وابستگی زمانی عملگرها و حالتها :

(1) نمایش شرودینگر — Schrödinger Picture

(2) نمایش هایزنبرگ — Heisenberg Picture

(3) نمایش دیراک یا برهمکنشی — Dirac Picture

معادله شرودینگر وابسته به زمان :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi,t\rangle = \hat{H} |\psi,t\rangle$$

فرض می‌کنیم که عملگر هملیتونی وابستگی صریحی به زمان نداشته باشد :

$$\frac{d\,|\psi,t\rangle}{|\psi,t\rangle} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}\, dt$$

$$\ln |\psi,t\rangle \Big|_{t_0}^{t} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}\, t \Big|_{t_0}^{t} \longrightarrow \ln \frac{|\psi,t\rangle}{|\psi,t_0\rangle} = \frac{-i\hat{H}(t-t_0)}{\hbar}$$

$$\boxed{|\psi,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} |\psi,t_0\rangle}$$

به این ترتیب با استفاده از هملیتونی مسئله می‌شود اطلاعاتی در مورد تحول زمانی سیستم بدست آورد.

$$|\psi,t_0\rangle \longrightarrow |\psi,t\rangle$$

حالت سیستم در زمان t_0 $\xrightarrow[e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}]{}$ حالت سیستم در زمان t

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \text{is a unitary operator}$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!}$$

اگر $\hat{H} = \hat{H}^+ \longrightarrow$

$$\rightarrow \left(e^{-i\hat{H}t/\hbar}\right)^+ = e^{+i\hat{H}t/\hbar} = U^+$$

در $\quad UU^+ = U^+U = 1$

مقدار چشمداشتی عملگر B را در حالت $|\psi,t\rangle$ بدست می‌آوریم

$$\langle \psi,t|\hat{B}|\psi,t\rangle =$$

$$|\psi,t\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi,0\rangle$$

$$\langle \psi,t|\hat{B}|\psi,t\rangle = \langle \psi,0| \underbrace{e^{+i\hat{H}t/\hbar}\ \hat{B}\ e^{-i\hat{H}t/\hbar}}_{\equiv \hat{B}(t)} |\psi,0\rangle = \langle \psi,0|\hat{B}(t)|\psi,0\rangle$$

در این نمایش عملگر $\hat{B}$ وابسته به زمان است ولی حالت $|\psi,0\rangle$ به زمان بستگی ندارد. ولی بدست آوردیم :

$$\langle \psi,t|\hat{B}|\psi,t\rangle = \langle \psi,0|\hat{B}(t)|\psi,0\rangle$$

$$\langle B\rangle_t = \langle B(t)\rangle_0$$

در این دو تصویر: (۱) تصویر شرودینگر Schrödinger representation (picture)

(a) عملگرها وابستگی زمانی ندارند

(b) حالتهای فیزیکی در زمان تحول پیدا می‌کنند و تحول آنها از طریق عملگر تحول زمانی $e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ داده می‌شود.

(۲) تصویر هایزنبرگ Heisenberg representation (picture)

(a) حالتهای فیزیکی هیچگونه تحول در زمان ندارند

(b) آنچه تحول پیدا می‌کند عملگر است که در زمان متحول می‌شود و تحول آن از طریق

$$\hat{B}_H(t) = U^{+}(t)\; B_s\, U(t) \qquad \text{with} \qquad U(t) = \exp\left(\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}\right)$$

a) $\dfrac{d}{dt}\hat{B}_H(t) = ?$

$$= \frac{d}{dt}\left(e^{i\hat{H}_s t/\hbar}\,\hat{B}_s\, e^{-i\hat{H}_s t/\hbar}\right) =$$

