ترکیب اسپین ها

خلاصه نتایج قبلی:

مثال ۱

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

$$\{\vec{S}_1^2, S_{1z} ; \vec{S}_2^2, S_{2z}\} \longrightarrow \{\vec{S}^2, S_z ; \vec{S}_1^2, \vec{S}_2^2\}$$

$$|s, m_s ; s_1, s_2\rangle = \sum_{m_{s_1}, m_{s_2}} C \; |s_1, m_{s_1}\rangle \otimes |s_2, m_{s_2}\rangle$$

با این قید $\quad m_s = m_{s_1} + m_{s_2} \Rightarrow m_{s_2} = m_s - m_{s_1}$

از این دو اسپین نیم

$$\boxed{\begin{array}{ll} s_1 = \frac{1}{2} & m_{s_1} = \pm\frac{1}{2} \\ s_2 = \frac{1}{2} & m_{s_2} = \pm\frac{1}{2} \end{array}}$$

نتیجه:

$$\boxed{\begin{array}{lll} & S = 0, 1 & \\ \text{for} & s = 0 & m_s = 0 \\ & s = 1 & m_s = \pm 1, 0 \end{array}}$$

$s = 0 \quad m_s = 0 \qquad |s = 0, m_s = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$ حالت تکتا

ترکیب پاد متقارن از اسپین بالا و پایین

$s = 1 \quad m_s = +1 \qquad |\uparrow\uparrow\rangle = |s = 1, m_s = 1\rangle$

$s = 1 \quad m_s = 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) = |1, 0\rangle$ ترکیب متقارن از اسپین بالا و پایین

$s = 1 \quad m_s = -1 \qquad |\downarrow\downarrow\rangle = |1, -1\rangle$

حالت های سه تایی

$$\mathcal{H}_{s_1} \otimes \mathcal{H}_{s_2} = \mathcal{H}_{s_1 - s_2} \oplus \mathcal{H}_{s_1 + s_2}$$ به زبان فضای برده

$$\mathcal{H}_{1/2} \otimes \mathcal{H}_{1/2} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$$

$$(\dim \mathcal{H}_{1/2})(\dim \mathcal{H}_{1/2}) = (\dim \mathcal{H}_0) + (\dim \mathcal{H}_1)$$

$$\left(2 \times \tfrac{1}{2} + 1\right)\left(2 \times \tfrac{1}{2} + 1\right) = (2 \times 0 + 1) + (2 \times 1 + 1)$$

$$\boxed{2 \otimes 2 = 1 \oplus 3}$$

دوتا $m_{s_1} = \pm\frac{1}{2}$ — دوتا $m_{s_2} = \pm\frac{1}{2}$ — حالت تکتا $m_s = 0$ — حالت سه تایی $m_s = \pm 1, 0$

مثال ۲

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$\{\vec{L}^2, L_z ; \vec{S}^2, S_z\} \longrightarrow \{\vec{J}^2, J_z ; \vec{L}^2, \vec{S}^2\}$$

$$|j, m_j ; l, s\rangle = \sum_{m_l, m_s} C \; |l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle$$

با این قید $\quad m_j = m_l + m_s \rightarrow m_l = m_j - m_s$

for $m_s = +\frac{1}{2} \quad m_l = m_j - \frac{1}{2}$

for $m_s = -\frac{1}{2} \quad m_l = m_j + \frac{1}{2}$

for $m_s = +\frac{1}{2}$	$m_\ell = m_j - \frac{1}{2}$
for $m_s = -\frac{1}{2}$	$m_\ell = m_j + \frac{1}{2}$

$$\boxed{|j, m_j\rangle = \alpha \, |\ell, m_j - \tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\uparrow\rangle + \beta \, |\ell, m_j + \tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\downarrow\rangle}$$

در حالت بالا که دیدیم

$$j = \ell - \frac{1}{2} \Rightarrow -(\ell - \tfrac{1}{2}) \leq m_j \leq \ell - \tfrac{1}{2}$$

$$j = \ell + \frac{1}{2} \Rightarrow -(\ell + \tfrac{1}{2}) \leq m_j \leq \ell + \tfrac{1}{2}$$

بعد از ترکیب

$$\text{تعداد } \# m_j = 2(\ell - \tfrac{1}{2}) + 1 + 2(\ell + \tfrac{1}{2}) + 1 = 2\ell + 2\ell + 2 = \boxed{4\ell + 2}$$

$$\boxed{|j = \ell \pm \tfrac{1}{2} \, ; m_j\rangle = \alpha_\pm \, |\ell, m_j - \tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\uparrow\rangle + \beta_\pm \, |\ell, m_j + \tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\downarrow\rangle}$$

