* انتگرال مسیر در مکانیک کوانتومی:

فرض کنید ذره ای در یک بعد در حال حرکت است و هملتونی آن توسط $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ داده می‌شود.

سؤال: سؤال اصلی در مورد استفاده از انتگرال مسیر این است که:

اگر ذره در لحظه ابتدائی $(t=0)$ در مکان q باشد، با چه دامنه احتمالی در لحظه $t=T$ در مکان q' است؟

داریم:

1) $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$ ، $\hat{q}$ عملگر مکان

$|q\rangle$ حالت ذره (ویژه حالت عملگر مکان) ، q ویژه مقدار

2) $\langle q'|q\rangle = \delta(q-q')$

3) $\int dq\, |q\rangle\langle q| = 1$

✓ حالت اولیه در لحظه $t=0$: $|\psi(0)\rangle = |q\rangle$

✓ حالت نهائی در لحظه $t=T$: $e^{-iHT/\hbar}|q\rangle = e^{-iHT/\hbar}|\psi(0)\rangle = |\psi(T)\rangle$

سؤال؟

$$A = \langle q'|\psi(T)\rangle = \langle q'|e^{-iHT/\hbar}|q\rangle = ?$$

این دامنه احتمال اندازه می‌گیرد که با چه احتمالی حالت ذره در لحظه $t=T$ (همان $|q'\rangle$) با حالت $|\psi(T)\rangle$ که از تحول زمانی $|q\rangle = |\psi(0)\rangle$ بدست آمده بود منطبق است:

$$\boxed{K(q',T;q,0) \equiv \langle q'|\psi(T)\rangle = \langle q'|e^{-i\hat{H}T/\hbar}|q\rangle = A}$$

انتشارگر از نقطه q در لحظه $t=0$ به نقطه q' در لحظه $t=T$

• انتشارگر از مبدأ زمان مستقل است و صرفاً به تفاوت زمان ابتدائی و انتهائی بستگی دارد.

$$K(q',T;q,0) = K(q',T+t_0;q,t_0)$$

نکته: • در مکانیک کلاسیک؛ مسیر حرکت ذره (مسیر کلاسیک) با مینیمم کردن کنش مسئله، با استفاده از حل معادله Euler-Lagrange بدست می‌آید.

$$\delta S = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

• این معادله یک معادله دیفرانسیل درجه ۲ در زمان است که با در اختیار داشتن شرایط اولیه برای مکان q و سرعت ذره $\dot{q}$ در لحظه $t=0s$ به راحتی مسیر کلاسیک ذره را مشخص می‌کند.

• در مکانیک کوانتومی؛ برخلاف مکانیک کلاسیک، ذره کوانتومی بین دو نقطه ابتدائی و انتهائی از ∞ مسیر ممکن می‌تواند عبور کند، و ما باید راهی پیدا کنیم که احتمال عبور از هر یک از این مسیرها را پیدا کنیم و در نهایت همه این احتمالها را با هم جمع بزنیم. (از آنجائیکه این مسیرها بصورت پیوسته به هم مرتبط هستند، جمع زدن در اینجا به معنی انتگرال گیری روی همه این مسیرهاست).

$\hbar = 1$

برای اینکه انتگرال $K(q',T;q,0)$ را بصورت انتگرال مسیر نوشت، از عبارت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\langle q'|e^{-iHT}|q\rangle = A = \langle q'|e^{-iH(T-t_1)}\,e^{-iHt_1}|q\rangle = K(q',T;q,t=0)$$

$$\overset{\uparrow}{=} \int \langle q'|e^{-i\hat H(T-t_1)}|q_1\rangle\langle q_1|e^{-i\hat H t_1}|q\rangle\, dq_1$$

$1=\int |q_1\rangle\langle q_1|$

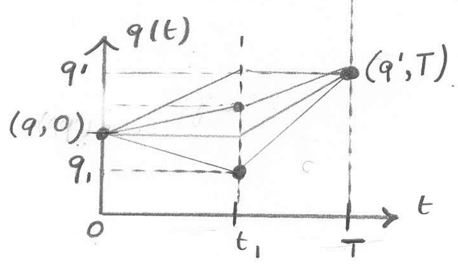
با استفاده از

$$K(q_1,t_1;q,0) = \langle q_1|e^{-i\hat H t_1}|q\rangle$$

$$K(q',T;q_1,t_1) = \langle q'|e^{-i\hat H(T-t_1)}|q_1\rangle$$

$$\rightarrow\quad A = K(q',T;q,t=0) = \int dq_1\; K(q',T;q_1,t_1)\,K(q_1,t_1;q,0)$$

