشگاهی با حرکت یکنواخت، یکسان اند.

اینها سه بیان هم‌ارز از قابل تمیز نبودن حالت سکون از حالت حرکت یکنواخت‌اند؛ هر سه یک چیز را می‌گویند. به اهمیت واژه‌ی "یکنواخت" که به آرامی در هر سه گزاره خزیده است توجه کنید .

اگر آزمایشگاهی، قطاری و یا یک کشتی یکنواخت حرکت نکند، آزمایش می‌تواند آن را مشخص کند . اگر کشتی یکنواخت بر سطح دریای آرامی حرکت کند، کسی که در اتاق کشتی کاملاً محبوس باشد از حرکت آن آگاه نخواهد شد. اما اگر امواج به بدنه‌ی کشتی برخورد کنند و آن را بالا و پائین ببرند، آنگاه از حرکت نایکنواخت آن آگاه می‌شوید.

همچنین اگر قطاری در خط مستقیم با سرعت یکنواخت حرکت کند، رفتار اجسام همان است که اگر قطاردر حال سکون باشد. اما اگر قطار ناگهان به سمت چپ بچرخد، اجسامی که از سقف آویخته‌اند به سوی راست مایل می‌شوند، چایی در فنجان به تلاطم می افتد و مسافر سرپا باید بخود بیاید تا تعادلش را نگهدارد. این رویدادها در قطاری که یکنواخت حرکت می‌کند روی نمی‌دهد. فقط حالت حرکت های راست خط با سرعت ثابت از حالت سکون غیر قابل تمیزند. نکته‌ی دیگری که باید توجه کرد از این قرار است: چون حالت حرکت یکنواخت را نمی‌توان از حالت سکون تمیز داد، هیچ مبنای تجربی برای نامیدن حالت سکون؛ با نام حالت سکون و حالت حرکت یکنواخت با نام حالت حرکت یکنواخت وجود ندارد. فرض کنید آزمایشگاه A در حالت سکون و آزمایشگاه B در حرکت یکنواخت باشد. نتایج همه‌ی آزمایش‌ها در هر دو آزمایشگاه یکسان است. بنابراین، اگر فردی درآزمایشگاه B ادعا کند که او در حالت سکون است و آزمایشگاه A در سوی مخالف بطور یکنواخت حرکت می‌کند؛ هیچ راهی وجود ندارد که به او نشان دهیم اشتباه می‌کند. در واقع، او اشتباه نمی‌کند. این بستگی به قرارداد یا گزینش واژه دارد. هر چه که می‌توانیم درباره‌ی آزمایش انجام گرفته در دو آزمایشگاه بگوئیم، *یکسان* است؛ چه A را در حالت سکون و B را در حالت حرکت یکنواخت بینگاریم یا B را در حالت سکون و A را در حرکتی یکنواخت در سوی مخالف و با همان سرعت فرض کنیم؛ و یا بپنداریم که A در یک سو و B در سوی دیگر با همان سرعت حرکت می‌کنند. هر بیانی با این واقعیت که فاصله‌ی میان آزمایشگاه های A و B با آهنگ ثابتی افزایش می‌یابد، سازگار باشد پذیرفتنی است. بحث این که کدامیک واقعاً در حال سکون است همانند وارد شدن دراین بحث است که قطب جنوب ۱۲۰۰۰ کیلومتر زیر قطب شمال است یا برعکس قطب شمال ۱۲۰۰۰ کیلومتر زیر قطب جنوب است. هر دو گزاره یکسان است و آزادیم یکی را که با قراردادهایمان سازگار باشد انتخاب کنیم؛ این گزینه دلخواه است. این آزادی در تصمیم گیری این که کدام ناظردر حال سکون است به اندازه‌ای مهم است که می‌ارزد تا اصل نسبیت را به گونه‌ی دیگری بیان کنیم تا بر این جنبه تاکید داشته باشد:

هر جسمی که نسبت به جسم دیگر بطور یکنواخت حرکت کند حق دارد خود را در حال سکون و دیگری را با حرکت یکنواخت بپندارد.

از این گزاره که با سه تای دیگر هم ارز است، نام **نسبیت** بر می‌آید. مفهوم گزاره بالا این است که چم (معنی) "در حال سکون بودن" معنی مطلق ندارد و ادعا می‌کند که وقتی می‌گوئیم چیزی در حال سکون است، باید مشخص کنیم که آن چیز نسبت به کدام یک از آزمایشگاه های بیشمار و هم ارز که حرکت یکنواخت دارند؛ در حال سکون است. اگر می‌خواهیم دقیق باشیم نمی‌توانیم بگوئیم که آقای احمدی در حال سکون است بلکه بایسته است که مثلا بگوئیم آقای احمدی یا در حال سکون است یا حرکت یکنواخت دارد؛ بسته به اینکه کدام یک از آزمایشگاه های هم ارز را برمی‌گزینیم و نسبت به آن سرعت آقای احمدی را اندازه می‌گیریم.

می‌توان به جای این جمله‌ی توصیفی کار دیگری کرد. آزمایشگاهی را که در حال سکون یا در حرکت یکنواخت است، آزمایشگاه" لَخت" یا سامانه‌ی" لَخت" و یا چارچوب" لَخت" نامید. در این صورت، به جای اینکه بگوئیم آقای احمدی در حال سکون است، می گوییم آقای احمدی در سامانه‌ی لخت است. یا آقای احمدی در چارچوب لخت است. اگر چه این گزاره گنگ

می‌نماید ولی یادآوری می‌کند که تمایز میان سکون و حرکت یکنواخت دلخواه است. واژه" لخت" یاری می‌کند تا اصل نسبیت را بطور خلاصه تر با گزاره‌ی پنجمی بیان کنیم:

سامانه‌ای که نسبت به یک سامانه‌ی لخت حرکت یکنواخت دارد، خود نیز یک سامانه‌ی لخت است .

به جای سامانه می‌توان چارچوب مرجع یا آزمایشگاه و یا اگر به شخصی می‌اندیشیم که آزمایش انجام می‌دهد، مشاهده کننده را جایگزین کرد. آقای احمدی اگر در یک سامانه‌ی لخت به دور و بر خود نگاه کند او یک مشاهده کننده‌ی لخت است. گزاره پنجم وجود مفهوم مطلق برای در حال سکون بودن را انکار می‌کند. پیش از آنکه این بحث را درباره‌ی نسبیت گالیله به پایان ببریم باید بگوئیم چرا واژه‌ی گنگ لخت برای توصیف چیزی که می‌توان آن را "در حال سکون" یا "حرکت یکنواخت نامید"، برگزیده شده است. انتخاب واژه، بازتاب موضوع هایی است که در پرسشی مانند «دقیقا حالت سکون چیست؟» ظاهر می شود. تا اینجا تنها گفتیم که اگر شخصی در حالت سکون باشد، هر شخص دیگری هم که نسبت به وی در حرکت یکنواخت است می‌تواند خود را در حالت سکون بداند . اما فرض نکردیم که همگی می‌توانیم ، دستکم، یک حالت سکون را مشخص کنیم. در پاسخ به این پرسش که چگونه می‌توان از حالت سکون یا چارچوب لخت تعریف دقیقی کرد، کافی است گفته شود: حالت سکون حالتی است که در آن قانون اول نیوتن صدق می‌کند. این قانون می‌گوید هر جسمی که نیرویی به آن وارد نشود یا حرکت نمی‌کند و یا با سرعت ثابت در جهت خاصی حرکت می‌کند . بنابراین شخصی که در چارچوب لخت قرار دارد اگر نیرویی به او وارد نشود، آن شخص یا ساکن است یا بطور یکنواخت در راستای معینی حرکت (راست خط) می‌کند. با آزمایش می‌توان گفت که آیا آزمایشگاه حرکت نایکنواخت دارد یا نه(مانند حرکت روی مسیر خمیده و یا با سرعت متغیر) اما اگر آزمایش بگوید که آزمایشگاه حرکت یکنواخت دارد، یعنی با سرعت ثابت در راستای خط راست حرکت می‌کند، دیگر آزمایشی وجود ندارد که اندازه سرعت را معین کند ؛ یعنی بین صفر، ۱ m/s یا ۵۰۰ m/s نمی توان تمایز قایل شد. چارچوب مشاهده‌کننده‌های بدون شتاب چارچوب های لخت اند.

هنوز نگفته‌ایم که چگونه می‌توان گفت که مشاهده پذیر شتاب دارد یا نه. برای تمیز دادن چارچوب لخت از بقیه چارچوب ها به معیاری نیاز داریم. به طور رسمی می‌توان چارچوبی را لخت نامید که هر جسم منزوی، جسمی که بسیار دور از هر ماده‌ای باشد، نسبت به آن چارچوب با سرعت یکنواخت حرکت کند. این تعریف، البته، آرمانی است زیرا در عمل هرگز نمی‌توان بینهایت از بقیه‌ی ماده دور شد. با این وجود، برای مقاصد عملی چارچوب لخت آن چارچوبی است که جهت‌گیری آن نسبت به ستاره‌های ثابت معین باشد و در آن، خورشید با سرعت یکنواخت حرکت کند. فرض بنیادی فیزیک کلاسیک این است که یک چنین چارچوبی وجود دارد. در حقیقت این فرض و تعریف چارچوب لخت مفهوم واقعی قانون نخست نیوتن است. (یعنی ، هر جسمی که به آن نیرویی وارد نشود حرکتش یکنواخت راست خط است).

۱-۳ دستگاه های مختصات :

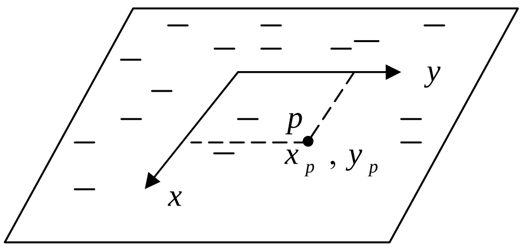
فیزیک علم بررسی پدیده‌هایی است که در عالم مشاهده می‌شوند. برای این که پدیده‌ها را با زبان دقیق ریاضی توصیف کنیم به دستگاه مختصات نیاز داریم. دستگاه مختصات ابزار ریاضی است که به وسیله‌ی آن موقعیت مکانی و سرعت یا پیکربندی سامانه‌ی فیزیکی را مشخص می‌کنیم. در خیلی از مسئله‌های مکانیک، باید پیکربندی سامانه‌ی مورد بررسی را به صورت تابعی از زمان بدانیم . اگر سامانه شامل بیش از یک ذره باشد؛ مسئله‌ی عمومی یافتن متغیرهای مستقل مکان و سرعت‌های همه‌ی ذره‌های سامانه بر حسب تابعی از زمان خواهد بود. با این حال، در عمل به دست آوردن همه‌ی این آگاهی‌ها لازم نیست؛ بلکه تعداد بسیارکم‌تری از آنها کافی است. مثلا اگر بخواهیم تغییر سرعت یکی از ذره‌ها را دراثر جابه‌جایی کل سامانه در فضا بدانیم، نیازی به دانستن همه‌ی متغیرهای سامانه نیست . برای حل مسئله‌هایی از این دست، نخست لازم است دستگاه مختصات

مناسبی را انتخاب کرد. در گزینش مختصات مناسب برای یک مسئله، بهتر است که کمترین تعداد مختصات لازم برای حرکت ذره در نظر گرفته شود. برای نمونه، اگر ذره‌ای آزاد باشد تا بر روی سطحی مانند سطح میز، حرکت کند روشن است که تنها دو مختصات لازم است. می‌توان صفحه‌ی روی میز را مانند شکل(۱-۱)، صفحه‌ی xy تصور کرد. اگر در لحظه‌ی معینی ذره در نقطه‌ی p باشد، مختصاتش x_p و y_p است. در این مثال، سامانه ما تنها یک ذره دارد و مسیر حرکت ذره به سطح میز محدود است. دانستن وابستگی به زمان این مختصات، وضعیت حرکتی ذره را کاملاً مشخص می‌کند. اگر سامانه از دو ذره تشکیل شود و هر دو مقید به حرکت بر روی یک سطح باشند، آنگاه برای مشخص کردن پیکربندی سامانه به چهار مختصات، یعنی x و y هر دو ذره، نیاز داریم. برداشتن قیدی که مسیر ذره را به صفحه محدود می‌کند نیازمند افزودن مختصات z هر ذره است. برای ذره‌ای که در یک بعد یا روی یک خط راست حرکت می‌کند، دانستن یک مختصات، مانند x کافی است. برای مشخص کردن حرکت این ذره، کافی است مختصات آن ذره را برحسب زمان بدانیم. پس باید توابع زیر را برای بررسی حرکت یک ذره بدانیم:

در یک بعد $\quad x(t)$

در دو بعد $\quad x(t), y(t)$

درسه بعد $\quad x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)$

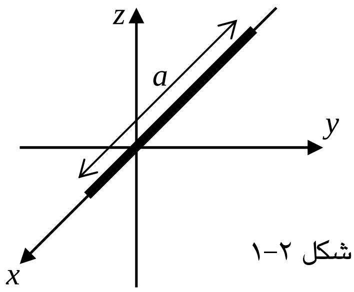


شکل ۱-۱

بنابراین، بنیادی‌ترین مسئله‌ی مکانیک کلاسیک، پروراندن شیوه‌هایی است که توابعی از نوع بالا را برای ما تعیین کند. این توابع به نوبه‌ی خود مکان جسم را در هر لحظه‌ی زمان به دست می‌دهند. مفهوم فیزیکی توابعی مانند $x(t)$ در قاعده‌هایی نهفته است که چگونگی اندازه‌گیری مختصات x ذره را در زمان t توصیف می‌کند.
هر دستگاه یا سامانه‌ی مختصات چهار جزء بنیادی دارد که عبارت اند از (۱) انتخاب مبداء، (۲) انتخاب محورها ، (۳) انتخاب جهت برای هر محور و(٤) انتخاب بردار یکه برای هر محور.
سودمندترین چارچوب های مختصات در فیزیک که بیشتر مورد استفاده قرار می گیرند، دستگاه‌های مختصات کارتزی، استوانه‌ای و کروی اند. دلیل سودمندی آن‌ها در شکل توصیف عنصرهای جزء طول، سطح و حجم است که کلید انجام بسیاری از انتگرال‌گیری‌ها در مکانیک کلاسیک اند. نمونه‌هایی از آنها را در فصل ۹ و فصل ۱۰ در محاسبه‌ی مرکزجرم و گشتاور لختی خواهیم دید.

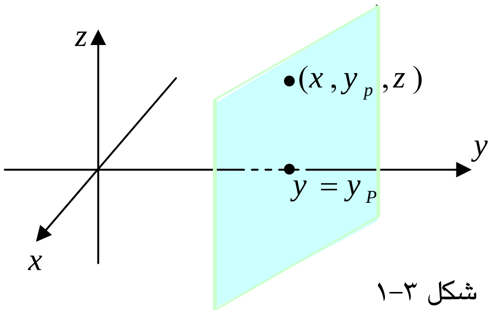
۱-۳-۱ مختصات کارتزی

این دستگاه مختصات مجموعه‌ای از محورهای متعامد است که در یک نقطه مانند O همدیگر را قطع می‌کنند. نقطه‌ی O را مبداء می‌نامند. چون ما در دنیای سه بعدی زندگی می‌کنیم، به این خاطر از سه محور استفاده خواهیم کرد. اینک ببینیم چهار جزء اصلی این سامانه را چگونه باید برگزید.
(۱) **انتخاب محور**: انتخاب مبداء مختصات کاملا اختیاری است. می‌توان آن را هر نقطه‌ای در فضا برگزید؛ چون هیچ نقطه‌ی فضای تهی به نقطه‌ی دیگر آن برتری ندارد. گزینه‌ی مبداء ممکن است نقطه‌ی خاصی در جسم مورد بررسی باشد. برای مثال، ممکن است وسط یک قطعه سیم راست را مبداء انتخاب کرد.
(۲) **انتخاب محورها**: آشناترین مجموعه‌ی محورها، محور های کارتزی اند. یعنی محور x ،محور y و محور z که برهم عمودند و در مبداء همدیگر را قطع می‌کنند. ممکن است راستای سیم راست مثال بالا را همانند شکل (۲-۱) محور x انتخاب



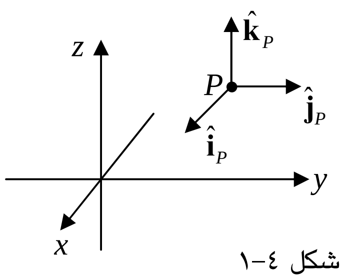
شکل ۱-۲

کنیم. روشن است که هر راستای دیگری در فضا را می‌توان محور x برگزید. با انتخاب یک محور، دو محور دیگر کاملا مشخص می‌شوند. در فضای سه بعدی دنیای ما، به هر نقطه‌ای مانند P در فضا ، سه مقدار (x_p, y_p, z_p) نسبت داده می‌شود که مختصات کارتزی نقطه‌ی P اند. دامنه‌ی این مقدارها عبارت اند از $-\infty < x_p < +\infty$ ، $-\infty < y_p < +\infty$ ، $-\infty < z_p < +\infty$. مجموعه‌ی نقاط فضای S که مختصات y آن ها برابرند سطح **هم‌تراز** می‌سازند. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط فضا با $y = y_p$ عبارت است از $S_{y_P} = \{(x, y, x)\ ;\ y = y_P\}$. این مجموعه **صفحه‌ی هم تراز** برای y_p است که همان صفحه‌ی $x - z$ است و در شکل (۱-۳) نشان داده شده است. در واقع، مختصات y هر نقطه‌ای توصیف صفحه‌ی همه‌ی نقاطی است که به محور y عمود است.



شکل ۱-۳

(۳) **انتخاب جهت های مثبت**: گزینه‌ی بعدی انتخاب جهت مثبت برای هر محور است. معمولا در مختصات کارتزی صفحه‌ی $z - y$ را صفحه کاغذ انتخاب می‌کنند. محور y را محور افقی و جهت مثبت آن را از چپ به راست برمی‌گزینند. محور عمودی را محور z و جهت مثبت آن را از پایین به بالا انتخاب می‌کنند. در مسئله های فیزیک آزادیم محورها و جهت‌های مثبت را هر طور که برای مسئله مناسب باشد انتخاب کنیم.



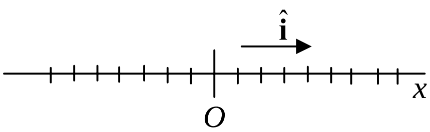
شکل ۱-٤

(۴) **انتهاب بردارهای یکه**: به هر نقطه‌ی P در فضا برابر شکل (۱-٤) سه بردار تک جهت $(\hat{\mathbf{i}}_P, \hat{\mathbf{j}}_P, \hat{\mathbf{k}}_P)$ نسبت می دهیم.

۱-۴ حرکت در یک بعد

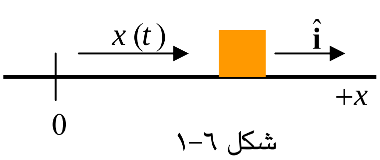
۱-۴-۱ مکان، بازه ی زمان ، جابه‌جایی

برای بررسی کمی حرکت و توصیف فضا و زمان به یک سامانه‌ی ریاضی، **چارچوب مرجع**، نیاز است. شناساندن مفهوم های فیزیکی مکان، سرعت و شتاب و توصیف ریاضی دقیق آن‌ها پس از انتخاب چارچوب مرجع شدنی است. در شکل (۱-٥) مختصات کارتزی یک بعدی با بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{i}}$ در راستای محور x نشان داده شده است.



شکل ۱-٥

مکان : جسمی را در نظر بگیرید که در یک بعد حرکت می‌کند. می‌توان آن را به صورت یک جرم نقطه‌ای پنداشت.اگر بخواهید واقع بین باشید، مرکزجرم جسم را که یک نقطه است در نظر بگیرید. مختصات مکان آن را *نسبت به مبداء اختیاری* با $x(t)$ نشان دهید. در شکل (۱-٦) چنین جسمی نشان داده شده است. مختصات مکان، تابعی از زمان است و بسته به این که مکان جسم کجاست، می‌تواند مثبت، صفر یا منفی باشد. مکان هم جهت دارد و هم اندازه و بنابراین، یک کمیت برداری است. در یکاهای علمی ، یکای مکان متر (m) است.