قبل از ترکیب

$$\left.\begin{array}{ll} \ell & \# m_\ell = 2\ell + 1 \\ s & \# m_s = 2 \end{array}\right\} (2\ell+1)(2) = \boxed{4\ell + 2}$$

به زبان [illegible]

$$\mathcal{H}_\ell \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{H}_{\ell - \frac{1}{2} = j} \oplus \mathcal{H}_{\ell + \frac{1}{2} = j}$$

$$(\dim \mathcal{H}_\ell)(\dim \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}) = (\dim \mathcal{H}_{\ell - \frac{1}{2}}) + (\dim \mathcal{H}_{\ell + \frac{1}{2}})$$

$$(2\ell + 1)(2 \times \tfrac{1}{2} + 1) = \left(2(\ell - \tfrac{1}{2}) + 1\right) + \left(2(\ell + \tfrac{1}{2}) + 1\right)$$

$$(2\ell + 1)\, 2 = (2\ell) + (2\ell + 2)$$

$$4\ell + 2 = 4\ell + 2 \quad \checkmark$$

قبل از ترکیب (تعداد m_s) (تعداد m_ℓ) = تعداد m_j ها بعد از ترکیب

مثال ۳

$$\vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J}$$

$$\vec{J}_k^{\,2} \, |j_k, m_{j_k}\rangle = \hbar^2 j_k (j_k + 1) \, |j_k, m_{j_k}\rangle \qquad k = 1, 2$$

$$J_{kz} \, |j_k, m_{j_k}\rangle = \hbar m_{j_k} \, |j_k, m_{j_k}\rangle \qquad k = 1, 2$$

بعد از ترکیب

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{J}^{\,2} \, |j, m_j\rangle = \hbar^2 j (j+1) \, |j, m_j\rangle \\ J_z \, |j, m_j\rangle = \hbar m_j \, |j, m_j\rangle \end{array}}$$

سوال :

۱) m_j برحسب m_{j_1}, m_{j_2}

۲) j برحسب j_1 و j_2

۳) $|j, m_j\rangle$ ضرایب بسط

$$|j, m_j\rangle = \sum_{\substack{m_{j_1}, m_{j_2} \\ \text{قید}}} C \, |j_1, m_{j_1}\rangle \otimes |j_2, m_{j_2}\rangle$$

[illegible]

m_{j_1}, m_{j_2}

جمع

ادعا ۱ $\qquad m_j = m_{j_1} + m_{j_2}$

اثبات

$$J_z \, |j, m_j\rangle = \hbar m_j \, |j, m_j\rangle \qquad , \qquad J_z = J_{1z} + J_{2z}$$

$$\boxed{\langle j_1, m_{j_1} ; j_2, m_{j_2} | J_z | j, m_j\rangle = \hbar m_j \, \langle j_1, m_{j_1} ; j_2, m_{j_2} | j, m_j\rangle}$$

محاسبه :

با این نام‌گذاری که : $\quad |j_1, m_{j_1} ; j_2, m_{j_2}\rangle = |j_1, m_{j_1}\rangle \otimes |j_2, m_{j_2}\rangle$

سمت چپ :

$$\langle j_1, m_{j_1} ; j_2, m_{j_2} | J_{1z} + J_{2z} | j, m_j\rangle$$

$$= (\hbar m_{j_1} + \hbar m_{j_2}) \, \langle j_1, m_{j_1} ; j_2, m_{j_2} | j, m_j\rangle$$

سمت راست

$$= \hbar m_j \, \langle j_1, m_{j_1} ; j_2, m_{j_2} | j, m_j\rangle$$

q.e.d. $\qquad \boxed{m_j = m_{j_1} + m_{j_2}}$ $\qquad$ نتیجه دو طرف رابطه

ادعا ۲ $\qquad |j_1 - j_2| \leqslant j \leqslant j_1 + j_2$

با توجه به استدلال نوشته‌شده به نظر می‌رسد این ادعا درست است، چون با این انتخاب j ها تعداد m_j ها قبل از ترکیب اسپین‌ها و بعد از ترکیب اسپین‌ها مساوی خواهد بود.

$$\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} = \mathcal{H}_{j_1+j_2} \oplus \mathcal{H}_{j_1+j_2-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{j_1-j_2} \qquad j_1 > j_2$$

$$(\dim \mathcal{H}_{j_1})(\dim \mathcal{H}_{j_2}) = \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} \dim \mathcal{H}_j$$

$$(2j_1+1)(2j_2+1) = \boxed{\sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1)}$$

