Lecture 18-QM_II (29/08/00)

Saturday, November 20, 2021 2:50 PM

$\psi(1 \ldots N)$ $\qquad 1 = (\vec{x}_1, \vec{\sigma}_1) \quad i = (\vec{x}_i, \vec{\sigma}_i)$

$$P_{ij}\, \psi(1 \quad i \ldots j \ldots N) = \zeta \quad \psi(1 \ldots i \ldots j \ldots N)$$

$$\zeta = \pm 1$$

بوزونها

فرمیونها

$|\lambda\rangle$

مثال $\quad |\lambda_1\rangle_{(1)} \quad |\lambda_2\rangle_{(2)} \ldots |\lambda_N\rangle_{(N)} = |\lambda_1 \ldots \lambda_N\rangle$

$$\langle (\vec{x}_1, \vec{\sigma}_1), (\vec{x}_2, \vec{\sigma}_2) \ldots | \lambda_1 \ldots \lambda_N \rangle = \psi(1 \ldots N)$$

بوزونها $\quad |\lambda_1 \ldots \lambda_N\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \ldots}\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} |\lambda_{P(1)}, \ldots \lambda_{P(N)}\rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ P(1) & P(2) & P(3) \end{pmatrix}$$

زوج
$$\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}\right.$$

فرد
$$\left\{\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}\right.$$

$${}_+\langle \lambda_1 \ldots \lambda_N | \lambda_1 \ldots \lambda_N \rangle_+ = 1$$

$|\lambda_\alpha\rangle$ تعداد اشغال در حالت $n_\alpha \qquad |\lambda_\alpha\rangle$

$\sum_\alpha n_\alpha = N$ تعداد کل ذرات

$$1 = (\vec{x}_1, \vec{\sigma}_1)$$

$|1 \; 1 \; 2\rangle \qquad n_1 = 2, \; n_2 = 1, \; n_3 = 0$

N ثابت

$$|\lambda_1 \ldots \lambda_N\rangle_+ \in \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(N)}$$

$|\lambda_1\rangle \in \mathcal{H}^{(1)}$ فضای هیلبرت تک ذره‌ای

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\lambda_1\rangle_{(1)}|\lambda_2\rangle_{(2)} + |\lambda_2\rangle_{(1)}|\lambda_1\rangle_{(2)}\right) = |\lambda_1 \lambda_2\rangle_+ \in \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_s^{(2)}$$

$$|n_1 = 5, n_2 = 0, \ldots n_s = 1, \ldots 0 \ldots\rangle$$

$$|5 \; 0 \; 0 \; 0 \; 1 \; 0 \ldots\rangle \in \mathcal{F} \qquad \text{Fock}$$

بوزونها $\quad \mathcal{F} = \mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}_s^{(2)} \oplus \mathcal{H}_s^{(3)} \oplus \ldots$ $\qquad$ فضای ∞ بعدی

$$\mathcal{H}^0 = |0 \; 0 \ldots \rangle$$

$$\mathcal{H}^{(1)} = |1 \; 0 \; 0 \ldots\rangle$$

$e^- e^+ \to e^- e^+$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad [a, a^+] = 1$$

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

عملگر خلق $\quad a_i^+ |\ldots n_i \ldots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\,|\ldots n_i + 1 \ldots\rangle$

عملگر فنا $\quad a_i |\ldots n_i \ldots\rangle = \sqrt{n_i}\,|\ldots n_i - 1 \ldots\rangle$

$$a_i^+ \qquad a_i$$

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij} \qquad \text{ادعا}$$

$i = j$

$$a_i a_i^+ |\ldots n_i \ldots\rangle = \sqrt{n_i + 1}\; a_i\, |\ldots n_i + 1 \ldots\rangle$$

$[a_i, a_j^{\dagger}] = \delta_{ij}$ بوزون

$i=j$

$$a_i a_i^{+} \,|\, \cdots\; n_i \;\cdots \rangle = \sqrt{n_i+1}\; a_i \,|\, \cdots\; n_i+1 \;\cdots \rangle$$
$$= \sqrt{(n_i+1)^2}\,|\, \cdots\; n_i \;\cdots \rangle$$
$$= (n_i+1)\,|\, \cdots\; n_i \;\cdots \rangle$$

$$a_i^{+} a_i \,|\, \cdots\; n_i \;\cdots \rangle = \sqrt{n_i}\; a_i^{+} \,|\, \cdots\; n_i-1 \;\cdots \rangle$$
$$= \sqrt{n_i\,(n_i-1+1)}\,|\, \cdots\; n_i \;\cdots \rangle$$
$$= n_i \,|\, \cdots\; n_i \;\cdots \rangle$$

$$\left(a_i a_i^{+} - a_i^{+} a_i\right) |\cdots\; n_i \cdots\rangle = (\cancel{n_i}+1-\cancel{n_i})\,|\cdots\; n_i \cdots\rangle$$