• در اینجا بازهٔ $[0,T]$ را به دو قسمت $[t_1,T]$, $[0,t_1]$ کرده‌ایم، انتگرال $K(q',T;q,0)$ را از حاصلضرب $K(q',T;q_1,t_1)$, $K(q_1,t_1;q,0)$ نوشتیم و روی q_1 در لحظهٔ t_1 انتگرال گرفتیم.



این کار (تقسیم زمان) را می‌توان ادامه داد:

$q_0=q \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad \dots \quad q_N=q'$

$t_0=0 \qquad\qquad t_N=T$

$$\frac{1}{N}(T-0) = \frac{1}{N}(t_N-t_0) \equiv \delta \;\rightsquigarrow\; T=\delta N$$

$$A = \langle q'|e^{-i\hat H T}|q\rangle = \langle q'|\left(e^{-i\hat H\delta}\right)^N|q\rangle = \langle q'|\underbrace{e^{-i\hat H\delta}\dots e^{-i\hat H\delta}}_{N\text{ بار}}|q\rangle$$

$$= \int dq_1\,dq_2\dots dq_{N-1}\;\langle q'|e^{-i\hat H\delta}|q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}|e^{-i\hat H\delta}|q_{N-2}\rangle\langle q_{N-2}|\dots$$
$$\times\;\dots|q_2\rangle\langle q_2|e^{-i\hat H\delta}|q_1\rangle\langle q_1|e^{-i\hat H\delta}|q\rangle$$

$$\boxed{A = \int dq_1\,dq_2\dots dq_{N-1}\;K_{q_N,q_{N-1}}\,K_{q_{N-1},q_{N-2}}\dots K_{q_2,q_1}\,K_{q_1,q_0}}$$

$q_N=q' \qquad q_0=q$

با نامگذاری

$$K_{q_i,q_{i-1}} = K(q_i,t_i;q_{i-1},t_{i-1})$$

$$A = \sum_{paths} A_{path} \qquad \begin{cases} \sum_{paths} \equiv \int dq_1\dots dq_{N-1} \\ A_{path} \equiv K_{q_N,q_{N-1}}K_{q_{N-1},q_{N-2}}\dots K_{q_1,q_0} \end{cases}$$

توجه کنید که به ازای مقدار ثابت $q_1, \dots, q_{N-1}$ ، A_{path} فقط یک مسیر را مشخص می‌کند. ولی انتخاب $q_1, \dots, q_{N-1}$ دلخواه است، و لذا باید روی همه‌ی مسیرهای ممکن جمع بست (روی $q_1 \dots q_{N-1}$ انتگرال گرفت).

$$\int dq_1 \dots dq_{N-1} \qquad \sum_{paths}$$

ادعا:

$$K_{\text{انتشارگر}} = \int \mathcal{D}p(t)\, \mathcal{D}q(t)\, \exp\left(i \int_0^T dt \left(p\dot{q} - H(q,p) \right) \right)$$

در اینجا

$$\mathcal{D}q \equiv \prod_{j=1}^{N-1} dq_j$$

$$\mathcal{D}p \equiv \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi} \qquad (\text{for } \hbar = 1)$$

اثبات:

$$K_{q_{j+1}, q_j} \equiv \langle q_{j+1} | e^{i\hat{H}\delta} | q_j \rangle$$

$$= \langle q_{j+1} | 1 - i\delta \hat{H} - \frac{1}{2}\delta^2 \hat{H}^2 + \dots | q_j \rangle$$

جمله اول

$$\langle q_{j+1} | q_j \rangle = \delta(q_{j+1} - q_j) = \int \frac{dp_j}{(2\pi)} e^{-ip_j(q_{j+1} - q_j)}$$