$$= \frac{i\hat{H}_s}{\hbar}\left(e^{i\hat{H}_s t/\hbar}\hat{B}_s e^{-i\hat{H}_s t/\hbar}\right) - \frac{i}{\hbar}\left(e^{+i\hat{H}_s t/\hbar}\,\hat{B}_s\,\underbrace{\hat{H}_s\, e^{-i\hat{H}_s t/\hbar}}_{= e^{-i\hat{H}_s t/\hbar}\hat{H}_s}\right)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\hat{H}_s\left(e^{i\hat{H}_s t/\hbar}\,\hat{B}_s\, e^{-i\hat{H}_s t/\hbar}\right) - \frac{i}{\hbar}\left(e^{+i\hat{H}_s t/\hbar}\,\hat{B}_s\, e^{-i\hat{H}_s t/\hbar}\right)\hat{H}_s$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\hat{B}_H(t) = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_s, \hat{B}_H\right]} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}B_H(t)}_{\text{فقط وقتی وارد می‌شود که } B \text{ تابعیت صریحی از } t \text{ داشته باشد}} \qquad ?!$$

در ضمن داریم : $\hat{H}_s = \hat{H}_H(t)$

$$\hat{H}_H(t) = e^{i\hat{H}_s t/\hbar}\,\hat{H}_s\, e^{-i\hat{H}_s t/\hbar} = \hat{H}_s$$

$$\frac{d}{dt}\hat{H}_H(t) = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_s, \hat{H}_s\right] = 0$$

b) $\dfrac{d}{dt}|\psi\rangle_H = ?$ $\qquad$ with $\quad |\psi\rangle_H = |\psi, 0\rangle_s = e^{i\hat{H}_s t/\hbar}\,|\psi_s, t\rangle$

$$\frac{d}{dt}|\psi\rangle_H = \frac{d}{dt}\left(e^{i\hat{H}_s t/\hbar}|\psi, t\rangle_s\right)$$

$$= \frac{i\hat{H}_s}{\hbar}\, e^{i\hat{H}_s t/\hbar}|\psi, t\rangle_s + e^{i\hat{H}_s t/\hbar}\,\underbrace{\frac{d}{dt}|\psi, t\rangle_s}_{i\hbar\frac{d}{dt}|\psi, t\rangle_s = \hat{H}_s|\psi, t\rangle_s}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}_s\, e^{i\hat{H}_s t/\hbar} - e^{i\hat{H}_s t/\hbar}\hat{H}_s\right)|\psi, t\rangle_s$$

$$= 0 \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}|\psi\rangle_H = 0}$$

تصویر دیراک:

$H = H_0 + H_{int}$

$H_0 =$ همیلتونی آزاد

$H_{int} =$ همیلتونی برهمکنش

تصویر دیراک شروع خوبی برای حل مسائل اختلال وابسته به زمان است؛
در این تصویر عملگرها و حالتها به زمان بستگی دارند:

$$|\psi,t\rangle_I = e^{iH_0t/\hbar}\,|\psi,t\rangle_S$$

$$O_I(t) = e^{iH_0t/\hbar}\,O_S\,e^{-iH_0t/\hbar} \quad \text{or} \quad e^{+iH_0t/\hbar}\,O(t)\,e^{-iH_0t/\hbar} = O_I(t)$$

ادعا

a) $$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi,t\rangle_I = (H_{int})_I\,|\psi,t\rangle_I$$

b) $$\frac{d}{dt}O_I(t) = \frac{i}{\hbar}\left[H_0, O_I(t)\right] + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}O_I(t)}$$

فقط وقتی وارد می‌شود که O تابعیت صریحی از t داشته باشد.

نکته: با توجه به تعریف $|\psi,t\rangle_I$ داریم

$$|\psi,t=0\rangle_I = |\psi,0\rangle_S = |\psi\rangle_H$$

a) $$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi,t\rangle_I = i\hbar\frac{d}{dt}\left(e^{iH_0t/\hbar}|\psi,t\rangle_S\right)$$

$$= i\hbar\left(\frac{i}{\hbar}\right)H_0e^{iH_0t/\hbar}|\psi,t\rangle_S + i\hbar\,e^{iH_0t/\hbar}\frac{d}{dt}|\psi,t\rangle_S$$

$$= -H_0|\psi,t\rangle_I + i\hbar\,e^{iH_0t/\hbar}\left(\frac{-i}{\hbar}H|\psi,t\rangle_S\right)$$

$$= -H_0|\psi,t\rangle_I + e^{iH_0t/\hbar}\,H\,\underbrace{e^{-iH_0t/\hbar}\,e^{+iH_0t/\hbar}}_{=1}|\psi,t\rangle_S$$