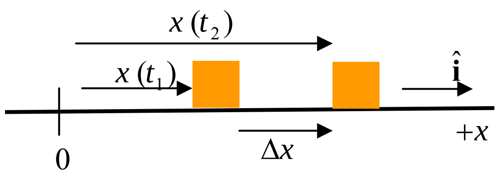
شکل ۱-٦

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱-۱)$$

مختصات مکان جسم را در زمان $t=0$ با نماد $x_0 \equiv x(t=0)$ نشان خواهیم داد.

بازه‌ی زمان: بازه‌ی بسته‌ی $[t_1, t_2]$ را با $\Delta t \equiv t_2 - t_1$ تعریف می‌کنیم و به آن بازه‌ی زمان می‌گوییم. دردستگاه یکاهای SI، یکای بازه‌ی زمان ثانیه (s) است.

جابه‌جایی: تغییر مکان جسم بین زمان های t_1 و t_2 عبارت است از



شکل ۷−۱

$$\Delta \mathbf{x} \equiv \left(x(t_2) - x(t_1)\right)\hat{\mathbf{i}} \equiv \Delta x(t)\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱−۲)$$

که *جابه‌جایی بین زمان های* t_1 و t_2 نامیده می شود. جابه‌جایی یک کمیت برداری است و در شکل (۷−۱) نشان داده شده است.

۲−۴−۱ سرعت

وقتی حرکت جسمی توصیف می‌شود، از واژه‌ی عمومی "سرعت" و گاهی هم از "تندی" استفاده می‌شود. در توصیف ریاضی حرکت باید این واژه‌ها به دقت تعریف شوند. در اینجا نخست کمیت‌های میانگین را برای بازه‌ی محدود زمان تعریف می‌کنیم و سپس وضعیتی را در نظر می‌گیریم که بازه‌ی زمانی بسیار کوچک باشد و به صفر میل کند. این کار ما را به مفهوم ریاضی سرعت رهنمون خواهد شد و خواهیم دید که مشتق مکان نسبت به زمان است.

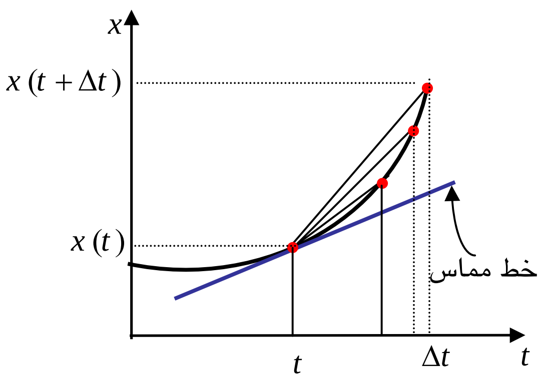
تعریف: **سرعت میانگین** مولفه‌ی سرعت میانگین، $\bar{v}_x$، برای بازه‌ی زمان Δt عبارت است از جابه‌جایی Δx تقسیم بر بازه‌ی زمان Δt: $\bar{v}_x \equiv \Delta x / \Delta t$. در سامانه‌ی یکاهای SI، یکای سرعت متر برثانیه $(\mathrm{m \cdot s^{-1}})$ است. بنابراین، بردار سرعت میانگین را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\bar{\mathbf{v}}(t) \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} = \bar{v}_x(t)\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱−۳)$$

سرعت لحظه‌ای: جسمی را در نظر بگیرید که در یک بعد حرکت می‌کند. مختصات مکان آن را با $x(t)$ و مکان اولیه‌ی آن را در زمان $t=0$ با x_0 نشان دهید. بازه‌ی زمانی $[t, t+\Delta t]$ را در نظر بگیرید. سرعت میانگین برای این بازه‌ی زمان Δt شیب خطی است که مکان‌های $(t, x(t))$ و $(t+\Delta t, x(t+\Delta t))$ را به هم وصل می‌کند. شیب این خط تغییر مکان تقسیم بر تغییر زمان

است و داریم

$$\bar{v}_x \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \qquad (۱−٤)$$



شکل ۸−۱

اگر بازه‌ی زمان Δt را کوتاه تر کنیم سرعت میانگین چگونه تغییر خواهد کرد؟ با توجه به شکل (۸−۱) دیده می‌شودکه شیب خطی که نقاط $(t, x(t))$ و $(t, x(t+\Delta t))$ را به هم وصل می‌کند ، به شیب خط مماس به خم مسیر $x(t)$ در زمان t میل می‌کند. برای این که مقدار شیب را برای هر زمان بتوان تعریف کرد، بازه‌ی زمان $[t, t+\Delta t]$ را انتخاب می‌کنیم. به ازای هر مقدار مختلف Δt، سرعت میانگین را حساب می‌کنیم. با این کار دنباله‌ای از سرعت های میانگین خواهیم داشت. مقدار حدی این دنباله، مولفه‌ی x سرعت لحظه‌ای در زمان t است.

تعریف: **سرعت لحظه‌ای**: شیب خطی که در زمان t به خم مکان نسبت به زمان مماس است، *مولفه‌ی x سرعت لحظه‌ای* در

زمان t است :

$$v_x(t) \equiv \ell im_{\Delta t \to 0} \bar{v}_x = \ell im_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \ell im_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt} = \dot{x} \qquad (۱-۵)$$

سرعت آهنگ تغییر مکان جسم نسبت به زمان است. بنابراین، بردار سرعت لحظه‌ای عبارت است از

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)\hat{\mathbf{i}} \qquad (۱-٦)$$

به همین ترتیب برای مولفه‌های دیگر سرعت داریم

$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad , \quad v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt} \qquad (۱-۷)$$

مثال ۱-۱ جسمی را در نظر بگیرید که معادله‌ی مکان آن در امتداد محور x با $x(t) = x_0 + bt^2/2$ داده شد است که در آن x_0 مکان جسم در زمان $t = 0$ است. مولفه‌ی x سرعت جسم را به دست آورید.

حل: برای محاسبه‌ی مولفه‌ی x سرعت، نخست باید مکان جسم را در زمان $t + \Delta t$ حساب کنیم. داریم

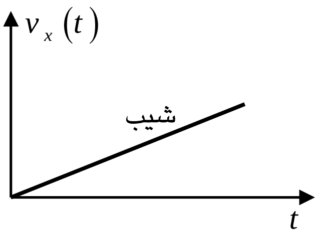
$$x(t+\Delta t) = x_0 + \frac{1}{2}b(t+\Delta t)^2 = x_0 + \frac{1}{2}b(t^2 + 2t\,\Delta t + \Delta t^2) \qquad (۱-۸)$$

سرعت لحظه‌ای عبارت است از

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \ell im_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \ell im_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= \ell im_{\Delta t \to 0} \frac{\left(x_0 + \frac{1}{2}b(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)\right) - (x_0 + \frac{1}{2}bt^2)}{\Delta t} \\ &= \ell im_{\Delta t \to 0}\left(bt + \frac{1}{2}b\Delta t\right) = bt \end{aligned} \qquad (۱-۹)$$

در شکل (۹-۱) سرعت لحظه‌ای $v_x(t)$ برحسب تابعی از زمان t رسم شده است.

۳-۴-۱ شتاب



شکل ۹-۱

تغییر سرعت نسبت به زمان شتاب است. محاسبه‌ی بالا را می‌توان برای شتاب هم تکرار کرد. نخست تغییر سرعت لحظه‌ای را در بازه‌ی زمان Δt حساب می‌کنیم و سپس حد آن را برای $\Delta t \to 0$ به دست می‌آوریم .

شتاب میانگین: شتاب کمیتی است که تغییر سرعت در بازه‌ی زمان معینی را اندازه می‌گیرد. فرض کنید در بازه‌ی Δt سرعت جسم تعییر می‌کند: $\Delta\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)$. تغییر در مولفه‌ی x سرعت، Δv_x در بازه‌ی زمان $[t, t+\Delta t]$ عبارت است از

$$\Delta v_x = v_x(t+\Delta t) - v_x(t) \qquad (۱-۱۰)$$

تعریف: **شتاب میانگین** *مولفه‌ی* x *شتاب میانگین* برای بازه‌ی زمان Δt عبارت است از

$$\bar{a}_x \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{(v_x(t+\Delta t)) - v_x(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad (۱-۱۱)$$

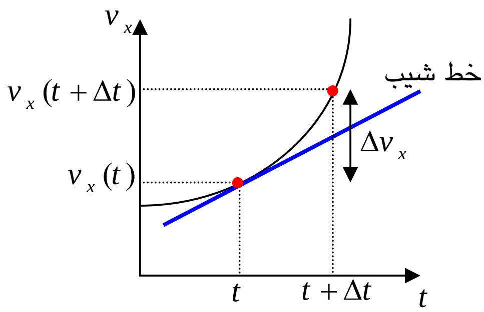
یکای شتاب در سامانه‌ی یکاهای SI متر برمجذور ثانیه $\left(\mathrm{m\cdot s^{-2}}\right)$ است.

شتاب لحظه‌ای: در نمودار سرعت برحسب زمان، شتاب میانگین برای بازه‌ی زمان Δt، شیب خطی است که دو نقطه‌ی $(t, v_x(t))$ و $(t+\Delta t, v_x(t+\Delta t))$ را به هم وصل می‌کند. مانند حالت سرعت لحظه‌ای، برای تعیین مولفه‌ی x شتاب لحظه‌ای در زمان t هم از شیب خط مماس بر منحنی سرعت v_x برحسب زمان استفاده می‌کنیم.

$$a_x(t) \equiv \ell im_{\Delta t\to 0}\bar{a}_x = \ell im_{\Delta t\to 0}\frac{\left(v_x(t+\Delta t)-v_x(t)\right)}{\Delta t} = \ell im_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \equiv \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x \qquad (۱-۱۲)$$

بنابراین ، بردار شتاب لحظه‌ای عبارت است از $\mathbf{a}(t) = a_x(t)\hat{\mathbf{i}}$. در شکل (۱۰-۱) این ساختار هندسی نشان داده شده است. چون سرعت مشتق تابع مکان نسبت به زمان است، مولفه‌ی x شتاب هم مشتق دوم تابع مکان نسبت به زمان است. بنابراین،

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (۱-۱۳)$$



شکل ۱۰-۱

به همین ترتیب می‌توان مولفه‌های a_y, a_z شتاب را تعریف کرد که آهنگ تغییر مولفه های سرعت نسبت به زمان‌اند:

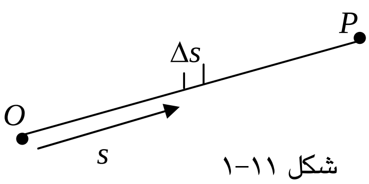
$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x \equiv \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y &= \dot{v}_y \equiv \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z &= \dot{v}_z \equiv \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \qquad (۱-۱٤)$$

در اینجا از مختصات دکارتی یا کارتزی استفاده کردیم؛ اما برای بسیاری از مسایل، شاید مختصات دیگری مانند مختصات قطبی، کروی و استوانه‌ای سودمند باشد. هرگاه از مختصات غیر کارتزی استفاده شود روابط مربوط به مؤلفه‌های سرعت‌ها و شتاب‌ها باید حساب شوند. ما در آینده به این موضوع خواهیم پرداخت.

برای توصیف مکان ذره در دو یا سه بعد بهره‌گیری از مفهوم بردار برای نمایش مکان، سرعت و شتاب بسیار سودمند است. برای نمونه، مکان یک ذره را می‌توان با

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}} = |\mathbf{r}|\,\hat{r} \qquad (۱-۱۵)$$

نشان داد که در آن $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ بردارهای یکه در راستای محورهای x, y, z اند و $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه در راستای بردار $\mathbf{r}$ است و به صورت $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ تعریف می‌شود. توصیف جامع ویژگی‌های بردارها به فصل ۲ واگذار شده است.



شکل ۱-۱۱

نکته: ذره‌ای را در نظر بگیرید که بر روی خط راستی از نقطه‌ی O به نقطه‌ی P تغییر مکان می‌دهد. این ذره در زمان t مسافت s را از نقطه‌ی O بر روی مسیر راست خط شکل (۱-۱۱) می پیماید. در بازه‌ی زمان بعدی Δt ذره مسافت Δs را می پیماید. کمیت $\Delta s/\Delta t$ سرعت میانگین (میانگین زمانی) ذره در بازه‌ی Δt است.

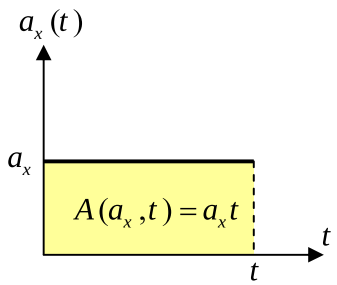
گاهی مناسب‌تر است که واژه‌های سرعت میانگین و شتاب میانگین را به عنوان میانگین زمانی این کمیت‌ها، برای زمان کل T که ذره از نقطه‌ی O به نقطه‌ی P می‌رود به کار ببریم. این میانگین‌ها عبارت اند از:

$$\bar{a}_s = \frac{v_P - v_0}{T} \quad \text{و} \quad \bar{v}_s = \frac{OP}{T} \qquad (۱-۱٦)$$

که در آنها خط تیره در بالای v_s و a_s به معنی میانگین زمانی است. $v_\circ$ سرعت در نقطه‌ی O و در راستای s (سرعت اولیه) است. v_P سرعت در نقطه‌ی P ودر راستای s است. واژه‌های سرعت یکنواخت و شتاب یکنواخت یعنی این که اندازه و جهت کمیت‌های سرعت و شتاب در تمام طول حرکت ثابت اند.

۵ ـ ۱ حرکت باشتاب ثابت در یک بعد

جسمی را در نظر بگیرید که در بازه‌ی زمان $\Delta t = [\circ, t]$ با شتاب ثابت حرکت می‌کند. وقتی شتاب a_x ثابت باشد، شتاب میانگین و شتاب لحظه‌ای با هم برابر می‌شوند. اگر مولفه‌ی x سرعت را در زمان $t=\circ$ با $v_{x,0} \equiv v_x(t=t=\circ)$ نشان دهیم آنگاه مولفه‌ی x شتاب عبارت است از



شکل ۱-۱۲

$$a_x = \bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x(t) - v_{x,\circ}}{t} \qquad (۱-۱۷)$$

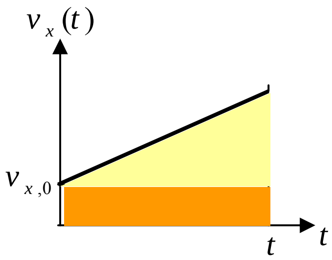
بنابراین، سرعت با تابع زیر برحسب زمان داده می‌شود

$$v_x(t) = v_{x,\circ} + a_x t \qquad (۱-۱۸)$$

پس، اگر شتاب ثابت باشد، سرعت تابعی خطی (یعنی تابعی از مرتبه‌ی اول نسبت به زمان) از زمان است.

سرعت: **سطح زیر منحنی شتاب برحسب تابعی از زمان است.** در شکل (۱-۱۲) مولفه‌ی x شتاب برحسب زمان برای بازه‌ی زمان $\Delta t = t - \circ$ رسم شده است. سطح زیر این خم $A(a_x,t) \equiv a_x t$ است. با استفاده از تعریف شتاب میانگین در رابطه‌ی (۱-۱۲) دیده می شود که این سطح عبارت است از $A(a_x,t) \equiv a_x t = \Delta v_x = v_x(t) - v_{x,0}$.

جابه‌جایی: **سطح زیر منحنی سرعت بر حسب تابعی از زمان است.** در شکل (۱-۱۳) خم سرعت بر حسب زمان رسم شده است. سطح زیر این خم در بازه‌ی زمان $[\circ, t]$ یک ذوزنقه‌ی نامنظم است که از یک مستطیل و یک مثلث تشکیل شده است. مساحت آن عبارت است از $A(v_x,t) = v_{x,\circ}t + (1/2)\left(v_x(t) - v_{x,\circ}\right)t$. اگر در این رابطه به جای سرعت، رابطه‌ی (۱-۱۸) را جایگزین کنیم، خواهیم داشت



شکل ۱-۱۳

$$A(v_x,t) = v_{x,\circ}t + (۱/۲)\left(v_{x,\circ} + a_x t - v_{x,\circ}\right)t = v_{x,\circ}t + (۱/۲)a_x t^۲ \qquad (۱-۱۹)$$

از سوی دیگر، می‌توان سرعت اولیه و سرعت نهایی را باهم جمع و سپس به دو تقسیم کرد و سرعت میانگین را به دست آورد. داریم

$$\bar{v}_x = \frac{۱}{۲}(v_x(t) + v_{x,\circ}) \qquad (۱-۲۰)$$

این روش تعیین سرعت میانگین با تعریف رابطه‌ی (۱-۳) فرق دارد. اما وقتی شتاب در بازه‌ی زمان معینی ثابت باشد، هر دو به یک نتیجه می‌انجامد. اگر رابطه‌ی (۱-۱۸) را به جای $v_x(t)$ در رابطه‌ی (۱-۲۰) قرار دهیم، به دست می‌آید

$$\bar{v}_x = \frac{۱}{۲}(v_x(t) + v_{x,\circ}) = \frac{۱}{۲}((v_{x,\circ} + a_x t) + v_{x,\circ}) = v_{x,\circ} + \frac{۱}{۲}a_x t \qquad (۱-۲۱)$$

حالا به یاد بیاورید که سرعت میانگین یعنی جابه‌جایی تقسیم بر زمان (توجه کنید که اینک از تعریفی برای سرعت میانگین استفاده می‌کنیم که همواره برقرار است، چه شتاب ثابت باشد و چه ثابت نباشد) است و برابر است با

$$\Delta x \equiv x(t) - x_\circ = \bar{v}_x t \qquad (۱-۲۲)$$

اگر در این رابطه، به جای $\bar{v}_x$ سمت راست رابطه‌ی (۲۱-۱) را جایگزین کنیم، جابه‌جایی به صورت زیر درمی‌آید

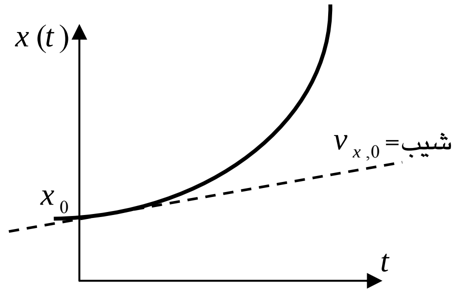
$$\Delta x \equiv x(t) - x_\circ = \bar{v}_x t = v_{x,\circ} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad (1\text{-}23)$$

مقایسه‌ی این رابطه و رابطه‌ی (۱۹-۱) نشان می‌دهد که جابه‌جایی با سطح زیر منحنیِ مولفه‌ی x سرعت برحسب زمان برابر است :

$$\Delta x \equiv x(t) - x_\circ = \bar{v}_x t = v_{x,\circ} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = A(v_x, t) \qquad (1\text{-}24)$$

بنابراین ، می‌توان رابطه‌ی (۲٤-۱) را حل و مکان را به صورت تابعی از زمان به دست آورد. داریم

$$x(t) = x_\circ + v_{x,\circ} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad (1\text{-}25)$$



شکل ۱٤-۱

در شکل (۱٤-۱) این تابع رسم شده است. توجه بکنید که برای تعیین تابع مکان در حرکت یک بعدی به دو ثابت $x_\circ$ و $v_{x,\circ}$ نیاز داریم. در واقع، این حالت خاصی از یک قضیه‌ی عمومی است. قضیه‌ی عمومی می‌گوید مسیر حرکت با دانستن دو ثابت برای هر درجه‌ی آزادی (یعنی تعداد مختصات لازم برای توصیف سامانه‌ی فیزیکی) کاملا و به طور یگانه مشخص می‌شود. چون ما حرکت را در یک بعد در نظر گرفتیم، مسئله‌ی ما تنها یک درجه‌ی آزادی دارد و بنابراین، دو ثابت بالا معادله‌ی مسیر یا مکان جسم را کاملا مشخص می‌کند.