جمله دوم

$$-i\delta \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle = -i\delta \langle q_{j+1} | \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \right) | q_j \rangle$$

$$= -i\delta \int \frac{dp_j}{2\pi} \left(\langle q_{j+1} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | p_j \rangle \langle p_j | q_j \rangle + \langle q_{j+1} | V(\hat{q}) | q_j \rangle \right)$$

$$= -i\delta \int \frac{dp_j}{(2\pi)} \left\{ \frac{p_j^2}{2m} \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | q_j \rangle + V(q_j) \langle q_{j+1} | q_j \rangle \right\}$$

Use

$$\langle p_j | q_j \rangle = e^{-iq_j p_j}$$

$$\langle q_{j+1} | p_j \rangle = e^{+iq_{j+1} p_j}$$

$$\langle q_{j+1} | q_j \rangle = \delta(q_{j+1} - q_j) = \int \frac{dp_j}{(2\pi)} e^{+ip_j(q_{j+1} - q_j)}$$

$$= -i\delta \int \frac{dp_j}{(2\pi)} \left\{ \frac{p_j^2}{2m} e^{+ip_j(q_{j+1} - q_j)} + V(q_j) e^{+ip_{j+1}(q_{j+1} - q_j)} \right\}$$

$$\text{جمله دوم} = -i\delta \int \frac{dp_j}{(2\pi)} \left(\frac{p_j^2}{2m} + V(q_j) \right) e^{ip_j(q_{j+1} - q_j)} \qquad (\star)$$

← نکته: البته به همان خوبی $\langle q_{j+1} | V(\hat{q}) | q_j \rangle = V(q_{j+1})\delta(q_{j+1} - q_j)$. پس برای در نظر گرفتن هر دو حالت به جای $V(q_j)$ در رابطه‌ی $(\star)$ از $V(\bar{q}_j)$ استفاده می‌کنیم که در آن $\bar{q}_j \equiv \frac{1}{2}(q_{j+1} + q_j)$

$$K_{q_{j+1},q_j} = \langle q_{j+1} | e^{+i\hat{H}\delta} | q_j \rangle = \int \frac{dp_j}{2\pi} e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)} \left(1 - i\delta\left(\frac{p_j^2}{2m} + V(\bar{q}_j)\right) + \cdots\right)$$

$$= \int \frac{dp_j}{2\pi} e^{ip_j(q_{j+1}-q_j)} e^{-i\delta H(p_j,\bar{q}_j)}$$

$$= \int \frac{dp_j}{2\pi} \exp\left(i\delta\left[p_j \frac{(q_{j+1}-q_j)}{\delta} - H(p_j,\bar{q}_j)\right]\right)$$

به این ترتیب:

$$\boxed{\begin{aligned} K(q'=q_N, t_N=T; q=q_0, t_0=0) &= \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \; K_{\underbrace{q_N}_{q_N=q'},q_{N-1}} \cdots K_{q_1,q_0=q} \\ &= \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi} \exp\left(i\delta\sum_{j=0}^{N-1}\left[p_j \frac{(q_{j+1}-q_j)}{\delta} - H(p_j,\bar{q}_j)\right]\right) \end{aligned}}$$

- در حد $N\to\infty$ و $\delta\to 0$ (یعنی حد پیوستار، وقتی ∞ نقطه‌ی q_j به صورت پیوسته بین دو نقطه‌ی ابتدایی و انتهایی $q_0=q$ ، $q_N=q'$ وجود داشته باشند)

$$\delta \sum_{j=0}^{N-1} \xrightarrow[N\to\infty]{\delta\to 0} \int_0^T dt$$

$$\frac{q_{j+1}-q_j}{\delta} \xrightarrow{\delta\to 0} \frac{dq_j}{dt}$$

$$\boxed{\rightarrow K(q'=q_N, t_N=T; q=q_0, t_0=0) = \int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p \exp\left(i\int_0^T dt\,\left(p\dot{q} - H(p,q)\right)\right)}$$

$$\mathcal{D}p \equiv \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi}, \quad \mathcal{D}q \equiv \prod_{j=1}^{N-1} dq_j$$

نکته: هرگاه $V(q)$ فقط تابعی از q باشد و به p بستگی نداشته باشد می‌توان انتگرال‌گیری روی p را انجام داد و رسید به:

$$\boxed{K(q',T;q,0) \stackrel{!}{=} \int \mathcal{D}q\, e^{iS[q(t)]} = \int \mathcal{D}q\, e^{i\int_0^T dt\, L(q,\dot{q})}}$$