$$= -H_0|\psi,t\rangle_I + H_I(t)\,|\psi,t\rangle_I$$

$$= (H_{int})_I\,|\psi,t\rangle_I$$

$$\boxed{i\hbar\frac{d}{dt}|\psi,t\rangle_I = (H_{int})_I\,|\psi,t\rangle_I} \quad \checkmark$$

b) $$\langle O_I(t)\rangle_I = \langle O_S\rangle_S$$

$$\langle O_S\rangle_S = {}_S\langle\psi,t|O_S|\psi,t\rangle_S = {}_I\langle\psi,t|e^{-iH_0t/\hbar}\,O_I(t)\,e^{+iH_0t/\hbar}|\psi,t\rangle_I$$

$$O_S = e^{-iH_0t/\hbar}\,O_I(t)\,e^{+iH_0t/\hbar}$$

با استفاده از خاصیت $UU^+=1$ برای $U = e^{+iH_0t/\hbar}$

$$\rightarrow \quad \boxed{O_I(t) = e^{+iH_0t/\hbar}\,O_S\,e^{-iH_0t/\hbar}}$$

$$\frac{d}{dt} O_I(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{iH_0t/\hbar} O_s e^{-iH_0t/\hbar}\right)$$

$$= \frac{iH_0}{\hbar} \underbrace{e^{iH_0t} O_s e^{-iH_0t/\hbar}}_{O_I(t)} + e^{iH_0t/\hbar} O_s \left(\frac{-i}{\hbar} H_0\right) e^{-iH_0t/\hbar}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\Big(H_0 O_I(t) - \underbrace{e^{iH_0t/\hbar} O_s e^{-iH_0t/\hbar}}_{= O_I(t)} \underbrace{e^{+iH_0t/\hbar} H_0 e^{-iH_0t/\hbar}}_{= H_0}\Big)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} O_I(t) = \frac{i}{\hbar}\left[H_0, O_I(t)\right]} \quad \checkmark$$

اگر از ابتدا به جای O_s از $O(t)$ استفاده کرده بودیم یعنی از

$$O_I(t) = e^{iH_0t/\hbar} O(t) e^{-iH_0t/\hbar}$$

$$\frac{d}{dt} O_I(t) = \frac{i}{\hbar}\left[H_0, O_I(t)\right] + \left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{O}\right)_I$$

خلاصه:

	تابع حالت	عملگر
تصویر شرودینگر $H_{کل} = H_S$	$i\hbar \frac{d}{dt}\vert\psi,t\rangle_S = \hat{H}_S \vert\psi,t\rangle_S$ $\vert\psi,t\rangle_S = e^{-i\hat{H}_St/\hbar}\vert\psi,0\rangle_S$	H_S یا O_S مستقل از زمان $\frac{d}{dt}O_S = 0$
تصویر هایزنبرگ $H_{کل} = H_S$	$\vert\psi\rangle_H = \vert\psi,0\rangle_S = e^{iH_St/\hbar}\vert\psi,t\rangle_S$ $\frac{d}{dt}\vert\psi\rangle_H = 0$	$O_H(t) = e^{iH_St/\hbar} O_S e^{-iH_St/\hbar}$ $\frac{d}{dt}O_H(t) = \frac{i}{\hbar}\left[H_S, O_H(t)\right]$
تصویر دیراک $H_{کل} = H_S + H_{int}(t)$	$\vert\psi,t\rangle_I = e^{iH_0t/\hbar}\vert\psi,t\rangle_S$ $i\hbar\frac{d}{dt}\vert\psi,t\rangle_I = \left(H_{int}\right)_I \vert\psi,t\rangle_I$	$O_I(t) = e^{iH_0t/\hbar} O_S$ $\frac{d}{dt}O_I(t) = \frac{i}{\hbar}\left[H_0, O_I(t)\right]$