گاهی هدف مسئله یافتن سرعت نهایی جسمی است که مسافت x با شتاب ثابت پیموده است. برای مثال، فرض کنید توپی از حالت سکون از بالای ساختمانی رها می‌شود. می‌خواهیم سرعت آن را پس از آنکه به اندازه‌ی x سقوط کرد، بیابیم. برای این کار می‌توان نخست از رابطه‌ی $x = v_{x,\circ} + (1/2) a_x t^2$ (با $v_{x,\circ} = 0$ در این مثال) زمان سقوط را حساب کرد و سپس آن را در $v(t) = v_{x,\circ} + a_x t$ قرار داد تا سرعت در آن زمان به دست آید. اما اگر نخواهیم زمان سقوط را بدانیم، می‌توان بین رابطه‌های (۱۸-۱) و (۲۵-۱) زمان t را حذف و رابطه‌ای بین x، v و a به دست آورد. از رابطه‌ی (۱۸-۱) داریم $t = (v_x(t) - v_{x,0})/a$ که اگر در رابطه‌ی (۲۵-۱) قرار دهیم، پس از ساده کردن آن خواهیم داشت

$$v_x^2 = v_{x,\circ}^2 + 2a_x (x - x_\circ) \qquad (1\text{-}26)$$

مثال۲ -۱ اتومبیلی با سرعت $30\ \mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند. راننده ترمز می‌کند تا به ایستد. اگر ترمزکردن شتاب $-5\ \mathrm{m/s^2}$ به وجود آورد (علامت منفی یعنی اتوموبیل واشتابیده می‌شود). اتوموبیل چه مسافتی را پس از ترمز کردن می‌پیماید تا بایستد؟

حل: در این مثال جهت اولیه‌ی حرکت را جهت مثبت برگزیدیم. بنابراین، مسافتی را که اتوموبیل پس از اعمال ترمزمی‌پیماید تا بایستد، هم مثبت است؛ اما شتاب منفی است و سرعت نهایی صفر است. پس، اگر در رابطه‌ی (۲٦-۱) قرار دهیم $v_x = 0$ و $v_{x,\circ} = 30\ \mathrm{m/s}$، خواهیم داشت: $(30\,\mathrm{m/s})^2 + 2(-5\,\mathrm{m/s^2})(x - x_\circ) = 0 \;\Rightarrow\; (x - x_\circ) = 90\,\mathrm{m}$. توجه کنید که این مسافت چشمگیری است. عاملی که واشتابی را به وجود می‌آورد نیروی اصطکاک (فصل ۳ را ببینید) بین چرخ های اتوموبیل و جاده است. در روزهای بارانی این نیرو کمتر می‌شود و شتاب بازدارنده‌ای که ایجاد می‌شود از $5\ \mathrm{m/s^2}$ هم کمتر می‌شود.

تاکنون آموختیم که اگر تابع مکان جسمی را بدانیم، می‌توان توابع سرعت و شتاب را با مشتق گیری نسبت به زمان از آن به

دست آورد. از رابطه‌ی (۵-۱) معادله‌ی سرعت به دست می‌آید و رابطه‌ی (۱۳-۱) می‌گوید اگر از تابع مکان دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم، تابع شتاب به دست خواهد آمد. همان طور که دیدید، این کار با مشتق گرفتن از تابع انجام می‌گیرد.

می‌توان از تعریف شتاب آغاز کرد و با ریاضیات مربوط به انتگرال‌گیری دوباره همه‌ی معادله‌های مربوط به حرکت را به دست آورد. می‌خواهیم شیوه‌ی این کار را نشان دهیم. انتگرال‌گیری به یافتن سطح زیر یک منحنی ارتباط دارد و به جزییات آن نخواهیم پرداخت. فرض می‌کنیم که خواننده با مقدمات انتگرال‌گیری آشناست.

رابطه‌ای که شتاب را تعریف می‌کند $a = dv/dt$ است. می‌توان دو طرف آن را در dt ضرب کرد و سپس از هر دو طرف انتگرال گرفت. خواهیم داشت

$$\int dv = \int a\,dt \quad \Rightarrow \quad v = \int a\,dt \ + C_1 \tag{۲۷-۱}$$

که در آن C_1 ثابت انتگرال‌گیری است و مقدارش به شرایط اولیه‌ی مسئله بستگی دارد. در حالت خاص که شتاب مقدار ثابتی است، رابطه‌ی بالا به $v = at + C_1$ کاهش می‌یابد. اگر شرایط اولیه‌ی مسئله چنان فراهم شود که در زمان $t = 0$ سرعت جسم مقدار معین $v\,(t=0) = v_{0,x}$ باشد و آن را در رابطه‌ی بالا جاگذاری کنیم، خواهیم داشت $v_{x,0} = a(0) + C_1$ یا $C_1 = v_{x,0}$.

بنابراین ، معادله‌ی سینماتیک زیر به دست می‌آید.

$$v\,(t) = v_{x,0} + at \qquad \text{(شتاب ثابت)} \tag{۲۸-۱}$$

حال معادله‌ای را در نظر بگیرید که سرعت را تعریف می‌کند: $v = dx/dt$. دو طرف آن را در dt ضرب کنید و از هر دو طرف انتگرال بگیرید. خواهیم داشت

$$\int dx = \int v\ dt \ + C_2 \tag{۲۹-۱}$$

در اینجا هم C_2 ثابت انتگرال‌گیری است. اما $v\,(t) = v_{x,0} + at$ است، اگر آن را در رابطه‌ی (۲۹-۱) قرار دهیم، رابطه‌ی (۲۹-۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$x = \int (v_{x,0} + at)dt + C_2 = \int v_{x,0} dt + \int at\ dt + C_2 \ \Rightarrow \ x = v_{x,0} t + \frac{1}{2} a t^2 + C_2 \tag{۳۰-۱}$$

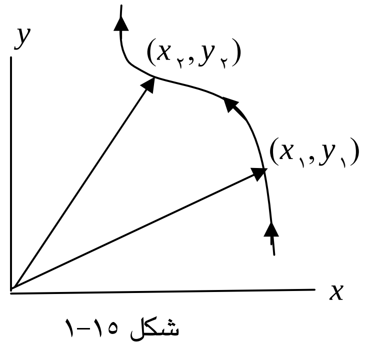
برای یافتن C_2 باز هم از شرایط اولیه‌ی مسئله استفاده می‌کنیم. فرض کنید در زمان $t = 0$ جسم در فاصله‌ی $x\,(t=0) = x_0$ از مبداء مختصات است. آنگاه، از رابطه‌ی (۳۰-۱) خواهیم داشت $C_2 = x_0$ و در نتیجه رابطه‌ی (۳۰-۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$x = x_0 + v_{x,0} t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad \text{(شتاب ثابت)} \tag{۳۱-۱}$$

۱-۶ بردارهای مکان، سرعت و شتاب : حالت عمومی

ذره‌ای را در نظر بگیرید که در یک صفحه حرکت می‌کند. با گذشت زمان، ذره مسیری همانند شکل (۱۵-۱) را می‌پیماید. فرض کنید مختصات مکان ذره را به صورت تابعی از زمان می‌شناسیم. اگر در زمان t_1 مکان لحظه‌ای ذره $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$ یا $\mathbf{r}\,(t_1) = [x\,(t_1),\ y\,(t_1)]$ و در زمان t_2 ذره در مکان $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$ باشد. جابه‌جایی ذره در فاصله‌ی میان t_1 و t_2 عبارت است از

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1) \tag{۳۲-۱}$$



شکل ۱۵-۱

با در نظر گرفتن مکان ذره در زمان‌های دلخواه t و $t + \Delta t$ می‌توان رابطه‌ی (۳۲-۱)

را عمومی‌تر نوشت. جابه‌جایی ذره بین این دو زمان در شکل (۱-۱۶) نشان داده شده است و عبارت است از

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) \qquad (۱-۳۳)$$

رابطه‌ی برداری (۱-۳۳) با دو رابطه اسکالر زیر هم ارز است.

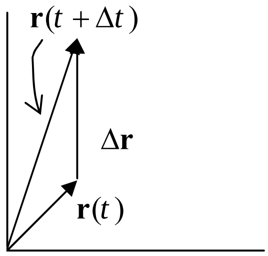
$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t), \qquad \Delta y = y(t+\Delta t) - y(t) \qquad (۱-۳۴)$$

بردار سرعت ذره روی این مسیر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{V} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (۱-۳۵)$$

که با دو معادله‌ی اسکالر زیر هم ارز است:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} \qquad (۱-۳۶)$$



(شکل۱-۱۶)

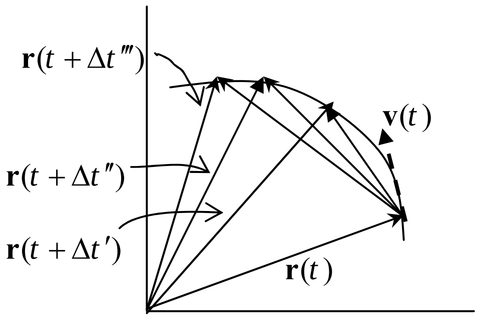
تعمیم آن به سه بعد بدیهی است. مؤلفه‌ی سوم عبارت است از:

$$v_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} \qquad (۱-۳۷)$$

پس، می‌بینیم که با نمادگذاری برداری می‌توان حرکت در سه بعد را با یک رابطه توصیف کرد؛ نتیجه‌ای که در پی آن بودیم. چون $\mathbf{r}$ بردار است می‌توان آن را برحسب مؤلفه‌هایش $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ نوشت و با یک مشتق گیری ساده مؤلفه‌های بردار سرعت را به دست آورد.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} \qquad (۱-۳۸)$$

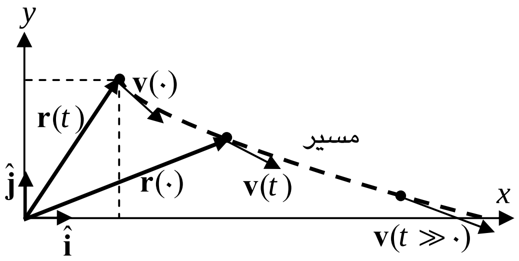
(**توجه**: چون جهت و اندازه‌ی بردارهای یکه در مختصات کارتزی تغییر نمی‌کند، $d\hat{\mathbf{i}}/dt$ و غیره را ننوشتیم. آنها صفرند. در مختصات غیر کارتزی این چنین نیست و باید تغییر بردارهای یکه را در نظر گرفت. به این موضوع خواهیم پرداخت.) فرض کنید ذره در زمان Δt به اندازه‌ی $\Delta \mathbf{r}$ جابه‌جا می‌شود. آنگاه برابر شکل (۱-۱۷)، $\Delta \mathbf{r}$ در حد $\Delta t \to 0$ به مسیر مماس می‌شود. از رابطه‌ی $\Delta \mathbf{r} \approx (d\mathbf{r}/dt)\Delta t = \mathbf{v}\Delta t$ هم می‌توان دید که $\Delta \mathbf{r}$ در حد $\Delta t \to 0$ به رابطه‌ی دقیق تبدیل می‌شود و نشان می‌دهد که $\mathbf{v}$ در حد $\Delta t \to 0$ با $\Delta \mathbf{r}$ موازی و بردار سرعت لحظه‌ای $\mathbf{v}$ ذره همه جا بر مسیر آن مماس است.



شکل۱-۱۷

مثال ۱-۳ مکان ذره‌ای با $\mathbf{r} = A\,(e^{\alpha t}\,\hat{\mathbf{i}} + e^{-\alpha t}\,\hat{\mathbf{j}})$ داده شده است. α مقدار ثابتی است. سرعت ذره را بیابید و مسیر آن را رسم کنید.

حل: داریم $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = A\,(\alpha e^{\alpha t}\,\hat{\mathbf{i}} - \alpha e^{-\alpha t}\,\hat{\mathbf{j}})$ و بنابراین $v = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} = A\alpha\sqrt{(e^{2\alpha t} + e^{-2\alpha t})}$. برای رسم مسیر حرکت ذره بهتر است به حالت های حدی نگاه کنیم: در $t = 0$ بردار سرعت $\mathbf{v}(0) = \alpha A\,(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$ و بردار مکان $\mathbf{r}(0) = A\,(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$ اند. در حد $t \to \infty$ داریم $e^{\alpha t} \to \infty$ و $e^{-\alpha t} \to 0$. در این حد $\mathbf{r} \to Ae^{\alpha t}\,\hat{\mathbf{i}}$ برداری در راستای محور x هاست و بردار سرعت $\mathbf{v} = \alpha A\,e^{\alpha t}\,\hat{\mathbf{j}}$ است. یعنی سرعت بدون محدودیت، با زمان افزایش پیدا می‌کند. شکل (۱-۱۸) این رفتار را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱۸

شتاب را هم به همین روش تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}}+\frac{dv_y}{dt}\hat{j}+\frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad (۱-۳۹)$$

می‌توان بردارهای تازه‌ای از مشتق های بالا تر $\mathbf{r}$ ساخت، اما خواهیم دید که در بررسی دینامیک ذره‌ها $\mathbf{r}$ ، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ کافی‌اند

مثال ۴-۱ ذره‌ای از نقطه‌ی A و از حالت سکون به سوی نقطه‌ی D حرکت می‌کند. از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B (به مسافت x_1) شتاب ذره یکنواخت و برابر a_1 است. در فاصله‌ای که ذره بین نقطه‌ی B و نقطه‌ی C (به مسافت x_2) حرکت می‌کند، شتاب ندارد و در بازه‌ی سوم، بین نقطه‌ی C و نقطه‌ی D شتاب ذره یکنواخت و برابر $-a_2$ است. a_2 کمیت مثبتی است. علامت منفی یعنی شتاب ذره در جهت کاهش x است؛ یعنی ذره واشتابیده می‌شود (یعنی جهت شتاب و جهت سرعت خلاف یکدیگر است.) اندازه‌ی a_2 چنان است که ذره در نقطه‌ی D به حالت سکون می‌رسد. در چه زمان‌هایی ذره به نقاط B و C و D می‌رسد؟

حل: نخست توجه کنید که کمیت‌های داده شده‌ی مسئله عبارتند از a_1، a_2، x_1 و x_2. بنابراین، نتایج ما باید برحسب این کمیت ها بیان شوند. برای گام نخست حرکت، نقطه‌ی آغازین، x ، را در نقطه‌ی A برگزیدیم، جائی که در زمان $t=0$ ذره در آنجا جایگزین است. معادله حرکت عبارت است از:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}=a_1 \qquad (۱-۴۰)$$

اگر یک بار از این رابطه نسبت به زمان انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x}=a_1t+c_1 \qquad (۱-۴۱)$$

c_1 ثابت انتگرال‌گیری است و می‌توان آن را از شرایط اولیه‌ی مسئله به دست آورد. نمونه‌ای از شرایط اولیه این است که در زمان $t=0$ ذره از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشد ؛ یعنی در زمان $t=0$ سرعت ذره صفر است، $\dot{x}(t=0)=0$.

$$\dot{x}(t=0)=0\Rightarrow a_1(0)+c_1=0 \quad\Rightarrow\quad c_1=0 \qquad (۱-۴۲)$$

اگراز رابطه‌ی (۱-۴۱) با $c_1=0$ برای بار دوم نسبت به زمان انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\int\frac{dx}{dt}dt=\int\dot{x}\,dt=\int dx=\int(a_1t)dt \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{2}a_1t^2+c_2 \qquad (۱-۴۳)$$

دوباره c_2 ثابت انتگرال‌گیری است و با شرط این که در زمان $t=0$ ذره در $x=0$ است به دست می‌آید:

$$x(0)=0=(1/2)a_1(0)^2+c_2 \quad\Rightarrow\quad c_2=0 \qquad (۱-۴۴)$$

بنابراین، اگر t_1 زمان لازم برای پیمودن مسافت x_1 باشد ، آنگاه t_1 عبارت است از

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{2x_1/a_1} \qquad (1\text{-}45)$$

سرعت ذره را در نقطه‌ی B ، یعنی $v_B = \dot{x}_B$، می‌توان از رابطه‌ی (۴۱-۱) چنین به دست آورد:

$$v_B = \dot{x}_B = a_1 t_1 = a_1\sqrt{2x_1/a_1} = \sqrt{2a_1 x_1} \qquad (1\text{-}46)$$

ذره فاصله‌ی میان نقطه‌ی B و نقطه‌ی C را بدون شتاب می‌پیماید؛ یعنی با سرعت ثابتی که در نقطه‌ی B دارد. پس فاصله‌ی x_2 ازB تا C با سرعت $v_B = \sqrt{2a_1 x_1}$ پیموده می‌شود. زمان لازم برای این پیمایش عبارت است از

$$x_2 = v_B t_2 \;\;\Rightarrow\;\; t_2 = \frac{x_2}{v_B} = \frac{x_2}{\sqrt{2a_1 x_1}} \qquad (1\text{-}47)$$

t_2 زمانی است که طول می‌کشد تا ذره از B به C برسد. پس در زمان

$$t_{AC} = t_1 + t_2 = \sqrt{2x_1/a_1} + \frac{x_2}{\sqrt{2a_1 x_1}} \qquad (1\text{-}48)$$

ذره به نقطه‌ی C می رسد. در گام سوم حرکت، یعنی ازنقطه‌ی C تا نقطه‌ی D معادله‌ی حرکت

$$\ddot{x} = -a_3 \qquad (1\text{-}49)$$

است. با گزینش مبداء جدیدی برای x و t، از اینجا داریم

$$\dot{x} = -a_3 t + \dot{x}_B = -a_3 t + \sqrt{2a_1 x_1} \qquad (1\text{-}50)$$

اگر زمان لازم برای پیمودن فاصله ی بین نقاط C و D را با t_3 نشان دهیم، یعنی اگر جسم در لحظه‌ی t_3 به نقطه‌ی D برسد، جائی که در آن جا سرعت ذره صفر می‌شود (ذره به حال سکون در می‌آید) می‌توان نوشت

$$\dot{x}(t_3) = 0 = -a_3 t^3 + \sqrt{2a_1 x_1} \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{\sqrt{2a_1 x_1}}{a_3} \qquad (1\text{-}51)$$

پس، زمان لازم برای پیمایش مسافت از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی D عبارت است از:

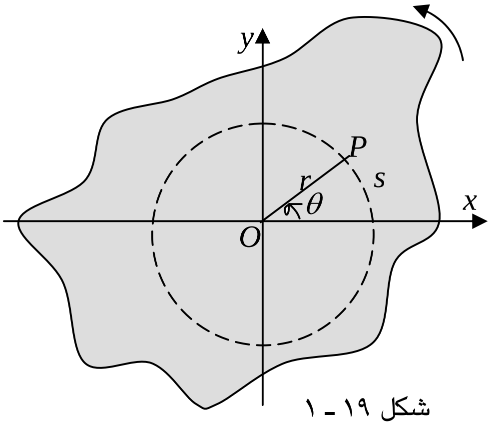
$$t_{AD} = t_1 + t_2 + t_3 = \sqrt{2x_1/a_1} + \frac{x_2}{\sqrt{2a_1 x_1}} + \sqrt{2a_1 x_1/a_3} \qquad (1\text{-}52)$$

سقوط آزاد نمونه‌ی دیگری از حرکت با شتاب ثابت است. در نزدیکی سطح زمین اندازه شتاب سقوط $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ و جهت آن رو به سوی مرکز زمین است. اندازه‌ی g با ارتفاع از سطح زمین تغییر می‌کند. چون این تغییرات برای ارتفاع‌های نه چندان زیاد چشمگیر نیست، همواره آن را مقدار ثابتی فرض خواهیم کرد. شتاب گرانش g با عرض جغرافیایی هم تغییر می‌کند. مقدار آن در استوا و در تهران یکی نیست. دلیل آن چرخش زمین حول محورش است. به بیان دیگر، زمین یک چارچوب لخت واقعی نیست، بلکه چارچوبی شتاب‌دار است. در فصل ۱۲ به این موضوع خواهیم پرداخت.