دو طرف رابطه برابرند

تعداد m_{j_1} ها $\qquad$ تعداد m_{j_2} ها $\qquad$ تعداد کل m_j ها

مثال $\qquad j_1 = 3 \quad , \quad j_2 = 2$

$$j_1 = 3 \Rightarrow \quad -3 \leqslant m_{j_1} \leqslant 3 \qquad \# m_{j_1} = 2\times3+1 = 7$$

$$j_2 = 2 \Rightarrow \quad -2 \leqslant m_{j_2} \leqslant 2 \qquad \# m_{j_2} = 2\times2+1 = 5$$

تعداد کل m_j ها باید $7\times5=35$ باشد. به عبارت دیگر باید محدوده j را طوری انتخاب کنیم که این اتفاق بیفتد.

در ادامه ابتدا حدسی می‌زنیم که به نتیجه درست نمی‌رسد

• دیدیم که $m_j = m_{j_1} + m_{j_2}$ و دیدیم که

$$-3 \leqslant m_{j_1} \leqslant 3$$
$$-2 \leqslant m_{j_2} \leqslant 2$$

$$\rightarrow \quad -5 \leqslant m_{j_1} + m_{j_2} \leqslant 5 \quad \rightarrow \quad \# m_j = 2\times5+1 = 11$$

این شمارش اشتباه است.

$$-2 \le m_{j_2} \le 2$$

$$\Longrightarrow \quad -5 \le \underbrace{m_{j_1} + m_{j_2}}_{=m_j} \le 5 \quad \Longrightarrow$$

$\# \; m_j = 2\times 5 + 1 = 11$

با این کار تعداد m_j ها 11 درمیاید که اشتباه است.

این شمارش اشتباه است.

$$\begin{cases} -3 \le m_{j_1} \le 3 \\ -2 \le m_{j_2} \le 2 \end{cases}$$

سؤال: مشکل چیست؟ چرا تناقض؟ ← وجود تبهگنی

$-5 \le m_j \le 5$	(m_{j_1}, m_{j_2})	تبهگنی
5	$(3,2)$	1
4	$(3,1)$ $(2,2)$ $\cancel{(1,3)}$ → این را نداریم چون $m_{j_2} \neq 3$	2
3	$(3,0)$ $(2,1)$ $(1,2)$	3
2	$(3,-1)$ $(2,0)$ $(1,1)$ $(0,2)$	4
1	$(3,-2)$ $(2,-1)$ $(1,0)$ $(0,1)$ $(-1,2)$	5
0	$(2,-2)$ $(1,-1)$ $(0,0)$ $(-1,1)$ $(-2,2)$, $\cancel{(-3,3)}$	5
-1	$(1,-2)$ $(0,-1)$ $(-1,0)$ $(-2,1)$ $(-3,2)$	5
-2	$(0,-2)$ $(-1,-1)$ $(-2,0)$ $(-3,1)$	4
-3	$(-3,0)$ $(-2,-1)$ $(-1,-2)$	3
-4	$(-3,-1)$ $(-2,-2)$	2
-5	$(-3,-2)$	1

جمع تبهگنی 35

و این همان
$$(2j_1+1)(2j_2+1) = (2\times 3+1)(2\times 2+1) = 7\times 5 = 35$$
است.

• حالا می‌توان حدس زد که اگر j ها را ادعا $3-2 \le j \le 3+2$ یعنی $1 \le j \le 5$
باشد می‌توان به همین تعداد از m_j رسید یا خیر؟

		تعداد m_j
$j=1$	$m_j = \pm 1, 0$	$2\times 1+1 = 3$
$j=2$	$m_j = \pm 2, \pm 1, 0$	$2\times 2+1 = 5$
$j=3$	$m_j = \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$	$2\times 3+1 = 7$
$j=4$	$m_j = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$	$2\times 4+1 = 9$
$j=5$	$m_j = \pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$	$2\times 5+1 = 11$