اثبات: برای این کار K را مجدداً بصورت گسسته می‌نویسیم:

$$K = \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \, \exp\left(-i\delta \sum_{j=1}^{N-1} V(\bar{q}_j)\right)$$
$$\times \int \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi} \exp\left(i\delta \sum_{j=0}^{N-1}\left(p_j \dot{q}_j - \frac{p_j^2}{2m}\right)\right)$$

$$\dot{q}_j \equiv \frac{q_{j+1} - q_j}{\delta}$$

حالا استفاده می‌کنیم از

$$\int \frac{dp}{2\pi} e^{i\delta\left(p\dot{q} - \frac{p^2}{2m}\right)}$$
$$= \int \frac{dp}{2\pi} \exp\left(-\frac{i\delta}{2m}\left[p^2 - 2mp\dot{q} + m^2\dot{q}^2 - m^2\dot{q}^2\right]\right)$$
$$= \int \frac{dp}{2\pi} \exp\left(\frac{-i\delta}{2m}(p - mq)^2 + \frac{i\delta m\dot{q}^2}{2}\right)$$
$$= e^{\frac{i\delta m\dot{q}^2}{2}} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\delta}}$$

$$\curvearrowright K = \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \, e^{-i\delta \sum_{j=1}^{N-1} V(\bar{q}_j)} \prod_{j=0}^{N-1} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\delta}} \, e^{i\delta \frac{m\dot{q}_j^2}{2}}$$

$$(\star) \qquad = \left(\frac{m}{2\pi i\delta}\right)^{N/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \, \exp\left(i\delta \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{\left[\frac{1}{2}m\dot{q}_j^2 - V(\bar{q}_j)\right]}_{L(q_j,\,\dot{q}_j)}\right)$$

$$\dot{q}_j \equiv \frac{q_{j+1} - q_j}{\delta}$$

و در حد $\delta \to 0$, $N \to \infty$ ، مجدداً

$$\dot{q}_j = \frac{dq}{dt} \quad , \quad \delta \sum_{j=0}^{N-1} \xrightarrow[N\to\infty]{\delta\to 0} \int_0^T dt$$

$$\boxed{K(q', T; q, 0) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \; e^{i\int_0^T L(q,\dot{q})\,dt}}$$

ضریب نرمالیزاسیون

که در آن $L(q,\dot{q}) = T - V(q) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$. و با استفاده از $\int_0^T L\,dt = S$

$$\boxed{K(q', T; q, 0) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \; e^{iS[q(t)]}}$$

$\hbar = 1$

مثال: انتشارگر ذره آزاد: الف) محاسبه مستقیم ←

$$K = \langle q' | e^{-i\hat{H}T} | q \rangle =$$

برای ذره آزاد $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m}$

$$= \langle q' | e^{-\frac{i\hat{P}^2}{2m}T} | q \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \langle q' | \exp\left(-\frac{i\hat{P}^2}{2m}T\right) | p \rangle \langle p | q \rangle$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi} e^{\frac{-ip^2T}{2m}} \underbrace{\langle q' | p \rangle \langle p | q \rangle}_{= e^{+iq'p} e^{-iqp}}$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi} e^{\frac{-ip^2T}{2m}} e^{ip(q'-q)}$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi} e^{\frac{-iT}{2m}\left(p^2 - \frac{2m}{T}(q'-q)p + \frac{m^2}{T^2}(q'-q)^2 - \frac{m^2}{T^2}(q'-q)^2\right)}$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi} e^{-\frac{iT}{2m}\left(p - \frac{m}{T}(q'-q)\right)^2} e^{+\frac{im}{2T}(q'-q)^2}$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi m}{iT}}\, e^{\frac{im}{2T}(q'-q)^2} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}}\, e^{\frac{im}{2T}(q-q')^2}}$$

پس این نتیجه‌ای است که انتظار داریم از انتگرال مسیر هم بدست بیاید.