۱-۷ سرعت و شتاب زاویه‌ای

شکل (۱۹-۱) جسم تختی با شکل دلخواه را نشان می‌دهد. این جسم در صفحه‌ی xy قرار دارد و حول محور ثابتی می‌چرخد

که از نقطه‌ی O می‌گذرد و بر صفحه‌ی جسم عمود است. روی این جسم، نقطه‌ی P را به فاصله‌ی ثابت r از مبداء، در نظر بگیرید. چون فاصله‌ی نقطه‌ی P از مبداء O ثابت فرض شده است، با چرخش جسم، این نقطه روی دایره‌ای به شعاع r حول O خواهد گشت. درواقع، **هر نقطه‌ی** جسم، حول نقطه‌ی O مسیری دایره‌ای خواهد داشت. مکان نقطه‌ی P را می‌توان با مختصات x و y آن مشخص کرد؛ اما برای حرکت چرخشی، بهتر است به جای مختصات کارتزی x و y از مختصات قطبی (r,θ) استفاده کنیم. در این‌جا، تنها زاویه‌ی θ با زمان تغییر می‌کند؛ چون r را ثابت فرض کردیم (در مختصات کارتزی هر دوی x و y با زمان تغییر می‌کنند.) اگر ذره از محور xها $(\theta=0)$ حرکت کند وبه نقطه‌ی P برود، کمانی به طول s را روی مسیر دایره می‌پیماید. طول s با رابطه‌ی زیر به زاویه θ مربوط است.



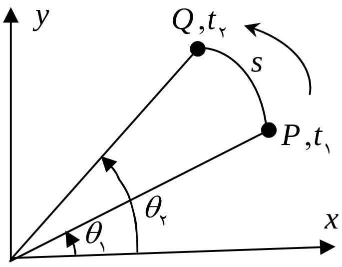
شکل ۱۹ ـ ۱

$$\theta = s/r \quad (\text{ب}) \quad \text{و} \quad s = r\theta \quad (\text{الف}) \qquad (۱-۵۳)$$

توجه کنید که یکای θ با رابطه‌ی (۵۳-۱ ب) تعریف شده است. زاویه‌ی θ نسبت طول کمان به شعاع دایره و در نتیجه یک عدد است، با این حال ما θ را معمولاً با یکای **رادیان** (rad) اندازه می‌گیریم:

یک رادیان زاویه‌ای است که طول کمان متناظر با آن با شعاع کمان برابر است.

چون پیرامون دایره $۲\pi r$ است، نتیجه می‌گیریم که ۳۶۰° برابر با $۲\pi r/r$ یا ۲π رادیان (یک دور) است. پس، داریم $۱rad = ۳۶۰^\circ/۲\pi = ۵۷{,}۳^\circ$. برای تبدیل زاویه از درجه به رادیان از برابری $۲\pi\,(\text{rad.}) = ۳۶۰^\circ$ می‌توان استفاده کرد: $\theta(rad) = (\pi/۱۸۰^\circ)\,\theta(deg)$. رابطه‌های (۵۳ -۱) می‌گویند جابه‌جایی را می‌توان برحسب کمان پیموده شده و یا برحسب زاویه‌ی متناظر با آن کمان بیان کرد. این دو هم‌ارز اند. فرض کنید در زمان $t_۱$ ذره در نقطه‌ی P با زاویه‌ی $\theta_۱$ است و پس از سپری شدن زمان Δt در زمان $t_۲$ ($t_۲ = t_۱ + \Delta t$) به نقطه‌ی Q با زاویه‌ی $\theta_۲$ می‌رسد (شکل ۲۰ -۱). در بازه‌ی زمانی Δt، بردار شعاع زاویه‌ی $\Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱$ را جارو می‌کند که **جابه‌جایی زاویه‌ای** ذره است. حال می‌توان سرعت زاویه‌ای میانگین، $\bar{\omega}$، را تعریف کرد که نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای به بازه‌ی زمانی، Δt، است:



شکل ۲۰-۱

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_۲ - \theta_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (۱-۵٤)$$

مثل سرعت خطی، سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای، ω، هم با حد رابطه‌ی (٥٤ -۱) وقتی Δt به سوی صفر میل کند، تعریف می‌شود

$$\omega \equiv \ell im_{\Delta t\to ۰} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \qquad (۱-۵۵)$$

یکای سرعت زاویه‌ای rad/s یا $s^{-۱}$ است؛ چون رادیان بعد ندارد. اگر محور z را محور چرخش بنامیم آنگاه اگر θ افزایشی باشد (پاد ساعتگرد) ω را مثبت و اگر θ کاهشی باشد (ساعتگرد) ω را منفی تعریف خواهیم کرد. اگر سرعت زاویه‌ای جسم در

بازه‌ی زمانی Δt از $\omega_۱$ به $\omega_۲$ تغییر کند؛ گوئیم جسم دارای شتاب زاویه‌ای است. **شتاب زاویه‌ای میانگین** عبارت است از نسبت تغییر سرعت زاویه‌ای به بازه‌ی زمانی و به صورت زیر می‌توان آن را تعریف کرد

$$\bar{\alpha}=\frac{\omega_۲-\omega_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (۱-۵٦)$$

مانند شتاب خطی، شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای را هم به صورت حد $\lim_{\Delta t\to ۰}\Delta\omega/\Delta t$ تعریف می‌کنیم .

$$\alpha=\ell\text{im}_{\Delta t\to ۰}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\equiv\frac{d\,\omega}{dt}=\dot{\omega}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\theta}{dt}\right)=\frac{d^۲\theta}{dt^۲}=\ddot{\theta} \qquad (۱-۵۷)$$

یکای شتاب زاویه‌ای $\text{rad/s}^۲$ یا $\text{s}^{-۲}$ است. توجه کنید که اگر اندازه‌ی ω با زمان افزایش یابد α مثبت و اگر اندازه ω با زمان کاهش پیدا کند، α منفی است.

برای حالتی که جسم حول یک ثابت محور می‌چرخد، می‌بینیم که سرعت زاویه‌ای، ω، و شتاب زاویه‌ای، α، همه‌ی ذرات تشکیل دهنده‌ی جسم، یکسان اند. یعنی کمیت‌های ω و α سرشت حرکت چرخشی جسم دارای بعد را مشخص می‌کنند. توجه کنید که جابه‌جایی زاویه‌ای، (θ)، سرعت زاویه‌ای، (ω)، و شتاب زاویه‌ای (α) همانندهای جابه‌جایی خطی (x)، سرعت خطی، (v) و شتاب خطی (a) درحرکت یک بعدی اند که در بخش قبلی از آنها سخن گفتیم. متغیرهای θ، ω و α تنها با یک ضریب طول از x و v و a متمایزند.

ما به علامت‌های ω و α اشاره کردیم و گفتیم که چگونه آنها را مشخص می‌کنیم؛ اما برای آنها جهتی را در فضا معین نکردیم. درواقع، هر دوی ω و α کمیت‌های برداری اند و لازم است جهت آنها مشخص شود. در چرخش حول محور ثابت، تنها جهتی که در فضا حرکت چرخشی را مشخص می‌کند، جهت در راستای محور چرخش است. با وجود این، باید سوی این کمیت‌ها را تعیین کنیم، یعنی این که آیا جهت این کمیت‌ها بیرون از و یا به سوی صفحه‌ی شکل (۱۹-۱) اند. جهت ω همواره در راستای محور چرخش است و بنا به قرارداد، اگر چرخش پاد ساعتگرد باشد، جهت ω را **بیرون از صفحه** و اگر چرخش ساعتگرد باشد، جهت ω را **به سوی صفحه** انتخاب می‌کنیم. این **قاعده دست راست** است. جهت α از تعریف آن، $\alpha\equiv d\,\omega/dt$، به دست می‌آید. اگر ω با زمان افزایش پیدا کند آنگاه α با ω همسو است و اگر ω با زمان کاهش یابد جهت α پادموازی با ω است. همان گونه که در بررسی حرکت شتاب‌دار خطی دیدیم، ساده‌ترین حرکت شتاب‌دار، حرکت با شتاب ثابت است. در حرکت چرخشی حول محور ثابت هم ساده‌ترین حرکت شتاب‌دار، حرکت با شتاب زاویه‌ای ثابت است. بنابراین، به پروراندن روابط سینماتیکی حرکت چرخشی با شتاب زاویه‌ای ثابت می‌پردازیم. اگر رابطه‌ی (۵٦-۱) را به صورت $d\omega=\alpha\,dt$ بنویسیم و در زمان $t_۰=۰$ اجازه دهیم $\omega=\omega_۰$ باشد، آنگاه از این رابطه می‌توان به صورت زیر انتگرال گرفت:

$$\int_{\omega_۰}^{\omega}d\,\omega=\int_۰^t\alpha\quad dt\quad\Rightarrow\quad\omega=\omega_۰+\alpha t=\text{ثابت} \qquad (۱-۵۸)$$

اگر رابطه‌ی (۵۸-۱) را در (۵۵-۱) قرار دهیم و دوباره انتگرال بگیریم (فرض کنید در $t_۰=۰$ ، $\theta=\theta_۰$ است) خواهیم داشت:

$$\omega dt=d\,\theta\Rightarrow\int_۰^t(\omega_۰+\alpha t)dt=\int_{\theta_۰}^{\theta}d\,\theta\quad\Rightarrow\quad\theta=\theta_۰+\omega_۰t+\frac{۱}{۲}\alpha t^۲ \qquad (۱-۵۹)$$

اگر بین رابطه‌های (۵۹-۱) و (۵۸- ۱) ، t را حذف کنیم، به دست می‌آید:

$$\omega^{2} = \omega_{0}^{2} + 2\alpha(\theta - \theta_{0}) \qquad (۱-۶۰)$$

توجه کنید که این رابطه‌های سینماتیکی برای حرکت چرخشی با شتاب ثابت، همانند رابطه‌های سینماتیکی برای حرکت خطی با شتاب ثابت اند که $x \to \theta$ ، $v \to \omega$ و $a \to \alpha$ تبدیل شده‌اند. جدول ۱- ۱ این مقایسه را نشان می‌دهد.

جدول ۱ ـ ۱ مقایسه‌ی رابطه‌های سینماتیکی میان حرکت چرخشی وحرکت خطی با شتابهای ثابت	
حرکت چرخشی با شتاب ثابت a	**حرکت چرخشی با شتاب ثابت** α
$v = v_{0} + at$	$\omega = \omega_{0} + \alpha t$
$x = x_{0} + v_{0}t + (1/2)at^{2}$	$\theta = \theta_{0} + \omega_{0}t + (1/2)\alpha t^{2}$
$v^{2} = v_{0}^{2} + 2a(x - x_{0})$	$\omega^{2} = \omega_{0}^{2} + 2\alpha(\theta - \theta_{0})$

مثال ۵-۱ چرخی با شتاب زاویه‌ای ثابت $3{,}5\ \mathrm{rad/s^{2}}$ می‌چرخد. اگر در زمان $t_{0} = 0$ سرعت زاویه‌ای چرخ $2\ \mathrm{rad./s}$ باشد. **(الف)**: چرخ در دو ثانیه چه زاویه‌ای خواهد چرخید. **(ب)**: در لحظه‌ی $t = 2\mathrm{s}$ سرعت زاویه‌ای چرخ چقدر است؟ **(پ)**: در بازه‌ی بین $t = 2\mathrm{s}$ و $t = 3\mathrm{s}$، چرخ چه زاویه‌ای را چرخیده است؟

حل: **(الف)**

$$\theta - \theta_{0} = \omega_{0}t + \frac{1}{2}\alpha t^{2}$$

$$= \left(2{,}0\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)(2\mathrm{s}) + \frac{1}{2}\left(3{,}5\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)(2\mathrm{s})^{2} = 11\mathrm{rad} = 630^{\circ} = 1{,}75\ \mathrm{rev.} \qquad (۱-۶۱)$$

(ب):

$$\omega = \omega_{0} + \alpha t = 2{,}0\frac{rad}{s} + \left(3{,}5\frac{rad}{s}\right)(2S) = 9{,}0\frac{rad}{s} \qquad (۱-۶۲)$$

این نتیجه را می‌توانستیم از رابطه‌ی (۶۰-۱) و پاسخ قسمت (الف) هم به دست آوریم. انجام دهید.

(پ): زاویه‌ی چرخیده شده در مدت $t = 3\mathrm{s}$ عبارت است از:

$$\theta - \theta_{0} = \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^{2} = \left(2{,}0\frac{rad}{s}\right)(3s) + \frac{1}{2}\left(3{,}5\frac{rad}{s^{2}}\right)(3s)^{2} = 21{,}75 rad \qquad (۱-۶۳)$$

زاویه‌ی چرخیده شده در زمان $t = 2\mathrm{s}$ را در بخش(الف) حساب کردیم. اگر این دو را از هم کم کنیم خواهیم داشت

$$(21{,}75\ rad) - (11\ rad) = 10{,}75\ rad$$

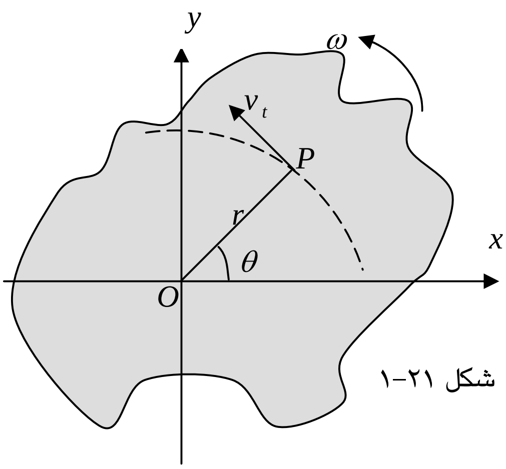
۸-۱ رابطه‌ی میان کمیت های زاویه‌ای و خطی

در اینجا خواهیم کوشید تا برخی رابطه‌های سودمند میان سرعت و شتاب زاویه‌ای و همانندهای خطی آن‌ها را پیدا کنیم. برای این کار باید به یاد داشته باشیم که وقتی یک جسم حول محور ثابتی می‌چرخد، **هر ذره‌ی جسم** روی دایره‌ای می‌چرخد که

مرکز آن محور چرخش است. نخست رابطه‌ی میان سرعت زاویه‌ای جسم چرخنده‌ی شکل (۲۱- ۱) و سرعت مماسی، v_t، نقطه ای مانند P را روی جسم بررسی می‌کنیم. چون نقطه‌ی P روی دایره حرکت می‌کند، بردار سرعت خطی همواره بر مسیر دایره‌ای آن مماس است. واژه‌ی **سرعت مماسی** را به این خاطر به کار بردیم. اندازه‌ی سرعت مماسی نقطه‌ی P، بنا به **تعریف** عبارت است از ds/dt که در آن s طول کمانی است که این نقطه روی مسیر دایره‌ای پیموده است. به یاد بیاوریم که $s = r\theta$ و r مقدار ثابتی است. بنابراین داریم $v_t = ds/dt = d(r\theta)/dt = r\left(d\theta/dt\right) = r\omega$. پس:

$$v_t = r\omega \tag{۱-٦٤}$$

یعنی سرعت مماسی نقطه‌ای روی جسم چرخان، یا سرعت مماسی نقطه‌ای که روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند، برابر است با فاصله‌ی نقطه از محور چرخش ضربدر سرعت زاویه‌ای چرخش. اگرچه همه‌ی نقاط روی جسم **سرعت زاویه‌ای** یکسان دارند، اما **سرعت خطی** همه‌ی نقاط یکی نیست. درواقع، رابطه‌ی (٦٤-۱) نشان می‌دهد که سرعت خطی نقطه‌ای روی جسم چرخان با افزایش فاصله‌ی نقطه از محور چرخش، افزایش پیدا می‌کند. اینک می‌توان رابطه‌ی میان شتاب زاویه‌ای یک جسم چرخان و شتاب مماسی نقطه‌ی P را بدست آورد. کافی است که از v_t مشتق گرفت



شکل ۲۱-۱

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\omega\right) = r\,\frac{d\omega}{dt} = r\dot{\omega} = r\alpha \tag{۱-٦٥}$$

پس:

$$a_t = r\alpha \tag{۱-٦٦}$$

بنابراین، شتاب مماسی نقطه‌ای که به فاصله‌ی r از محور چرخش روی مسیر دایره‌ای می‌چرخد، برابر است با فاصله‌ی نقطه از محور چرخش ضربدر شتاب زاویه‌ای چرخش.

۹- ۱ حرکت دایره‌ای یکنواخت

ذره‌ای را در نظر بگیرید که با سرعت خطی ثابت v روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. بیشتر وقت‌ها برای دانشجویان شگفت آور است که **اگرچه جسم با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند، با این حال شتاب دارد**. برای این که ببینیم چرا این چنین است به تعریف شتاب میانگین $\bar{\mathbf{a}} \equiv \Delta\mathbf{v}/\Delta t$ توجه کنید.

توجه داشته باشید که شتاب به **تغییر بردار سرعت** بستگی دارد. چون سرعت کمیت برداری است؛ پس شتاب می‌تواند به دو شیوه به وجود بیاید: (الف) تغییر**اندازه‌ی** بردار سرعت و (ب) تغییر در **راستای** بردار سرعت. درحرکت دایره‌ای یکنواخت که جسم با سرعت ثابت روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند، جهت بردار سرعت از لحظه‌ای به لحظه‌ی بعدی تغییر می‌کند. در نتیجه، بردار شتاب همواره بر مسیر عمود و به سوی مرکز دایره است. شتابی با این سرشت را **شتاب مرکزگرا** می‌نامند. چون این شتاب همواره در راستای شعاع (یا بردار مکان) است ما آن را با نماد a_r نشان می‌دهیم. مقدار آن عبارت است از

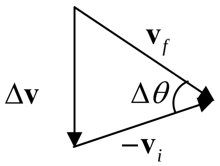
$$a_r = \frac{v^2}{r} \tag{۱-۶۷}$$

اینک، رابطه‌ی بالا را اثبات می‌کنیم. برای این کار شکل (۲۲-۱ الف) را در نظر بگیرید؛ در این شکل جسمی نشان داده شده است که در زمان t_i در نقطه‌ی P سرعتش $\mathbf{v}_i$ است و در زمان t_f با سرعت $\mathbf{v}_f$ به نقطه‌ی Q می‌رسد. فرض کنید $\mathbf{v}_i$ و $\mathbf{v}_f$ تنها از نظر راستا با یکدیگر متفاوتند؛ یعنی حرکت یکنواخت است و اندازه‌ی سرعت در دو نقطه با هم برابر است، ($v_f = v_i = v$).

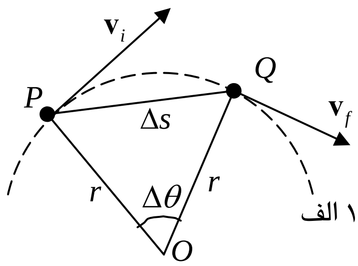
برای محاسبه‌ی شتاب، از تعریف شتاب میانگین آغاز می‌کنیم.

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \tag{۱-۶۸}$$

این رابطه نشان می‌دهد که باید $\mathbf{v}_i$ و $\mathbf{v}_f$ را به طور برداری از یکدیگر کم کنیم. $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$ تغییر بردار سرعت است،



شکل۲۲-۱ب



شکل ۲۲- ۱ الف

یعنی $\Delta \mathbf{v}$ با افزودن $\mathbf{v}_f$ به بردار $-\mathbf{v}_i$ به دست می‌آید که در شکل (۲۲- ۱ب) نشان داده شده است. توجه کنید که اگر Δt خیلی کوچک باشد، Δs و $\Delta \theta$ نیز بسیار کوچک خواهند بود. در این صورت $\mathbf{v}_f$ تقریباً با $\mathbf{v}_i$ موازی می‌شود و بردار $\Delta \mathbf{v}$ به تقریب بر هر دوی آنها عمود و جهتش به سوی مرکز دایره می‌شود. حالا مثلث شکل (۲۲- ۱الف) را نگاه کنید که ضلع‌های آن r و Δs است. این مثلث و مثلث شکل (۲۲- ۱ب) متشابه‌اند (چرا؟) و می‌توان نسبت طول ضلع‌های آنها را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{r} \tag{۱-۶۹}$$

و از این رابطه می‌توان Δv را حساب کرد

$$\Delta v = \frac{v}{r} \Delta s \tag{۱-۷۰}$$

اگر دو طرف را به Δt تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{۱-۷۱}$$

سمت چپ این رابطه تعریف شتاب میانگین است، $v \equiv \Delta s / \Delta t$. پس:

$$\bar{a} = \frac{v}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r} = \frac{v^2}{r} \tag{۱-۷۲}$$

حال اگر نقطه‌های P و Q در شکل (۲۲- ۱الف) خیلی به یکدیگر نزدیک باشند، آنگاه $\Delta \mathbf{v}$ به سوی مرکز دایره خواهد شد؛ چون شتاب با $\Delta \mathbf{v}$ هم سوست. جهت آن هم به سوی مرکز خواهد شد. افزون بر این، با نزدیک شدن نقطه‌های P و Q به یکدیگر، Δt

به صفر می‌گراید و کسر $\Delta s/\Delta t$ به سرعت v میل می‌کند. بنابراین، در حد $\Delta t \to ۰$ شتاب برابر $a_r = v^۲/r$ می‌شود.