\# کل m_j ها 35

به بیان دیگر

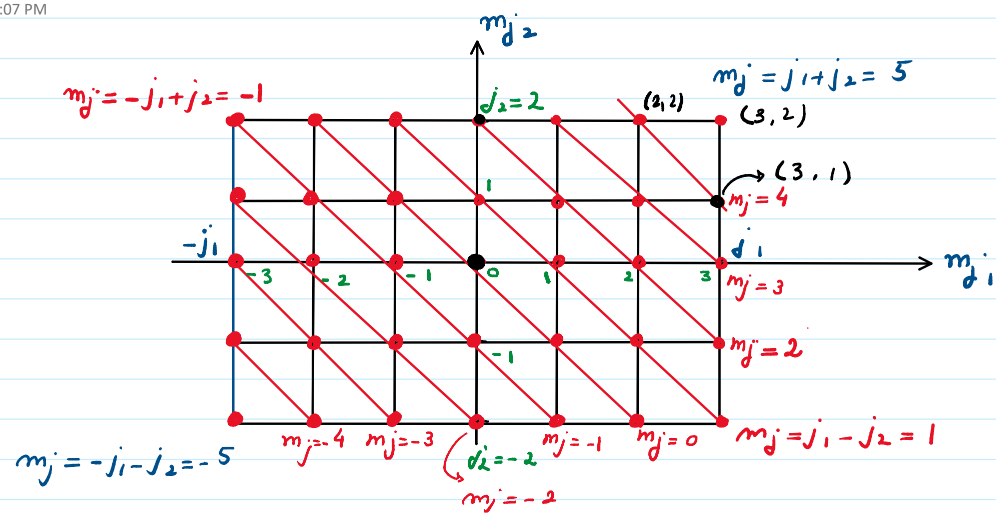
$$\mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \mathcal{H}_5$$

$$(2\times 3+1)\times(2\times 2+1) = (2\times 1+1) + (2\times 2+1) + (2\times 3+1) + (2\times 4+1) + (2\times 5+1)$$
$$7 \times 5 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11$$
$$35 = 35 \quad \checkmark \qquad q.e.d.$$

$$|j_1 - j_2| \le j \le j_1 + j_2$$

Saturday, October 23, 2021
2:07 PM

$j_1 = 3$
$j_2 = 2$



نکته : در فیزیک ذرات گاهی نیاز به ترکیب ۳ تکانه زاویه ای یا بیشتر داریم.

مثال ۱

$$j_1 = j_2 = j_3 = 1$$

$$H_1 \otimes H_1 \otimes H_1 = ?$$

این کار را دو تا دو تا انجام می‌دهیم.

ابتدا

$$H_1 \otimes H_1 = H_2 + H_1 + H_0$$

بعد

$$H_2 \otimes H_1 = H_1 + H_2 + H_3$$

H_1 باقیمانده

$$H_1 \otimes H_1 = H_0 + H_1 + H_2$$

$$H_0 \otimes H_1 = H_1$$

بعد فضاهای بوجود آمده را جمع می‌زنیم

$$H_1 \otimes H_1 \otimes H_1 = H_3 + 2H_2 + 3H_1 + H_0$$

حالا از هر طرف بُعدها را بدست میاریم و مقایسه می‌کنیم

$$(2\times1+1)(2\times1+1)(2\times1+1) = (2\times3+1) + 2(2\times2+1) + 3(2\times1+1) + (2\times0+1)$$

$$27 = 7 + 10 + 9 + 1$$

$$27 = 27 \checkmark$$

ترکیب سه H_1 به ما یک هفت تائی ، دو پنج تائی ، سه سه تائی و یک تک تائی می‌دهد

مثال ۲

$$H_{\frac{1}{2}} \otimes H_{\frac{1}{2}} \otimes H_{\frac{1}{2}} = ?$$

$H_{\frac{1}{2}}$ در ترکیب $\left\{ H_{\frac{1}{2}} \times H_{\frac{1}{2}} = H_1 + H_0 \right.$

ترکیب با H_1 باقیمانده $\left\{ H_1 \times H_{\frac{1}{2}} = H_{\frac{3}{2}} + H_{\frac{1}{2}} \right.$

ترکیب با $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ بدهند
$$\begin{cases} \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{H}_{\frac{3}{2}} + \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \\ \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

درمجموع
$$\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \times \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \times \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{H}_{\frac{3}{2}} + 2\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$$

بُعدها را تست کنیم
$$(2\times\tfrac{1}{2}+1)(2\times\tfrac{1}{2}+1)(2\times\tfrac{1}{2}+1) = (2\times\tfrac{3}{2}+1) + 2(2\times\tfrac{1}{2}+1)$$
$$2^3 = 4 + 2\times 2$$
$$8 = 4+4=8 \checkmark$$
$$\boxed{2\times 2\times 2 = 4+2+2}$$

نتیجه:

الف) یک چهارتایی quartet کاملاً متقارن

$$|\tfrac{3}{2},+\tfrac{3}{2}\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$$
$$|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\right)$$
$$|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\right)$$
$$|\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle = |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$$

ب) یک دوتایی doublet که تحت جابجایی ذره ۱، ۲ پادمتقارن است:

$$|\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\right)$$
$$|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle\right)$$