ب) محاسبه از طریق انتگرال مسیر:

در رابطه (*) صفحه (۱۱۰) باید $V(\bar{q}_j) = 0$ قرار دهیم برای ذره آزاد و در نظر داشته باشیم که $\dot{q}_j \equiv \frac{q_{j+1} - q_j}{\delta}$

$$(*)\quad K = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \delta\to 0}} \left(\frac{m}{2\pi i\delta}\right)^{N/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \, \exp\left(\frac{im}{2\delta} \sum_{k=1}^{N-1} (q_{k+1} - q_k)^2\right)$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \delta\to 0}} \left(\frac{m}{2\pi i\delta}\right)^{N/2} \int dq_1 \dots dq_{N-1} \, \exp\left(\frac{im}{2\delta}\left[(q_N - q_{N-1})^2 + \dots (q_1 - q_0)^2\right]\right)$$

$$q_0 \equiv q \,,\quad q_N \equiv q'$$

• همه انتگرال‌ها گاوسی هستند ولی انتگرال روی هر q_j دوبار ظاهر می‌شود (لذا از مربع کامل کردن و متوالی محاسبه) ←

$$K = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \delta\to 0}} \left(\frac{m}{2\pi i\delta}\right)^{N/2} \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{2\pi i\delta}{m}\right)^{\frac{N-1}{2}} \exp\left(\frac{im}{2N\delta}(q'-q)^2\right)$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \delta\to 0}} \left(\frac{m}{2\pi i \underbrace{N\delta}_{T}}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{im(q'-q)^2}{2\underbrace{N\delta}_{T}}\right) = \left(\frac{m}{2\pi i T}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{im(q-q')^2}{2T}}$$

همان جوابی که از محاسبه مستقیم بدست آمد. ■

نکته: در مورد ذره آزاد:

$$\frac{p^2}{2m}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{\Delta q}{\Delta t}\right)^2=\frac{1}{2}m\frac{(q'-q)^2}{T^2}=T_{kin}$$

$$L=T_{kin}$$ ← در مورد ذره آزاد

$$K=\mathcal{N}\;e^{\frac{im(q-q')^2}{2T}}=\mathcal{N}\,e^{iTL}=\mathcal{N}\;e^{iS(q_c)}$$

ضریب نرمالیزاسیون

Classical Path

$$K=\left(\frac{m}{2\pi iT\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\;e^{\frac{iS(q_c)}{\hbar}}$$ انتشارگر ذره آزاد.

• چگونه میتوان با استفاده از انتشارگر به معادله شرودینگر رسید؟

$$K(x,t+\epsilon\,;x_0,t)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m(x-x_0)^2}{2\epsilon}-\epsilon V\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right]\right)$$

$$\psi(x\,;t+\epsilon)=\langle x|\psi(t+\epsilon)\rangle=\langle x|e^{-\frac{i\hat{H}\epsilon}{\hbar}}|\psi(t)\rangle$$

$$=\int dx_0\;\langle x|e^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar}|x_0\rangle\langle x_0|\psi(t)\rangle$$

$$=\int dx_0\;K(x,t+\epsilon\,;x_0,t)\;\psi(x_0,t)$$

$$\psi(x\,;t+\epsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx_0\;\psi(x_0,t)\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{im(x-x_0)^2}{2\epsilon\hbar}\right)\exp\left(\frac{-i\epsilon}{\hbar}V\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right)$$

انتخاب : $x-x_0\equiv y \;\Rightarrow\; x_0=x-y \;\Rightarrow\; dx_0=-dy$

$$(**)\quad \psi(x\,;t+\epsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}dy\;\psi(x-y,t)\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{imy^2}{2\epsilon\hbar}\right)\exp\left(\frac{-i\epsilon}{\hbar}V\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)$$

$$\psi(x-y\,;t)=\psi(x,t)-y\frac{d\psi}{dx}+\frac{1}{2}y^2\frac{d^2\psi}{dx^2}+\cdots$$

$$V\left(x-\frac{y}{2}\right)=V(x)+O(y)$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon V\left(x-\frac{y}{2}\right)}\approx 1-\frac{i\epsilon}{\hbar}V(x)+\cdots$$