نتیجه: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، شتاب به سوی مرکز دایره است و اندازه‌ی آن $v^۲/r$ است.

در بخش ۸- ۱ دیدیم که اگر ذره‌ای بر روی مسیر دایره‌ای حرکت کند و اندازه‌ی سرعت آن تغییر کند آنگاه، ذره شتاب مماسی هم خواهد داشت. بنابراین، اگر ذره‌ای بر روی خمی با بردار سرعت متغیر حرکت کند، هم شتاب شعاعی مرکزگرا و هم شتاب مماسی خواهد داشت. این وضعیت را اینک بررسی می‌کنیم.

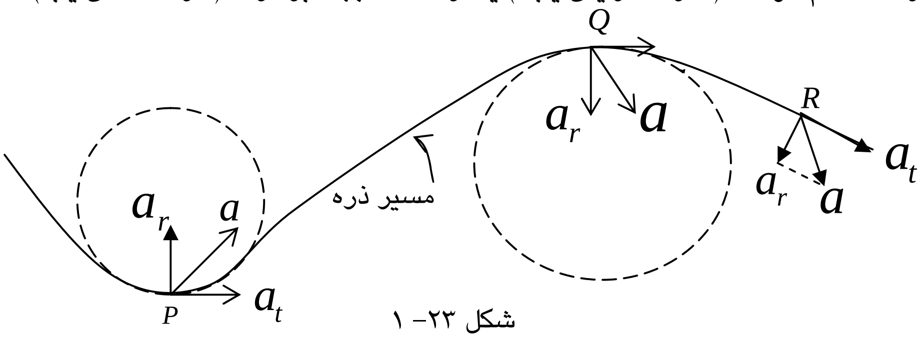
فرض کنید ذره‌ای بر روی مسیر خمیده همانند شکل (۲۳-۱) حرکت می‌کند. اندازه و جهت بردار سرعت ذره تغییر می‌کند. در این وضعیت، همواره سرعت ذره مماس بر مسیر است، اما بردار شتاب **a** با راستای مسیر زاویه می‌سازد. با حرکت ذره در امتداد مسیر خمیده‌ی شکل (۲۳-۱)، می‌بینیم که جهت بردار شتاب کل **a** از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کند. این بردار را می‌توان به دو مؤلفه تجزیه کرد: بردار شعاعی، a_r، در راستای شعاع و بردار مماسی، a_t، که بر مسیر مماس است. یعنی بردار شتاب کل، **a**، را می‌توان به صورت جمع برداری این دو مؤلفه نوشت:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t \qquad (۱- ۷۳)$$

همانگونه که پیش‌تر هم گفتم ، مولفه‌ی شعاعی شتاب ، نتیجه‌ی تغییر جهت بردار سرعت است و اندازه‌ی آن $a_r = v^۲/r$ است. مؤلفه‌ی مماسی شتاب در اثر تغییر اندازه‌ی بردار سرعت است؛ $a_t \equiv dv/dt$. چون a_r و a_t مؤلفه‌های عمود بر هم بردار **a** اند، در نتیجه اندازه‌ی شتاب کل برابر است با $a = \sqrt{a_r^۲ + a_t^۲}$.

مثل حرکت دایره‌ای یکنواخت، a_r همیشه به سوی مرکز خم است. برای سرعت معینی، اگر شعاع خم کوچک باشد، a_r بزرگ (مانند نقطه‌های P و Q در شکل ۲۳- ۱) و اگر شعاع خم بزرگ باشد a_r کوچک است (مانند نقطه‌ی R در شکل (۲۳- ۱)).

جهت a_t یا با جهت بردار سرعت **v** هم‌سوست (اگر v افزایش یابد) یا در خلاف جهت بردار **v** (اگر v کاهش یابد) است.



شکل ۲۳- ۱

توجه کنید که برای حرکت دایره‌ای یکنواخت، چون v ثابت است، $a_t = ۰$ و در نتیجه، شتاب همواره شعاعی است. این را پیشتر نیز دیدیم. افزون بر این، اگر جهت **v** تغییر نکند آنگاه شتاب شعاعی وجود نخواهد داشت و حرکت یک‌بعدی خواهد بود ($a_r = ۰$ و $a_t \neq ۰$).

مثال ۶-۱ توپی را از انتهای ریسمانی به طول ۰٫۵m آویخته‌ایم. مجموعه تحت تأثیر گرانش در صفحه‌ی عمودی تاب می‌خورد. هنگامی که ریسمان با خط عمودی زاویه‌ی $\theta = ۲۰^\circ$ می‌سازد، سرعت توپ ۱٫۵ m/s است

(الف) : مؤلفه‌ی شعاعی شتاب را بیابید.

(ب): در این لحظه شتاب مماسی توپ $a_t = g\sin ۲۰^\circ = ۳,۳۶\,\mathrm{m/s^۲}$ است. اندازه و جهت شتاب کل را به دست آورید.

حل: داریم:

$$a_r = \frac{v^۲}{r} = \frac{(۱,۵\,\mathrm{m/s})^۲}{۰.۵\mathrm{m}} = ٤,٥\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲} \tag{۱-۷٤}$$

$$a = \sqrt{a_r^۲ + a_t^۲} = \sqrt{(٤,٥)^۲ + (۳,۳۶)^۲}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲} = ٥,۶۲\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲} \tag{۱-۷٥}$$

اگر ϕ زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و ریسمان باشد آنگاه:

$$\phi = \tan^{-۱}\frac{a_t}{a_r} = \tan^{-۱}\left(\frac{۳,۳۶\,\mathrm{m/s^۲}}{٤٥\,\mathrm{m/s^۲}}\right) = ۳۶,۷^\circ \tag{۱-۷۶}$$

توجه کنید که جهت و اندازه‌ی همه‌ی بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{a}_t$ و $\mathbf{a}_r$ با حرکت توپ در مسیر دایره‌ای تغییر می‌کنند. وقتی توپ در پائین‌ترین نقطه $(\theta = ۰)$ قرار دارد، $a_t = ۰$ است، زیرا در آنجا g مؤلفه‌ی مماسی ندارد و a_r **بیشینه** مقدار خود را دارد (چون در آنجا v بیشینه است). هنگامی که توپ در بالاترین نقطه $(\theta = ۱۸۰^\circ)$ باشد، باز هم a_t صفر است. اما a_r کمینه است؛ چون v کمینه مقدار خود را در آنجا دارد. و سرانجام در دو وضعیت افقی $(\theta = ۲۷۰^\circ\,,\ \theta = ۹۰^\circ)$ داریم $|\mathbf{a}_t| = g$ و a_r مقداری میان کمینه و بیشینه را داراست.

مثال ۷-۱ صفحه‌ی چرخانی، مانند صفحه‌ی گرام، که با آهنگ ۳۳ دور در دقیقه می‌چرخد، ۲۰s طول می‌کشد تا از چرخش بایستد. **(الف)**: اگر شتاب یکنواخت باشد، شتاب زاویه‌ای صفحه را حساب کنید. **(ب)**: صفحه چند دور می‌چرخد تا این که بایستد؟ **(پ)**: اندازه‌های مؤلفه‌های شعاعی و مماسی شتاب یک نقطه‌ی روی لبه‌ی صفحه را در زمان $t = ۰$ به دست آورید. فرض کنید شعاع صفحه ۱٤cm است. **(ت)**: سرعت خطی اولیه‌ی یک نقطه در لبه‌ی صفحه چقدر است؟

حل: **(الف)** : یک دور ۲π rad. است. پس سرعت زاویه‌ای اولیه عبارت است از:

$$\omega_\circ = (۳۳\,rev/\mathrm{min})(۲\pi\,rad/rev)\left(\frac{۱}{۶۰}\mathrm{min}/s\right) = ۳,٤۶\,rad/s \tag{۱-۷۷}$$

با استفاده از $\omega = \omega_\circ + \alpha t$ و این که در زمان $t = ۲۰$ s ، $\omega = ۰$ است خواهیم داشت:

$$\alpha = -\frac{\omega_\circ}{t} = -\frac{۳,٤۶\,\mathrm{rad/s}}{۲۰\mathrm{s}} = -۰,۱۷۳\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^۲} \tag{۱-۷۸}$$

علامت منها نشان می‌دهد که سامانه واشتابیده می‌شود (ω کاهش می‌یابد.)

(ب): از رابطه‌ی (۵۹-۱) استفاده کنید: مقدار جابه جایی پس از ۲۰ ثانیه برابر است با:

$$\Delta\theta = \theta - \theta_\circ = \omega_\circ t + \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ = \left[۳,٤۶(۲۰) + \frac{۱}{۲}(-۰,۱۷۳)(۲۰)^۲\right]\mathrm{rad} = ۳٤,۶\,\mathrm{rad} \tag{۱-۷۹}$$

که برابر با $۳٤,۶/۲\pi = ٥,٥۱$ دور است.

(پ):

$$a_t = r\alpha = (۱٤\,\text{cm})(۰,۱۷۳\,\text{rad/s}^۲) = ۲,٤۲\,\text{cm/s}^۲ \qquad (۱-۸۰)$$

$$a_r = \frac{v^۲}{r} = \frac{(r\omega_\circ)^۲}{r} = r\omega_\circ^۲ = (۱٤\,\text{cm})(۳,٤٦\,\text{rad/s}^۲) = ۱٦۸\,\text{cm/s}^۲ \qquad (۱-۸۱)$$

(ت): داریم: $v = r\omega$. پس

$$v_\circ = r\omega_\circ = (۱٤\text{cm})\left(۳,٤٦\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) = ٤۸,٤٤\,\text{cm/s} \qquad (۱-۸۲)$$

مثال ۸-۱ جسمی بر روی دایره‌ای به شعاع R حرکت می کند. در زمان $t=\circ$ سرعت آن $V_\circ$ است. شرایطی را فراهم کرده‌ایم که از این لحظه به بعد، شتاب‌های مماسی و شعاعی این ذره برای همه‌ی زمان‌ها با هم برابر باشند.

(الف): سرعت جسم و مسافتی را که می پیماید به صورت تابعی از زمان بیابید.

(ب): در این مسئله زمان خاصی وجود دارد. این زمان چیست و چرا خاص است

حل: **(الف)** داریم $a_t = dV/dt$ و $a_r = V^۲/R$ و به ما گفته شده است که $dV/dt = (V^۲/R)$. از این رابطه می‌توان با جداسازی متغیرها انتگرال گرفت.

$$\int_{V_\circ}^{V}\frac{dV}{V^۲} = \int_\circ^t\frac{dt}{R} \;\Rightarrow\; \left(-\frac{۱}{V}\right)\Big|_{V_\circ}^{V} = \frac{t}{R} \;\Rightarrow \frac{۱}{V_\circ} - \frac{۱}{V} = \frac{t}{R} \;\Rightarrow\; V(t) = \frac{۱}{\dfrac{۱}{V_\circ} - \dfrac{t}{R}} \qquad (۱-۸۳)$$

برای یافتن مسافت پیموده شده، x، از $V = dx/dt$ استفاده کنید

$$V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = Vdt \Rightarrow \int_\circ^x dx = \int_\circ^t Vdt \;\Rightarrow\; x = \int_\circ^t \frac{dt}{\frac{۱}{V_\circ}-\frac{t}{R}} \;\Rightarrow\; x = -R\,\ell n\left(\frac{۱}{V_\circ}-\frac{t}{R}\right)\Bigg|_\circ^t$$

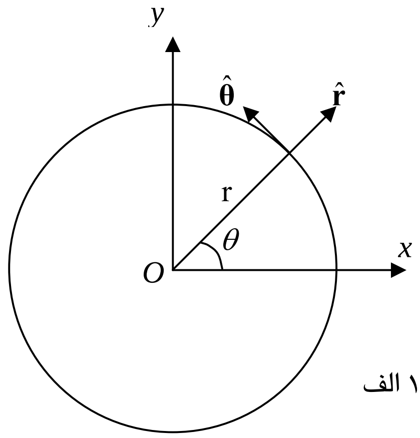
$$\Rightarrow x = -R\left[\ell n\left(\frac{۱}{V_\circ}-\frac{t}{R}\right) - \ell n\left(\frac{۱}{V_\circ}\right)\right] \;\Rightarrow\; x = -R\;\ell n\left[\frac{\frac{۱}{V_\circ}-\frac{t}{R}}{\frac{۱}{V_\circ}}\right] \Rightarrow x(t) = -R\;\ell n\left(۱-\frac{V_\circ t}{R}\right) \qquad (۱-۸٤)$$

(ب): زمان ویژه $T = R/V_\circ$ است. در این زمان هر دوی x و V بینهایت می‌شوند. پس از این زمان، حرکت بالا دیگر ناممکن است.

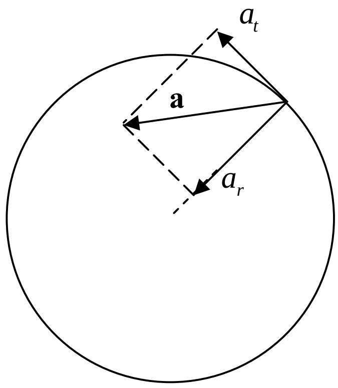
برای ذره‌ای که روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند، بهتر است شتاب را برحسب بردارهای یکه بنویسیم. این کار را با تعریف کردن بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ می‌توان انجام داد. $\hat{\mathbf{r}}$ بردار **یکه‌ای در راستای شعاع و به سوی بیرون از مرکز خم است**. $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بردار **یکه‌ی مماس بر مسیر دایره‌ای است**؛ شکل (۲٤-۱ الف) را ببینید. جهت مثبت بردار $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ درجهت افزایش زاویه‌ی θ یا پادساعتگرد است. توجه کنید که $\hat{\mathbf{r}}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ به همراه ذره، جابجا می‌شوند و در نتیجه نسبت به ناظر ساکن، با زمان تغییر می‌کنند. با این نمادگذاری، می‌توان شتاب کل را به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_t+\mathbf{a}_r=\frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}-\frac{v^{2}}{r}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۱-۸۵)$$

این بردارها در شکل (۲٤-۱ب) نشان داده شده‌اند. علامت منفی برای $\mathbf{a}_r$ نشان می‌دهد که این مؤلفه‌ی شتاب همواره به سوی مرکز و در **خلاف** جهت بردار یکه‌ی $\hat{\mathbf{r}}$ است. در بخش ۸-۱ دیدیم که شتاب مماسی ذره‌ای در فاصله‌ی r از محور چرخش



شکل ۲٤-۱ الف



شکل ۲٤-۱ ب

$a_t=r\alpha$ است . در نتیجه رابطه‌ی (۸۵-۱) را می‌توان به صورت

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_t+\mathbf{a}_r=r\,\alpha\,\hat{\boldsymbol{\theta}}-\frac{v^{2}}{r}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۱-۸٦)$$

نوشت. پس، شتاب کل ذره عبارت است از $\mathbf{a}=\mathbf{a}_t+\mathbf{a}_r$ و اندازه‌ی شتاب کل آن برابر است با:

$$a=\sqrt{a_t^{2}+a_r^{2}}=\sqrt{r^{2}\alpha^{2}+\left(v^{2}/r\right)^{2}} \qquad (۱-۸۷)$$

از آنجائی که $v=r\omega$ است، داریم

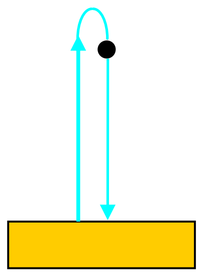
$$a=\sqrt{r^{2}\alpha^{2}+r^{2}\omega^{4}}=r\sqrt{\alpha^{2}+\omega^{4}} \qquad (۱-۸۸)$$

۱۰-۱ سرعت و شتاب نسبی

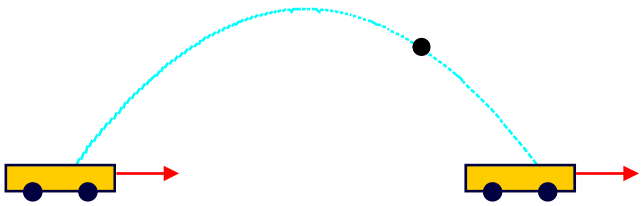
اندازه‌گیری‌های ما از مکان، سرعت و شتاب جسم، به ناظری بستگی دارد که این اندازه‌گیری‌ها را انجام می‌دهد. چه بسا، نتیجه‌هایی را که دو ناظر متفاوت از پدیده‌ای یکسان به دست می‌آورند متفاوت باشد. اما چون پدیده‌ی مورد بررسی یگانه است و رفتارش مستقل از ناظر است؛ نتایج به دست آمده توسط ناظرهای متفاوت باید به یکدیگر مربوط باشند. یعنی از نتایج اندازه‌گیری‌های یک ناظر باید بتوان به نتایجی که ناظر دیگری می‌توانست به دست آورد دسترسی پیدا کرد. در این بخش به جستجوی این رابطه میان اندازه‌گیری‌های ناظرهای متفاوت از پدیده‌ای یکسان خواهیم پرداخت. در فصل ۱۲ عمومی‌ترین حالت را بررسی خواهیم کرد. اینک حالت خاصی را در نظر می گیریم که دو ناظر نسبت به هم با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. به بیان دیگر، حرکت جسم را از دیدگاه ناظرهای لخت که نسبت به هم با سرعت ثابت حرکت می‌کنند بررسی می‌کنیم. نخست، فرض کنید، دو اتومبیل با سرعت‌های ۵۰ km/h و ٦۰ km/h در یک جهت حرکت می‌کنند. سرنشینی که در اتومبیل کُندرو نشسته است؛ خواهد گفت که سرعت اتومبیل تُندرو نسبت به اتومبیل کندرو ۱۰ km/h است. البته، ناظر ساکنی که کنار جاده ایستاده

است، سرعت اتومبیل تندرو را ۶۰ km/h اندازه‌گیری می‌کند. این مثال نشان می‌دهد که ناظرهای متفاوت نتیجه‌های متفاوت از یک پدیده (سرعت اتومبیل تندرو) ارائه می‌دهند.

نمونه‌ی دوم: فرض کنید سرنشینی در اتومبیل در حال حرکت یکنواخت (ناظرA) توپی را به بالا پرتاب می‌کند؛ برای این سرنشین (یا در این چارچوب مرجع) توپ در مسیری عمودی به بالا می‌رود و سپس در همان مسیر به پائین برمی‌گردد (شکل ۲۵– ۱الف). ناظری که در کنار جاده ساکن ایستاده است (ناظر B) و به مسیر حرکت توپ در هوا می‌نگرد، آن را به صورت یک سهمی می‌بیند (شکل ۲۵– ۱ب). نمونه‌های فراوانی از این دست وجود دارند. نمونه‌ی ساده‌ی دیگری رهاشدن و فرو افتادن بسته‌ای از هواپیمایی است که با سرعت ثابت به موازات سطح زمین پرواز می‌کند. سرنشین هواپیما مسیر بسته را خط راستی توصیف خواهد کرد که رو به سوی زمین است. ناظر در روی زمین مسیر بسته را سهمی خواهد دید. نسبت به زمین، سرعت بسته هم مولفه‌ی عمودی دارد (که نتیجه‌ی شتاب گرانش است و مقدار آن با اندازه‌گیری سرنشین هواپیما یکسان است) وهم مولفه‌ی افقی (که حرکت هواپیما به بسته داده است). اگر هواپیما به حرکت افقی خود با همان سرعت ادامه بدهد؛ بسته در هنگام برخورد با زمین، درست در زیر هواپیما خواهد بود (اگر از اصطکاک هوا چشم‌پوشی کنیم)!