اختلال وابسته به زمان:

$$H = H_0 + V(t)$$

$$V_I(t) = e^{iH_0t/\hbar}\, V(t)\, e^{-iH_0t/\hbar}$$

$$|\psi,t\rangle_I = e^{iH_0t/\hbar}\, |\psi,t\rangle_S$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi,t\rangle_I = V_I(t)\,|\psi,t\rangle_I \qquad (1)$$

هدف: حل معادله (۱) با استفاده از سری Neumann

---

1) $H = H_0 + V(t)$

(۱) فرض می‌کنیم $V(t)$ نسبت به H_0 کوچک باشد؛

(۲) فرض بعدی اینکه $V(t)$ از یک زمان به بعد بر روی سیستم اثر می‌کند؛

$$V(t) = 0 \quad \text{for} \quad t \leq t_0$$

در نتیجه اینکه

a) مسئله غیراختلالی $\quad i\hbar \frac{d}{dt}|\psi^0,t\rangle = H_0 |\psi^0,t\rangle$

b) مسئله اختلالی $\quad i\hbar \frac{d}{dt}|\psi,t\rangle = \big(H_0 + V(t)\big)|\psi,t\rangle$

به طوریکه $\quad |\psi,t\rangle = |\psi,t^0\rangle \quad \text{for } t \leq t_0$

V در تصویر برهم‌کنش

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi,t\rangle_I = V_I(t)\,|\psi,t\rangle_I$$

$$i\hbar \int_{t_0}^{t} dt' \frac{d}{dt'}|\psi,t'\rangle_I = \int_{t_0}^{t} V_I(t')\,|\psi,t'\rangle_I\, dt'$$

$$i\hbar \big(|\psi,t\rangle_I - |\psi,t_0\rangle_I\big) = \int_{t_0}^{t} V_I(t')\,|\psi,t'\rangle_I\, dt'$$

$$|\psi,t\rangle_I = |\psi,t_0\rangle_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_I(t')\,|\psi,t'\rangle_I\, dt'$$

که این یک معادله انتگرالی است؛ حل آن به صورت مرتبه به مرتبه iterative انجام می‌شود.

$$|\psi,t\rangle_I = |\psi,t_0\rangle_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_I(t')\left(|\psi,t_0\rangle_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t'} V_I(t'')\,|\psi,t''\rangle_I\, dt''\right) dt'$$

$$|\psi,t\rangle_I = |\psi,t_0\rangle_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_I(t')\,|\psi,t_0\rangle_I$$
$$+ \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} dt'\, V_I(t') \int_{t_0}^{t'} V_I(t'')\,|\psi,t_0''\rangle_I\, dt'' + \dots$$

لذا ما از این روش استفاده می‌کنیم برای حل مسائل دیگر. فرض می‌کنیم می‌توانیم سری را بعد از جمله دوم قطع کنیم (truncation)

Dyson Series   سری دایسون

$$\frac{i}{\hbar}\frac{d}{dt}|\psi,t\rangle_I = V_I(t)\,|\psi,t\rangle_I$$

حل بشود $\rightarrow \quad |\psi,t\rangle_I = U(t,t_0)\,|\psi,t_0\rangle_I \qquad U(t_0,t_0)=1$

$$\rightarrow \boxed{\frac{i}{\hbar}\frac{d}{dt}U(t,t_0) = V_I(t)\,U(t,t_0)}$$

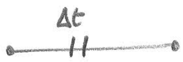
ادعا: حل این معادله دیفرانسیل منجر می‌شود به

$$U(t,t_0) = T\,\exp\left(\frac{-i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} V_I(t')\,dt'\right)$$

$$T\big(A(t_1)\,B(t_2)\big) = A(t_1)B(t_2)\,\theta(t_1-t_2) + \theta(t_2-t_1)\,B(t_2)A(t_1)$$

Time-ordering Operator or (T-ordered product)