$[a_i, a_i^{+}] = 1$ $\qquad$ $[a_i, a_j^{+}] = 0 \quad i \neq j$

$a_i a_j^{+} - a_j^{+} a_i = 0$

$|0 \cdots\rangle = |0\rangle$ خلاء

$a_i |0 \cdots\rangle = 0$

$$a_i^{+} |0 \cdots \underset{\uparrow i}{0} \cdots\rangle = \sqrt{1}\,|0 \cdots 0\; \underset{\uparrow}{1}\; 0 \cdots\rangle$$

$$(a_i^{+})^2 |0 \cdots 0 \cdots\rangle = a_i^{+} |0 \cdots 1\underset{i}{0} \cdots\rangle = \sqrt{2}\,|0 \cdots 2\; 0 \cdots\rangle$$

$$(a_i^{+})^{n_i} |0 \cdots \underset{\uparrow}{0}\; 0 \cdots\rangle = \sqrt{n_i!}\,|0 \cdots n_i\; 0 \cdots\rangle$$

$$\boxed{|\underset{\uparrow}{n_1}\, n_2 \cdots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!\, n_2! \cdots}} (a_1^{+})^{n_1} (a_2^{+})^{n_2} \cdots |0\rangle}$$

عملگر شمارش $\hat{n}_i = a_i^{+} a_i$ $\qquad$ $\hat{n}_i |\cdots n_i \cdots\rangle = n_i |\cdots n_i \cdots\rangle$

بوزون $|\lambda_1 \cdots \lambda_N\rangle_+ =$ ضریب $\sum_{P \in S_N} |\lambda_{P(1)} \cdots \lambda_{P(N)}\rangle (+1)^P$ حالت های N فرمیون

فرمیون $$|\lambda_1 \cdots \lambda_N\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} (-1)^P |\lambda_{P(1)} \cdots \lambda_{P(N)}\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} |\lambda_1\rangle_{(1)} & |\lambda_2\rangle_{(1)} & \cdots & |\lambda_N\rangle_{(1)} \\ |\lambda_1\rangle_{(2)} & |\lambda_2\rangle_{(2)} & & |\lambda_N\rangle_{(2)} \\ \vdots & & \cdots & \\ |\lambda_1\rangle_{(N)} & |\lambda_2\rangle_{(N)} & & |\lambda_N\rangle_{(N)} \end{pmatrix}$$ ذره

Slater det.

حالت

$$= \frac{1}{\sqrt{2!}} \det \begin{pmatrix} |\lambda_1\rangle_{(1)} & |\lambda_2\rangle_{(1)} \\ |\lambda_1\rangle_{(2)} & |\lambda_2\rangle_{(2)} \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_1 \lambda_2\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{2!}} \left(|\lambda_1\rangle_{(1)} |\lambda_2\rangle_{(2)} - |\lambda_2\rangle_{(1)} |\lambda_1\rangle_{(2)} \right)$$

$|n_1\, n_2 \cdots\rangle \in \mathcal{F}$

بوزون $|5\;\; 0 \cdots\rangle$ $\qquad$ $n_i \geq 0$ $\qquad$ $\sum_i n_i = N$

فرمیون $\qquad |n_1, n_2 \dots\rangle \qquad n_i = 0,1$

$$(a_i^+)^2 = 0$$ اصل طرد Pauli

جبر عملگرهای خلق و فنای فرمیون با جبر عملگرهای خلق و فنای بوزون متفاوت است

$$[a_i, a_j^+]_- = \delta_{ij} \qquad \{a_i, a_j^+\} = \delta_{ij}$$
$$[a_i, a_j^+]_+$$