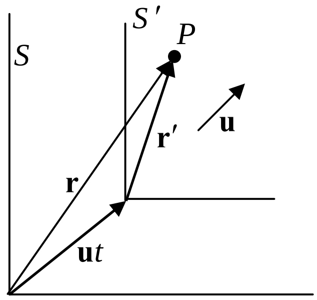


شکل۲۵–۱ الف: چارچوب قطار در حال حرکت



شکل ۲۵–۱ ب: چارچوب ناظر روی زمین

در وضعیت عمومی‌تر، فرض کنید ذره‌ای در نقطه‌ی P قرار دارد، شکل (۲۶–۱)، و دو ناظر حرکت این ذره را توصیف می‌کنند. یکی در چارچوب S، که نسبت به زمین ساکن است؛ یعنی ناظر ایستاده در روی زمین. ناظر دوم در چارچوب S' قرار دارد که نسبت به S با سرعت ثابت $\mathbf{u}$ به سمت راست حرکت می‌کند (از دید ناظر نشسته در S'، ناظر در S با سرعت $-\mathbf{u}$ به سمت چپ می‌رود). در این وضعیت ، بردار مکان $\mathbf{r}'$ ذره در چارچوب S' و بردار مکان $\mathbf{r}$ ذره در چارچوب S به یکدیگر مربوطاند و می‌توان $\mathbf{r}'$ را برحسب $\mathbf{r}$ نوشت



شکل ۲۶–۱ دو چارچوب با سرعت نسسبی $\mathbf{u}$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t \qquad (۱–۸۹)$$

یعنی در زمان t چارچوب S' به اندازه‌ی $\mathbf{u}t$ نسبت به چارچوب S به سمت راست جابه جایی شده است. اگر از رابطه‌ی (۸۹–۱) نسبت به زمان مشتق بگیریم و توجه داشته باشیم که $\mathbf{u}$ ثابت است ، خواهیم داشت

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{u} \;\Rightarrow\; \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} \qquad (۱–۹۰)$$

$\mathbf{v}'$ سرعت ذره از دید ناظر S' و $\mathbf{v}$ سرعت همان ذره از دید ناظر در چارچوب S است. رابطه‌های (۱-۸۹) و (۱-۹۰) **معادله های تبدیل گالیله** نام دارند و مختصات و سرعت های اندازه‌گیری شده‌ی ذره در چارچوب زمین را به مقادیر اندازه‌گیری شده در چارچوبی که نسبت به زمین حرکت یکنواخت دارد مربوط می‌کنند. این تبدیل ها فقط برای ذره‌ای درست است که سرعتش در هر دو سامانه‌ی مختصات، در مقایسه با سرعت نور کوچک باشد. اگر سرعت ذره، در هر یک از چارچوب های مرجع، با سرعت نور قابل مقایسه باشد، این تبدیل‌ها باید با تبدیل‌های لورنتس جایگزین شوند. اگرچه دو ناظر در دو چارچوب متفاوت ،سرعت‌های متفاوتی را برای یک ذره اندازه‌گیری خواهند کرد، اما اگر $\mathbf{u}$ ثابت باشد نتیجه‌ی اندازه‌گیری **شتاب** در هر دو چارچوب یکسان خواهد بود. برای اثبات آن از رابطه ی (۱-۹۰) نسبت به زمان مشتق بگیرید :

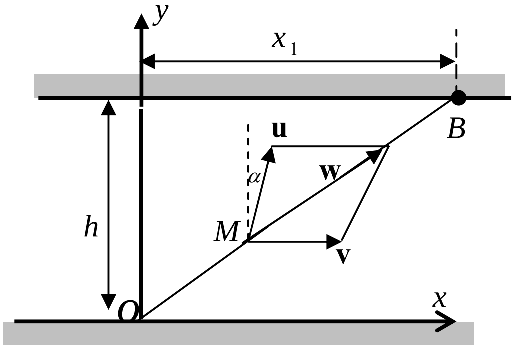
$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}-\frac{d\mathbf{u}}{dt} \qquad (۱-۹۱)$$

چون $\mathbf{u}$ ثابت است پس، $d\mathbf{u}/dt=0$ است و بنابراین، $\mathbf{a}'=\mathbf{a}$ است. **یعنی نتیجه‌ی اندازه‌گیری شتاب ذره‌ای در چارچوب زمین با نتیجه‌ی اندازه‌گیری شتاب همان ذره در چارچوبی که نسبت به زمین با سرعت ثابت حرکت می‌کند، یکی است.**

مثال ۹-۱ سرعت جریان آب رودخانه‌ای v و پهنای رودخانه h است. قایقرانی می‌تواند در آب‌های بی‌حرکت قایق را با سرعت $\mathbf{u}$ براند. قایقران باید در چه راستایی در رودخانه حرکت کند تا در کوتاهترین زمان از یک ساحل به ساحل دیگر برسد؟ در چه نقطه‌ای قایق به ساحل روبرو می‌رسد؟

حل: فرض کنید قایق از نقطه‌ی O در شکل (۱-۲۷) آغاز به حرکت می‌کند. همچنین فرض کنید دماغه‌ی قایق با پهنای رودخانه (محور Oy) همواره زاویه‌ی ثابت α می‌سازد. قایق را درمکان دلخواه M از مسیرش در نظر بگیرید. $\mathbf{u}$ سرعت قایق نسبت به آب رودخانه است و $\mathbf{v}$ سرعت آب نسبت به ساحل (یعنی نسبت به ناظری که در ساحل رودخانه ایستاده است) است. از نگاه این ناظر سرعت قایق جمع برداری دو سرعت یاد شده است. آن را $\mathbf{w}$ بنامید

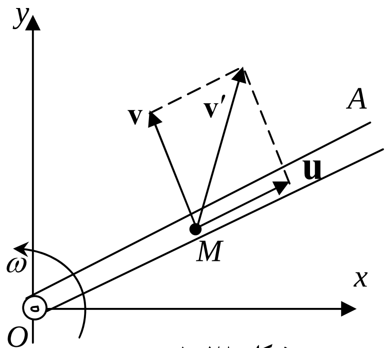
$$\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v} \qquad (۱-۹۲)$$



شکل ۱-۲۷

مؤلفه‌های w بر روی محورهای مختصات $w_x=u\sin\alpha+v$ و $w_y=u\cos\alpha$ اند . چون هردوی این مؤلفه‌ها مقادیر ثابتند. بنابراین جابه‌جایی قایق در راستای محورهای مختصات عبارتند از $x=(u\sin\alpha+v)t$ و $y=(u\cos\alpha)t$. هنگامی که قایق به ساحل روبرو می‌رسد، $y=h$ می شود. بنابراین، زمان پیمایش پهنای رودخانه عبارت است از $t_1=h/u\cos\alpha$. روشن است که t_1 هنگامی کمینه است که $\cos\alpha=1$؛ یعنی $\alpha=0$ باشد. پس برای پیمودن رودخانه در کوتاهترین زمان، قایقران باید همواره دماغه‌ی قایق را عمود بر ساحل نگه دارد. داریم $t_{\min}=h/u$ با فرض $\alpha=0$ و $t=t_{\min}$ می‌توان x_1 را حساب کرد- نقطه‌ای که قایق به ساحل روبرو می‌رسد. داریم $x_1=h(v/u)$

مثال ۱۰-۱ برابرشکل (۲۸-۱) جرم M در لوله‌ی OA با سرعت u حرکت راست خط دارد. لوله‌ی OA در صفحه‌ی OXY با سرعت زاویه‌ای ω پادساعتگرد می چرخد. سرعت جرم M را نسبت به مختصات OXY بر حسب فاصله اش، r ، از مبداء مختصات بیابید.



شکل ۲۸-۱

حل: در اینجا u سرعت جرم M نسبت به لوله است و $\mathbf{v}$ سرعت یک نقطه‌ی لوله نسبت به ناظر ساکن در O است. $\mathbf{v}'$ سرعت جرم M نسبت به ناظر ساکن در O است. حرکت جرم M از نگاه ناظر ساکن در O نتیجه‌ی دو حرکت است: حرکت جرم نسبت به لوله OA و حرکت همراه با OA. در اثر چرخش لوله‌ی OA حول نقطه‌ی O ، جرم M در فاصله‌ی r از مبداء مختصات، سرعتی برابر $v = r\omega$ به دست می آورد که بر OA عمود است. با توجه به بردارهای سرعت در شکل (۲۸-۱) می‌توان سرعت $\mathbf{v}'$ جرم M را نسبت به ناظر ساکن در O حساب کرد. چون u و v بر یکدیگر عمودند. اندازه‌ی v' برابر $v' = \sqrt{u^2 + r^2\omega^2}$ است.

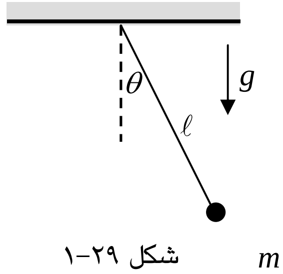
۱۱-۱ یکاها و تحلیل ابعادی

یکاها یا ابعاد هر کمیت فیزیکی توان‌هایی از جرم، طول و زمان مربوط به آن کمیت است. برای نمونه، یکای سرعت متربرثانیه است. بررسی یکاها دو سود دارد: نخست، پیش از آنکه مسئله‌ای را حل کنیم با وارسی یکاها می‌توانیم به تقریب (تا حد یک ضریب عددی) بگوییم پاسخ مسئله چگونه باید باشد. دوم، وارسی یکاها در پایان محاسبه‌ها می‌تواند بگوید که آیا پاسخ به دست آمده شانس درست بودن دارد یا نه. اگرچه به یقین نخواهد گفت که پاسخ درست است؛ اما می تواند شما را از نادرستی پاسختان مطمئن کند؛ و شما باید به حل مسئله برگردید و آن را دوباره بررسی کنید. برای نمونه، اگر هدف مسئله‌ای یافتن طولی باشد و پاسخ ما به جرم برسد، آنگاه می‌دانیم که حل مسئله نادرست است.

بگذارید موضوع را با چند نمونه روشن‌تر بیان کنیم. در سه مثال زیر من از برخی نتیجه‌ها استفاده خواهم کرد که در فصل‌های آینده آنها را اثبات خواهم کرد؛ برخی از آنها را شما می‌دانید. از نماد [ ] برای یکاها استفاده خواهیم کرد. جرم را با M، طول را با L و زمان را با T نشان خواهیم داد. پس، سرعت را به صورت $[v] = L/T$ خواهیم نوشت و ثابت گرانش را با $[G] = L^3/MT^2$ نشان خواهیم داد (با توجه به این که $G\, m_1 m_2/r^2$ بعد نیرو دارد، می‌توانید این را دریابید.)

مثال ۱۱-۱ جرم m از ریسمان بدون جرم به طول ℓ آویزان است و در صفحه‌ی عمودی برابر شکل(۲۹-۱) تاب می‌خورد. شتاب گرانش g است. در باره‌ی بسامد نوسان کوچک (θهای کوچک) این آونگ چه می‌توان گفت؟

حل: تنها کمیت های با بعد مسئله عبارت اند از $[m] = M$ ، $[\ell] = L$ و $[g] = L/T^2$. اما کمیت بی‌بُعد دیگری هم در مسئله



شکل ۱-۲۹

وجود دارد: $\theta_\circ$ که بیشتر وقت ها فراموشش می‌کنیم. می‌خواهیم بسامد را بیابیم که یکایش $1/T$ است. تنها ترکیبی از کمیت‌های دارای بعد مسئله که می‌تواند بعد $1/T$ داشته باشد $\sqrt{g/\ell}$ است. با وجود این، نمی‌توان از وابستگی $\theta_\circ$ چشم پوشی کرد. چگونگی وابستگی بسامد به $\theta_\circ$ را هم نمی‌دانیم . پس عمومی ترین شکل بسامد عبارت است از

$$\omega = f\,(\theta_\circ)\sqrt{g/\ell} \qquad (۱-۹۳)$$

که در آن f تابع بی بعدی از متغیر بدون بعد $\theta_\circ$ است. (در اینجا بسامد را برحسب رادیان بر ثانیه اندازه‌گیری می‌کنیم و با ω نشان می‌دهیم که در حقیقت" بسامد زاویه‌ای" است. اگر آن را به ۲π تقسیم کنیم (این تقسیم کردن در یکاها اثر نمی کند) بسامد معمولی را بر حسب دور بر ثانیه (هرتز) به دست می‌آوریم که با نماد ν نشان می‌دهند).

چند نکته:

۱- در این مثال البته $f\,(\theta_\circ)$ یک است و بنابراین، بسامد $\sqrt{g/\ell}$ است. اما هیچ راهی وجود ندارد که این را با تحلیل ابعادی نشان داد. باید در واقع مسئله را حل کرد و $f\,(\theta_\circ) = ۱$ بودن را به دست آورد. برای مقادیر بزرگ $\theta_\circ$، در بسط f مرتبه‌های بالاتر مهم می‌شوند و پاسخ به صورت $f\,(\theta_\circ) = ۱ - \theta_\circ^۲/۱۶ + \cdots$ می‌شود.

۲- توجه کنید که چون تنها یک جرم در مسئله وجود دارد، هرگز بسامد (که یکای آن $1/T$ است) نمی‌تواند به $[m] = M$ بستگی داشته باشد. اگر به m وابسته می‌شد ، هیچ چیزی که یکای جرم را حذف بکند و $1/T$ بسازد در مسئله وجود ندارد.

۳- گفتیم که تنها ترکیبی از کمیت‌های دارای بعد مسئله که بتواند یکای $1/T$ ایجاد کند، $\sqrt{g/\ell}$ است. فهمیدن آن در اینجا آسان است. در مسئله‌های پیچیده‌تر حدس زدن ترکیب درست کمیت‌های دارای بُعد ساده نیست. در این حالت‌ها شیوه‌ی زیر همواره راه گشا است: ضرب عمومی کمیت‌های با بعد را با توان های دلخواه تشکیل دهید (در این مسئله $m^a \ell^b g^c$) و سپس یکاهای این ضرب را برحسب a، b و c بنویسید . اگر بخواهیم یکای $1/T$ به دست آوریم ، پس می‌خواهیم داشته باشیم

$$M^a L^b \left(\frac{L}{T^۲}\right)^c = \frac{۱}{T} \qquad (۱-۹۴)$$

از این رابطه می‌بینیم که

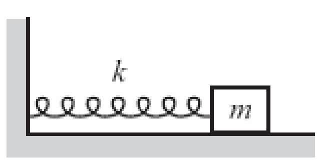
$$M: \ a = \circ, \quad L: \ b + c = \circ, \quad T: \ -۲c = -۱ \qquad (۱-۹۵)$$

و پاسخ این سه معادله عبارت اند از $a = \circ$ ، $b = -۱/۲$ و $c = ۱/۲$ و بنابراین $\sqrt{g/\ell}$.

در باره ی انرژی کل آونگ (انرژی پتانسیل را نسبت به پایین ترین نقطه‌ی مسیر حساب کنید) چه می‌توان گفت؟ در فصل ۵ در باره ی انرژی صحبت خواهیم کرد. در اینجا تنها چیزی که به آن نیاز داریم یکای انرژی است: $ML^۲/T^۲$. تنها ترکیبی از کمیت های با بعد مسئله که این یکا را تولید می‌کند $f\,(\theta_\circ) mg\,\ell$ است. با تحلیل ابعادی فراتر از این نمی‌توان رفت. البته، اگر اندکی فیزیک به آن بیفزاییم می‌توان گفت که انرژی کل برابراست با انرژی پتانسیل در بالاترین نقطه‌ی مسیر تاب خوردن که عبارت است از $mg\,\ell(۱ - \cos\theta_\circ)$.از بسط تیلور $\cos\theta$ (فصل ۲) می‌بینیم که $f\,(\theta_\circ) = (\theta_\circ^۲/۲) - (\theta_\circ^٤/۲٤) + \cdots$. بنابراین، در

مقایسه با بسامد، می‌بینیم که در انرژی θ_0 نقش مهمی دارد. ♣

مثال ۱۲-۱ جرم m به انتهای فنری با ثابت k وصل شده است (شکل ۳۰-۱) . نیروی فنر عبارت است از $F(x)=-kx$ که در آن x جابه‌جایی جسم از حالت ترازمندی است. در باره‌ی بسامد نوسان سامانه چه می‌توان گفت؟



شکل ۳۰-۱

حل: کمیت‌های با بعد مسئله عبارتند از $[m]=M$ و $[k]=M/T^2$ (این یکا با توجه به این که kx بعد نیرو دارد به دست می آید) و بیشینه جابه‌جایی از حالت ترازمندی $[x_0]=L$ است (طول ترازمندی هم وجود دارد اما نیرو به آن بستگی ندارد.) می‌خواهیم بسامد با یکای $1/T$ را بیابیم. تنها ترکیب کمیت های دارای بعد که به $1/T$ می‌انجامد عبارت است از

$$\omega=c\sqrt{k/m} \qquad (۹۶-۱)$$

که دوباره در آن c یک عدد بی بعد است و در این جا برابر یک است (با فرض این که ما ω را برحسب رادیان بر ثانیه اندازه گیری می‌کنیم.) اما فقط با بررسی ابعادی نمی‌توان یک بودنش را نشان داد. در باره‌ی انرژی چه می‌توان گفت؟ بعد انرژی ML^2/T^2 است و تنها ترکیب کمیت های با بعد مسئله که بتواند این یکا را بسازد Bkx_0^2 است. B یک عدد بی بعد است. در این مسئله $B=1/2$ و در نتیجه انرژی کل برابر است با $(1/2)\ kx_0^2$.

نکته: پتانسیل فنر واقعی کاملا سهمی نیست. در حقیقت نیرو به صورت $F(x)=-kx+bx^2+\cdots$ است. اگر این سری را در جمله‌ی دوم آن قطع کنیم، آنگاه کمیت دارای بعد دیگری هم در اختیار خواهیم داشت: $[b]=M/LT^2$. در این صورت، برای این که کمیتی با بعد بسامد، $1/T$، بیابیم باید x_0 و b در ترکیب bx_0 ظاهر شود؛ زیرا این تنها راهی است که از L ها رهایی پیدا می‌کنیم. آنگاه (همان‌گونه که در نکته‌ی ۳ مثال ۱۱-۱ گفتیم) با نوشتن ضرب کمیت‌ها می‌بینیم که بسامد باید به صورت $f\ (x_0b/k)\sqrt{k/m}$ باشد که در آن f یک تابع است. در این حالت وابستگی به x_0 نیز می‌تواند وجود داشته باشد. توجه کنید که به ازای $b=0$ پاسخ باید به $c\sqrt{k/m}$ کاهش یابد. پس، f باید به صورت $f\ (y)=c+c_1y+c_2y^2+\cdots$ باشد. ♣

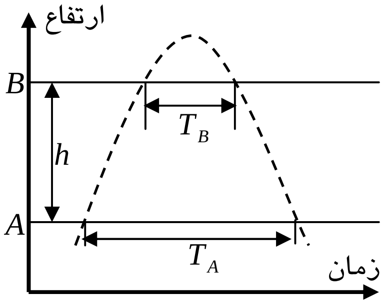
مثال ۱۳-۱ (ماهواره مدارپایین): ماهواره‌ای به جرم m درست بالای سطح زمین در مدار دایره می گردد. در باره‌ی سرعت ماهواره چه می‌توان گفت؟

حل: کمیت‌های با بعد مسئله عبارتند از $[m]=M$, $[g]=L/T^2$ و شعاع زمین $[R]=L$. خواست ما یافتن سرعت با بعد L/T است. (شاید بگویید جرم زمین، M_e و ثابت گرانش ، G ، را هم باید در نظر گرفت چون در روی زمین قانون گرانش نیوتون عبارت است از $F=G\,M_em/R^2$. چون می‌توان این نیرو را به صورت $m(G\,M_e/R^2)=mg$ نوشت، می‌توان اثر M_e و G را در g گنجاند.) تنها ترکیبی از کمیت‌های با بعد که می‌توان از آن یکای L/T ساخت عبارت است از

$$v=c\sqrt{gR} \qquad (۹۷-۱)$$

که در آن $c=1$ است.