اثبات:



$$\Delta t = \frac{t-t_0}{n}$$

$U(t_0,t_0)=1$

$n=1$ $\qquad \Delta t = t - t_0$

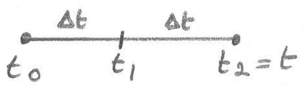
مطابق معادله

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)\Big|_{t_0} = V_I(t_0)\,U(t_0,t_0) = V_I(t_0)$$

$$i\hbar\,\frac{\big(U(t_0+\Delta t,t_0) - U(t_0,t_0)\big)}{\Delta t} = V_I(t_0)$$

$$\rightarrow U(t_0+\Delta t,t_0) = 1 - i\hbar^{-1}\Delta t\,V_I(t_0)$$

$n=2$



$\Delta t = t_2 - t_1 = t_1 - t_0 \qquad t_0 < t_1 < t_2$

$$\begin{aligned}
U(t_2,t_0) &= U(t_2,t_1)\,U(t_1,t_0)\\
&= U(t_1+\Delta t,t_1)\;U(t_0+\Delta t,t_0)\\
&= \big(1 - i\hbar^{-1}\Delta t\,V_I(t_1)\big)\big(1 - i\hbar^{-1}\Delta t\,V_I(t_0)\big)\\
&= 1 - i\hbar^{-1}\Delta t\,\big(V_I(t_1) + V_I(t_0)\big)\\
&\quad + (-i\hbar^{-1}\Delta t)^2\;V_I(t_1)\,V_I(t_0) \qquad t_1 > t_0
\end{aligned}$$

$n = N$ $\quad$ $t_0 \;\text{———}\; t = t_N$ $\qquad \Delta t = \dfrac{t - t_0}{N}$

$$
\begin{aligned}
U(t,t_0) &= U(t_N, t_{N-1}) \ldots U(t_1, t_0) \\
&= U(t_{N-1} + \Delta t, t_{N-1}) \ldots U(t_0 + \Delta t, t_0) \\
&= \left(1 - i\hbar^{-1} \Delta t\, V_I(t_{N-1})\right) \ldots \left(1 - i\hbar^{-1} \Delta t\, V_I(t_0)\right) \\
&= 1 + (-i\hbar^{-1}\Delta t) \sum_{n=0}^{N-1} V_I(t_n) + (-i\hbar^{-1}\Delta t)^2 \sum_{\substack{n,m=0 \\ n>m}}^{N-1} V_I(t_n) V_I(t_m) \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}
$$

$\Delta t = t_j - t_{j-1} \qquad j = 1, \ldots, N$

حالا حد $N \to \infty$ یا $\Delta t \to 0$ را بگیریم :

$$
U(t,t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} dt_1\, V_I(t_1) + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} dt_1' \int_{t_0}^{t_1'} dt_2'\, V_I(t_2') V_I(t_1')
$$

$$
+ \cdots + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^N \int_{t_0}^{t} dt_1' \int_{t_0}^{t_1'} dt_2' \ldots \int_{t_0}^{t_{N-1}'} dt_N'\, V_I(t_1') \ldots V_I(t_N')
$$

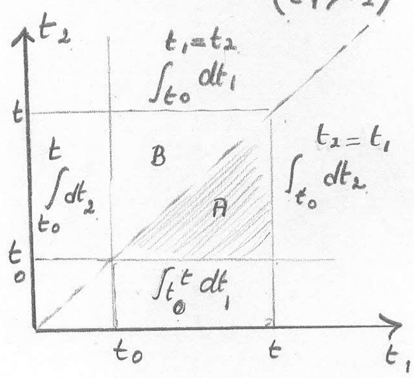
$t_1' > t_2' \qquad , \qquad t_1' > t_2' > \ldots > t_{N-1}' > t_N'$

a) $$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, V_I(t_1) V_I(t_2) = \frac{1}{2!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2\, T\left(V_I(t_2) V_I(t_1)\right)$$

$(t_1 > t_2)$

(A) $\displaystyle \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, V_I(t_1) V_I(t_2) \; ; \; t_1 > t_2$

(B) $\displaystyle \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1\, V_I(t_2) V_I(t_1) \; ; \; t_1 < t_2$



بطور کلی

$$
\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{N-1}} dt_N\, V_I(t_1) \ldots V_I(t_N)
= \frac{1}{N!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_N\, T\left(V_I(t_1) \ldots V_I(t_N)\right)
$$

$t_N < \cdots < t_1$

$$
\boxed{U(t,t_0) = T \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} V_I(t')\, dt'\right)}
$$