ج) یک دوتایی doublet که تحت جابجایی ذره ۲،۳ کاملاً پادمتقارن است

$$|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle)\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\right)$$
$$|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle)\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

توجه: دوتایی که تحت جابجایی ذره ۱ و ذره ۳ کاملاً پادمتقارن است ترکیب خطی دو doublet فوق است (مستقل نیست)

ضرایب Clebsch-Gordan (CG)

$$|j,m_j\rangle = \sum_{m_{j_1},m_{j_2}} C\, |j_1,m_{j_1}\rangle \otimes |j_2,m_{j_2}\rangle$$

قید $m_{j_2} = m_j - m_{j_1}$

جداول (CG)

$j_1 \times j_2$		j_1'	j_2'
		m_{j_1}	m_{j_2}
m_1	m_2	a	$-b$
m_1'	m_2'	c	d

روش استفاده از جدول

(A) $\quad |j_1' \; m_{j_1}\rangle = \sqrt{a}\; |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle + \sqrt{c}\; |j_1, m_1'\rangle \otimes |j_2, m_2'\rangle$

(B) $\quad |j_2' \; m_{j_2}\rangle = -\sqrt{b}\; |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle + \sqrt{d}\; |j_1, m_1'\rangle \otimes |j_2, m_2'\rangle$

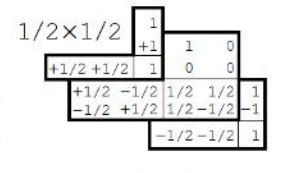
از ترکیب B , A

$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = \sqrt{a}\; |j_1', m_{j_1}\rangle - \sqrt{b}\; |j_2', m_{j_2}\rangle$

$|j_1, m_1'\rangle \otimes |j_2, m_2'\rangle = \sqrt{c}\; |j_1', m_{j_1}\rangle + \sqrt{d}\; |j_2', m_{j_2}\rangle$

$$\boxed{\begin{matrix} a+c=1 \\ b+d=1 \\ a+b=1 \\ c+d=1 \end{matrix}} \longrightarrow \begin{matrix} a=d \\ b=c \end{matrix}$$

خواص ضرایب



$|\uparrow\uparrow\rangle = |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle = |1,1\rangle$

$|\uparrow\downarrow\rangle = |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\; |1,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\; |0,0\rangle$

$|\downarrow\uparrow\rangle = |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\; |1,0\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\; |0,0\rangle$

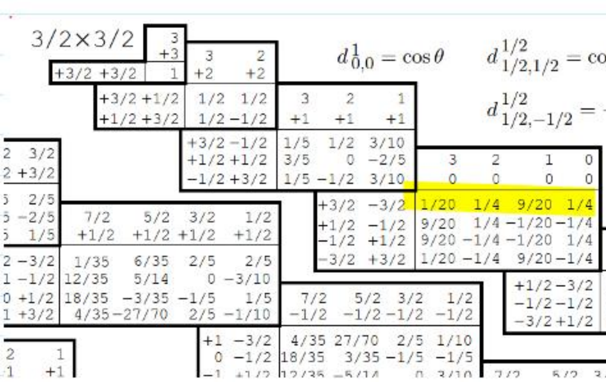
$|\downarrow\downarrow\rangle = |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = |1,-1\rangle$

$|1,+1\rangle = |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$

$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\; |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\; |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle$

$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\; |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\; |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle$

$|1,-1\rangle = |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$



$d^{1}_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{1}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}$

$d^{1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{1}_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$

$d^{1}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$

0	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
1	+3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

		7/2	5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2	−1/2
+1	−3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

2	1
1	+1
7	1/5

7/2	5/2	3/2
−3/2	−3/2	−3/2

+1/2	−3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2	−1/2	3/5	0	−2/5
−3/2	+1/2	1/5	−1/2	3/10

		3	2
		−2	−2
−1/2	−3/2	1/2	1/2
−3/2	−1/2	1/2	−1/2

		3
		−3
−3/2	−3/2	1

$$|\tfrac{3}{2},+\tfrac{3}{2}\rangle \otimes |\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{20}}\,|3,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{4}}\,|2,0\rangle + \sqrt{\tfrac{9}{20}}\,|1,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{4}}\,|0,0\rangle$$

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{4} + \frac{9}{20} + \frac{1}{4} = \frac{20}{20} = 1$$

جمع مجذور ضرایب

$$|2,1\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle + 0\,\cancel{|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle \otimes |\tfrac{3}{2},+\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

جمع مجذور ضرایب