مثال های تکمیلی



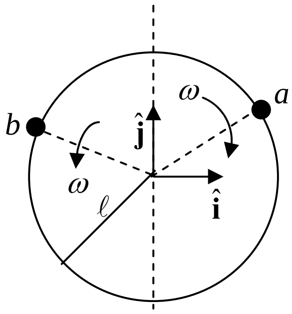
شکل ۳۰-۱

ت-۱ شتاب گرانش را می‌توان به صورت زیر اندازه گرفت: جسمی را قائم به هوا پرتاب کنید و زمان‌هایی را که جسم هم در رفت و هم در برگشت از دو نقطه‌ی معین می‌گذرد اندازه بگیرید. فرض کنید T_A زمانی است که جسم در رفت و برگشت خط A را قطع می‌کند و T_B بازه‌ی زمانی است که جسم در رفت و برگشت خط B را قطع می‌کند (شکل ۳۱-۱ را ببینید) . با فرض ثابت بودن شتاب گرانش نشان دهید که اندازه‌ی شتاب گرانش عبارت است از $g = 8h/(T_A^2 - T_B^2)$. در اینجا h فاصله‌ی بین خط های A و Bاست .

ت-۲ آسانسوری از سطح زمین با سرعت ثابت به بالا می‌رود. شخصی که در آسانسور است در زمان T_1 تیله‌ای را رها می-کند. تیله با شتاب ثابت $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ سقوط می‌کند واز سوراخی که در کف آسانسور وجود دارد می‌گذرد و پس از T_2 ثانیه با زمین برخورد می‌کند. در زمان T_1 ارتفاع آسانسور ازسطح زمین چقدر بوده است؟

ت-۳ منظور از *سرعت نسبی* سرعت نسبت به چارچوب معین است. سرعت جسمی نسبت به چارچوب مختصات A برابر است با $\mathbf{v}_A$. سرعت این جسم نسبت به چارچوب مختصات B که مکانش از چارچوب A با بردار $\mathbf{R}$ داده شده است، چیست؟ ($\mathbf{R}$ می‌تواند با زمان تغییر کند.)

ت-۴ ذره های a و b در دو جهت مخالف با سرعت زاویه‌ای ω بر روی دایره‌ای به شعاع ℓ حرکت می کنند (شکل ۳۲-۱). در زمان $t = 0$ هر دو ذره در نقطه‌ی $\mathbf{r} = \ell\hat{\mathbf{j}}$ اند. سرعت ذره‌ی a را نسبت به ذره‌ی b بیابید.



شکل ۳۲-۱

ت-۵ از پله‌ی بالایی پلکانی توپی با سرعت v به طور افقی پرتاب می‌شود. پهنا و بلندی هر پله باهم برابر و مساوی ℓ است.

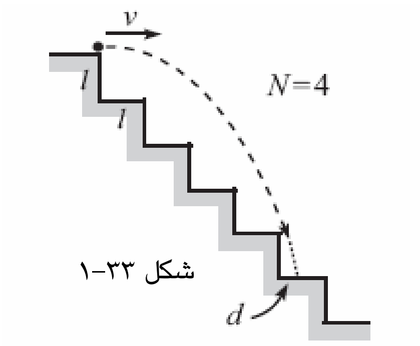
(الف): برای این که توپ بدون تماس با لبه‌ی پله‌ای که N پله در زیر پلکان‌ها قرار دارد بگذرد، سرعت v چقدر باید باشد؟ (شکل ۳۳-۲ وضعیت را با $N = 4$ نشان می‌دهد.)

(ب): توپ در چه فاصله‌ای از انتهای پله‌ی بعدی بر روی آن برخورد خواهد کرد (فاصله‌ی d در شکل)؟

(پ): اگر $N \to \infty$ مقدار d را بیابید.

(ت): مولفه‌های سرعت توپ را در هنگامی که از کنار لبه‌ی پله می‌گذرد، به دست آورید و توضیح دهید که چرا پاسخ شما با پاسخ بخش (پ) سازگار است.

ت-۶ در زمان $t = -T$ ذره‌ای از مبداء مختصات و از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و با شتاب ثابت a به حرکتش ادامه می‌دهد. ذره‌ی دیگری در زمان $t = 0$ از مبداء مختصات و از حالت سکون حرکت می‌کند و با همان شتاب a به حرکتش ادامه می‌دهد. در زمان t فاصله‌ی این دو ذره از هم چقدر است؟ در پاسخی که به دست می‌آورید دو جمله وجود دارد، معنی فیزیکی آنها را نخست در چند جمله توضیح دهید و سپس با رسم نمودارسرعت نسبت به زمان آن را تفسیر کنید.



شکل ۳۳-۱

ت-۷ دو قطار A و B در روی یک خط‌آهن و در یک سو حرکت می‌کنند. قطار A از نقطه‌ای به فاصله‌ی d از مبداء مختصات از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و با شتاب ثابت a پیش می‌رود. قطار B حرکتش را با سرعت $v_\circ$ از مبداء مختصات شروع می‌کند و با شتاب ثابت $-a$ حرکت می‌کند. برای این که قطارها باهم برخورد نکنند، بیشینه مقدار $v_\circ$ چقدر می‌تواند باشد؟ نمودار تقریبی مکان نسبت به زمان هر دو قطار را برای حالتی رسم کنید که قطارها در آستانه‌ی برخورد قرار می‌گیرند،

ت-۸ اتوموبیل‌های A و B از نقطه‌ای یکسان و با سرعت اولیه‌ی v_0 شروع به حرکت می‌کنند. اتومبیل A با سرعت ثابت پیش می‌رود و اتومبیل B با شتاب ثابت $-a$ واشتابیده می‌شود. در لحظه‌ای که سرعت B صفر می‌شود نسبت مسافت‌های پیموده شده توسط A و B را بیابید. پاسخ شما یک عدد ساده‌ای خواهد شد که به کمیت‌های داده شده بستگی ندارد. در چند جمله توضیح دهید که چرا این عدد ساده و مستقل از کمیت‌های مسئله است. برای هر دو اتوموبیل، نمودار به نسبت دقیقی از مسافت x برحسب زمان t رسم کنید.

ت-۹ توپی را از ارتفاع h رها می‌کنیم تا به سوی زمین سقوط کند. هم‌زمان با آن و در ست در زیر آن، توپ دیگری را از سطح زمین به طور قائم با سرعت اولیه‌ی v به بالا پرتاب می‌کنیم. برای این که دو توپ در ارتفاع $h/۲$ باهم برخورد کنند، سرعت v توپ دوم چقدر باید باشد؟ در لحظه‌ی برخورد، سرعت توپ دوم چیست؟

مسئله‌ها:

۱-۱ خلبانانی که هواپیمایی را راست‌خط می‌راند، می‌داند سرعت هوایی هواپیما (سرعت نسبت به هوا) ٤٨٢,٧ کیلومتر در ساعت است. او همچنین می‌داند که باد با سرعت ٩٦,٥٤ کیلومتر در ساعت با زاویه‌ی ٦٠ درجه نسبت به راستای حرکت هواپیما می‌وزد. خلبان چگونه می‌تواند سرعت هواپیما را نسبت به زمین حساب کند؟

۲-۱ از فراز بامی به بلندی ۳۰ متر توپی با سرعت اولیه ٥ m/s به طور عمودی به پائین پرتاب می‌شود:

(**الف**): پس از نیم ثانیه سقوط، سرعت توپ چقدر است؟ (**ب**): مکان توپ پس از یک و نیم ثانیه کجاست؟

(**پ**): هنگام برخورد توپ با زمین، سرعت آن چقدر است؟

۱-۳ پسر بچه‌ای می‌تواند توپی را با سرعت ۲۰ m/s به طور افقی پرتاب کند. او توپ را از اتوموبیل روبازی پرتاب می‌کند که با سرعت ۳۰ m/s عمود بر جهت پرتاب توپ حرکت می‌کند. اندازه و جهت واقعی توپ نسبت به ناظر ساکن چیست؟

۱-۴ آسانسوری با شتاب $۱,٥۲٤\,\mathrm{m/s^۲}$ پائین می‌رود. جسمی از سقف آسانسور رها می‌شود. درلحظه‌ای که جسم رها می‌شود ، شخص درون آسانسور متوجه آن می‌شود و درمی‌یابد که جسم روی پای او خواهد افتاد. اگر فاصله‌ی سقف تا کف اتاقک آسانسور ۲,۷۳٤ m باشد، مسافر درون آسانسور چقدر مجال دارد تا پای خود را از سر راه جسم افتان دور کند.

۱-۵ سرعت قطاری با آهنگ ثابت A از صفر به V افزایش می‌یابد و سپس برای مدتی ثابت می‌ماند و سرانجام با آهنگ ثابت B به صفر می‌رسد. اگر S مسافت کل پیموده شده باشد، نشان دهید که زمان کل این حرکت عبارت است از

$$\frac{S}{V}=\frac{V}{۲}\left(\frac{۱}{A}+\frac{۱}{B}\right) \qquad (۱-۹۸)$$

۱-۶ توپی به طور عمودی رو به بالا پرتاب می‌شود و در زمان $t_۱$ توپ به ارتفاع h می‌رسد. دوباره در زمان $t_۲$ توپ به ارتفاع h می‌رسد (در هنگام سقوط) . ثابت کنید که $h=g\,t_۱t_۲/۲$ و سرعت اولیه‌ی پرتاب $v_\circ=g\,(t_۱+t_۲)/۲$ است .

۱-۷ چرخی به شعاع $r=۱۰\,\mathrm{cm}$ به گونه‌ای می‌چرخد که رابطه‌ی میان سرعت خطی و زمان برای نقاط روی لبه‌ی چرخ به صورت $v=At+Bt^۲$ است. اگر $A=۳\ \mathrm{m/s^۲}$ و $B=۱\,\mathrm{m/s^۲}$ باشد زاویه‌ای را که راستای شتاب کل با شعاع چرخ در زمان های $t=۰,۱,۲,۳,٤,٥s$ پس از آغاز حرکت می‌سازد حساب کنید.

۱-۸ چرخی با شعاع $r=۱۰\,\mathrm{cm}$ با شتاب زاویه‌ای ثابت $\alpha=۳,۱٤\,\mathrm{rad/s^۲}$ می‌چرخد. در پایان ثانیه‌ی نخست حرکت، برای ذره‌ای در لبه‌ی چرخ.

(**الف**): سرعت زاویه‌ای را حساب کنید. (**ب**): سرعت خطی را به دست آورید. (**پ**): شتاب مماسی را حساب کنید. (**ت**): شتاب شعاعی چقدر است؟ (**ج**): شتاب کل را به دست آورید. (**چ**): زاویه‌ی میان بردار شتاب کل و شعاع چرخ چقدر است؟

۱-۹ نقطه‌ای روی دایره‌ای به شعاع $r=۲۰\,\mathrm{cm}$ با شتاب مماسی ثابت $a_t=٥\,\mathrm{cm/s^۲}$ حرکت می‌کند. چه مدت پس از آغاز حرکت، شتاب شعاعی a_r با شتاب مماسی آن برابر می‌شود؟ برای این که شتاب شعاعی دو برابر شتاب مماسی باشد چقدر زمان نیاز است؟

۱-۱۰ چرخی با شتاب زاویه‌ای ثابت می‌چرخد و پس از ۱۰ دور چرخیدن سرعت زاویه‌ای آن برابر $\omega=۲۰\,\mathrm{rad/s}$ می‌شود.

پشتاب زاویه‌ای چرخ را بیابید.

۱-۱۱ سرعت خطی چرخش یک نقطه در سطح زمین و در عرض جغرافیایی ۶۰° را بیابید.

۱-۱۲ سرعت زاویه‌ای اجسام زیر را بیابید.

(**الف**): چرخش روزانه‌ی زمین (**ب**): عقربه‌ی ساعت شمار یک ساعت (**پ**): عقربه‌ی دقیقه شمار یک ساعت (**ت**): ماهواره‌ای که در مدار دایره‌ای با دوره‌ی $T = ۸۸$ دقیقه حول زمین می‌گردد. (**ج**): اگر این ماهواره در فاصله‌ی ۲۰۰ کیلومتری از سطح زمین باشد، سرعت خطی آن را حساب کنید.

۱-۱۳ در یک مسابقه اتوموبیل‌رانی، اتوموبیلی با سرعت ثابت ۸۰ m/s روی دایره‌ای به شعاع ۲۰۰ m حرکت می‌کند

(**الف**): سرعت زاویه‌ای این اتوموبیل را حساب کنید. (**ب**): اندازه و جهت شتاب اتوموبیل را بیابید.

۱-۱۴ اتوموبیل مساله‌ی بالا از حالت سکون و با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند تا سرعت آن پس از ۳۰ s به ۸۰ m/s برسد

(**الف**): سرعت زاویه‌ای اتوموبیل چقدر است؟ (**ب**): شتاب زاویه‌ای اتوموبیل چقدر است؟ (**پ**): اندازه‌ی شتاب خطی اتوموبیل در زمان $t = ۱۰s$ چقدر است؟ (**ت**): چه مسافت کلی را در ۳۰ ثانیه‌ی اول پیموده است.

۱-۱۵ چرخی به قطر ۴ m با شتاب زاویه‌ای $۴\,rad/s^۲$ می‌چرخد. در زمان $t = ۰$ چرخ از حالت سکون آغاز به حرکت می‌کند. در این زمان، بردار شعاعی نقطه‌ی P در لبه‌ی چرخ با افق زاویه‌ی $۵۷,۳^\circ$ می‌سازد. در زمان $t = ۲$ s (**الف**): سرعت زاویه‌ای چرخ را بیابید. (**ب**): سرعت و شتاب خطی نقطه‌ی P را حساب کنید.(**پ**): مکان نقطه‌ی P را بیابید.

۱-۱۶ استوانه‌ای به شعاع ۱۲ cm از حالت سکون آغاز و با شتاب ثابت $۵\,rad/s^۲$ حول محورش می‌چرخد در زمان $t = ۳s$

(**الف**): سرعت زاویه‌ای آن چقدر است؟ (**ب**): سرعت خطی نقطه‌ای روی لبه‌ی استوانه را حساب کنید. (**پ**): مؤلفه‌های شعاعی و مماسی شتاب نقطه‌ای روی لبه‌ی استوانه را بیابید.

۱-۱۷ قرصی با شعاع ۶ cm با آهنگ ثابت ۱۲۰۰ دور در دقیقه حول محورش می‌چرخد.

(**الف**): سرعت زاویه‌ای قرص را حساب کنید (**ب**): سرعت خطی نقطه‌ای در فاصله‌ی ۲cm از مرکز را بیابید. (**پ**): شتاب شعاعی نقطه‌ای روی لبه‌ی قرص را حساب کنید. (**ت**): مسافت کلی را که یک نقطه در لبه‌ی قرص در ۲ s می‌پیماید چقدر است؟

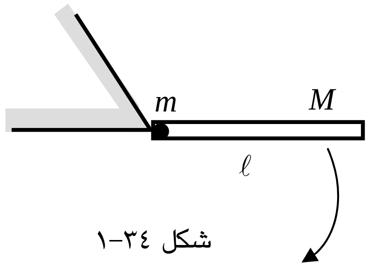
۱-۱۸ یک قایق موتوری می‌تواند با بیشینه سرعت ۱۰m/s نسبت به آب حرکت کند. جریان آب در رودخانه‌ای به پهنای ۴۰۰ متر برابر ۵ m/s است. قایقران می‌خواهد از این رودخانه در کوتاهترین زمان ممکن بگذرد و درست در نقطه‌ی مقابل به ساحل دیگر برسد. در چه جهتی باید قایق حرکت کند و زمان لازم برای پیمودن پهنای رودخانه چقدر است؟

۱-۱۹ واگنی با سرعت ۱۰m/s در مسیر راست خط حرکت می‌کند. مسافر درون واگن، توپی را به هوا پرتاب می‌کند. از دید مسافر توپ با افق زاویه‌ی ۶۰° می‌سازد. ناظری کنار خط آهن و در روی زمین مشاهده می‌کند که توپ حرکت عمودی رو به بالا دارد. این توپ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

۱-۲۰ قایقی برای گذشتن از رودخانه‌ای به پهنای ۱۵۰ m به دو دقیقه وقت نیاز دارد. سرعت قایق نسبت به آب ۳ m/s و سرعت جریان آب ۲ m/s است. قایق در چه نقاطی در پائین یا بالای رودخانه به ساحل روبرو می‌رسد؟

۱-۲۱ سرعت گریز در سطح یک سیاره با $v = \sqrt{۲GM/R}$ داده شده است که در آن M و R به ترتیب جرم و شعاع سیاره اند و G ثابت گرانش نیوتون است.

(الف): v را برحسب چگالی جرمی ρ بنویسید. **(ب)**: فرض کنید چگالی جرمی زمین ٤ برابر چگالی جرمی مشتری و شعاع آن ۱۱ برابر شعاع زمین است. نسبت v_j/v_e را بیابید.



شکل ۱-۳٤

۱-۲۲ لوله‌ای به جرم M و طول ℓ می تواند از یک انتها آزادانه تاب بخورد. برابر شکل (۱-۳٤) در این انتها، جرم m در درون لوله (بدون اصطکاک) قرار داده شده است. لوله را از حالت افقی رها می کنیم. اگر η کسری از طول لوله باشد که جرم m در زمانی که لوله به حالت عمودی درمی‌آید می‌پیماید، آیا η می تواند به ℓ بستگی داشته باشد؟

۱-۲۳ ستاره‌ای را در نظر بگیرید که نوسان می‌کند. بسامد (ν) آن به شعاع R و چگالی جرمی ρ ستاره بستگی دارد. وابستگی ν به R، ρ و G کدام است؟

۱-۲۴ سرعت حرکت موج در یک ریسمان به ویژگی‌های ریسمان بستگی دارد. سرعت موج در یک ریسمان چگونه به جرم M، طول ℓ و کشش ریسمان، T بستگی دارد؟

۱-۲۵ در یک قطره آب لرزان، بسامد لرزش به شعاع R قطره، چگالی جرمی ρ و کشش سطحی، S ، بستگی دارد. یکای کشش سطحی نیرو بر طول است. بسامد لرزش، ν چگونه به R، ρ و S وابسته است؟

۱-۲۶ سرعت موج در یک شاره (مایع یا گاز) به چگالی ρ محیط با بعد $[ML^{-۳}]$ و مدول کُپه‌ای B (کمیتی با یکای فشار یا نیرو بر سطح که ویژگی‌های کشسانی محیط را توصیف می‌کند) آن با بعد $[ML^{-۱}T^{-۲}]$ وابسته است. سرعت صوت را برحسب ρ و B بنویسید.

۱-۲۷ دوره‌ی آونگی در روی زمین s ۳ است. اگر نسبت شتاب گرانش ماه به زمین، $g_M/g_E \approx ۱/٦$ باشد دوره‌ی آونگ در ماه چیست؟

۱-۲۸ اندازه‌ی g در سطح زمین با رابطه‌ی $g = GM/R^۲$ داده می‌شود که در آن M و R جرم و شعاع زمین اند و G ثابت گرانش نیوتون است. اگر چگالی‌های زمین و ماه با رابطه ی $\rho_M/\rho_E = ۳/٥$ به هم مربوط باشند و $g_M/g_E = ۱/٦$ باشد، نسبت R_M/R_E را بیابید.

۱-۲۹ ذره‌ای به جرم m و سرعت اولیه‌ی V تحت تاثیر نیروی پس‌کشی وابسته به سرعت bv^n است.

(الف): برای $n = ۰$، ۱، ۲، ۳... زمانی را که طول می کشد تا جرم از حرکت باز ایستد چگونه به m و V و b بستگی دارد؟

(ب): برای $n = ۰$، ۱، ۲، ۳... مسافتی را که جرم می‌پیماید تا به ایستد چگونه به m و V و b بستگی دارد؟ مواظب باشید! ببینید که آیا پاسختان معنی دارد یا نه. تحلیل ابعادی پاسخ را تا حد یک ضریب عددی به دست می‌دهد. این مسئله ظریف است اما نباید شما را از به کار بردن تحلیل ابعادی دلسرد کند. بیشتر مسئله های تحلیل ابعادی سرراست اند.