• ادعا $\qquad \{a_i^+, a_j^+\} = 0$

اثبات:
$$|\lambda_1\,\lambda_2 \dots \lambda_N\rangle_- = -\,|\lambda_2\,\lambda_1 \dots \lambda_N\rangle$$

$$a^+_{\lambda_\alpha}|0\rangle = |1\rangle = |\lambda_\alpha\rangle$$

$$a^+_{\lambda_1} a^+_{\lambda_2} \cdot\ a^+_{\lambda_N}|0\rangle = |\lambda_1\,\lambda_2 \dots \lambda_N\rangle_-$$
$$= -\,|\lambda_2\,\lambda_1 \dots \lambda_N\rangle_-$$
$$= -\,a^+_{\lambda_2} a^+_{\lambda_1} a^+_{\lambda_3} \dots a^+_{\lambda_N}|0\rangle$$

$$\{a^+_{\lambda_1}, a^+_{\lambda_2}\} = 0 \qquad a^+_{\lambda_1} a^+_{\lambda_2} = -\,a^+_{\lambda_2} a^+_{\lambda_1}$$
$$\{a^+_{\lambda_1}, a^+_{\lambda_2}\} = 0 \quad \blacksquare$$

$$\{a^+_{\lambda_1}, a^+_{\lambda_1}\} = 2(a^+_{\lambda_1})^2 = 0$$ اصل طرد Pauli $\qquad \lambda_1 = \lambda_2$

$$a_i^+|\dots n_i \dots\rangle = (1-n_i)\,(-1)^{\sum_{j<i} n_j}\,|\dots n_i+1 \dots\rangle$$

$n_i = 0,1$

$$a_3^+|\underbrace{\ }_{j=1}\ \underbrace{\ }_{j=2}\ \overset{3=i}{1}\ \dots\rangle = (1-n_3)\ |\dots \underbrace{n_3+1}_{1+1=2\ \times} \dots\rangle = 0$$

$1-1=0$ $\qquad$ خالی

$$a_3^+|\ \_\ \_\ \underset{n_3=0}{0}\ \dots\rangle = 1\ (-1)^{n_1+n_2}\ |\dots \underbrace{n_3+1}_{1}, \dots\rangle$$

$$a_3^+|0\,0\,0\dots\rangle = |0\,0\,1\dots\rangle$$
$$a_3^+|0\,1\,0\dots\rangle = (-1)^1|0\,1\,1\dots\rangle$$

$$[a_i^+, a_j^+] = 0$$
$$a_i^+ a_j^+ = a_j^+ a_i^+$$

$$\rightarrow a_3^+|0\,1\,0\dots\rangle = a_3^+ a_2^+|0\,0\,0\dots\rangle$$

$\{a_2^+, a_3^+\} = 0$
$$= -\,a_2^+ a_3^+|0\,0\,0\dots\rangle$$

$\{a_2^+, a_2^+\} = 0$

$(a_2^+)^2 = 0$
$$= -\,|0\,1\,1\dots\rangle$$

$$a_3^+|1\,1\,0\dots\rangle = +\,(-1)^{1+1}|1\,1\,1\dots\rangle$$

$$a_i|\dots n_i \dots\rangle = n_i\,(-1)^{\sum_{j<i} n_j}\,|\dots n_i-1 \dots\rangle$$

$i=j \quad \{a_i, a_j^+\} = \delta_{ij}$

$$a_i a_i^+ \; |\ldots n_i \ldots\rangle = a_i \; (1-n_i) \; (-1)^{\sum_{j<i} n_j} \; |\ldots n_i+1 \ldots\rangle$$

$$= (1+n_i)(1-n_i) \underbrace{\left((-1)^{\sum_j \cdots}\right)^2}_{+} |\ldots n_i \ldots\rangle$$

$$= (1-n_i^2) \; |\ldots n_i \ldots\rangle$$

$$\overset{n_i^2=n_i}{=} (1-n_i) \; |\ldots n_i \ldots\rangle$$

$$a_i^+ a_i \; |\ldots n_i \ldots\rangle = a_i^+ (n_i) \; (-1)^{\sum_{j<i} n_j} \; |\ldots n_i - 1 \ldots\rangle$$

$$= n_i \; (1 - n_i + 1) \; \left((-)^{\cdots}\right)^2 \; |\ldots n_i \ldots\rangle$$

$$= n_i \; (2-n_i) \; |\ldots n_i \ldots\rangle$$

$$= (2n_i - n_i) \; |\ldots n_i \ldots\rangle$$

$$= n_i \; |\ldots n_i \ldots\rangle$$

$$\{a_i, a_i^+\} \; |\ldots n_i \ldots\rangle = (1 - \cancel{n_i} + \cancel{n_i}) \; |\ldots n_i \ldots\rangle$$

$$= 1 \; |\ldots n_i \ldots\rangle$$

$$\{a_i, a_j^+\} = \delta_{ij}$$