بسط رابطه (**) عبارت خواهد بود از:

$$\psi(x,t+\epsilon) \simeq \int dy \left[\psi(x,t) - y\frac{d\psi}{dx} + \frac{1}{2}y^2\frac{d^2\psi}{dx^2} + \dots\right]\left[1 - \frac{i\epsilon}{\hbar}V(x) + \dots\right] e^{\frac{imy^2}{2\epsilon\hbar}} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

a) • $$\psi(x,t)\left(\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \int dy\, e^{\frac{imy^2}{2\epsilon\hbar}} = \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\psi(x,t)\left(\frac{2\pi\epsilon\hbar}{-im}\right)^{\frac{1}{2}} = \psi(x,t)$$

b) • $$\frac{-i\epsilon}{\hbar}V(x)\psi(x,t)\int dy\, e^{\frac{imy^2}{2\epsilon\hbar}}\left(\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{i\epsilon}{\hbar}V(x)\psi(x,t)$$

c) • $$-\frac{d\psi}{dx}\int dy\, y\, e^{\frac{imy^2}{2\epsilon\hbar}}\left(\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

d) • $$\frac{1}{2}\frac{d^2\psi}{dx^2}\underbrace{\int dy\, y^2\, e^{\frac{imy^2}{2\epsilon\hbar}}}_{\frac{\sqrt{2\pi}}{\left(\frac{-im}{\hbar\epsilon}\right)^{3/2}}}\left(\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{\epsilon\hbar}{2mi}\frac{d^2\psi}{dx^2}$$

$$\psi(x,t+\epsilon) = \int dy\left(\psi(x,t) - \frac{i\epsilon}{\hbar}V(x)\psi(x,t) - y\frac{d\psi}{dx} + \frac{1}{2}y^2\frac{d^2\psi}{dx^2} + \dots\right)e^{\frac{imy^2}{2\epsilon\hbar}}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

نتیجه اینکه :

$$\boxed{\psi(x,t+\epsilon) \simeq \psi(x,t) + \frac{\epsilon}{i\hbar}V(x)\psi(x,t) - \frac{\epsilon\hbar^2}{2mi\hbar}\frac{d^2\psi}{dx^2}}$$

$$\rightarrow\ i\hbar\left(\frac{\psi(x,t+\epsilon) - \psi(x,t)}{\epsilon}\right) \simeq \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x,t) + O(\epsilon)$$

$$\boxed{i\hbar\frac{d}{dt}\psi(x,t) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x,t)}$$

در حد $\epsilon \to 0$

سؤال: چگونه است که در انتگرال مسیر ذره کوانتومی ∞ مسیر را بین دو نقطه ابتدائی در $t=0$ و انتهائی در $t=T$ طی می‌کند، در صورتیکه ذره کلاسیک با توجه به حل معادله Euler-Lagrange فقط یک مسیر کلاسیک را طی می‌کند؟

مسیر کلاسیک

$$K = \int \mathcal{D}q\, e^{\frac{iS[q]}{\hbar}} \xrightarrow[\text{حد کلاسیک}]{} K \sim N \exp\left(\frac{iS[q_c]}{\hbar}\right)$$

q_c این خاصیت را دارد که $\left.\frac{\delta S[q]}{\delta q}\right|_{q_c} = 0$ یعنی q_c حل کلاسیک است.

حل: بسط حول مسیر کلاسیک:

$$q = q_c + \eta(t)$$

1) $$S[q(t)] = S[q_c(t)+\eta(t)] = S[q_c(t)] + \int_0^T dt\, \eta(t) \frac{\delta S[q(t)]}{\delta q(t)}\Big|_{q_c} + \frac{1}{2!}\int_0^T dt_1\, dt_2 \frac{\delta^2 S}{\delta q(t_1)\delta q(t_2)}\Big|_{q_c} \eta(t_1)\eta(t_2) + O(\eta^3)$$

2) $$\mathcal{D}q = \mathcal{D}\eta$$

بنا به معادله حرکت کلاسیک $= 0$

$$\to K = \int \mathcal{D}q\, e^{\frac{iS[q=q_c+\eta]}{\hbar}} = e^{\frac{iS[q_c]}{\hbar}} \int \mathcal{D}\eta\, \exp\left(\cancel{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt \frac{\delta S}{\delta q(t)}\Big|_{q_c}\eta(t)} + \frac{i}{2!}\int dt_1 dt_2\, \eta(t_1)\eta(t_2) \frac{\delta^2 S}{\delta q(t_1)\delta q(t_2)}\Big|_{q_c} + \cdots \right)$$

$$\to K \approx e^{\frac{iS[q_c]}{\hbar}}$$

بیشترین سهم به انتگرال مسیر را $S(q_c)$ می‌دهد

Saddle point expansion   بسط نقطه زینی