حل مثال های تکمیلی

ت-۱ مسیر ذره در راستای قائم از رابطه‌ی زیر به دست می آید

$$z(t)=z_{\circ}+v_{\circ}t-\frac{۱}{۲}gt^{۲} \tag{۱-۹۹}$$

نقطه‌ی A را جایی در نظر بگیرید که $t=\circ$ و $z=\circ$ باشند. این فرض از عمومیت مسئله نمی‌کاهد. زمان لازم برای این که جسم از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برسد برابر است با T_{AB}

$$T_{AB}=\frac{T_A-T_B}{۲} \tag{۱-۱۰۰}$$

ارتفاع h برابر است با

$$h=z_B-z_A=v_{\circ}T_{AB}-\frac{g}{۲}T_{AB}^{۲} \tag{۱-۱۰۱}$$

برای یافتن $v_{\circ}$ باید داشته باشیم

$$z(t=\circ)=z(t=T_A)=\circ \tag{۱-۱۰۲}$$

که اگر در رابطه‌ی (۹۹-۱) قرار دهیم خواهیم داشت

$$\circ=\circ+v_{\circ}T_A-\frac{g}{۲}T_A^{۲}\Rightarrow v_{\circ}=\frac{gT_A}{۲} \tag{۱-۱۰۳}$$

با جاکذاری این مقدار در رابطه ی (۱۰۱-۱) به دست می‌آید

$$h=\frac{gT_A}{۲}T_{AB}-\frac{g}{۲}T_{AB}^{۲}=\frac{g}{۲}\left\{\frac{T_A(T_A-T_B)}{۲}-\frac{(T_A-T_B)^{۲}}{٤}\right\}=\frac{g}{۲}\left\{\frac{(T_A-T_B)}{۲}\frac{(T_A+T_B)}{۲}\right\} \tag{۱-۱۰٤}$$
$$\Rightarrow \quad g=\frac{۸h}{T_A^{۲}-T_B^{۲}}$$

ت-۲ سرعت آسانسور را $v_{۱}$ بنامید. مکان تیله از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$z(t)=h_{۱}+v_{۱}(t-T_{۱})-\frac{g}{۲}(t-T_{۱})^{۲} \tag{۱-۱۰٥}$$

در اینجا $h_{۱}$ ارتفاع آسانسور در زمان $t=T_{۱}$ از سطح زمین است که می‌خواهیم به دست بیاوریم. می‌دانیم که در زمان $t=T_{۱}+T_{۲}$ تیله با زمین برخورد می‌کند. بنابراین، برای تیله داریم $z(T_{۱}+T_{۲})=\circ$ است. پس، می‌توان نوشت

$$z(T_{۱}+T_{۲})=\circ=h_{۱}+v_{۱}T_{۲}-\frac{g}{۲}T_{۲}^{۲} \tag{۱-۱۰٦}$$

از سوی دیگر، چون آسانسور با سرعت ثابت $v_{۱}$ حرکت می‌کند، پس در زمان $T_{۱}$ ارتفاع آن باید

$$h_{۱}=v_{۱}T_{۱}\Rightarrow v_{۱}=\frac{h_{۱}}{T_{۱}} \tag{۱-۱۰۷}$$

باشد. با قرار دادن این مقدار برای v_1 در رابطه ی(۱۰٦-۱) به دست می‌آید

$$h_۱ = -\frac{h_۱}{T_۱}T_۲ + \frac{gT_۲^۲}{۲} \quad \Rightarrow \quad h_۱\left(۱+\frac{T_۲}{T_۱}\right) = \frac{gT_۲^۲}{۲} \quad \Rightarrow \quad h_۱ = \frac{gT_۱T_۲^۲}{۲(T_۱+T_۲)} \tag{۱-۱۰۸}$$

ت-۳ در چارچوب A مکان ذره را با $\mathbf{r}(t)$ و در چار چوب B آن را با $\mathbf{r}'(t)$ نشان دهید. مکان مبداء مختصات چارچوب B نسبت به چارچوب A را $\mathbf{R}(t)$ بنامید (شکل ۳۵-۱ را ببینید). داریم

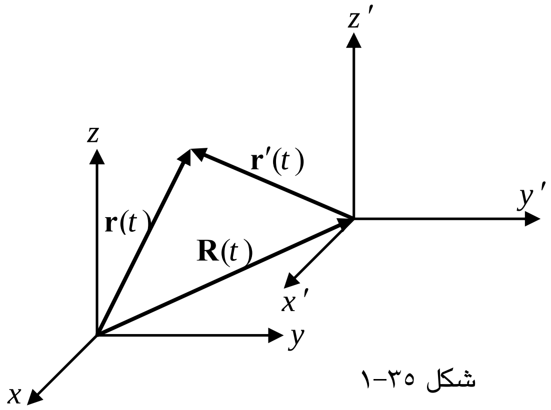
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{R}(t) \tag{۱-۱۰۹}$$

اگر از دو طرف نسبت به زمان مستق بگیریم، داریم

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}'(t) + \dot{\mathbf{R}}(t) \tag{۱--۱۱}$$

بنا به تعریف، $\dot{\mathbf{r}}(t)$ سرعت ذره در چارچوب A و $\dot{\mathbf{r}}'(t)$ سرعت آن در چارچوب B است. پس

$$v_B = v_A - \frac{d\mathbf{R}}{dt} \tag{۱-۱۱۱}$$



شکل ۳۵-۱

ت-۴ در چارچوب ثابت، مسیر ذره‌های a و b با رابطه‌های زیر داده می شوند. (شکل ۳۵-۱ را ببینید).

$$\mathbf{r}_a(t) = (\hat{\mathbf{i}}\sin(\omega t) + \hat{\mathbf{j}}\cos(\omega t)) \quad , \quad \mathbf{r}_b(t) = (-\hat{\mathbf{i}}\sin(\omega t) + \hat{\mathbf{j}}\cos(\omega t)) \tag{۱-۱۱۲}$$

پس، سرعت نسبی به قرار زیر است

$$\mathbf{v}_{rel} = \dot{\mathbf{r}}_a - \dot{\mathbf{r}}_b = ۲\ell\omega\cos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} \tag{۱-۱۱۳}$$

ت-۵ (الف) برای این که توپ مسافت $N\ell$ را در راستای افقی بپیماید به زمان $vt = N\ell \Rightarrow t = N\ell/v$ نیاز دارد. روشن است که لبه‌ی پله‌ی N-ام در فاصله‌ی $N\ell$ از زیر تقطه‌ی پرتاب توپ قرار دارد و نیز در فاصله‌ی افقی $N\ell$ از نقطه‌ی پرتاب است. بنابراین، زمان لازم برای این که توپ مسافت $N\ell$ را در راستای y سقوط بکند، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

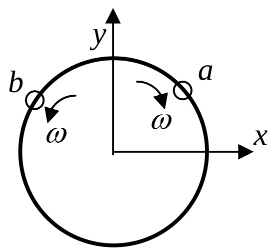
$$N\ell = \frac{۱}{۲}gt^۲ \tag{۱-۱۱٤}$$

این دو زمان یکی اند و بنابراین ، داریم

$$\frac{۱}{۲}g\left(\frac{N\ell}{v}\right)^۲ = N\ell \Rightarrow \frac{N\ell g}{۲} = v^۲ \Rightarrow v = \sqrt{\frac{N\ell g}{۲}} \tag{۱-۱۱۵}$$

(ب): از $t = N\ell/v$ و رابطه‌ی (۱۰۳-۱) دیده می‌شود که زمان لازم برای این که توپ N پله در راستای y سقوط کند عبارت است از

$$t_N = \frac{N\ell}{v}\frac{N\ell}{\sqrt{\frac{N\ell g}{۲}}} = \sqrt{\frac{۲N\ell}{g}} \tag{۱-۱۱٦}$$



شکل ۳٦-۱

برای این که توپ به یک پله پایین‌تر (یعنی به پله‌ی $N+1$) برسد، زمان لازم براب راست با

$$t_{N+۱}=\sqrt{\frac{۲(N+۱)\ell}{g}} \qquad (۱-۱۱۷)$$

بنابراین، مسافتی را که توپ در امتداد افقی در پله‌ی $N+۱$ می‌پیماید، عبارت است از

$$d=v_x\Delta t=v_x\left(t_{N+۱}-t_N\right)=\sqrt{\frac{N\ell g}{۲}}\left(\sqrt{\frac{۲(N+۱)\ell}{g}}-\sqrt{\frac{۲N\ell}{g}}\right)=\ell\left(\sqrt{N(N+۱)}-N\right) \qquad (۱-۱۱۸)$$

(پ): با استفاده از بسط $\sqrt{۱+\varepsilon}\approx ۱+\varepsilon/۲$ می‌توان d را به صورت زیر نوشت

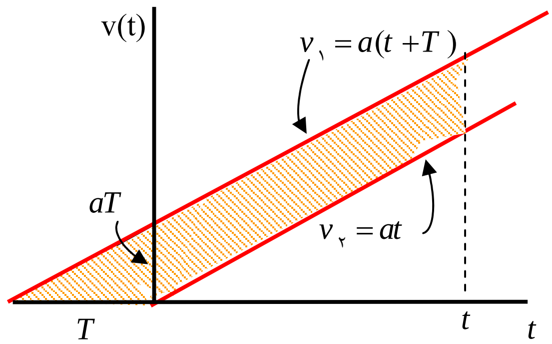
$$d=\ell\left(\sqrt{N(N+۱)}-N\right)\approx N\ell\left(\left(۱+\frac{۱}{۲N}\right)-۱\right)=\frac{\ell}{۲} \qquad (۱-۱۱۹)$$

(ت): مولفه‌ی x و y سرعت عبارت اند از

$$v_x=v=\sqrt{\frac{N\ell g}{۲}} \quad ; \quad v_y=gt_N=g\sqrt{\frac{۲N\ell}{g}}=\sqrt{۲N\ell g} \qquad (۱-۱۲۰)$$

توجه کنید که یکاها درست‌اند. نسبت $v_y/v_x=۲$ است و این مقدار "۲" مستقل از ℓ ، g و N است. دوشن است که به خاطر یکاها نمی‌تواند به ℓ و g وابسته باشد و به N هم نمی‌تواند وابسته باشد، چون همیشه می‌توان یک پله را به پله‌های کوچک زیادی تبدیل کرد. پاسخ $v_y/v_x=۲$ با پاسخ بخش (پ) هم سازگار است؛ چون در حد Nهای بزرگ، توپ وقتی از کنار لبه‌ی پله می‌گذرد، باید بسیار تند حرکت کند و بنابراین، اساسا در هنگام رفتن به پله‌ی بعدی در امتداد خط راستی حرکت می‌کند (زمانی برای شتاب گرفتن و خم شدن مسیرش وجود ندارد) . از پاسخ بخش (پ) دیده می‌شود که وقتی توپ مسافت ℓ را به پایین می‌پیماید، مسافت $\ell/۲$ در راستای افقی می‌پیماید. بنابراین، نسبت مولفه‌ی سرعت‌ها $v_y/v_x=\ell/(\ell/۲)=۲$ است.

ت-۶ در زمان t ذره‌ی نخست به مدت $t+T$ حرکت کرده‌است. بنابراین، مکان ذره‌ها عبارت‌اند از



شکل ۳۷-۱

$$x_۱=\frac{۱}{۲}a(t+T)^۲ \quad , \quad x_۲=\frac{۱}{۲}at^۲ \qquad (۱-۱۲۱)$$

پس ، اختلاف مکانی آنها برابر است با

$$x_۱-x_۲=aT\,t+\frac{۱}{۲}aT^۲ \qquad (۱-۱۲۲)$$

جمله‌ی دوم مسافتی است که ذره‌ی نخست در آغاز حرکت ذره‌ی دوم پیموده بود. جمله‌ی اول عبارت است از سرعت نسبی (aT) دو جسم ضربدر زمان t . این سرعت نسبی همیشه و برای همه‌ی زمان‌های t مقدار ثابت aT است؛ چون سرعت ذره‌ی اول در لحظه‌ی آغاز به حرکت ذره‌ی دوم است. از زمان $t=۰$ به بعد، آهنگ افزایش سرعت هر دو یکسان و برابر a است. بنابراین، سرعت نسبی ذره‌ها همواره ثابت باقی می‌ماند. در شکل (۳۷-۱) سطح زیر خم سرعت برحسب زمان برای هر دو ذره رسم شده است. اختلاف مسافت پیموده شده سطح هاشور خورده است. این سطح هاشور خورده مجموع مساحت یک مثلث و یک

متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث $1/2(aT)T = 1/2\,aT^2$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع هم حاصل ضرب پهنای افقی و ارتفاع است: $t(aT) = aT\,t$. بنابراین، تفسیر ما از دو جمله روشن است.

ت-۷ مکان اتوموبیل‌ها عبارت‌اند از

$$x_A = v_\circ t \quad , \quad x_B = v_\circ t - \frac{1}{2}at^2 \qquad (1-123)$$

سرعت B عبارت است از $v_\circ - at$ و در زمان $t = v_\circ/a$ به صفر می‌رسد. در این هنگام مکان ذره‌ها عبارت‌اند از

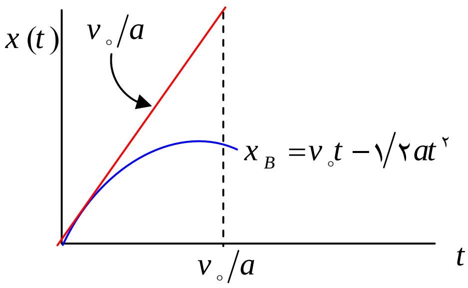
$$x_A = v_\circ\left(\frac{v_\circ}{a}\right) = \frac{v_\circ^2}{a} \quad , \quad x_B = v_\circ\left(\frac{v_\circ}{a}\right) - \frac{1}{2}a\left(\frac{v_\circ}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_\circ^2}{a} \qquad (1-124)$$

(توجه: $v_\circ$ بزرگ به اختلاف مسافت بزرگ می‌انجامد. شتاب a بزرگ به اختلاف مسافت کوچک می‌انجامد.)

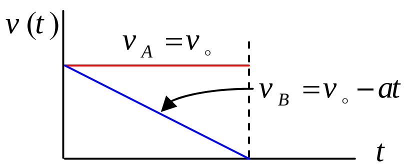
نسبت مسافت‌های پیموده شده توسط اتوموبیل‌ها عبارت است از

$$\frac{x_A}{x_B} = 2 \qquad (1-125)$$

نمودارها به صورت شکل (۱-۳۸) اند. تنها کمیت‌های مسئله که این نسبت ممکن است به آنها بستگی داشته باشد، $v_\circ$ و a اند. اما نسبت یک کمیت بدون بعد است و هیچ ترکیب ساده‌ای از $v_\circ$ و a که به یک کمیت بی بعد بینجامد، وجود ندارد. بنابراین، نسبت مسافت‌ها باید یک عدد ساده‌ای مستقل از $v_\circ$ و a باشد. اگر نمودار v را نسبت به زمان رسم کنید، به سادگی می‌توان دید که چرا باید این نسبت ۲ باشد. این نمودار در شکل (۱-۳۹) نشان داده شده است. سطح زیر خم سرعت A دو برابر سطح زیر خم سرعت B است و این مساحت‌ها ، مسافت‌هایی اند که اتوموبیل‌ها پیموده‌اند.

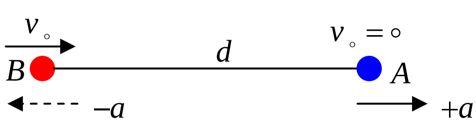


شکل ۱-۳۸



شکل ۱-۳۹

ت-۸ وضعیت قطارها در شکل (۱-۴۰) نشان داده شده‌اند. مکان قطارها عبارتند از



شکل ۱-۴۰

$$x_A = d + \frac{1}{2}at^2 \quad , \quad x_B = v_\circ t - \frac{1}{2}at^2 \qquad (1-126)$$

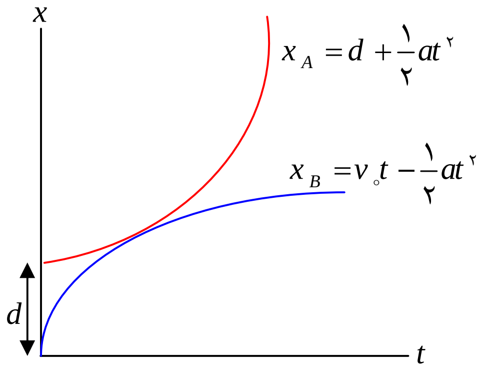
این دو فاصله هنگامی باهم برابرند که داشته باشیم

$$d + \frac{1}{2}at^2 = v_\circ t - \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad at^2 - v_\circ t + d = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_\circ \pm \sqrt{v_\circ^2 - 4ad}}{2a} \qquad (1-127)$$

اگر پاسخ حقیقی برای t وجود داشته باشد، قطارها باهم برخورد **می‌کنند**. یعنی اگر $v_\circ^2 \ge 4ad$ باشد. اگر $v_\circ^2 < 4ad$ باشد، رابطه‌ی (۱-۱۲۷) پاسخ حقیقی ندارد و قطارها باهم برخورد نخواهند کرد. پس، برای این که برخوردی روی ندهد باید $v_\circ < 2\sqrt{ad}$ باشد. وقتی قطارها در آستانه‌ی برخورد قرار می‌گیرند که $v_\circ = 2\sqrt{ad}$ باشد. نمودار تقریبی برای این حالت در

شکل (۱-٤۱) نشان داده شده است.

برای تمرین، نشان دهید که این وضعیت در مکان $3d/2$ روی می‌دهد و بیشینه مقدار x_B عبارت است از $2d$.



شکل ۱-٤۱

ت-۹ مبداء مختصات را در زمین و جهت مثبت را رو به بالا برگزینید. موقعیت مکانی توپ‌ها عبارت‌اند از

$$y_1 = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad , \quad y_2 = vt - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1-128)$$

و هنگامی با هم برابراند که

$$y_1 = y_2 \Rightarrow h - \frac{1}{2}gt^2 = vt - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{h}{v} \qquad (1-129)$$

پس، $t = h/v$ زمانی است که دو توپ باهم برخورد می‌کنند. می‌خواهیم ارتفاع نقطه‌ی برخورد از زمین $h/2$ باشد. بنابراین، اگر $t = h/v$ را در y_1 (یا y_2) قرار دهیم به دست می‌آید

$$\frac{h}{2} = h - \frac{1}{2}g\,(h/v)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{2} = \frac{1}{2}g\,\frac{h^2}{v^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gh} \qquad (1-130)$$

سرعت توپ دوم در زمان برخورد با توپ اول، $t = h/v$ ، برابر است با

$$v_2 = v - gt = \sqrt{gh} - g\,(h/v) = \sqrt{gh} - g\,\frac{h}{\sqrt{gh}} = 0 \qquad (1-131)$$

یعنی، تحت شرایط مسئله، در زمانی که برخورد روی می‌دهد، سرعت توپ دوم که از زمین به بالا پرتاب شده است، صفر می-شود. این نتیجه اندکی عجیب اما درست است. فرض کنید سرعت ذره‌ی دوم در هنگام برخورد صفر نمی‌بود و توپ‌ها بدون برخورد از درون یکدیگر می‌گذشتند. در این صورت توپ دوم از ارتفاع $h/2$ می‌گذشت و به بالا رفتنش ادامه می‌داد تا به نقطه‌ی اوج می‌رسید و سپس فرو می‌افتاد. در مسیر بازگشت بازهم به ارتفاع $h/2$ می‌رسید اما سرعتش **غیرصفر** می‌بود. توپ به سقوطش از ارتفاع $h/2$ به سوی زمین ادامه می‌داد. زمان لازم برای این بخش از سقوط $t = h/v$ است (چون با مسیر رو به بالا متقارن است) . این نتیجه با واقعیت این که توپ اول از **حالت سکون** مسافت $h/2$ رادر زمان $t = h/v$ سقوط می‌کند ناسازگار است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که سرعت توپ دوم در ارتفاع $h/2$ باید صفر باشد.